Funktionale Programmierung

LVA 185.A03, VU 2.0, ECTS 3.0
WS 2020/2021

(Stand: 18.01.2021)

Jens Knoop

Technische Universität Wien
Information Systems Engineering
Compilers and Languages

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Inhaltsverzeichnis

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Inhaltsverzeichnis (1)

Teil I: Einführung

- Kap. 1: Motivation
  - 1.1 Ein Beispiel sagt (oft) mehr als 1000 Worte
    - 1.1.1 Zehn Beispiele
    - 1.1.2 Programme auswerten
    - 1.1.3 Programme finden
  - 1.2 Warum funktionale Programmierung? Warum mit Haskell?
    - 1.2.1 Warum funktionale Programmierung?
    - 1.2.2 Imperative vs. funktionale Programmierung
    - 1.2.3 Von imperativer zu funktionaler Programmierung
    - 1.2.4 Funktionale Programmierung: Stärken, Schwächen
    - 1.2.5 Warum funktionale Programmierung mit Haskell?
    - 1.2.6 Erste Schritte in Haskell: Gewöhnliche, literate Haskell-Skripte
  - 1.3 Nützliche Werkzeuge für Haskell: Hugs, GHC, Hoogle, Hayoo, Leksah
  - 1.4 Leseempfehlungen

Inhaltsverzeichnis (2)

Teil II: Grundlagen

- Kap. 2: Vordefnierte Datentypen
  - 2.1 Unstrukturierte, elementare Datentypen
    - 2.1.1 Ganze Zahlen
    - 2.1.2 Gleitkommazahlen
    - 2.1.3 Wahrheitswerte
    - 2.1.4 Zeichenwerte
  - 2.2 Strukturierte Datentypen
    - 2.2.1 Tupel
    - 2.2.2 Listen
    - 2.2.3 Zeichenreihen
  - 2.3 Leseempfehlungen
- Kap. 3: Funktionen
  - 3.1 Definition, Schreibweisen, Sprachkonstrukte
  - 3.2 Funktionssignaturen, Funktionsterme, Funktionsstelligkeiten
  - 3.3 Curryfizierte, uncurryfizierte Funktionen

Inhaltsverzeichnis (3)

- Kap. 3: Funktionen (fgs.)
  - 3.4 Operatoren, Präfix- und Infixverwendung
  - 3.5 Operatorabschnitte
  - 3.6 Angemessene, unangemessene Funktionsdefinitionen
  - 3.7 Funktions- und Programmformatierung, Abseitsregel
  - 3.8 Leseempfehlungen
- Kap. 4: Typsynonyme, Neue Typen, Typklassen
  - 4.1 Typsynonyme
    - 4.1.1 Motivation
    - 4.1.2 Typsynonyme
    - 4.1.3 Tupeltypsynonyme und Selektorfunktionen
    - 4.1.4 Weitere Beispiele
    - 4.1.5 Zusammenfassung
  - 4.2 Neue Typen
    - 4.2.1 Motivation
    - 4.2.2 Neue Typen
    - 4.2.3 Typsicherheit erreicht

Inhaltsverzeichnis (4)

- Kap. 4: Typsynonyme, Neue Typen, Typklassen (fgs.)
  - 4.3 Typklassen
    - 4.3.1 Motivation
    - 4.3.2 Vordefinierte Typklassen
    - 4.3.3 Instanzbildung für Typklassen
    - 4.3.4 Automatische Instanzbildung
    - 4.3.5 Selbstdefinierte Typklassen
    - 4.3.6 Zusammenfassung
  - 4.4 Leseempfehlungen
- Kap. 5: Algebraische Datentypdeklarationen
  - 5.1 Überblick, Orientierung
  - 5.2 Algebraische Datentypen
    - 5.2.1 Aufzählungstypen
    - 5.2.2 Produkttypen
    - 5.2.3 Summentypen
    - 5.2.4 Allgemeines Muster
    - 5.2.5 Zusammenfassung
  - 5.3 Funktionen auf algebraischen Datentypen

Inhaltsverzeichnis (5)

- Kap. 5: Datentypdeklarationen (fgs.)
  - 5.4 Feldsyntax
  - 5.5 Zusammenfassung, Anwendungshinweise
    - 5.5.1 Faustregeln
    - 5.5.2 Produkttypen vs. Tupeltypen
    - 5.5.3 Typsynonyme vs. neue Typen
    - 5.5.4 Auf einen Blick
  - 5.6 Leseempfehlungen
- Kap. 6: Muster und mehr
  - 6.1 Muster, Musterpassung
    - 6.1.1 Muster für Werte elementarer Datentypen
    - 6.1.2 Muster für Werte von Tupeltypen
    - 6.1.3 Muster für Werte von Listentypen
    - 6.1.4 Muster für Werte algebraischer Datentypen
    - 6.1.5 Das als-Muster
    - 6.1.6 Zusammenfassung
  - 6.2 Listenkomprehension
  - 6.3 Konstruktoren, Operatoren
  - 6.4 Leseempfehlungen

Inhaltsverzeichnis (6)

Teil III: Applikative Programmierung

- Kap. 7: Rekursion
  - 7.1 Motivation
    - 7.1.1 Schnelles Sortieren, Quicksort
    - 7.1.2 Türme von Hanoi
  - 7.2 Rekursionstypen
    - 7.2.1 Mikroskopische Ebene
    - 7.2.2 Makroskopische Ebene
    - 7.2.3 Eleganz und Effizienz, Effizienzfallen
  - 7.3 Aufrufgraphen
  - 7.4 Komplexität, Komplexitätsklassen
  - 7.5 Leseempfehlungen
- Kap. 8: Auswertung einfacher Ausdrücke
  - 8.1 Auswertung von Ausdrücken ohne Funktionsterme
  - 8.2 Auswertung einfacher Ausdrücke mit Funktionstermen
  - 8.3 Zusammenfassung
  - 8.4 Leseempfehlungen

Inhaltsverzeichnis (7)

- Kap. 9: Programmentwicklung, Programmverstehen
  - 9.1 Programmentwicklung
  - 9.2 Programmverstehen
  - 9.3 Leseempfehlungen

Teil IV Funktionale Programmierung

- Kap. 10: Funktionen höherer Ordnung
  - 10.1 Motivation
    - 10.1.1 Beispiele vordefinierter Funktionale
    - 10.1.2 Beispiele selbstdefinierter Funktionale
    - 10.1.3 Beispiele aus der Mathematik
    - 10.1.4 Beispiele aus anderen Informatikbereichen
  - 10.2 Funktionale Abstraktion
    - 10.2.1 Funktionale Abstraktion 1. Stufe
    - 10.2.2 Funktionale Abstraktion höherer Stufe
    - 10.2.3 Zusammenfassung
  - 10.3 Funktionen als Argument
    - 10.3.1 Beispiele
    - 10.3.2 Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis (8)

- Kap. 10: Funktionen höherer Ordnung (fgs.)
  - 10.4 Funktionen als Resultat
    - 10.4.1 Beispiele
    - 10.4.2 Methoden 1 bis 6
    - 10.4.3 Zusammenfassung
  - 10.5 Vordefinierte Funktionale auf Listen
    - 10.5.1 Transformieren: Das Funktional `map`
    - 10.5.2 Filtern: Das Funktional `filter`
    - 10.5.3 Aggregieren: Die Funktionale `foldl`, `foldr`
  - 10.6 Appplikative vs. funktionale Berechnungsweise: Ein Bsp.
  - 10.7 Zusammenfassung
  - 10.8 Leseempfehlungen
- Kap. 11: Polymorphie
  - 11.1 Motivation
  - 11.2 Polymorphie auf Datentypen
    - 11.2.1 Polymorphe algebraische Datentypen
    - 11.2.2 Polymorphe neue Typen
    - 11.2.3 Polymorphe Typsynonyme
    - 11.2.4 Zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis (9)

- Kap. 11: Polymorphie (fgs.)
  - 11.3 Parametrische Polymorphie auf Funktionen
    - 11.3.1 Vordefinierte parametrisch polymorphe Funktionen
    - 11.3.2 Selbstdefinierte parametrisch polymorphe Funktionen
    - 11.3.3 Zusammenfassung
  - 11.4 *Ad hoc* Polymorphie auf Funktionen
    - 11.4.1 Überladene Funktionen vordefinierter Typklassen
    - 11.4.2 Überladene Funktionen selbstdefinierter Typklassen
    - 11.4.3 Vererben, erben, überschreiben
    - 11.4.4 Automatische Typklasseninstanzbildung
    - 11.4.5 Grenzen des Überladens
    - 11.4.6 Zusammenfassung
  - 11.5 Parametrische Polymorphie vs. *ad hoc* Polymorphie
  - 11.6 Zusammenfassung
  - 11.7 Leseempfehlungen

Inhaltsverzeichnis (10)

Teil V: Fundierung funktionaler Programmierung

- Kap. 12: λ-Kalkül
  - 12.1 Motivation
  - 12.2 Syntax des reinen λ-Kalküls
  - 12.3 Semantik des reinen λ-Kalküls
    - 12.3.1 Syntaktische Substitution
    - 12.3.2 Konversionsregeln
    - 12.3.3 Reduktionsfolgen
    - 12.3.4 Normalformen
    - 12.3.5 Semantik von λ-Ausdrücken
    - 12.3.6 Rekursion vs. Y-Kombinator
  - 12.4 Angewandte λ-Kalküle
  - 12.5 Zusammenfassung
  - 12.6 Leseempfehlungen

Inhaltsverzeichnis (11)

- Kap. 13: Auswertungsordnungen
  - 13.1 Überblick, Orientierung
  - 13.2 Applikative, normale Funktionstermauswertung
    - 13.2.1 Applikative Funktionstermauswertung
    - 13.2.2 Normale Funktionstermauswertung
    - 13.2.3 Beispiele
  - 13.3 Linksapplikative, linksnormale Auswertung
  - 13.4 Späte, faule Auswertung: Eine Frage d. Implementierung
  - 13.5 Zusätzliche Charakterisierungen der Auswertungsordnungen
    - 13.5.1 Über Parameterübergabemechanismen
    - 13.5.2 Über Auswertungspositionen
    - 13.5.3 Über Argumentauswertungshäufigkeit
    - 13.5.4 Über Definiertheitszusammenhänge
    - 13.5.5 Aliase applikativer, normaler Auswertung

Inhaltsverzeichnis (12)

- Kap. 13: Auswertungsordnungen (fgs.)
  - 13.6 Frühe oder späte Auswertung? Eine Standpunktfrage
    - 13.6.1 Frühe oder späte Auswertung: Vor- und Nachteile
    - 13.6.2 Frühe oder späte Auswertung: Welche soll ich nehmen?
  - 13.7 Früh(artig)e und späte Auswertung in Haskell
  - 13.8 Betrachtungen zu Namen und Bezeichnungen
  - 13.9 Leseempfehlungen
- Kap. 14: Typprüfung, Typinferenz
  - 14.1 Motivation
  - 14.2 Monomorphe Typprüfung
  - 14.3 Polymorphe Typprüfung
  - 14.3 Polymorphe Typprüfung mit Typklassen
  - 14.5 Typsysteme, Typinferenz
  - 14.6 Zusammenfassung
  - 14.7 Leseempfehlungen

Inhaltsverzeichnis (13)

Teil VI: Weiterführende Konzepte

- Kap. 15: Interaktive Programme: Ein-/Ausgabe
  - 15.1 Motivation
    - 15.1.1 Problem und Ziel
    - 15.1.2 Herausforderung
    - 15.1.3 Warum (naive) Einfachheit versagt
  - 15.2 Haskells Lösung
    - 15.2.1 Konzeption und Umsetzung
    - 15.2.2 Aktionen
    - 15.2.3 Komposition von Aktionen
    - 15.2.4 Zur Sonderstellung des Typs `(IO a)`
  - 15.3 E/A-Primitive für Bildschirm- und Datei-Ein-/Ausgabe
  - 15.4 Syntaktischer Zucker: Die do-Notation
  - 15.5 E/A-Programmbeispiele
    - 15.5.1 Dialog- und Interaktionsprogramme
    - 15.5.2 Rekursive E/A-Programme
    - 15.5.3 Iterativartige E/A-Programme
    - 15.5.4 'Iteration' vs. Rekursion
    - 15.5.5 Subtiles, Randbemerkung

Inhaltsverzeichnis (14)

- Kap. 15: Interaktive Programme: Ein-/Ausgabe (fgs.)
  - 15.6 Zusammenfassung
  - 15.7 Leseempfehlungen
- Kap. 16: Robuste Programme: Fehlerbehandlung
  - 16.1 Überblick, Orientierung
  - 16.2 Panikmodus
  - 16.3 Auffangwerte
  - 16.4 Fehlertypen, Fehlerwerte, Fehlerfunktionen
  - 16.5 Leseempfehlungen
- Kap. 17: Programmierung im Großen: Module
  - 17.1 Überblick, Orientierung
  - 17.2 Ziele guter Modularisierung
  - 17.3 Haskells Modulkonzept
    - 17.3.1 Import
    - 17.3.2 Export
    - 17.3.3 Reexport
    - 17.3.4 Namenskonflikte, Umbenennungen, Konventionen

Inhaltsverzeichnis (15)

- Kap. 17: Programmierung im Großen: Module (fgs.)
  - 17.4 Modul-Anwendung: Abstrakte Datentypen
  - 17.5 Zusammenfassung
  - 17.6 Leseempfehlungen
- Kap. 18: Allgemeine und fkt. Programmierprinzipien
  - 18.1 Überblick, Orientierung
  - 18.2 Reflektives Programmieren
  - 18.3 Kapseln algorithmischen Vorgehens
  - 18.4 Problemorientiertes Modularisieren
  - 18.5 Leseempfehlungen

Teil VII: Abschluss

- Kap. 19: Rückschau, Ausschau
  - 19.1 Rückschau, Rückblick
  - 19.2 Ausschau, Ausblick
  - 19.3 Leseempfehlungen
- Literaturverzeichnis

Inhaltsverzeichnis (16)

Anhänge

- A Schlaglichter: Imperative vs. fkt. Programmierung
  - A.1 Programmatischer Kern
  - A.2 Namensvereinbarungen
  - A.3 Operanden und Werte von Ausdrücken
  - A.4 Funktionen u. Polymorphie: Erstrangige Sprachelemente
  - A.5 Imperative vs. funktionale Programme
  - A.6 Wertzuweisung vs. Wertvereinbarung
  - A.7 Selbstbezügliche Wertzuweisungen, Wertvereinbarungen
  - A.8 Problem- und Lösungssicht: Imperativ vs. funktional
  - A.9 Welcher Problemlösungstyp bin ich?
  - A.10 Leseempfehlungen

Inhaltsverzeichnis (17)

- B Formale Rechenmodelle
  - B.1 Turing-Maschinen
  - B.2 Markov-Algorithmen
  - B.3 Primitiv-rekursive Funktionen
  - B.4 μ-rekursive Funktionen
  - B.5 Leseempfehlungen
- C Ausgewählte andere funktionale Sprachen
  - C.1 ML
  - C.2 Lisp
  - C.3 APL
  - C.4 Leseempfehlungen
- D Datentypen in Pascal
  - D.1 Pascals Typvarietäten
  - D.2 Leseempfehlungen
- E Implementierungsaspekte
- F Hinweise zu den Leistungsnachweisen
  - F.1 Zu den 7 Übungsangaben
  - F.2 Zu den 3 schriftlichen Tests

Teil I

Einführung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Das leere Haskell-Programm

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Das leere Haskell-Programm: Mehr als nichts!

...bereits das leere Haskell-Programm bietet

Taschenrechnerfunktionalität:

```
>hugs
Main>:load leeresHaskellProgramm.hs
Main>2+3
5
Main>abs (5-12)
7
Main>sqrt 121
11.0
Main>abs (-5) * 6 + 3 <= 2^3 * (4 + round 3.14)
True
Main>sin 0
0.0
Main>cos 0
1.0
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Das leere Haskell-Programm: Mehr als nichts!

...und mehr:

```
Main>True && False
False
Main>not (True && False)
True
Main>"Funktionale" ++ " " ++ "Programmierung"
"Funktionale Programmierung"
Main>length "Funktionale Programmierung"
26
Main>[1..12]
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
Main>[1,4..12]
[1,4,7,10]
Main>length [10..20]
11
Main>[ n | n <- [-6..8], mod n 2 == 0 ]
[-6,-4,-2,0,2,4,6,8]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Überblick

Funktionale Programmierung, funktionale Programmierung in Haskell

1.1 Ein Beispiel sagt (oft) mehr als 1000 Worte

1.2 Warum funktionale Programmierung? Warum mit Haskell?

1.3 Nützliche Werkzeuge für Haskell: Hugs, GHC, GHCi, Hoogle, Hayoo, Leksah

1.4 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Anmerkung: Einige Begriffe werden in diesem Kapitel im Vorgriff angerissen und erst im Lauf der Vorlesung genau geklärt!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 1.1

Ein Beispiel sagt (oft) mehr als 1000 Worte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Nichts ist schwerer zu befolgen
als ein gutes Beispiel.

Mark Twain (1835-1910)
amerik. Schriftsteller

...deshalb:

Kapitel 1.1.1

Zehn Beispiele

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Zehn Beispiele

Longum iter est per praecepta, breve et efficax per exempla.
Lang ist der Weg über Belehrungen,
kurz und wirkungsvoll durch Beispiele.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller

1. *Hello, World!*
2. !: Die Fakultätsfunktion
3. Euklidischer Algorithmus (größter gemeinsamer Teiler)
4. Gerade/ungerade-Test für ganze Zahlen
5. Längenberechnung von Listen
6. Umkehren von Zeichenreihen
7. Transformieren von Listen
8. Addieren von Zahlen
9. Binomialkoeffizientenberechnung
10. Das Sieb des Eratosthenes (Primzahlberechnung)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

1) Hello, World!

```
main = putStrLn "Hello, World!"
```

...ein Beispiel für ein Programm mit Ein-/Ausgabeoperation.

Die Deklaration von `putStrLn`, nicht gänzlich selbsterklärend:

```
putStrLn :: String -> IO ()
putStrLn "Hello, World!"
```

Allerdings: Die Java-Entsprechung

```
class HelloWorld {
  public static void main (String[] args) {
    System.out.println("Hello, World!"); } }
```

...bedarf auch einer weiter ausholenden Erläuterung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

2) !: Die Fakultätsfunktion (i)

$$! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}.\; n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n - 1)
```

...ein Beispiel für eine rekursive Funktionsdefinition.

Aufrufe:

```
fac 0 ->> 1    fac 3 ->> 6      fac 6  ->> 720
fac 1 ->> 1    fac 5 ->> 120    fac 10 ->> 3.628.800
```

Lies: "Die Auswertung des Ausdrucks/Aufrufs `fac 5` liefert den Wert `120`; der Ausdruck/Aufruf `fac 5` hat den Wert `120`."

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

2) !: Die Fakultätsfunktion (ii)

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n - 1)
```

Funktionale Programmierung mag es kurz und knackig, prägnant und konzis, ohne kryptisch zu sein. Auch Haskell hat hierfür ein Angebot.

Alternative Schreibweise:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
  | n == 0    = 1                    (| für (oder) wenn)
  | otherwise = n * fac (n - 1)      (otherwise ->> True)

fac :: Integer -> Integer      (Diese Variante nur zur
fac n                                Illustration von |)
  | n == 0 || n == 1 = 1          ((||) logisches oder)
  | n == 2           = 2
  | otherwise        = n * fac (n - 1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

2) !: Die Fakultätsfunktion (iii)

Eine zweite weitere Schreibweise, musterbasiert:

```
fac :: Integer -> Integer
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n - 1)
```

Weitere alternative Implementierungen:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = foldl (*) 1 [1..n]      ([1..3] ->> [1,2,3],
                                 [1..0] ->> [],
                 foldl (*) 1 [1..0] ->> foldl (*) 1 [] ->> 1)
```

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = product [1..n]          (product = foldl (*) 1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

2) !: Die Fakultätsfunktion (iv)

Zwei einfache Formen der Fehlerbehandlung:

```
fac′ :: Integer -> Integer
fac′ n
 | n == 0     = 1
 | n > 0      = n * fac′ (n - 1)
 | otherwise = error "Arg. unzulässig"  (sog. Panikmodus)

fac″ :: Integer -> Integer
fac″ n
 | n == 0     = 1
 | n > 0      = n * fac″ (n - 1)
 | otherwise = n                  (sog. Auffangwertrückgabe)
```

Aufrufe:

```
fac′ 5     ->> 120                 fac″ 5     ->> 120
fac′ 0     ->> 1                   fac″ 0     ->> 1
fac′ (-5) ->> "Arg. unzulässig"    fac″ (-5) ->> -5
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Exkurs: Fkt. vs. imperative Fallunterscheid. (i)

Vergleiche folgende funktionale und imperative Implementierungen der Fakultätsfunktion:

Funktional, hier in Haskell:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
```

Imperativ, hier in Pascal:

```
FUNCTION fac (n: integer): integer;
BEGIN
  IF n=0 THEN fac := 1 ELSE fac := n*fac(n-1)
END;
```

Beachte: Trotz der äußerlichen Ähnlichkeit sind die funktionale und imperative Fallunterscheidung, die in beiden Fällen die Fakultätsfunktion definieren, konzeptuell äußerst verschieden!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Exkurs: Fkt. vs. imperative Fallunterscheid. (ii)

Die Fallunterscheidung 'if-then-else' im Vergleich:

Funktional:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
```

Ausdruck *Ausdruck* *Ausdruck* — *Ausdruck*

Imperativ:

```
FUNCTION fac (n: integer): integer;
BEGIN IF n=0 THEN fac := 1 ELSE fac := n*fac(n-1) END;
```

Ausdruck *Ausdruck* *Ausdruck*

Anweisung *Anweisung* — *Anweisung*

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Exkurs: Fkt. vs. imperative Fallunterscheid. (iii)

Die Fallunterscheidung 'if-then-else':

- Funktional: Die Fallunterscheidung ist ein Ausdruck. Ihre Bedeutung (Semantik) ist ein Wert.
- Imperativ: Die Fallunterscheidung ist eine Anweisung. Ihre Bedeutung (Semantik) ist eine Zustandstransformation, eine Belegung von Variablen mit (neuen) Werten.

Dieser Unterschied in Konzept u. Bedeutung ist fundamental.

- 'if-then-else' funktional $\neq$ 'if-then-else' imperativ

...es ist wichtig, sich diesen Unterschied klarzumachen und zu verinnerlichen (s.a. Kap. 1.2.2, Kap. 1.2.3, Anh. A.1).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

3) Euklidischer Algorithmus (3. Jhdt. v. Chr.)

...zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 0$, $n > 0$:

```
ggt :: Int -> Int -> Int  (Ganzz.-Typ, beschränkt)
ggt m n
  | n == 0 = m
  | n > 0  = ggt n (mod m n)

mod :: Int -> Int -> Int
mod m n
  | m < n  = m
  | m >= n = mod (m-n) n
```

...ein Beispiel für ein hierarchisches System von Funktionen.

Aufrufe:

```
ggt 25 15 ->> 5   ggt 48 60 ->> 12   mod 8 3 ->> 2
ggt 28 60 ->> 4   ggt 60 40 ->> 20   mod 9 3 ->> 0
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

4) Gerade/ungerade-Test für ganze Zahlen

```
isEven :: Integer -> Bool
isEven n
  | n == 0 = True
  | n > 0  = isOdd (n-1)
  | n < 0  = isOdd (n+1)

isOdd :: Integer -> Bool
isOdd n
  | n == 0 = False
  | n > 0  = isEven (n-1)
  | n < 0  = isEven (n+1)
```

...ein Beispiel für ein System wechselweise (oder indirekt) rekursiver Funktionen.

Aufrufe:

```
isEven 6    ->> True        isEven 9    ->> False
isOdd 6     ->> False       isOdd 9     ->> True
isOdd (-5)  ->> True        isEven (-8) ->> True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

5) Längenberechnung von Listen

```
data [a] = []              (Informell: Datentypspez.
         | (a:[a])          für Listen, sprachintern
                                vordefiniert)

length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (x:xs) = 1 + length xs
```

...ein Bsp. für eine parametrisch polymorphe Fkt. auf Listen.

Aufrufe:

```
length [2,4,6,8,10,12] ->> 6
length [(2,4),(6,8),(10,12)] ->> 3
length [(2,6),(8,10,12)] ->> 2
length ["Fkt.","Prog.","macht","Spass"] ->> 4
length [‘a‘,‘b‘,‘c‘] ->> 3
length [isOdd,isEven,isEven,isOdd,isOdd] ->> 5
length [] ->> 0
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

6) Umkehren von Zeichenreihen

```
type Zeichenreihe = [Char]                    (Typsynonym)
revertiere :: Zeichenreihe -> Zeichenreihe
revertiere ""     = ""     ("" leere Zeichenreihe)
revertiere (z:zs) = (revertiere zs) ++ [z]
```

++ *Listenkonkatenator*

...ein Bsp. für eine Funktion über selbstgewähltem sprechenden Typnamen, Zeichenreihe, statt [Char], list of characters, statt:

```
revertiere :: [Char] -> [Char]
```

Aufrufe:

```
revertiere ""           ->> ""
revertiere "stressed"   ->> "desserts"
revertiere "desserts"   ->> "stressed"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

7) Transformieren von Listen

...durch Anwendung einer Fkt. auf alle Elemente einer Liste:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]        (Fkt. als Arg.)
map _ [] = []
map f (x:xs) = (f x) : map f xs
```

Liste mit Kopf `x` *u. Rest* `xs`

`:` *sog. Listenkonstruktor*

...ein Beispiel für eine Funktion höherer Ordnung, für Funktionen als erstrangige Sprachelemente (engl. first class citizens).

Aufrufe:

```
map (2*) [1,2,3,4,5] ->> [2,4,6,8,10]
map (\x -> x*x) [1,2,3,4,5] ->> [1,4,9,16,25]
map (>3) [2,3,4,5] ->> [False,False,True,True]
map isEven [2,3,4,5] ->> [True,False,True,False]
map length ["functional","programming","is","fun"]
                                    ->> [10,11,2,3]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

8) Addieren von Zahlen

```
(+) :: Num a => a -> a -> a   (Num sog. Typklasse)
```

...ein Beispiel für eine überladene Funktion.

Aufrufe:

```
(+) 2 3      ->> 5       (+ auf ganzen Z., Präfixop.)
2 + 3        ->> 5         (+ als Infixop. auf g.Z.)
(+) 2.1 1.4 ->> 3.5 (+ auf Gleitkommaz., Präfixop.)
2.1 + 1.4    ->> 3.5         (+ als Infixop. auf Gkz)
(+) 7.81 2   ->> 9.81    (automatische Typanpassung)
```

```
((+) 1) :: Integer -> Integer  (Inkrementfunktion)
```

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+) 1          (vgl. die Funktion '(binom 49)')
```

```
inc' :: Integer -> Integer
inc' = (+1)        ((+1) ein sog. Operatorabschnitt)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

9) Binomialkoeffizientenberechnung (i)

...geben die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n Elementen ohne Wiederholung an:

$$\binom{\cdot}{\cdot} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\forall\, n, k \in \mathbb{N}.\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k) = div (fac n) (fac k * fac (n-k))
```

...ein Beispiel für eine musterbasierte Funktionsdefinition mit hierarchischer Abstützung auf eine andere Funktion ('Hilfsfunktion'), hier die Fakultätsfunktion.

Aufrufe:

```
binom' (49,6) ->> 13.983.816
binom' (45,6) ->>  8.145.060
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

9) Binomialkoeffizientenberechnung (ii)

Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

```
binom'' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom'' (n,k)
  | k==0 || n==k = 1
  | otherwise    = binom'' (n-1,k-1) + binom'' (n-1,k)
```

...ein Beispiel für eine musterbasierte (kaskaden- oder baum-artig-) rekursive Funktionsdefinition.

Aufrufe:

```
binom'' (49,6) ->> 13.983.816
binom'' (45,6) ->>  8.145.060
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

9) Binomialkoeffizientenberechnung (iii)

Uncurryfiziert

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k) = div (fac n) (fac k * fac (n-k))
```

Curryfiziert

```
binom :: Integer -> (Integer -> Integer)
binom n k  = div (fac n) (fac k * fac (n-k))
```

Aufrufe:

```
binom' (49,6) ->> 13.983.816
binom' (45,6) ->>  8.145.060
binom 49 6  ->> 13.983.816
binom 45 6  ->>  8.145.060
binom 49
binom 45 ...sind ebenfalls zulässige Ausdrücke!
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

9) Binomialkoeffizientenberechnung (iv)

Die Aufrufe

```
binom 49
binom 45
```

...sind gültige Ausdrücke von einem funktionalen Wert:

```
(binom 49) :: Integer -> Integer
(binom 45) :: Integer -> Integer
```

...und repräsentieren die Funktionen '49_über_k' (entsprechend 'k_aus_49') und '45_über_k" (entsprechend 'k_aus_45'):

$$\binom{49}{\cdot} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \binom{45}{\cdot} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}.\ \binom{49}{k} = \frac{49!}{k!(49-k)!} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.\ \binom{45}{k} = \frac{45!}{k!(45-k)!}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

9) Binomialkoeffizientenberechnung (v)

In der Tat können wir als Funktionen definieren:

```
k_aus_49 :: Integer -> Integer
k_aus_49 k = binom 49 k

k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 k = binom 45 k
```

...und punktfrei (d.h., argumentlos) noch knapper:

```
k_aus_49 :: Integer -> Integer
k_aus_49 = binom 49

k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 = binom 45
```

Aufrufe:

```
k_aus_49 6 ->> binom 49 6 ->> 13.983.816
k_aus_45 6 ->> binom 45 6 ->>  8.145.060
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

10) Sieb des Eratosthenes (276-194 v.Chr.) (i)

...zur Berechnung des unendlichen Stroms der Primzahlen:

1. Schreibe alle natürlichen Zahlen ab 2 hintereinander auf.
2. Die kleinste nicht gestrichene Zahl in dieser Folge ist eine Primzahl. Streiche alle Vielfachen dieser Zahl.
3. Wiederhole Schritt 2 mit der nächstkleinsten noch nicht gestrichenen Zahl.

Nach Schritt 1:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19...

Nach Schritt 2 für Zahl 2:

2 3 5 7 9 11 13 15 17 19...

Nach Schritt 2 für Zahl 3:

2 3 5 7 11 13 17 19...

usw.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

10) Das Sieb des Eratosthenes (ii)

```
primes :: [Integer]
```
Zahlenstromtyp

(primes, der (Prim-) Zahlenstrom als Integer-Liste)

```
primes = sieve [2..]
```
Strom der nat. Zahlen ab 2

(leistet Schritt 1)

```
sieve :: [Integer] -> [Integer]
```
Argumentstromtyp *Resultatstromtyp*

```
sieve (x:xs) = x : sieve [y | y <- xs, mod y x > 0]
```
Argumentstrom *Resultatstrom*

(leistet Schritt 2 für die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, usw.)

...ein Beispiel für die Programmierung mit Strömen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

10) Das Sieb des Eratosthenes (iii)

```
primes :: [Integer]
```

(Prim−) Zahlenstromtyp

```
sieve :: [Integer]      ->      [Integer]
```

Argumentstromtyp — *Resultatstromtyp*

```
sieve (x:xs)          = x : sieve [y | y <- xs, mod y x > 0]
```

Strom der nat. Zahlen ab 2 als Argument — *Strom der Primzahlen als Resultat*

Strom der nat. Zahlen ab 2

```
primes = sieve [2..]
```

Strom der Primzahlen

Aufruf:

```
primes ->> sieve [2..] ->> 2 : sieve [3,5..]
 ->> ... ->> [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

10) Das Sieb des Eratosthenes (iv)

Im Überblick und (fast) ohne Farbspiele:

```
primes :: [Integer]
primes = sieve [2..]

sieve :: [Integer] -> [Integer]
sieve (x:xs) = x : sieve [y | y <- xs, mod y x > 0]
```

Aufrufe:

```
primes ->> [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,...
take 5 primes ->> [2,3,5,7,11]
drop 3 primes ->> [7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,...
take 3 (drop 3 primes) ->> [7,11,13]
primes!!0 ->> 2                    ((!!) Zugriffsoperator)
primes!!1 ->> 3
primes!!5 ->> 13
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Im Rückblick: Die ersten zehn Beispiele (1)

...jedes der Beispiele zeigt etwas, das funktionales Programmieren ausmacht:

1. Ein- und Ausgabe
   - *Hello, World!*
2. Rekursive Funktionen
   - !: Die Fakultätsfunktion
3. Hierarchische Systeme von Funktionen
   - Euklidischer Algorithmus
4. Systeme wechselweise rekursiver Funktionen
   - Gerade/ungerade-Test für ganze Zahlen
5. Parametrisch polymorphe Funktionen
   - Längenberechnung von Listen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Im Rückblick: Die ersten zehn Beispiele (2)

6. Fkt. höherer Ordnung, Fkt. als 'Bürger erster Klasse'
   - Transformieren von Listen
7. Funktionen über sprechenden Typnamen
   - Umkehren von Zeichenreihen
8. Überladene Funktionen
   - Addieren von Zahlen
9. Musterbasierte, curryfizierte und uncurryfizierte Funktionsdefinitionen, partiell ausgewertete Funktionen
   - Binomialkoeffizientenberechnung
10. Stromprogrammierung
    - Das Sieb des Eratosthenes

Verba docent, exempla trahunt.
Worte belehren, Beispiele reißen mit.

lat., sprichwörtl.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Zusammenfassend halten wir fest

Funktionale Programme sind

- Systeme (wechselweise) rekursiver Funktionsvorschriften (oder Rechenvorschriften).

Funktionen

- sind zentrales Abstraktionsmittel in funktionalen Programmen (wie Prozeduren (Methoden) in prozeduralen (objektorientierten) Programmen).

Funktionale Programme

- werten Ausdrücke aus. Das Resultat dieser Auswertung ist ein Wert eines bestimmten Typs. Dieser Wert kann elementar oder funktional sein; er ist die Bedeutung, die Semantik des Ausdrucks.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Übungsaufgabe 1.1.1.1

Programmieren ist wie schwimmen.
Man kann jahrelang zusehen,
ohne es zu lernen.

unbekannt

1. Implementieren Sie die 10 Beispielprogramme aus Kapitel 1.1.1 in einer Programmiersprache Ihrer Wahl, z.B. Java, und vergleichen Sie sie miteinander. Welche Unterschiede gibt es? In der Länge? Im Aufwand (konzeptuell, programmiertechnisch)? In der Verständlichkeit? In der Performanz? Warum?
2. Kehren Sie zu diesen Fragen im Lauf, vor allem am Ende des Semesters zurück. Überlegen Sie dann, ob die jetzigen Gründe für Ihre Einschätzung noch gültig sind. Wenn nein, warum nicht?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Übungsaufgabe 1.1.1.2

Probieren Sie die 10 Beispielprogramme auch in Haskell aus!

Der kürzeste Programmiererwitz:
Jetzt kann ich's.

unbekannt

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 1.1.2

Programme auswerten

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Auswerten einfacher Ausdrücke (1)

Der Ausdruck `(15*7 + 12) * (7 + 15*12)` hat den Wert 21.879; seine Semantik ist der Wert 21.879.

```
     (15*7 + 12) * (7 + 15*12)
->>  (105 + 12) * (7 + 180)
->>  117 * 187
->>  21.879
```

Auch andere Auswertungsreihenfolgen sind möglich, z.B.:

```
     (15*7 + 12) * (7 + 15*12)
->>  (105 + 12) * (7 + 180)
->>  105*7 + 105*180 +12*7 + 12*180
->>  735 + 18.900 + 84 + 2.160
->>  21.879
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Auswerten einfacher Ausdrücke (2)

```
    (15*7 + 12) * (7 + 15*12)
->> (105 + 12) * (7 + 180)
->> 117 * (7 + 180)
->> 117*7 + 117*180
->> 819 + 21.060
->> 21.879
```

...und viele mehr. Stets ist das Ergebnis gleich!
(s. Kap. 12.3.4, Church-Rosser-Theoreme).

Die einzelnen Vereinfachungs-, Rechenschritte nennen wir

- Simplifikationen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Auswerten von Funktionsaufrufen (1)

Der Aufruf `fac 2` hat den Wert 2; seine Semantik (oder Bedeutung) ist der Wert 2.

Eine erste Auswertungsreihenfolge:

```
        fac 2
(E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->> 2 * fac (2-1)
(S) ->> 2 * fac 1
(E) ->> 2 * (if 1 == 0 then 1 else (1 * fac (1-1)))
(S) ->> 2 * (if False then 1 else (1 * fac (1-1)))
(S) ->> 2 * (1 * fac (1-1))
(S) ->> 2 * (1 * fac 0)
(E) ->> 2 * (1 * (if 0 == 0 then 1 else (0 * fac (0-1))))
(S) ->> 2 * (1 * (if True then 1 else (0 * fac (0-1))))
(S) ->> 2 * (1 * (1))
(S) ->> 2 * (1 * 1)
(S) ->> 2 * 1
(S) ->> 2
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Auswerten von Funktionsaufrufen (2)

Eine zweite Auswertungsreihenfolge:

```
        fac 2
(E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->> 2 * fac (2-1)
(E) ->> 2 * (if (2-1) == 0 then 1
             else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * (if 1 == 0 then 1
             else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * (if False then 1
             else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * ((2-1) * fac ((2-1)-1))
(S) ->> 2 * (1 * fac ((2-1)-1))
(E) ->> 2 * (1 * (if ((2-1)-1) == 0 then 1
                  else (((2-1)-1) * fac ((2-1)-1))))
(S) ->> 2 * (1 * (if (1-1) == 0 then 1
                  else (((2-1)-1) * fac ((2-1)-1))))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Auswerten von Funktionsaufrufen (3)

```
(S) ->> 2 * (1 * (if 0 == 0 then 1
                  else (((2-1)-1) * fac ((2-1)-1))))
(S) ->> 2 * (1 * (if True then 1
                  else (((2-1)-1) * fac ((2-1)-1))))
(S) ->> 2 * (1 * 1)
(S) ->> 2 * 1
(S) ->> 2
```

Wir bezeichnen mit

- (E) markierte Schritte als Expansionsschritte.
- (S) markierte Schritte als Simplifikationsschritte.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Auswerten von Funktionsaufrufen (4)

Die beiden Auswertungsreihenfolgen sind Beispiele sog.

- applikativer (fleißiger, früher) (1. Ausw.folge, z.B. in ML)
- normaler (fauler, später) (2. Ausw.folge, z.B. in Haskell)

Auswertung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Applikative Auswertung des Aufrufs `natSum 2`

Berechnung von $\sum_{i=0}^{n} i$ für positive Werte $n \in \mathbb{N}_0$ durch `natSum`:

```
natSum :: Int -> Int
natSum n = if n == 0 then 0 else (natSum (n-1)) + n
```

```
        natSum 2
(E) ->> if 2 == 0 then 0 else (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> if False then 0 else (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> (natSum 1) + 2
(E) ->> (if 1 == 0 then 0 else ((natSum (1-1)) +1)) + 2
(S) ->> (if False then 0 else ((natSum (1-1)) + 1)) + 2
(S) ->> ((natSum (1-1)) + 1) + 2
(S) ->> ((natSum 0) + 1) + 2
(E) ->> ((if 0 == 0 then 0 else (natSum (0-1)) + 0) + 1) + 2
(E) ->> ((if True then 0 else (natSum (0-1)) + 0) + 1) + 2
(S) ->> ((0) + 1) + 2
(S) ->> (0 + 1) + 2
(S) ->> 1 + 2
(S) ->> 3
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Normale Auswertung des Aufrufs natSum 2

```
        natSum 2
(E) ->> if 2 == 0 then 0 else (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> if False then 0 else (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> (natSum (2-1)) + 2
(E) ->> if (2-1) == 0 then 0 else (natSum ((2-1)-1)) + (2-1) + 2
(S) ->> if 1 == 0 then 0 else (natSum ((2-1)-1)) + (2-1) + 2
(S) ->> if False then 0 else (natSum ((2-1)-1)) + (2-1) + 2
(S) ->> (natSum ((2-1)-1)) + (2-1) + 2
(E) ->> ...
...
(S) ->> 3
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Übungsaufgabe 1.1.2.1

Vervollständige die normale Auswertung des Aufrufs `natSum 2`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 1.1.3

Programme finden

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

‘Finden’ rekursiver Formulierungen (1)

...am Beispiel der Fakultätsfunktion:

```
fac n = n*(n-1)*...*6*5*4*3*2*1*1
```

Von der Lösung erwarten wir also:

```
fac 0 = 1 ->> 1
fac 1 = 1*1 ->> 1
fac 2 = 2*1*1 ->> 2
fac 3 = 3*2*1*1 ->> 6
fac 4 = 4*3*2*1*1 ->> 24
fac 5 = 5*4*3*2*1*1 ->> 120
fac 6 = 6*5*4*3*2*1*1 ->> 720
...

fac n = n*(n-1)*...*6*5*4*3*2*1*1 ->> n!
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

‘Finden’ rekursiver Formulierungen (2)

```
fac 0 = 1                                    ->> 1

fac 1 = 1 * 1                 == 1 * fac 0   ->> 1
          fac 0

fac 2 = 2 * 1*1               == 2 * fac 1   ->> 2
          fac 1

fac 3 = 3 * 2*1*1             == 3 * fac 2   ->> 6
          fac 2

fac 4 = 4 * 3*2*1*1           == 4 * fac 3   ->> 24
          fac 3

fac 5 = 5 * 4*3*2*1*1         == 5 * fac 4   ->> 120
          fac 4
...

fac n = n * (n-1)*...*6*5*4*3*2*1*1
                fac (n-1)
                                 == n * fac (n-1) ->> n!
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

‘Finden’ rekursiver Formulierungen (3)

Wir erkennen:

- Ein Sonderfall: `fac 0 = 1`
- Ein Regelfall: `fac n = n * fac (n-1)`

Wir führen beide Fälle zusammen und erhalten:

```
fac n
  | n == 0     = 1
  | otherwise = n * fac (n-1)
```

Noch unmittelbarer zusammengeführt:

```
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n-1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

‘Finden’ rekursiver Formulierungen (4)

...am Beispiel der Berechnung von 0+1+2+3...+n:

```
natSum n = 0+1+2+3+4+5+6+...+(n-1)+n
```

Von der Lösung erwarten wir also:

```
natSum 0 = 0 ->> 0
natSum 1 = 0+1 ->> 1
natSum 2 = 0+1+2 ->> 3
natSum 3 = 0+1+2+3 ->> 6
natSum 4 = 0+1+2+3+4 ->> 10
natSum 5 = 0+1+2+3+4+5 ->> 15
natSum 6 = 0+1+2+3+4+5+6 ->> 21
...

natSum n = 0+1+2+3+4+5+6+...+(n-1)+n
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

‘Finden’ rekursiver Formulierungen (5)

```
natSum 0 = 0                                              ->>  0

natSum 1 = 0 + 1                  == natSum 0 + 1 ->>  1
           ------
           natSum 0
natSum 2 = 0+1 + 2                == natSum 1 + 2 ->>  3
           -----
           natSum 1
natSum 3 = 0+1+2 + 3              == natSum 2 + 3 ->>  6
           -------
           natSum 2
natSum 4 =  0+1+2+3 + 4           == natSum 3 + 4 ->> 10
           ---------
           natSum 3
natSum 5 = 0+1+2+3+4 + 5          == natSum 4 + 5 ->> 15
           -----------
           natSum 4
...
natSum n = 0+1+2+3+4+5+6+...+(n-1) + n
           ---------------------
           natSum (n-1)
                  == natSum (n-1) + n ->> natSum n
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

‘Finden’ rekursiver Formulierungen (6)

Wir erkennen:

- Ein Sonderfall: `natSum 0 = 0`
- Ein Regelfall: `natSum n = (natSum (n-1)) + n`

Wir führen beide Fälle zusammen und erhalten:

```
natSum n
  | n == 0     = 0
  | otherwise = (natSum (n-1)) + n
```

Noch unmittelbarer zusammengeführt:

```
natSum 0 = 0
natSum n = (natSum (n-1)) + n
```

Anm.: Einfachere Klammerung ist möglich: `natSum (n-1) + n`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Est omnium rerum magister usus.
Aller Dinge Meister ist der Gebrauch.

Julius Caesar (100 - 44 v.Chr.)
röm. Feldherr und Staatsmann

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.1.1
1.1.2
1.1.3
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 1.2

Warum funktionale Programmierung? Warum mit Haskell?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 1.2.1

Warum funktionale Programmierung?

Res loquitur ipsa.
Die Sache spricht für sich.

Cicero (106 - 43 v.Chr.)
röm. Staatsmann und Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

For at least the last 60 years, programmers have been faced with the question: What programming language should I use?

Myriad languages have been developed in the last six decades, with at least a few dozen in common usage today.

Jeffrey S. Foster

Shedding new Light on an old Language Debate. Communications of the ACM 60(10):90, 2017.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Etwas spezieller die Frage von John W. Backus

Can programming be liberated from the von Neumann style?

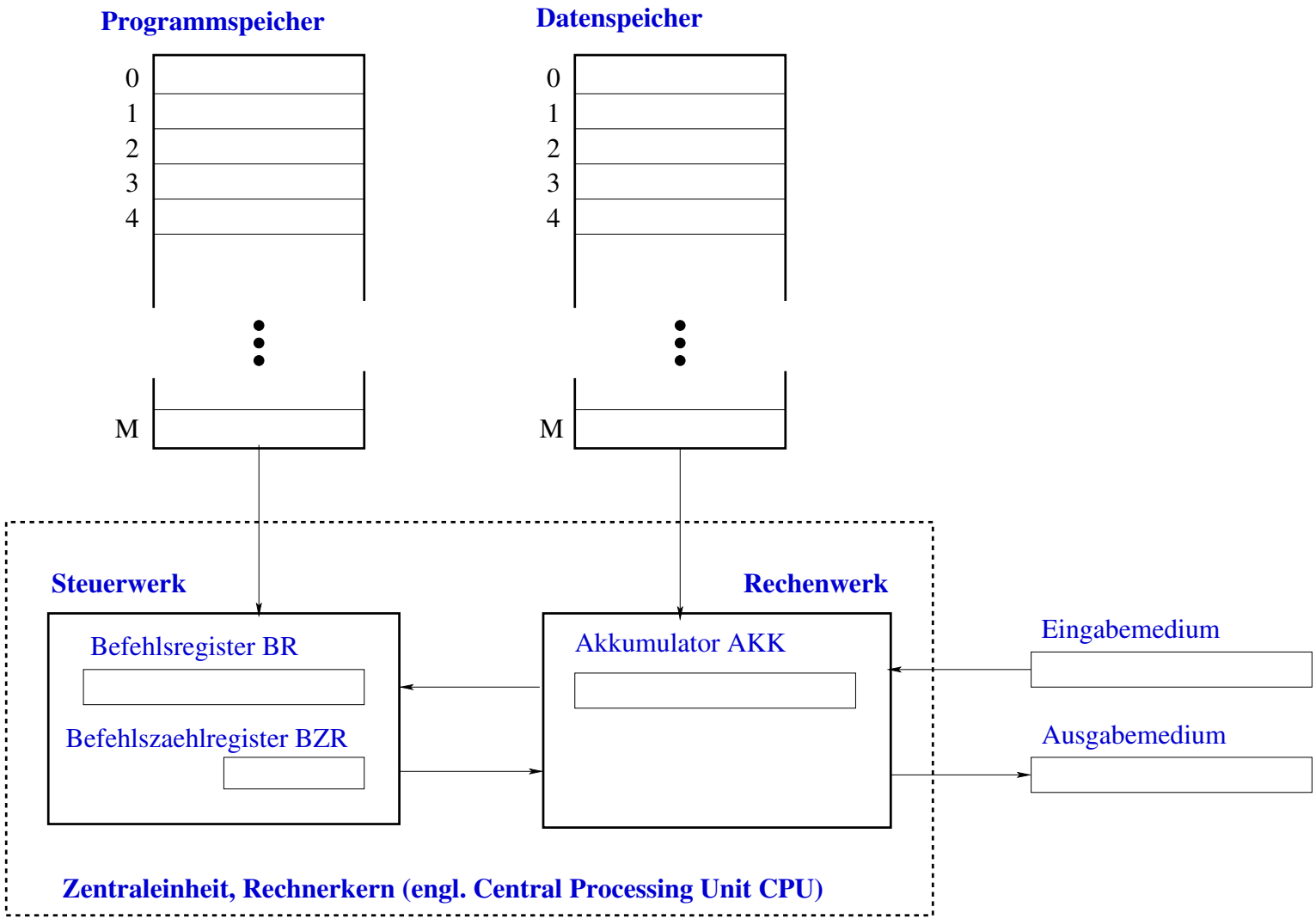
John W. Backus (1924-2007)
Turing Award Preisträger 1977

John W. Backus. *Can Programming be Liberated from the von Neumann Style? A Functional Style and its Algebra of Programs*. Communications of the ACM 21(8):613-641, 1978.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Der von-Neumann-(Programmier-) Stil

....geprägt durch die von-Neumann-Architektur von Rechnern:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Evolution von Paradigmen und Sprachen (1)

...gekennzeichnet durch die schrittweise Einführung von Abstraktionen mit dem Ziel, Einzelheiten der zugrundeliegenden Rechenmaschine und Programmausführung immer mehr zu verbergen:

- Assembler-Sprachen führen mnemo-technische Instruktionsbezeichner und symbolische Marken ein, um Maschinenbefehle und Programm- und Datenspeicheradressen zu verbergen.
- FORTRAN führt Felder (engl. arrays) und Ausdrücke in mathematisch-üblicher Schreibweise ein, um Register zu verbergen.
- ALGOL-ähnliche Sprachen führen strukturierte Kontrollanweisungen ein, um Sprungbefehle und Sprungmarken zu verbergen (*'goto considered harmful'*).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Evolution von Paradigmen und Sprachen (2)

- Objektorientierte Sprachen führen Sichtbarkeitsebenen und Kapselungen ein, um die Datendarstellung und Speicherverwaltung zu verbergen.
- Deklarative Sprachen, am bekanntesten funktionale und logische Sprachen, verbergen die Auswertungsreihenfolge und verzichten dafür auf Kontrollanweisungen. Reine deklarative Sprachen verzichten auch auf Zuweisungen, um Seiteneffekte auszuschließen.

In deklarativen Sprachen verschiebt sich dadurch die Programmieraufgabe von der

- Festlegung der Rechenschritte zur Strukturierung der Anwendungsdaten und Beziehungen der Programmbestandteile.

Deklarative Sprachen ähneln hierin formalen Spezifikationssprachen, sind aber ausführbar.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Abgrenzung funktionaler u. logischer Sprachen

Funktionale Sprachen

- beruhen auf dem mathematischen Funktionsbegriff.
- Programme sind Systeme von Funktionen, die über Gleichungen, Fallunterscheidungen und Rekursion definiert sind und auf (strukturierten) Daten arbeiten.
- bieten effiziente, anforderungsgetriebene Auswertungsstrategien, die auch die Arbeit mit (potentiell) unendlichen Strukturen unterstützen.

Logische Sprachen

- beruhen auf Prädikatenlogik.
- Programme sind Systeme von Prädikaten, die durch eingeschränkte Formen logischer Formeln, z.B. Horn-Formeln (Implikation), definiert sind.
- bieten Nichtdeterminismus und Prädikate mit mehreren Eingabe-/Ausgabemodi zur Wiederverwendung von Code.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Ziel all dieser Abstraktionen

...maßgebliche Beiträge zur Überwindung der sog. Software-krise zu leisten hin zu einer

- ingenieurmäßigen Software-Entwicklung ('in time, in functionality, in budget')
- verifiziert, wartbar, erweiterbar, etc.

indem dem Programmierer ein

- angemessen(er)es Abstraktionsniveau zur Formulierung, Modellierung und Lösung von Problemen

zur Verfügung gestellt wird.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Prozedural vs. funktional: Ein Vergleich

Gegeben eine Aufgabe A, gesucht eine Lösung L für A.

Prozedural: Lösungsablauf typischerweise in 2 Schritten:

1. Ersinne ein algorithmisches Verfahren V zur Berechnung der Lösung L von A.
2. Codiere V als Folge von Anweisungen (Befehlen, Instruktionen) für den Rechner.

Beachte:

- Schritt 2 erfordert hier zwingend, den Speicher explizit anzusprechen und zu verwalten (Allokation, Manipulation, Deallokation von Speicherzellen für Daten).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zur Illustration ein einfaches Beispiel (1)

Aufgabe: *Liefere die Werte aller Einträge eines ganzzahligen Feldes mit einem Wert von höchstens 10.*

Hier eine typische prozedurale Lösung, hier in Pascal (Argument in Feldvariable a, Resultat in Feldvariable b):

```
PROGRAM filter (input,output);
VAR a, b: ARRAY [1..maxLength] OF integer;
BEGIN
 (* Code zur Initialisierung von Feldvariable a *)
 FOR i := 1 TO maxLength DO a[i] := ⟨Init.-Ausdruck⟩
 (* Hauptcode *)
 j := 1;
 FOR i := 1 TO maxLength DO
  IF a[i] <= 10 THEN BEGIN b[j] := a[i]; j := j+1 END
END.
```

Beachte: Der Speicher wird explizit adressiert und manipuliert. Zusätzlich ist 'overhead' Code erforderlich.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zur Illustration ein einfaches Beispiel (2)

...zum Vergleich hier eine typische funktionale Lösung, hier in Haskell:

```
a = [2,5..21]          ( [2,5..21] = [2,5,8,11,14,17,20])
b = [n | n <- a, n <= 10]
```

Beachte: Keine Speicheradressierung, -manipulation oder -verwaltung zur Berechnung von `b` erforderlich: `b ->> [2,5,8]`. Kein 'overhead' Code. Sogar noch knapper möglich:

```
b = [n | n <- [2,5..21], n <= 10]
```

Vergleiche die funktionale und mathematische Beschreibung

- `[ n | n <- a , n <= 10 ]`
- $\{ n \mid n \in a \wedge n \leq 10 \}$

unter dem Anspruch funktionaler Programmierung

- *"...etwas von der Eleganz der Mathematik in die Programmierung zu bringen!"*

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Essenz deklarativer Programmierung

...speziell auch funktionaler Programmierung: Betonung des

- **'was'** anstelle des **'wie'**!

Deklarativ (fkt.): Beschreibe, **was** wir bekommen möchten:

```
b = [n | n <- [2,5..21], n <= 10]
```

Präskriptiv (proz.): Beschreibe, **wie** wir etwas bek. möchten:

```
VAR a, b: ARRAY [1..maxLength] OF integer;
 (* Code zur Initialisierung von Feldvariable a *)
 FOR i := 1 TO maxLength DO a[i] := ⟨Init.-Ausdruck⟩
 (* Hauptcode *)
 j := 1;
 FOR i:=1 TO maxLength DO
  IF a[i] <= 10 THEN BEGIN b[j] := a[i]; j := j+1 END
```

Man soll den Menschen nie sagen,
wie sie etwas tun sollen,
sondern nur, was sie tun sollen.
Dann wird ihr Einfallsreichtum einen verblüffen.

George S. Patton (1885-1945)
amerik. General

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Automatische Listengenerierung

...mittels Listenkomprehension (engl. list comprehension) wie im Ausdruck

- `[n | n <- a, n <= 10]` (vgl. $\{n \mid n \in a \wedge n \leq 10\}$)

...ist hierfür ein wichtiges, nützliches und für funktionale Programmiersprachen typisches sprachliches Konstrukt ohne Parallele in nichtfunktionalen Sprachen.

Anm.: Komprehension – Zusammenfassung, Vereinigung von Mannigfaltigem zu einer Einheit (Philos.).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Die Grenzen meiner Sprache
sind die Grenzen meiner Welt.

Ludwig Wittgenstein (1889-1951)
österr. Philosoph
Namenspate für den höchstdotierten
österr. Wissenschaftspreis

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

(Noch) nicht überzeugt? Quicksort, Hoare-Stil

Betrachte eine komplexere Aufgabe: Sortieren à la Hoare.

Aufgabe: *Sortiere eine Liste L ganzer Zahlen aufsteigend.*

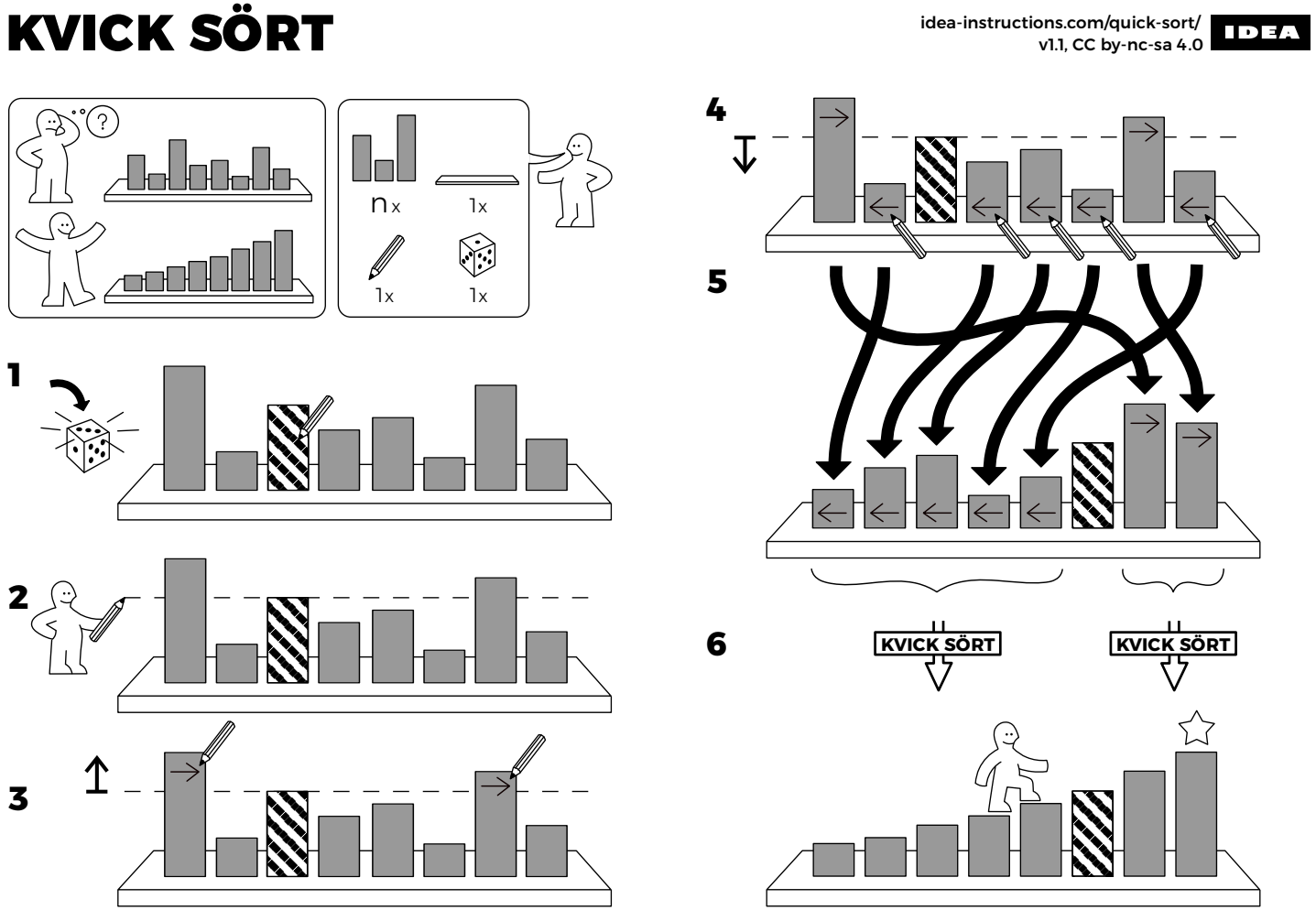
Lösungsverfahren: Das 'Teile und herrsche'-Sortierverfahren Quicksort von Sir Tony Hoare (1961):

- *Teile:* Wähle ein Element l aus L und partitioniere L in zwei (möglicherweise leere) Teillisten L_1 und L_2, so dass alle Elemente von L_1 (L_2) kleiner oder gleich (größer) l sind.
- *Herrsche:* Sortiere L_1 und L_2 mittels des Quicksort-Verfahrens (d.h. mittels rekursiver Aufrufe von Quicksort).
- *Kombiniere:* Bestimme Gesamtsortierung durch Zusammenführen der Teilsortierungen (hier trivial: konkateniere die sortierten Teillisten zur sortierten Gesamtliste).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Quicksort, IKDEA-Stil

...Sortieren à la Hoare, die Grundidee so einfach, dass sie auch IKDEA-erklärungsstilgeeignet ist (Feteke et al., TU Braunschw.):



http://idea-instructions.com/quick-sort v.1.1, CC by-cs-sa 4.0

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Quicksort, prozedural

...eine typische prozedurale Realisierung, hier in Pseudocode:

```
quickSort (L,low,high)
  if low < high
    then splitInd = partition (L,low,high)
         quickSort (L,low,splitInd-1)
         quickSort (L,splitInd+1,high) fi

partition (L,low,high)
  l = L[low]
  left = low
  for i = low+1 to high do
    if L[i] <= l then left = left+1
                      swap (L[i],L[left]) fi od
  swap (L[low],L[left])
  return left
```

Aufruf: `quickSort(L,1,length(L))`, wobei `L` die zu sortierende Liste ist, z.B. `L=[4,2,3,4,1,9,3,3]`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Quicksort, funktional

...zum Vergleich eine typische funktionale Realisierung, hier in Haskell, mehr als eine Spur näher am Hoare- und IKDEA-Stil:

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                   ++ [n]
                   ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

Aufrufe:

```
quickSort [] ->> []
quickSort [4,1,7,3,9] ->> [1,3,4,7,9]
quickSort [4,2,3,4,1,9,3,3] ->> [1,2,3,3,3,4,4,9]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Übungsaufgabe 1.2.1.1

Betrachten Sie das 'Sieb des Eratosthenes' aus Kapitel 1.1.1 als weiteres Beispiel. Realisieren Sie seine Verfahrensidee zur Berechnung von Primzahlen in

1. präskriptiven
   - prozeduralen (z.B. C, Pascal, Modula,...)
   - objektorientierten (z.B. Java, C++, C#,...)
2. deklarativen
   - logischen (z.B. Prolog)

Programmiersprachen ihrer Wahl und vergleichen Sie Ihre Implementierungen mit der Haskell-Implementierung aus Kapitel 1.1.1. Lässt sich die Verfahrensidee von Eratosthenes in manchen Sprachen einfacher umsetzen als in anderen? Kommt sie in allen Sprachen gleich gut und deutlich zum Ausdruck oder wird sie in manchen Sprachen von (Ausführungs-) Details überlagert?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 1.2.2

Imperative vs. funktionale Programmierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Imperative Programmierung

...gekennzeichnet durch:

1. Unterscheidung von Ausdrücken und Anweisungen.
2. Ausdrücke liefern Werte; Anweisungen bewirken Zustandsänderungen (Seiteneffekte).
3. Programmausführung ist die Abarbeitung von Anweisungen (dabei müssen auch Ausdrücke ausgewertet werden).
4. Explizite Kontrollflussspezifikation mittels spezieller Anweisungen (sequentielle Komposition, Fallunterscheidung, Schleifen,...)
5. Variablen sind Namen für Speicherplätze: ihr Wert sind die dort gespeicherten Werte; sie können im Verlauf der Programmausführung (beliebig oft) geändert werden.
6. Bedeutung des Programms ist die Beziehung zwischen Anfangs- und Endzuständen, die bewirkte Zustandsänderung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Funktionale Programmierung

...gekennzeichnet durch:

1. Keine Anweisungen! Ausschließlich Ausdrücke!
2. Ausdrücke liefern Werte. Anweisungen fehlen; deshalb: keine Zustandsänderungen, keine Seiteneffekte.
3. Programmausführung ist Auswertung von Ausdrücken.
4. Keine Kontrollflussspezifikation! Allein Datenabhängigkeiten steuern die Auswertung(sreihenfolge).
5. Variablen sind Namen für Ausdrücke: ihr Wert ist der Wert des Ausdrucks, den sie bezeichnen; ein späteres Ändern, Überschreiben oder Neubelegen ist nicht möglich.
6. Bedeutung des Programms ist die Beziehung zwischen Aufrufargumenten von Ausdrücken und ihrem Wert.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Imperative Programmierung

...befehlsbasiertes Programmieren:

1. Programm: Menge von Befehlen (oder Instruktionen, Anweisungen) strukturiert durch ein Regelwerk von Kontrollflussanweisungen (*if-then-else*, *while-do*, *for- do*,...)), das ihre Ausführungsabfolge festlegt und steuert.
2. Bedeutung von Befehlen und Programmen: Zustandsänderungen (Zustand: Zuordnung von Werten an Variablen 'σ : *Variablen* $\rightarrow$ *Werte*'. Zustandsänderung: Neuzuordnung von Werten an Variablen; Bsp.: Angesetzt auf σ ordnet der Befehl `x:=x+y` Variable x die Summe aus $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ neu als Wert zu und lässt alle anderen Zuordnungen unverändert).
3. Vorlegbare Frage an ein Programm: In welchem Zustand terminiert Programm π_{imp} angesetzt auf einen Anfangszustand, oder: Was sind die Werte der Variablen von π_{imp} nach seiner Terminierung?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Funktionale Programmierung

...gleichungsbasiertes, ergebnisorientiertesProgrammieren:

1. Programm: Menge von Vereinbarungen von Wertegleichheiten von Ausdrücken (`pi = 3.14`, `quadrat n = n*n`, `isOdd n = isEven (n-1)`, `binom m n =...`).
2. Bedeutung von Ausdrücken und Programmen: Wertberechnungen. (Bsp.: Der Wert von Ausdruck `binom 45 6` ist die natürliche Zahl 8.145.060, von `quadrat 8` die natürliche Zahl 64; von Programmen der Wert ihres 'Hauptausdrucks' (`main =...`).)
3. Vorlegbare Frage an ein Programm: Welchen Wert hat ein Ausdruck *ausd* für konkrete Werte seiner Operanden, wenn er mit den im Programm π_{fkt} definierten Wertegleichheiten von Ausdrücken ausgewertet wird?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 1.2.3

Von imperativer zu funktionaler Programmierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Hauptherausforderung

...konzeptuell und praktisch den Übergang von

- befehlsorientierter

zu

- ergebnisorientierter

Denk- und Handlungsweise zu meistern!

Wie immer gilt:

Omne initium difficile.
Aller Anfang ist schwer.

lat., sprichwörtl.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Versprechen

...ist dieser Übergang gemeistert, sind auch das neue Paradigma funktionaler Programmierung und die Inhalte dieser LVA i.w. gemeistert.

Tipp: Fällt es anfangs schwer, weil ungewohnt, eine Aufgabe funktional zu lösen, so lohnt es sich, zu diesem Abschnitt zurückzukehren und zu überlegen, ob die Ursache der empfundenen Schwierigkeit möglicherweise darin liegt, die Aufgabe in befehls- statt ergebnisorientierter Denk- und Handlungsweise angehen zu wollen (s. auch Anh. A, insb. A.6 bis A.9).

Der Mensch beginnt nicht leicht zu denken.
Sobald er aber erst einmal den Anfang damit gemacht hat,
hört er nicht mehr damit auf.

Jean-Jacques Rousseau (1712-1778)
franz.-schweizer. Philosoph

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Übungsaufgabe 1.2.3.1

Macht euch nichts draus,
ich weiß, ihr werdet das nie verstehen.

Ludwig Wittgenstein (1889-1951)
österr. Philosoph
Namenspate für den höchstdotierten
österr. Wissenschaftspreis

Generalaufgabe für dieses (und alle folgenden) Semester:

Widerleg(t) Wittgenstein!

Das größte Vergnügen im Leben bereitet es,
das zu tun, wovon die Leute behaupten,
du kannst es nicht.

Walter Bagehot (1826-1877)
engl. Ökonom und Verfassungstheoretiker
Hrsg. der Wochenzeitung "The Economist"

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 1.2.4

Funktionale Programmierung: Stärken, Schwächen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Stärken, Vorteile funktionaler Programmierung

- **Einfach(er) zu erlernen**

  ...da wenige(r) Grundkonzepte (vor allem keinerlei (Maschinen-) Instruktionen; deshalb auch keine Zuweisungen, keine Schleifen, keine Sprünge)

- **Höhere Produktivität**

  ...da Programme signifikant kürzer als funktional vergleichbare imperative Programme sind (Faktor 5 bis 10)

- **Höhere Zuverlässigkeit**

  ...da Korrektheitsüberlegungen und -beweise einfach(er) sind (math. Fundierung, keine durchscheinende Maschine)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Illustration auf der syntaktischen Ebene

Konzeptuell:

- Die unendliche Folge der natürlichen Zahlen ab 1:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$$

  Mögliche Kurzschreibweisen:

  - 1. (zu knapp, Verwechslungsgefahr mit 1-tens)
  - 1... (zu lang)
  - 1.., 1*ff* (*f*ort*f*olgende), 1ϕ, $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}$,... (genau richtig)

In Haskell:

```
[1..]   (Synt. Zucker: Eckige Klammern zur Listenkennzeichnung)
```

In Java:

```
class Naturals implements Iterator<Integer> {
  private int value = 1;
  public boolean hasNext() { return true; }
  public Integer next() { return value++; }
 }                                  (deutlich mehr syntakt. Zucker)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Schwächen, Nachteile fkt. Programmierung

- Geringe(re) Performanz
  Aber: Große Fortschritte sind erzielt (Performanz oft vergleichbar mit entsprechenden C-Implementierungen); Korrektheit zudem vorrangig gegenüber Performanz; einfache(re) Parallelisierbarkeit fkt. Programme.
- Manchmal unangemessen, oft für inhärent zustandsbasierte Anwendungen, zur GUI-Programmierung
  Aber: Eignung einer Methode/Technologie/Programmierstils für einen Anwendungsfall ist stets zu untersuchen und überprüfen; dies ist kein Spezifikum fkt. Programmierung.

  Außerdem: Unterstützung zustandsbehafteter Programmierung in vielen funktionalen Programmiersprachen durch spezielle Mechanismen; z.B. in Haskell durch das Monadenkonzept (s. LVA 185.A05 Fortgeschrittene funktionale Programmierung).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Es ist schwieriger, eine vorgefasste Meinung
zu zertrümmern als ein Atom.

Albert Einstein (1879-1955)
dt. schweiz.-amerik. Physiker

...häufig vorgebrachte Schwächen und Nachteile funktionaler Programmierung insgesamt (oft) nur vorurteilsbehaftet, vermeintlich oder (längst) überholt.

Lass dich nicht durch Vorurteile bestimmen [...].

1. Timotheus 5,21

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Einsatzfelder funktionaler Programmierung

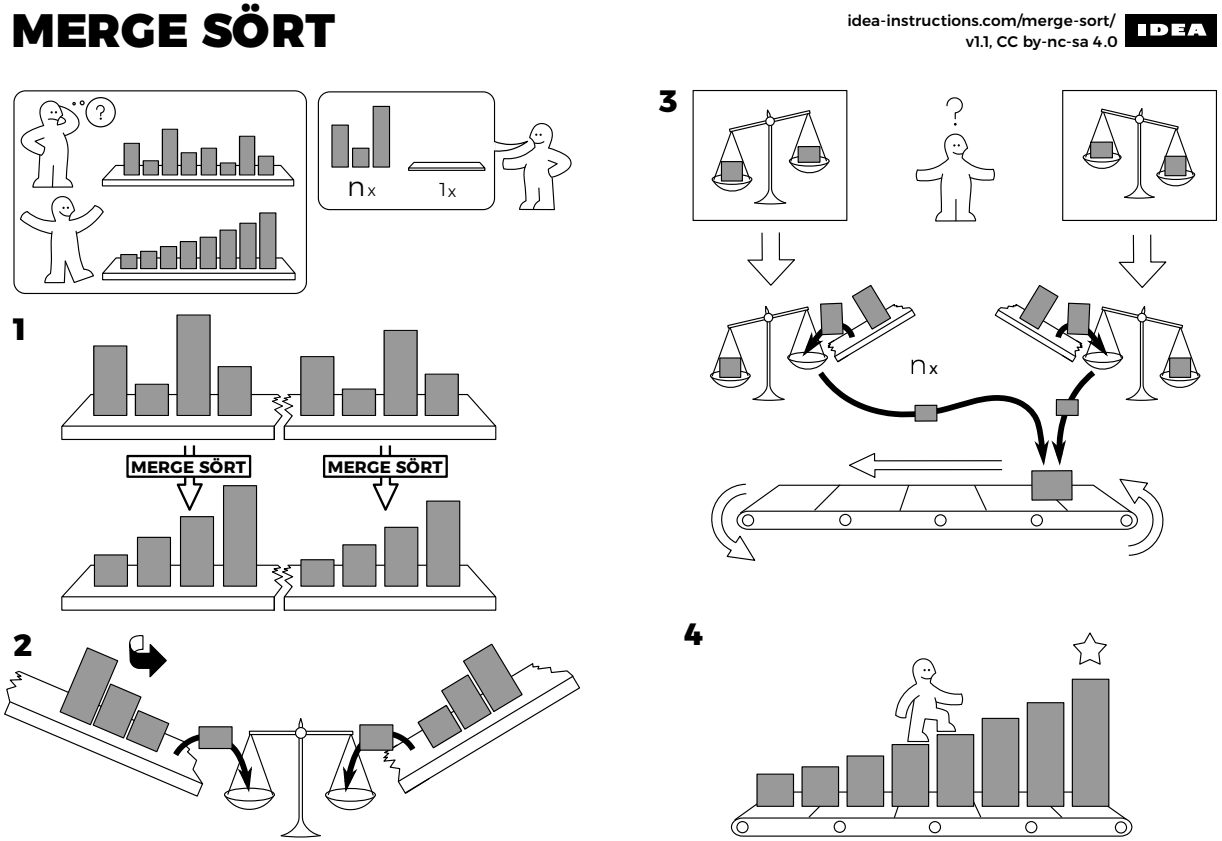
...heutzutage 'überall':

- Curt J. Simpson. Experience Report: Haskell in the "Real World": Writing a Commercial Application in a Lazy Functional Language. In Proc. 14th ACM SIGPLAN Int. Conf. on Funct. Prog. (ICFP 2009), 185-190, 2009.
- Jerzy Karczmarczuk. Scientific Computation and Functional Programming. Computing in Science and Engineering 1(3):64-72, 1999.
- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. Real World Haskell. O'Reilly, 2008.
- Yaron Minsky. OCaml for the Masses. Communications of the ACM, 54(11):53-58, 2011.
- Michael Snoyman. Developing Web Applications with Haskell and Yesod. O'Reilly, 2012.
- Haskell in Industry and Open Source: `www.haskell.org/haskellwiki/Haskell_in_industry`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Übungsaufgabe 1.2.4.1: Aufwand, Performanz

Implementieren Sie die Verfahren *Kvick Sört* und *Merge Sört* zum Sortieren ganzzahliger Listen in Haskell und in einer weiteren Programmiersprache Ihrer Wahl. Vergleichen Sie die Implementierungen hinsichtlich Programmieraufwand und Laufzeitverhalten durch Laufzeitmessungen für Argumentlisten wachsender Länge.



http://idea-instructions.com/merge-sort v.1.1, CC by-cs-sa 4.0

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 1.2.5

Warum funktionale Programmierung mit Haskell?

Facta loquuntur.
Tatsachen sprechen (lassen).

lat., sprichwörtl.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Funktionale Programmierprachen

...vielfältig und zahlreich, z.B.:

- λ-Kalkül (späte 1930er Jahre, Alonzo Church, Stephen Kleene)
- Lisp (späte 1950er Jahre, John McCarthy)
- ML, SML (Mitte 1970er Jahre, Michael Gordon, Robin Milner)
- Hope (um 1980, Rod Burstall, David McQueen)
- Miranda (um 1980, David Turner)
- OPAL (Mitte 1980er Jahre, Peter Pepper et al.)
- Haskell (späte 1980er Jahre, Paul Hudak, Philip Wadler et al.)
- Gofer (frühe 1990er Jahre, Mark Jones)
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Warum also gerade Haskell?

> Learning Haskell opens one's mind to new programming paradigms, which might produce clearer and shorter implementations.
>
> Mihai Maruseac
>
> *Haskell: A Language for Modern Times*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 24(1):64-66, 2017.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Warum also nicht Haskell?

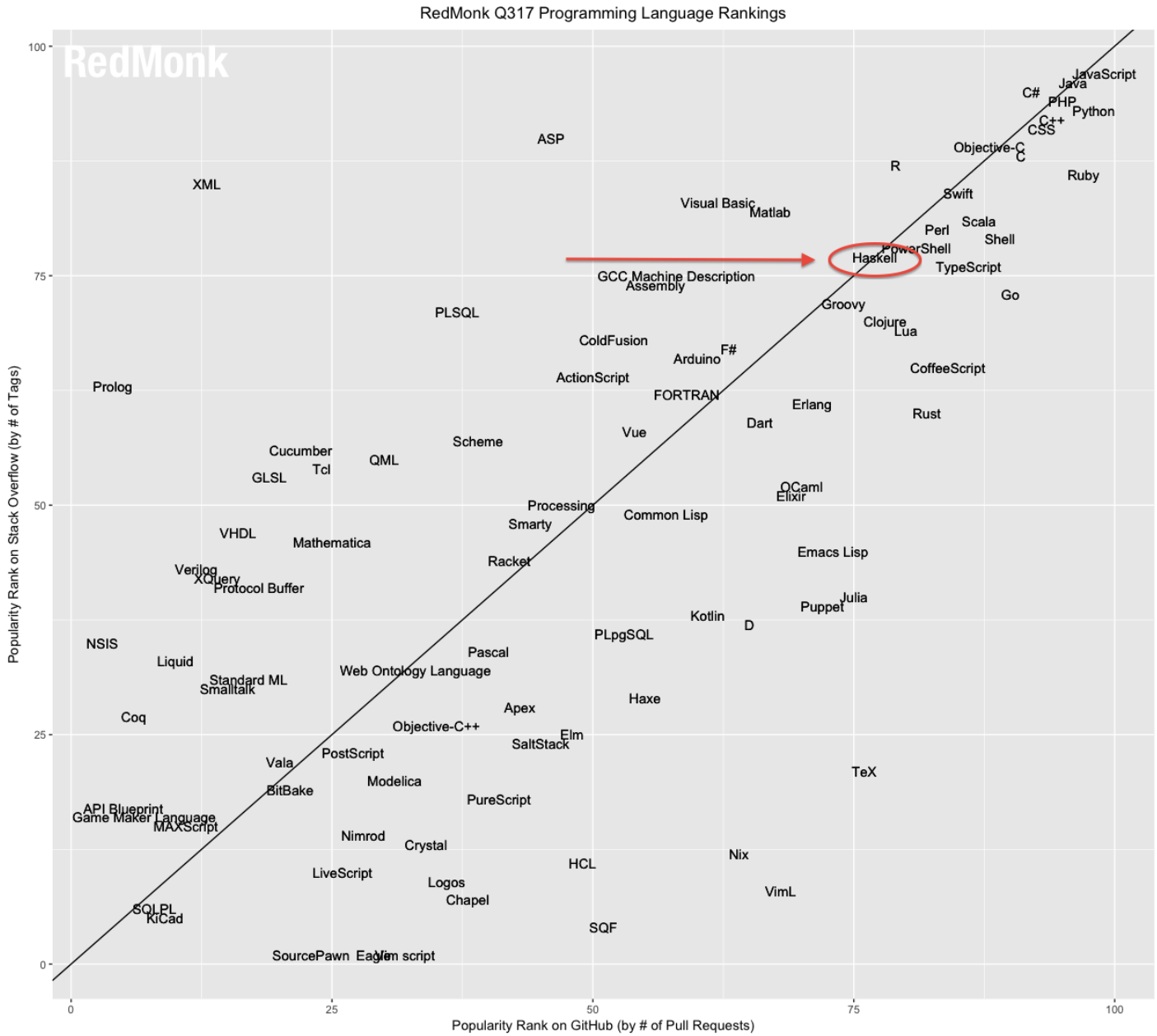
...Haskell ist eine

- fortgeschrittene moderne funktionale Sprache
  - starke Typisierung
  - verzögerte Auswertung (lazy evaluation)
  - Funktionen höherer Ordnung/Funktionale
  - Polymorphie/Generizität
  - Musterpassung (pattern matching)
  - Datenabstraktion (abstrakte Datentypen)
  - Modularisierung (für Programmierung im Großen)
  - ...
- Sprache für 'realistische (real world)' Probleme
  - mächtige Bibliotheken
  - Schnittstellen zu anderen Sprachen, z.B. zu C
  - ...

In Summe: Haskell ist reich; zugleich ist es eine gute Lehrsprache; auch dank des Interpretierers Hugs! Und Haskell ist mehr als das!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

RedMonk Jun'17 Programming Lang. Ranking



Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

RedMonk Programming Language Rankings

Rg	Jan.'15	Rg	Jun'15	Rg	Jan'16	Rg	Jun'16	Rg	Jan'17	Rg	Jun'17
1	JS	1	JS	1	JS	1	JS	1	JS	1	JS
2	Java	2	Java	2	Java	2	Java	2	Java	2	Java
3	PHP	3	PHP	3	PHP	3	PHP	3	Python	3	PHP
4	Python	4	Python	4	Python	4	Python	4	PHP	4	Python
5	C#	5	C#	5	C#	5	C#	5	C#	5	C#
6	C++	5	C++	5	C++	5	C++	5	C++	5	C++
7	Ruby	5	Ruby	5	Ruby	5	Ruby	7	CSS	5	Ruby
8	CSS	8	CSS	8	CSS	8	CSS	7	Ruby	8	CSS
9	C	9	C	9	C	9	C	9	C	9	C
10	Obj-C	10	Obj-C	10	Ob-C	10	Obj-C	10	Obj-C	10	Obj-C
11	Perl	11	Perl	11	Shell	11	Shell	11	Scala	11	Shell
12	Shell	11	Shell	12	Perl	12	R	11	Shell	12	R
13	R	13	R	13	R	13	Perl	11	Swift	13	Perl
14	Scala	14	Scala	14	Scala	14	Scala	14	R	14	Scala
15	Haskell	15	Go	15	Go	15	Go	15	Go	15	Go
16	Matlab	15	Haskell	15	Haskell	16	Haskell	15	Perl	16	Haskell
17	Go	17	Matlab	17	Swift	17	Swift	17	TS	17	Swift
18	VB	18	Swift	18	Matlab	18	Matlab	18	PS	18	Matlab
19	Clojure	19	Groovy	19	Clojure	19	VB	19	Haskell	19	VB
20	Groovy	19	VB	19	Groovy	20	Clojure	20	Clojure	20	Clojure
				19	VB	20	Groovy	20	CS		20 Groovy
								20	Lua		
								20	Matlab		

Abkürzungen:

JS	JavaScript	TS	TypeScript
Obj-C	Objective-C	PS	PowerShell
VB	Visual Basic	CS	CoffeeScript

URL: `http://redmonk.com`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Übungsaufgabe 1.2.5.1

Überprüfe, wie Haskell in den RedMonk-Ranglisten aus dem

1. Januar 2018, Juni 2018
2. Januar 2019, Juni 2019
3. Januar 2020, Juni 2020

abschneidet. Welche Verschiebungen hat es generell gegeben? Welche für Haskell?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Steckbrief 'Funktionale Programmierung'

Grundlage:	Lambda- (λ-) Kalkül; Basis formaler Berechenbarkeitsmodelle
Abstraktionsprinzip:	Funktionen (höherer Ordnung)
Charakt. Eigenschaft:	Referentielle Transparenz
Historische und aktuelle Bedeutung:	Basis vieler Programmiersprachen; praktische Ausprägung auf dem λ-Kalkül basierender Berechenbarkeitsmodelle
Anwendungsbereiche:	Theoretische Informatik, Künstliche Intelligenz (Expertensysteme), Experimentelle Software/Prototypen, Programmierunterricht,..., Software-Lsg. industriellen Maßstabs
Programmiersprachen:	Lisp, ML, Miranda, Haskell,...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Steckbrief 'Haskell'

Benannt nach:	Haskell B. Curry (1900-1982) `www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Curry.html`
Paradigma, Stil:	Rein funktionale Programmierung
Eigenschaften:	Lazy evaluation, pattern matching
Typsicherheit:	Stark typisiert, Typinferenz, modernes polymorphes Typsystem
Syntax:	Komprimiert, kompakt, intuitiv
Informationen:	`http://haskell.org` `http://haskell.org/tutorial/`
Interpretierer:	GHCi, Hugs (`www.haskell.org/hugs/`)
Compiler:	Glasgow Haskell Compiler (GHC) (`www.haskell.org/ghc/`)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 1.2.6

Erste Schritte in Haskell: Gewöhnliche, literate Haskell-Skripte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Haskell-Programme

...gibt es in zwei sich konzeptuell und notationell unterscheidenden Varianten.

Als sog.

- (Gewöhnliches) Haskell-Skript
  ...alles, was nicht notationell als Kommentar ausgezeichnet ist, wird als Programmtext betrachtet.

  Konvention: `.hs` als Dateiendung
- Literates Haskell-Skript (engl. literate Haskell Script)
  ...alles, was nicht notationell als Programmtext ausgezeichnet ist, wird als Kommentar betrachtet.

  Konvention: `.lhs` als Dateiendung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

myFirstScript.hs: Gewöhnliches Haskell-Skript

```
{- myFirstScript.hs: Gewöhnliche Skripte erhalten
   konventionsgemäß die Dateiendung .hs -}

-- Fakultätsfunktion
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)

-- Binomialkoeffizienten
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k) = div (fac n) (fac k * fac (n-k))

-- Konstante (0-stellige) Funktion sechs_aus_45
sechs_aus_45 :: Integer
sechs_aus_45 = (fac 45) `div` (fac 6 * fac (45-6))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

myFirstLitScript.lhs: Literates Haskell-Skript

myFirstLitScript.lhs: Literate Skripte erhalten konventionsgemäß die Dateiendung .lhs

Fakultätsfunktion

```
> fac :: Integer -> Integer
> fac n = if n == 0 then 1 else n * fac(n-1)
```

Binomialkoeffizienten

```
> binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
> binom' (n,k) = div (fac n) (fac k * fac (n-k))
```

Konstante (0-stellige) Funktion sechs_aus_45

```
> sechs_aus_45 :: Integer
> sechs_aus_45 = (fac 45) `div` (fac 6 * fac (45-6))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kommentare in Haskell-Programmen

Kommentare in

- (gewöhnlichem) Haskell-Skript
  - Einzeilig: Alles nach -- bis zum Rest der Zeile
  - Mehrzeilig: Alles zwischen {- und -}
- literatem Haskell-Skript
  - Jede nicht durch > eingeleitete Zeile

    (Beachte: Kommentar- und Codezeilen müssen durch mindestens eine Leerzeile getrennt sein.)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Das Haskell-Vokabular

21 Schlüsselwörter, mehr nicht:

```
case  class  data  default  deriving  do  else
if  import  in  infix  infixl infixr  instance
let  module  newtype  of  then  type  where
```

Schlüsselwörter haben

- wie in anderen Programmiersprachen eine besondere Bedeutung und dürfen nicht als Identifikatoren für z.B. Funktionen oder Funktionsargumente verwendet werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Identifikatoren

...sind:

- Nichtleere Zeichenfolgen aus Klein- und Großbuchstaben, Ziffern, einfachen Hochkommata ′ und Unterstrichen _, die mit einem Buchstaben beginnen.

Die Verwendung des Identifikators (als Funktionsname, Typname, Typvariable, etc.) legt fest, ob der erste Buchstabe ein

- Kleinbuchstabe (z.B. für Funktionsnamen, Typvariablen)
- Großbuchstabe (z.B. für Typnamen)

sein muss.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Module Prelude: Standard-Präludium

Die Definitionen

- einiger der in diesem Kapitel beispielhaft betrachteten Rechenvorschriften und vieler weiterer allgemein nützlicher Deklarationen von Typen und Rechenvorschriften finden sich im vordefinierten Modul Prelude, dem sog. Standard-Präludium (engl. Standard Prelude).

Das quelloffene Standard-Präludium

- wird automatisch mit jedem Haskell-Programm geladen, so dass die darin definierten Typen und Rechenvorschriften stets zur Verfügung stehen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Tipp

Nachschlagen und lesen im Standard-Präludium ist

- gute und einfache Möglichkeit, sich mit der Syntax von Haskell vertraut zu machen und ein Gefühl für den Stil funktionaler Programmierung (in Haskell) zu entwickeln.

'Haskell 98'-Sprachbericht:

Simon Peyton Jones (Hrsg.). *Haskell 98: Language and Libraries. The Revised Report*. Cambridge University Press, 2003. `www.haskell.org/definitions`. (Kapitel 8, Standard Prelude; Kapitel 8.1, Module `Prelude`)

Standard-Präludium.
`http://www.haskell.org/onlinereport/standard-Prelude.html`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.2.1
1.2.2
1.2.3
1.2.4
1.2.5
1.2.6
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 1.3

Nützliche Werkzeuge für Haskell: Hugs, GHC, GHCi, Hoogle, Hayoo, Leksah

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Überblick

...beispielhaft 5 nützliche Werkzeuge für die funktionale Programmierung in Haskell:

1. Hugs: Ein Haskell-Interpretierer
2. GHC, GHCi: Ein Haskell-Übersetzer, ein Haskell-Interpretierer
3. Hoogle, Hayoo: Zwei Haskell(-spezifische) Suchmaschinen
4. Leksah: Eine (in Haskell geschriebene) quelloffene integrierte Entwicklungsumgebung IDE

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 1.3.1

Hugs

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Hugs

...ein (weiterhin) populärer Haskell-Interpretierer (mit allerdings eingestellter Entwicklung).

Hugs im Netz:

- `www.haskell.org/hugs`

Zur Arbeit mit Hugs siehe z.B.:

CC07 H. Conrad Cunningham. *Notes on Functional Program- ming with Haskell*. Course Notes, University of Mississippi, 2007. `citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.114.2822&rep=rep1&type=pdf` (Chapter 4, Using the Hugs Interpreter)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Hugs-Aufruf ohne Programmskript

Aufruf von Hugs ohne Skript:

```
hugs
```

Nach Aufruf steht die Taschenrechnerfunktionalität von Hugs (sowie im Prelude definierte Funktionen) zur Auswertung von Ausdrücken zur Verfügung:

```
Main>47*100+11
4711
Main>reverse "stressed"
"desserts"
Main>length "desserts"
8
Main>(4>17) || (17+4==21)
True
Main>True && False
False
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Hugs-Aufruf mit Programmskript

Aufruf von Hugs mit Skript:

```
hugs <filename>
```

Zum Beispiel:
```
hugs myFirstScript.hs
hugs myFirstScript.lhs
```

Nach Aufruf stehen zusätzlich zu den Präludiumsfunktionen auch alle im geladenen Skript deklarierten Funktionen zur Verfügung:

```
Main>fac 6
720
Main>binom' (49,6)
13.983.816
Main>sechs_aus_45
8.145.060
```

Das Hugs-Kommando `:l(oad)` erlaubt ein anderes Skript zu laden (wodurch ein eventuell vorher geladenes Skript ersetzt wird):

```
Main>:l myFirstScript.lhs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Wichtige Hugs-Kommandos

`:?`	Liefert Liste der Hugs-Kommandos
`:load <fileName>`	Lädt die Haskell-Datei `<fileName>` (erkennbar an Endung `.hs` bzw. `.lhs`)
`:reload`	Wiederholt letztes Ladekommando
`:quit`	Beendet den aktuellen Hugs-Lauf
`:info name`	Liefert Information über das mit `name` bezeichnete 'Objekt'
`:type exp`	Liefert den Typ des Argumentausdrucks `exp`
`:edit <fileName>.hs`	Öffnet die Datei `<fileName>.hs` enthaltende Datei im voreingestellten Editor
`:find name`	Öffnet die Deklaration von `name` im voreingestellten Editor
`!<com>`	Ausführen des Unix- oder DOS-Kommandos `<com>`

Alle Kommandos können mit dem ersten Buchstaben abgekürzt werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Hugs-Fehlermeldungen und -warnungen

- Fehlermeldungen
  - Syntaxfehler

    `Main> sechsAus45 == 123456)` ...liefert

    `ERROR: Syntax error in input (unexpected ‘)’)`
  - Typfehler

    `Main> sechsAus45 + False` ...liefert

    `ERROR: Bool is not an instance of class "Num"`
  - Programmfehler

    ...später
  - Modulfehler

    ...später
- Warnungen
  - Systemmeldungen

    ...später

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Bibliotheken: Professionell und praxisgerecht

- Haskell stellt umfangreiche Bibliotheken mit vielen vordefinierten Funktionen zur Verfügung.
- Das sog. Standard-Präludium (engl. Standard Prelude) wird automatisch beim Start von Hugs, GHCi geladen und stellt eine Vielzahl von Funktionen bereit, z.B. zum
  - Umkehren von Zeichenreichen bzw. allgemeiner von Listen beliebiger (Element-) Typen (`reverse`)
  - Ver- und entpaaren von Listen (`zip`, `unzip`)
  - Aufsummieren und Aufmultiplizieren von Elementen einer numerischen Liste (`sum`, `product`)
  - ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Namenskonflikte mit vordefinierten Namen

...soll eine Funktion eines gleichen (bereits in `Prelude.hs` vordefinierten) Namens deklariert werden, können Namenskonflikte durch verstecken (engl. hiding) vordefinierter Namen vermieden werden.

Am Beispiel von `reverse`, `zip`, `sum`:

- Füge die Zeile

  ```
  import Prelude hiding (reverse,zip,sum)
  ```

  am Anfang des Haskell-Skripts im Anschluss an die Modul-Anweisung (so vorhanden) ein; dadurch werden die vordefinierten Namen `reverse`, `zip` und `sum` verborgen, nicht importiert und sind damit frei, anders als im Präludium definiert zu werden.

  (Mehr dazu in Kapitel 17 im Zusammenhang mit Haskells Modulkonzept).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 1.3.2

GHC, GHCi

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

GHC, GHCi

...ein populärer Haskell-Compiler:

- Glasgow Haskell Compiler (GHC)

...und ein damit verbundener Interpretierer:

- GHCi (GHC interactive)

GHC und GHCi im Netz:

- `hackage.haskell.org/platform`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 1.3.3

Hoogle, Hayoo

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Hoogle, Hayoo

...zwei nützliche Suchmaschinen, um vordefinierte Funktionen (in Haskell-Bibliotheken) aufzuspüren.

Hoogle und Hayoo unterstützen die Suche nach

- Funktionsnamen
- Modulnamen
- Funktionssignaturen

Hoogle und Hayoo im Netz:

- `www.haskell.org/hoogle`
- `hayoo.fh-wedel.de`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 1.3.4

Leksah

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Leksah

...eine quelloffene in Haskell geschriebene IDE mit GTK-Oberfläche für Linux, Windows und MacOS.

Unterstützte Eigenschaften:

- Quell-Editor zur Quellprogrammerstellung.
- Arbeitsbereiche zur Verwaltung von Haskell-Projekten in Form eines oder mehrerer Cabal-Projekte.
- Cabal-Paketverwaltung zur Verwaltung von Versionen, Übersetzeroptionen, Testfällen, Haskell-Erweiterungen, etc.
- Modulbetrachter zur Projektinspektion.
- Debugger auf Basis eines integrierten ghc-Interpretierers.
- Erweiterte Editorfunktionen mit Autovervollständigung, 'Spring-zu-Fehlerstelle'-Funktionalität, etc.
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Leksah (fgs.)

Leksah im Netz:

- www.leksah.org

Anmerkung:

- Teils aufwändige Installation, oft vertrackte Versionsabhängigkeiten zwischen Komponenten.
- Für die Zwecke der LVA nicht benötigt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.3.1
1.3.2
1.3.3
1.3.4
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 1.4

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (1)


Christopher Allen, Julie Moronuki. *Haskell Programming from First Principles*. ebook. `http://haskellbook.com`


Sergio Antoy, Michael Hanus. *Functional Logic Programming*. Communications of the ACM 53(4):74-85, 2010.


John W. Backus. *Can Programming be Liberated from the von Neumann Style? A Functional Style and its Algebra of Programs*. Communications of the ACM 21(8):613-641, 1978.


Henri E. Baal, Dick Grune. *Programming Language Essentials*. Addison-Wesley, 1994. (Chapter 4, Functional Languages; Chapter 7, Other Paradigms)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (2)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 1, Motivation und Einführung)

Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 1, What is functional programming? Kapitel 2.1, A session with GHCi)

Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 1, Einführung; Kapitel 2, Programmierumgebung; Kapitel 4.1, Rekursion über Zahlen; Kapitel 6, Die Unix-Programmierumgebung)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (3)

H. Conrad Cunningham. *Notes on Functional Programming with Haskell*. Course Notes, University of Mississippi, 2007. citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.114.2822&rep=rep1&type=pdf (Chapter 1.2, Excerpts from Backus' 1977 Turing Award Address; Chapter 1.3, Programming Language Paradigms; Chapter 1.4, Reasons for Studying Functional Programming; Chapter 1.5, Objections Raised Against Functional Programming; Chapter 4, Using the Hugs Interpreter)

Hal Daumé III. *Yet Another Haskell Tutorial*. wikibooks.org-Ausgabe, 2007. https://en.wikibooks.org/wiki/Yet_Another_Haskell_Tutorial

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (4)


Antonie J.T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 1.1, The von Neumann Bottleneck; Kapitel 1.2, Von Neumann Languages)


Frank DeRemer, Hans H. Kron. *Programming-in-the-Large vs. Programming-in-the-Small*. IEEE Transactions on Software Engineering 2(2):80-86, 1976.


Atze Dijkstra, Jeroen Fokker, S. Doaitse Swierstra. *The Architecture of the Utrecht Haskell Compiler*. In Proceedings of the 2nd ACM SIGPLAN Symposium on Haskell (Haskell 2009), 93-104, 2009.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (5)


Atze Dijkstra, Jeroen Fokker, S. Doaitse Swierstra. *UHC Utrecht Haskell Compiler*, 2009. www.cs.uu.nl/wiki/UHC


Ernst-Erich Doberkat. *Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte*. Oldenbourg Verlag, 2012. (Kapitel 1, Erste Schritte; Anhang A, Zur Benutzung des Systems)


Chris Done. *Try Haskell*. Online Hands-on Haskell Tutorial. tryhaskell.org.


Robert W. Floyd. *The Paradigms of Programming*. Turing Award Lecture. Communications of the ACM 22(8):455-460, 1979.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (6)


Neal Ford. *Functional Thinking: Why Functional Programming is on the Rise*. IBM developerWorks, 11 pages, 2013. `www.ibm.com/developerworks/java/library/j-ft20/j-ft20-pdf.pdf`


Bastiaan Heeren, Daan Leijen, Arjan van IJzendoorn. *Helium, for Learning Haskell*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN 2003 Haskell Workshop (Haskell 2003), 62-71, 2003.


Konrad Hinsen. *The Promises of Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 11(4):86-90, 2009.


C.A.R. Hoare. *Algorithm 64: Quicksort*. Communications of the ACM 4(7):321, 1961.


C.A.R. Hoare. *Quicksort*. The Computer Journal 5(1):10-15, 1962.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (7)


Paul Hudak. *Conception, Evolution and Applications of Functional Programming Languages*. Communications of the ACM 21(3):359-411, 1989.


Paul Hudak, Joseph Fasel, John Peterson. *A Gentle Introduction to Haskell*. Technischer Bericht, Yale University, 1996. `https://www.haskell/org/tutorial`


John Hughes. *Why Functional Programming Matters*. The Computer Journal 32(2):98-107, 1989.


Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 1, Introduction; Kapitel 2, First Steps)


Arjan van IJzendoorn, Daan Leijen, Bastiaan Heeren. *The Helium Compiler*. www.cs.uu.nl/helium.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (8)


Mark P. Jones, Alastair Reid et al. *The Hugs98 User Manual*, 1999. `www.haskell.org/hugs`


Jerzy Karczmarczuk. *Scientific Computation and Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 1(3):64-72, 1999.


Donald E. Knuth. *Literate Programming*. The Computer Journal 27(2):97-111, 1984.


Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal. *The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II*. Computing in Science and Engineering 11(5):68-75, 2009.


Bruce MacLennan. *Functional Programming: Practice and Theory*. Addison-Wesley, 1990.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (9)


Mihai Maruseac. *Haskell: A Language for Modern Times*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 24(1):64-66, 2017.


Martin Odersky. *Funktionale Programmierung*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 599-612, 2006. (Kapitel 5.1, Funktionale Programmiersprachen; Kapitel 5.2, Grundzüge des funktionalen Programmierens)


Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 1, Getting Started)


Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 1, Was die Mathematik uns bietet; Kapitel 2, Funktionen als Programmiersprache)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (10)

Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung: Sprachdesign und Programmiertechnik*. Springer-V., 2006. (Kapitel 1, Grundlagen der funktionalen Programmierung)

Tomas Petricek, Jon Skeet. *Real World Functional Programming: With Examples in F# and C#*. Manning Publications Co., 2009. (Chapter 1, Thinking differently; Chapter 2, Core concepts in functional programming)

Simon Peyton Jones (Hrsg.). *Haskell 98: Language and Libraries. The Revised Report*. Cambridge University Press, 2003. `www.haskell.org/definitions`. (Kapitel 8, Standard Prelude; Kapitel 8.1, Module `Prelude`)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (11)


Chris Sadler, Susan Eisenbach. *Why Functional Programming?* In *Functional Programming: Languages, Tools and Architectures*, Susan Eisenbach (Hrsg.), Ellis Horwood, 9-20, 1987.


Neil Savage. *Using Functions for Easier Programming*. Communications of the ACM 61(5):29-30, 2018.


Curt J. Simpson. *Experience Report: Haskell in the "Real World": Writing a Commercial Application in a Lazy Functional Language*. In Proceedings of the 14th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2009), 185-190, 2009.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (12)

Simon Thompson. *Where Do I Begin? A Problem Solving Approach in Teaching Functional Programming*. In Proceedings of the 9th International Symposium on Programming Languages: Implementations, Logics, and Programs (PLILP'97), Springer-Verlag, LNCS 1292, 323-334, 1997.

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 1, Introducing functional programming; Kapitel 2, Getting started with Haskell and Hugs)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 1, Introducing functional programming; Kapitel 2, Getting started with Haskell and GHCi)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (13)


Reinhard Wilhelm, Helmut Seidl. *Compiler Design – Virtual Machines*. Springer-V., 2010. (Kapitel 3, Functional Programming Languages; Kapitel 3.1, Basic Concepts and Introductory Examples)


Hugs-Benutzerhandbuch. *The Hugs98 User Manual*. `https://www.haskell.org/hugs/pages/hugsman/index.html`


GHCi-Benutzerhandbuch. *Glasgow Haskell Compiler User's Guide*. `http://www.haskell.org/ghc/docs/latest/html/users_guide/ghci.html`


Haskells Standard-Präludium. `https://www.haskell.org/onlinereport/standard-prelude.html`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (14)

Welches Paradigma, welche Sprache sollte ich nutzen?


Peter J. Landin. *The next 700 Programming Languages*. Communications of the ACM 9(3):157-166, 1966.


Jeffrey S. Foster. *Shedding New Light on an Old Language Debate*. Communications of the ACM 60(10):90, 2017.


Baishakhi Ray, Daryl Posnett, Premkunar Devanbu, Vladimir Filkov. *A Large-Scale Study of Programming Languages and Code Quality in GitHub*. Communications of the ACM 60(10):91-100, 2017.


Rachel Harrison, L. G. Smaraweera, Mark R. Dobie, Paul H. Lewis. *Comparing Programming Paradigms: An Evaluation of Functional and Object-Oriented Programs*. Software Engineering Journal 11(4):247-254, 1996.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Quis leget haec?
Wer soll das lesen?

Persius (34 - 62 n.Chr.)
röm. Dichter

Non omnia possumus omnes!
Wir können nicht alle alles!
Wir können alle nicht alles!
Wir alle können nicht alles!

Vergil (70 - 19 v.Chr.)
röm. Dichter und Epiker

Nicht einmal alles lesen.
Jeder aber kann etwas,
auch einiges lesen.
Und sollte das.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Lege multum, non multa!
Lies viel, nicht vieles!

Plinius der Jüngere (um 61 - um 113 n.Chr.)
röm. Beamter und Schriftsteller
beschrieb den Ausbruch des Vesuvs im Jahr 79 n.Chr.

Drei Vorschläge:

1. Sie sind mit objektorientierter Programmierung groß geworden und fühlen sich dort heimisch?

   Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte von Ernst-Erich Doberkat könnte Ihre Wahl sein.

2. Sie möchten die Welt funktionaler Programmierung zugleich mit Beispielen weiterer funktionaler Sprachen erkunden?

   Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer von Peter Pepper bietet sich als Ihre Wahl an.

3. Sie suchen ein Buch, das möglichst weite Teile der Vorlesung überstreicht?

   Haskell: The Craft of Functional Programming von Simon Thompson könnte sich für Sie lohnen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
1.1
1.2
1.3
1.4
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Teil II

Grundlagen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 2

Vordefinierte Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Kapitel 2.1

Unstrukturierte, elementare Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Unstrukturierte, elementare Datentypen

...im Überblick:

- Ganze Zahlen: `Int`, `Integer` (Kap. 2.1.1)
- Gleitkommazahlen: `Float`, `Double` (Kap. 2.1.2)
- Wahrheitswerte: `Bool` (Kap. 2.1.3)
- Zeichen: `Char` (Kap. 2.1.4)

...angegeben in der Folge nach folgendem Schema:

- Typname
- Typtypische Werte (oder: Konstanten)
- Typtypische Operatoren und Relatoren

Für weitere Details siehe Haskell-Sprachbericht und Standard-Präludium.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 2.1.1

Ganze Zahlen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Ganze Zahlen: Int, Integer (1)

Typ	`Int`	Ganze Zahlen, -2^{63} bis $2^{63}-1$ oder -2^{31} bis $2^{31}-1$ (engl. fixed-precision integers)
Konstanten	`0 :: Int`	Null
	`42 :: Int`	Zweiundvierzig
	`-5 :: Int`	Minus fünf
	`...`	
Operatoren	`(+) :: Int -> Int -> Int`	Addition
	`(*) :: Int -> Int -> Int`	Multiplikation
	`(^) :: Int -> Int -> Int`	Exponentiation
	`(-) :: Int -> Int -> Int`	Subtraktion
	`- :: Int -> Int`	Vorzeichenwechsel
	`div :: Int -> Int -> Int`	Division
	`mod :: Int -> Int -> Int`	Divisionsrest
	`abs :: Int -> Int`	Absolutbetrag
	`negate :: Int -> Int`	Vorzeichenwechsel
	`...`	
	`fromInt :: Num a => Int -> a`	Typkonversion

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Ganze Zahlen: Int, Integer (2)

Relatoren

```
(==) :: Int -> Int -> Bool   gleich
(/=) :: Int -> Int -> Bool   ungleich
(>=) :: Int -> Int -> Bool   größer oder gleich
 (>) :: Int -> Int -> Bool   echt größer
(<=) :: Int -> Int -> Bool   kleiner oder gleich
 (<) :: Int -> Int -> Bool   echt kleiner
...
```

Vorgriff: Numerische Typen in Haskell: Ganze Zahlen, Gleitkommazahlen, rationale, komplexe Zahlen; zusammengefasst in der Typklasse `Num` (vgl. `fromInt :: Num a => Int -> a`, siehe Kap. 4.3).

Begriffsklärung: Operatoren und Relatoren sind syntaktische Begriffe, Operationen und Relationen semantische Begriffe. Die Bedeutung (d.h. Semantik) eines Operators ist eine Operation, eines Relators eine Relation. Ergebnistyp einer Relation ist der Typ der Wahrheitswerte, einer Operation ein davon verschiedener Typ. Beispiele: Zum bedeutungslosen syntaktischen Operator + gehört die Addition als bedeutunggebende Operation; zum bedeutungslosen syntaktischen Relator == gehört die Gleichheit als bedeutunggebende Relation.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Ganze Zahlen: Int, Integer (3)

Typ	`Integer`	Ganze Zahlen, keine Bereichsbeschränkung (engl. arbitrary-precisision integers)
Konstanten	`0 :: Integer`	Null
	`42 :: Integer`	Zweiundvierzig
	`-5 :: Integer`	Minus fünf
	`939483078538083273234 :: Integer`	'Große' Zahl
	...	
Operatoren	`(+) ::`	
	`  Integer -> Integer -> Integer`	Addition
	...	
	`fromInteger ::`	
	`  Num a => Integer -> a`	Typkonversion
Relatoren	...	

Konstanten, Operatoren und Relatoren für `Integer` wie für `Int`, jedoch keine *a priori* Zahlbereichsbeschränkung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 2.1.2

Gleitkommazahlen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Gleitkommazahlen: `Float`, `Double` (1)

Typ	`Float`	Gleitkommazahlen (32 Bit-Darstellung)
Konstanten	`0.125 :: Float`	Ein Achtel
	`-1.75 :: Float`	Minus eindreiviertel
	`8.5e-2 :: Float`	Achteinhalbhundertstel
	`...`	
Operatoren	`(+) :: Float -> Float -> Float`	Addition
	`(*) :: Float -> Float -> Float`	Multiplikation
	`...`	
	`sqrt :: Float -> Float`	(positive) Quadratwurzel
	`sin :: Float -> Float`	sinus
	`cos :: Float -> Float`	cosinus
	`...`	
	`ceiling :: Float -> Int`	Typkonversion
	`floor :: Float -> Int`	Typkonversion
	`round :: Float -> Int`	Typkonversion

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Gleitkommazahlen: `Float`, `Double` (2)

Relatoren

```
(==) :: Float -> Float -> Bool   gleich
(/=) :: Float -> Float -> Bool   ungleich
(>=) :: Float -> Float -> Bool   größer oder gleich
 (>) :: Float -> Float -> Bool   echt größer
(<=) :: Float -> Float -> Bool   kleiner oder gleich
 (<) :: Float -> Float -> Bool   echt kleiner
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Gleitkommazahlen: `Float`, `Double` (3)

Typ	`Double`	Gleitkommazahlen (64 Bit-Darstellung)
Konstanten	...	
Operatoren	...	
Relatoren	...	

Konstanten, Operatoren, Relatoren für `Double` wie für `Float`, jedoch mit doppelter Genauigkeit (64 statt 32 Bit-Darstellung).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 2.1.3

Wahrheitswerte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Wahrheitswerte: Bool

Typ	`Bool`	Wahrheitswerte
Konstanten	`True :: Bool`	Darstellung v. 'wahr'
	`False :: Bool`	Darstellung v. 'falsch'
Vordef. Name	`otherwise :: Bool`	(Bedingte Ausdrücke:
	`otherwise = True`	Stets erfüllter Wächter)
Operatoren	`(&&) :: Bool -> Bool -> Bool`	Konjunktion
	`(||) :: Bool -> Bool -> Bool`	Disjunktion
	`not :: Bool -> Bool`	Negation
Relatoren	`(==) :: Bool -> Bool -> Bool`	gleich
	`(/=) :: Bool -> Bool -> Bool`	ungleich
	`(>) :: Bool -> Bool -> Bool`	echt größer
	`...`	

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 2.1.4

Zeichenwerte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Zeichen: Char

Typ	`Char`	Zeichen (Literal) (Unicode-Darst.)
Konstanten	`'a' :: Char`	Darst. von a
	...	
	`'Z' :: Char`	Darst. von Z
	`'\t'::  Char`	Tabulator
	`'\n'::  Char`	Neue Zeile
	`'\\'::  Char`	'backslash'
	`'\''  :: Char`	Hochkomma
	`'\"'::  Char`	Anführungszeichen
	...	
Operatoren	`ord :: Char -> Int`	Konversionsfkt.
	`chr :: Int -> Char`	Konversionsfkt.
	...	
Relatoren	`(==) :: Char -> Char -> Bool`	gleich
	`(>)  :: Char -> Char -> Bool`	echt größer
	...	

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.1.1
2.1.2
2.1.3
2.1.4
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 2.2

Strukturierte Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 2.2.1

Tupel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Tupelwerte, Tupeltypen

Tupel

- fassen eine vorbestimmte Zahl von Werten möglicherweise verschiedener Typen zusammen.
- sind in diesem Sinn heterogen.

Statt Tupeltyp sprechen wir auch von Kreuzprodukttyp.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Allgemeines Muster

- Allgemeines Muster für Tupelwerte

  `(v1,v2,...,vk) :: (T1,T2,...,Tk)`

  Dabei bezeichnen `v1,...,vk` Werte und `T1,...,Tk` Typen mit

  `v1 :: T1, v2 :: T2,..., vk :: Tk`

- Standardkonstruktor (runde Klammern mit Beistrich(en))
  - Leerer Tupelkonstruktor:

    `() :: ()` (exotisch, aber sinnvoll, s. Kap. 15)
  - Paarkonstruktor:

    ```
    (,) :: a -> b -> (a,b)
    ```
  - Tripelkonstruktor:

    ```
    (,,) :: a -> b -> c -> (a,b,c)
    ```
  - Quadrupelkonstruktor:

    ```
    (,,,) :: a -> b -> c -> d -> (a,b,c,d)
    ```
  - ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Beispiele für Tupel

Beispiele:

```
(,) 3.14 17.4 ->> (3.14,17.4) :: (Float,Float)
(,) 'a' True  ->> ('a',True) :: (Char,Bool)
(,) "Fun" 3   ->> ("Fun",3) :: (String,Int)
(,) ("Fun",3) True
      ->> (("Fun",3),True) :: ((String,Int),Bool)
(,,) 5 8 6.5 ->> (5,8,6.5) :: (Int,Int,Float)
(,,,) 'b' False "Fun" 3
      ->> ('b',False,"Fun",3) :: (Char,Bool,String,Int)
p = (,,,) 'b' False :: a -> b -> (Char,Bool,a,b)
p "Fun" 3
      ->> ('b',False,"Fun",3) :: (Char,Bool,String,Int)
p 2.1 True
      ->> ('b',False,2.1,True) :: (Char,Bool,Float,Bool)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Standardselektoren für Zweitupel, Paare

Standardselektoren (vordefiniert ausschließlich für Paare):

```
fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x

snd :: (a,b) -> b
snd (_,y) = y
```

Aufrufbeispiele:

```
fst (3.14,'a') ->> 3.14
snd (3.14,'a') ->> 'a'
```

Bemerkung: Für drei- und mehrstellige Tupel bietet Haskell keine vordefinierten (Selektor-) Funktionen für den Zugriff auf Tupelkomponenten an.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Selektoren für Tripel

Selbstdefinierte Selektoren für Tripel:

```
fst' :: (a,b,c) -> a
fst' (x,_,_) = x

snd' :: (a,b,c) -> b
snd' (_,y,_) = y

thd' :: (a,b,c) -> c
thd' (_,_,z) = z
```

Aufrufbeispiele:

```
fst' (3.14,'a',True) ->> 3.14
snd' (3.14,'a',True) ->> 'a'
thd' (3.14,'a',True) ->> True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 2.2.2

Listen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Listen

Listen, Listentypen

- fassen eine nicht vorbestimmte Zahl von Werten gleichen Typs zusammen.
- sind in diesem Sinn homogen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Allgemeines Muster

- Allgemeines Muster für Listenwerte

  `v1 : (v2 : (.. : (vk : [])..)) = [v1,v2,..,vk] :: [T]`

  Dabei bezeichnen `v1,...,vk` Werte und `T` einen Typ mit `v1, v2,..., vk :: T`

- Standardkonstruktor (:), zusätzlich eckige Klammern als Listenoperator für kompaktere Schreibweise
  - Allgemein:

    ```
    v1 : (v2 : (.. : (vk : [])..)) :: [a]    (Standard)
    [v1,v2,..,vk] :: [a]                     (Abgekürzt)
    ```

  - Konkret:

    ```
    1 : (2 : (3 : (4 : []))) :: [Int]    (Standard)
    [1,2,3,4] :: [Int]                   (Abgekürzt)
    [] :: [a]                            (Leere Liste)
    ```

    Erinnerung:
    ```
    quickSort []     = []
    quickSort (n:ns) = ...
    ```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Beispiele für Listen (1)

...von

- Ganze Zahlen
  `[2,5,17,2,4,42,4711] :: [Int]`
- Gleitkommazahlen
  `[3.14,5.0,-12.21] :: [Float]`
- Wahrheitswerte
  `[True,False,True] :: [Bool]`
- Zeichen
  `['a','B','c','$','D','e','@','$','#'] :: [Char]`
- ohne Elemente, leere Liste (bel. Typs)
  `[] :: [a]`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Beispiele für Listen (2)

...von

- Tupeln

```
[('a',True),('b',False),('c',False),
 ('d',False),('e',True)] :: [(Char,Bool)]

[(3,5,4.0),(4,7,5.5),(2,8,5.0),(2,11,6.5)]
                                :: [(Int,Int,Float)]
```

- Listen

```
[[1,2,3],[9],[],[17,4,21],[],[3,2]] :: [[Int]]

[(['f','p'],2),(['h'],1),([],0)] :: [([Char],Int)]

[("fun",3),("h",1),("",0)] :: [([Char],Int)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Beispiele für Listen (3)

...von

- Zeichenreihen

```
["sin","cos","tan","sin","cos","tan"] :: [[Char]]
```

- Funktionen

```
[sin,cos,tan,sin,cos,tan] :: [Float -> Float]

[(+),(*),ggt,mod] :: [Int -> Int -> Int]

[binom′,binom″] :: [(Integer,Integer) -> Integer]

[binom,binom] :: [Integer -> Integer -> Integer]
```

- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Vergleichbarkeit und Gleichheit von Listen (1)

Nur typgleiche Listenwerte sind vergleichbar:

```
cs = [‘a‘,‘b‘,‘c‘] :: [Char]
ss = ["a","b","c"] :: [String]
xs = "abc" :: String

ns = [1,2,3] :: [Int]
ms = [1,2,3] :: [Integer]

fs = [1.0,2.0,3.0] :: [Float]
ds = [1.0,2.0,3.0] :: [Double]

cs == ns ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
ns == fs ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
ns == ms ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
fs == ds ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"

ns == ns ->> True
fs == fs ->> True

cs == ss ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
ss == xs ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"

cs == xs ->> True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Vergleichbarkeit und Gleichheit von Listen (2)

Nur typgleiche Listen gleicher Länge u. Anordnung sind gleich:

```
ns = [1,2,3,4]
ms = [1,2,3]
ks = [1,2,3,4,5]
ls = [2,1,4,3]

ns == ns ->> True

ns == ms ->> False
ns == ks ->> False
ns == ls ->> False

[17,4,21] :: [Int] == [17,4,21] :: [Int] ->> True
[17,4,21] :: [Int] == [17,4,21] :: [Integer] ->>
                    "Fehler: Typfehler in Anwendung"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Vergleichbarkeit und Gleichheit von Listen (3)

Auch ‘leere’ Listen sind nur typabhängig vergleichbar:

```
[] == [] ->> True

[] :: [Int] == [] :: [Int] ->> True

[] :: [Int] == [] :: [Integer]
    ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
[] :: [Float] == [] :: [Double]
    ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"

bs = [] :: [Bool]
cs = [] :: [Char]
bs == cs ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
bs /= cs ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"

xs = []
ys = []
xs == ys ->> True
xs /= ys ->> False
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Vordefinierte Funktionen auf Listen (1)

Name und Typ	Bedeutung und Beispiel
`(:) :: a -> [a] -> [a]`	Anfügen eines Elements am Anfang einer Liste: `5:[3,2] ->> [5,3,2]`
`(++) :: [a] -> [a] -> [a]`	Aneinanderhängen zweier Listen: `[11,7] ++ [5,3,2] ->> [11,7,5,3,2]`

`(!!) :: [a] -> Int -> a`	Zugreifen auf ein Listenelement:
	`[5,3,2]!!0 ->> 5`
	`[5,3,2]!!1 ->> 3`

`concat :: [[a]] -> [a]`	Verschmelzen einer Liste von Listen zu einer Liste:
	`concat [[11,7],[5,3,2]]`
	`->> [11,7,5,3,2]`

`reverse :: [a] -> [a]`	Umkehren einer Liste: `reverse [5,3,2] ->> [2,3,5]`

...und viele mehr (siehe Standard-Präludium).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Vordefinierte Funktionen auf Listen (2)

...drei Beispiele vordefinierter Funktionen auf Listen mit ihrer Implementierung.

Die Funktion `length` (Länge einer Liste):

```
length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (x:xs) = 1 + length xs
```

Aufrufbeispiele:

```
length [1,2,3]                 ->> 3
length [[1],[2,3],[4,5,6]] ->> 3
length [sin,cos,tan]           ->> 3
length ["sin","cos","tan"] ->> 3
length []                      ->> 0
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Vordefinierte Funktionen auf Listen (3)

Die Funktionen `head` und `tail` (Kopf und Rest einer Liste):

```
head :: [a] -> a
head (x:_) = x

tail :: [a] -> [a]
tail (_:xs) = xs
```

Aufrufbeispiele:

```
head [1,2,3]                  ->> 1
head [[1],[2,3],[4,5,6]]      ->> [1]
head [sin,cos,tan]          `->> sin`
head [sin,cos,tan] (pi/2)     ->> 1.0

tail [1,2,3]                  ->> [2,3]
tail [[1],[2,3],[4,5,6]]      ->> [[2,3],[4,5,6]]
tail [sin,cos,tan]          `->> [cos,tan]`
tail ["sin","cos","tan"]      ->> ["cos","tan"]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Listenaufzählungsausdrücke

...zur automatischen Generierung von Listen über Typen geordneter aufzählbarer Werte (Typen der Typklasse `Enum`):

```
[2..10]          ->> [2,3,4,5,6,7,8,9,10]
[2,4..10]        ->> [2,4,6,8,10]
[2,4..11]        ->> [2,4,6,8,10]
[2,4..12]        ->> [2,4,6,8,10,12]
[11,9..3]        ->> [11,9,7,5,3]
[11,9..2]        ->> [11,9,7,5,3]
[11,10..2]       ->> [11,10,9,8,7,6,5,4,3,2]
[11..2]          ->> []
['a','c'..'g']   ->> ['a','c','e','g'] ->> "aceg"
['a','c'..'h']   ->> ['a','c','e','g'] ->> "aceg"
[0.0,0.3..1.2] ->> [0.0,0.3,0.6,0.9,1.2]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Listenkomprehension

...Zusammenfassung, Vereinigung von Mannigfaltigkeiten zu einer Einheit (Philos.):

- In funktionalen Sprachen ein weiteres wichtiges Sprachkonstrukt für automatische Listengenerierung!
- Alleinstellungsmerkmal funktionaler Sprachen!

Beispiele:

```
ns = [1..10] (== [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10])

[3*n | n <- ns] ->> [3,6,9,12,15,18,21,24,27,30]
[n | n <- ns, odd(n)] ->> [1,3,5,7,9]
[n | n <- ns, even(n), n>5] ->> [6,8,10]
[n*(n+1) | n <- ns, (even(n) || n>5)]
                          ->> [6,20,42,56,72,90,110]
[p | n <- ns, m <- ns, n<=3, m>=9, let p=m*n]
                          ->> [9,10,18,20,27,30]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Syntaktischer Zucker

Beachte folgende Gleichheiten und abkürzende Schreibweisen:

```
    (1:(2:(3:[])))              (Standarddarstellung)
 == 1:2:3:[]                    (Rechtsassoziativität)
 == [1,2,3]                     (Syntaktischer Zucker)
```

...Typisierungen und überladene Schreibweisen:

```
[] :: [a]

[1,2,3]
ns = [1,2,3] :: [Int]
ms = [1,2,3] :: [Integer]

[1,2,3] :: Num a => [a]     (Gleiche Schreibweise,
ns :: [Int]                    verschiedene Typen,
ms :: [Integer]              Überladung von [1,2,3])
```

...überprüfbar in Hugs mittels des Kommandos `:t`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 2.2.3

Zeichenreihen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Zeichenreihenwerte, Zeichenreihentyp

Zeichenreihen (engl. Strings)

- fassen eine nicht vorbestimmte Zahl von Werten des Typs Zeichen `Char` zusammen.
- sind spezielle Listen und deshalb ebenfalls homogen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Zeichenreihen: `String`

Zeichenreihen sind in Haskell über dem Datentyp Liste realisiert, als Listen von Zeichen, kurz Zeichenlisten:

Typ	`[Char]`	Zeichenlisten
Bezeichner	`String`	Typsynonym

Vereinbarung	`'data [a] = [] | a:[a]`
	`deriving (Eq,Ord)'`
	`type String = [Char]`
		Kein zulässiges Haskell; nur zur Illustration

Konstanten	`['F','u','n'] :: String`
	`"Fun" :: String`
	`[] :: String`
	`"" :: String`
		Zwei Darst. der Z-Reihe 'Fun' und der leeren Z-Reihe

Operatoren	`(++) :: String -> String -> String` ...	Konkatenation
Relatoren	`(==) :: String -> String -> Bool` `(/=) :: String -> String -> Bool`	gleich ungleich

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Beispiele mit Zeichenreihen

...zu Konstruktion und Gleichheitstests:

```
"Fun"       == ['F','u','n']              ->> True
['F','u','n'] == ('F' : ('u' : ('n' : []))) ->> True
"Fun"       == ('F' : ('u' : ('n' : []))) ->> True

['H','e','l','l','o'] ++ "," ++ " " ++ "world!"
                       == "Hello, world!" ->> True

"a" == 'a'    ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
"a" == ['a'] ->> True
"a" == []    ->> False
 'a' == []    ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Vordefinierte Funktionen auf Zeichenreihen

...Zeichenreihen sind Listen über dem Zeichentyp `Char`, mithin Listen:

```
type String = [Char]
```

Deshalb stehen alle auf Listen vordefinierte Operatoren und Relatoren auch auf Zeichenreihen unmittelbar zur Verfügung.

Beispiele:

```
['H','e','l','l','o'] ++ "," ++ " " ++ "world!"
                                  ->> "Hello, world!"
['H','e','l','l' ,'o'] ++ "," ++ " " ++ "world!"
                        == "Hello, world!" ->> True
length "Hello, world!" ->> 13
head "Hello, world!" ->> 'H'
tail (tail "Hello, world!") ->> "llo, world!"
head (tail (tail "Hello, world!")) ->> 'l'
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.2.1
2.2.2
2.2.3
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 2.3

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 2 (1)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 2, Einfache Datentypen; Kapitel 5.1, Listen; Kapitel 5.2, Tupel; Kapitel 5.3, Zeichenreihen)

Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 1998. (Kapitel 2, Simple datatypes; Kapitel 4, Lists)

Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 2, Expressions, types, and values; Kapitel 4, Lists)

Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 1, Elemente funktionaler Programmierung)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 2 (2)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 3.1, Basic concepts; Kapitel 3.2, Basic types; Kapitel 3.3, List types; Kapitel 3.4, Tuple types; Kapitel 5, List comprehensions)

Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 1, An Intro to Lists, Tuples; Kapitel 2, Common Haskell Types)

Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 2, Types and Functions – Useful Composite Data Types: Lists and Tuples, Functions over Lists and Tuples)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 2 (3)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 3.2, Elementare Strukturen; Kapitel 15, Listen (Sequenzen))

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 3, Basic types and definitions; Kapitel 5, Data types, tuples and lists)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
2.1
2.2
2.3
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Kapitel 3

Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 3.1

Definition, Schreibweisen, Sprachkonstrukte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionen

...sind wichtigstes Abstraktions- und Ausdrucksmittel in funktionaler Programmierung.

Funktionale Programmiersprachen bieten deshalb oft mehrere Schreibweisen an, um Funktionen zu definieren. So ist

```
fac :: Int -> Int
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
```

nur eine Möglichkeit, die Fakultätsfunktion in Haskell zu definieren:

$$! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Prägnanz d. Vermeiden bedingter Ausdrücke

Haskell bietet weitere Schreibweisen an, die meist knapper, konziser und deshalb übersichtlicher und verständlicher sind, insbesondere durch weitere Möglichkeiten

- Fallunterscheidungen

anders als durch bedingte Ausdrücke wie in

```
fac :: Int -> Int
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
```

Bedingter Ausdruck

auszudrücken, insbesondere

- bewachte Ausdrücke
- Muster

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (1)

(1) Mittels bedingter Ausdrücke:

```
fac :: Int -> Int
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
```

Bedingter Ausdruck

(2) Mittels bewachter Ausdrücke:

```
fac :: Int -> Int
fac n
  | n == 0          = 1
  | otherwise = n * fac (n-1)      (otherwise, der
                                    stets erfüllte
                                    Wächter)

otherwise :: Bool
otherwise = True
```

Wächter *Bewachter Ausdruck*

Wächter *Bewachter Ausdruck*

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (2)

(3a) Mittels Muster (hier für ganze Zahlen):

```
fac :: Int -> Int                -- Fakultätsfunktion
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n - 1)

fib :: Int -> Int                -- Fibonacci-Funktion
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = fib (n-2) + fib (n-1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (3)

(3b) Mittels Muster (hier für Zeichen):

```
capitalizeVowels :: Char -> Char
capitalizeVowels = capVow

capVow :: Char -> Char
capVow 'a' = 'A'
capVow 'e' = 'E'
capVow 'i' = 'I'
capVow 'o' = 'O'
capVow 'u' = 'U'
capVow  c  =  c
```

(3c) Mittels Muster (hier für Wahrheitswerte):

```
xor :: Bool -> Bool -> Bool
xor True  False = True
xor False True  = True
xor b1    b2    = False
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (4)

(3d) Mittels Muster (hier für Listen):

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
```

Muster leere Liste

```
quickSort (n      :     ns)
```

Muster Listenkopf *Muster Listenrest*

Muster nichtleere Liste

```
          = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
            ++ [n]
            ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (5)

(3e) Mittels Muster, hier zusätzlich mit 'wild card'-Muster:

```
mult :: Int -> Int -> Int
mult 0 _ = 0
mult _ 0 = 0
mult 1 y = y
mult x 1 = x
mult x y = x*y

tail :: [a] -> [a]
tail (_:xs) = xs
tail _      = error "Liste darf nicht leer sein."

nand :: Bool -> Bool -> Bool
nand False _ = True
nand _ False = True
nand _ _     = False    (auch in xor ist _ mögl.)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (6)

Mittels Muster und...

(4) case-Ausdrucks:

```
capVow :: Char -> Char
capVow c = case c of 'a' -> 'A'
                     'e' -> 'E'
                     'i' -> 'I'
                     'o' -> 'O'
                     'u' -> 'U'
                     otherwise -> c

describeList :: [a] -> String
describeList ls
 = "The list ls "
    ++ case ls of []       -> "is empty."
                  (x:[])   -> "is a singleton list."
                  (x:y:[]) -> "has two elements."
                  _ -> "has three or more elements."
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (7)

Mittels Muster und...

(5a) lokaler Deklarationen (`where`-Konstrukt, nachgestellt):

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = quickSort smaller
                   ++ [n]
                   ++ quickSort larger
                   where
                    smaller = [m | m<-ns, m<=n]
                    larger  = [m | m<-ns, m>n]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (8)

Mittels Muster und...

(5b) lokaler Deklarationen (`let`-Konstrukt, vorgestellt):

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = let
                    smaller = [m | m<-ns, m<=n]
                    larger  = [m | m<-ns, m>n]
                   in (quickSort smaller
                       ++ [n]
                       ++ quickSort larger)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (9)

In einer Zeile mittels `where`-Konstrukts und...

(6a) Semikolons ';':

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) =
 quickSort smaller ++ [n] ++ quickSort larger
 where smaller = [m|m<-ns, m<=n]; larger = [m|m<-ns, m>n]
```

In einer Zeile mittels `let`-Konstrukts und...

(6b) Semikolons ';':

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) =
 let smaller = [m|m<-ns, m<=n]; larger = [m|m<-ns, m>n]
 in (quickSort smaller ++ [n] ++ quickSort larger)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (10)

(7a) Mittels anderer Funktionen (argumentbehaftet):

```
fac :: Int -> Int
fac n = foldl (*) 1 [1..n]

foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl f z []     = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs

fac :: Int -> Int
fac n = product [1..n]

product :: (Num a) => [a] -> a
product ns = foldl (*) 1 ns    -- argumentbehaftet
-- Gleichbedeutend:
product = foldl (*) 1          -- argumentfrei
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (11)

(7b) Mittels anderer Funktionen (argumentfrei):

```
factorial :: Int -> Int
factorial = fac

qs :: [Integer] -> [Integer]
qs = quickSort
```

...wenn z.B. der Name `fac` zu wenig sprechend, der Name `quickSort` zu lang erscheint (vgl. auch das Funktionenpaar `capitalizeVowels` und `capVow`).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (12)

(7b) Mittels anderer Funktionen (argumentfrei), fgs.:

```
and :: Bool -> Bool -> Bool
and = (&&)
```

Zusätzlich zu Ausdrücken der Form:

```
  (x>0) && (y<0)      (&&) (x>0) (y<0)
```

sind nun auch Ausdrücke der Form:

```
 (x>0) `and` (y<0)      and (x>0) (y<0)
```

möglich!

```
(./.) :: Integer -> Integer -> Integer
(./.) = div
```

Zusätzlich zu Ausdrücken der Form:

```
  div 5 2      5 `div` 2
```

sind nun auch Ausdrücke der Form:

```
  5 ./. 2      (./.) 5 2
```

möglich!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (13)

(8) Mittels anonymer Funktionen (argumentfrei):

```
fac = \n -> (if n == 0 then 1 else n * fac (n-1))
```

Anonyme λ–Abstraktion

Die Schreibweise ist

- Reminiszenz an den funktionaler Programmierung zugrundeliegenden λ-Kalkül:
  - Im λ-Kalkül: $\lambda x\, y.\ x + y$
  - In Haskell: `\x y -> x+y`

Anwendung in Haskell:

- Immer dann, wenn der Funktionsname keine Rolle spielt:

```
map (\n -> 2*n+1) [1,2,3] ->> [3,5,7]
map (\n -> n*n-1) [1,2,3] ->> [0,3,8]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Verwendungshinweise: Bewachte Ausdrücke (1)

Funktionen sind außer in den einfachsten Fällen fast immer über Fallunterscheidungen definiert.

- Bewachte Ausdrücke führen meist zu besserer Lesbarkeit als (geschachtelte) bedingte Ausdrücke.

Vergleiche:

```
signum :: Int -> Int
signum n
  | n < 0  = -1
  | n == 0 = 0
  | n > 0  = 1
```

```
signum' :: Int -> Int
signum' n
  | n < 0     = -1
  | n == 0    = 0
  | otherwise = 1
```

(Ein Tick effizienter!)

mit:

```
signum'' :: Int -> Int
signum'' n = if n < 0 then -1 else
                 if n == 0 then 0 else 1
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Verwendungshinweise: Bewachte Ausdrücke (2)

Mischformen sind möglich, aber mindestens auf die Weise wie hier gar nicht schön, sinnvoll oder empfehlenswert:

```
signum''' :: Int -> Int
signum''' n
  | n < 0      = -1
  | otherwise = if n == 0 then 0 else 1
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Verwendungshinweise: Muster (1)

Funktionen arbeiten häufig auf strukturierten Werten.

- Musterbasierte Definitionen sind meist am zweckmäßigsten und übersichtlichsten (weil sie die Struktur offenlegen, wodurch Selektoren wie in `binom''` unnötig werden).

Vergleiche:

```
binom' :: (Int,Int) -> Int
binom' (n,k)
  | k==0 || n==k = 1
  | otherwise    = binom' (n-1,k-1) + binom' (n-1,k)
```

mit:

```
binom'' :: (Int,Int) -> Int
binom'' p
  | snd(p) == 0 || fst(p) == snd(p) = 1
  | otherwise = binom'' (fst(p)-1,snd(p)-1)
                + binom'' (fst(p)-1,snd(p))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Verwendungshinweise: Muster (2)

Vorteile musterbasierter Funktionsdefinitionen:

Muster

- legen die Struktur des (Argument-) Werts offen
- legen Namen für die verschiedenen Strukturteile des Werts fest und erlauben über diese Namen unmittelbaren Zugriff auf diese Teile
- vermeiden dadurch sonst nötige Selektorfunktionen

und führen dadurch zu einem

- Gewinn an Lesbarkeit und Transparenz!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Bezeichnungskonventionen für Muster (1)

Für Int(eger)-Werte: n, m,...
für Listen von Int(eger)-Werten: ns, ms,...

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                   ++ [n]
                   ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

Für Werte beliebigen Typs: x, y,...
für Listenwerte beliebigen Typs: xs, ys,...

```
quickSort :: Ord a => [a] -> [a]
quickSort []     = []
quickSort (x:xs) = quickSort [y | y <- xs, y <= x]
                   ++ [x]
                   ++ quickSort [y | y <- xs, y > x]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Bezeichnungskonventionen für Muster (2)

- Für Zeichen-Werte: `c`, `c'`, `d`,...
  für Listen von Zeichen-Werten: `cs`, `cs'`, `ds`,...
- Für Ziffern-Werte: `d`, `d'`, `e`,...
  für Listen von Ziffern-Werten: `ds`, `ds'`, `es`,...
- Für Wahrheitswerte: `b`, `b'`,...
  für Listen von Wahrheitswerten: `bs`, `bs'`,...
- Für ganze Zahlen: `n`, `n'`, `m`,...
  für Listen ganzer Zahlen: `ns`, `ns'`, `ms`,...
- Für Werte beliebigen Typs: `x`, `x'`, `y`, `y'`,...
  für Listen von Werten beliebigen Typs: `xs`, `xs'`, `ys`, `ys'`,...
- Für Listen von Listen-Werten: `nss`, `mss`, `xss`, `yss`,...
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Muster

...sind (soweit wie bislang eingeführt):

- Konstanten eines Typs (z.B. `0`, `42`, `3.14`, `False`, `True`, `'c'`, `"c"`, `"fun"`, `""`, `[]`,...)
  ...ein Argumentwert passt mit dem Muster zusammen, wenn es wertgleich mit der Konstanten ist.
- Variablen (z.B. `n`, `x`, `c`,...)
  ...jeder Argumentwert passt.
- Wild card '_'
  ...jeder Argumentwert passt (Verwendung von "_" für alle Argumentwerte, die nicht zum Ergebnis beitragen; siehe `mult`, `tail`, `nand`,...).
- Zusammengesetzte Muster, bis jetzt für Tupel und Listen (z.B. `[]`, `[x]`, `(x:[])`, `(x:y:[])`, `(x:y:z:[])`, `(x:xs)`, `(x:y:xs)`, `(m,n)`, `(m,_)`, `(_,_)`, `(x,y,z)`, `(x,_,z)`,...)
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 3.2

Funktionssignaturen, Funktionsterme, Funktionsstelligkeiten

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Überblick

Funktions-

- Signaturen
- Terme
- Stelligkeiten

und damit verbundene

- Klammereinsparungsregeln in Haskell.

Das Wichtigste auf einen Blick:

- (Funktions-) Signaturen sind rechtsassoziativ geklammert.
- (Funktions-) Terme sind linksassoziativ geklammert.
- (Funktions-) Stelligkeit ist 1.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Als Beispiel: Die Editorfunktion ‘ersetze’

...eine Funktion, die in einem Text das n-te Vorkommen einer Zeichenreihe s durch eine Zeichenreihe s' ersetzt.

Implementierung in Haskell

```
type Txt  = String
type Vork = Int
type Alt  = Txt
type Neu  = Txt
ersetze :: (Txt -> (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt))))
```

...angewendet auf einen Text t, eine Vorkommensnummer n und zwei Zeichenreihen s und s' ist das Resultat der Anwendung von `ersetze` ein Text t', in dem das n-te Vorkommen von s in t durch s' ersetzt ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Eine Anwendung, ein Aufruf von ersetze

Die Funktion, noch einmal wiederholt:

```
type Txt  = String
type Vork = Int
type Alt  = Txt
type Neu  = Txt
ersetze :: (Txt -> (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt))))
```

Konkrete Argumentwerte:

```
"Ein alter Text" :: Txt
1                :: Vork
"alter"          :: Alt
"neuer"          :: Neu
```

Die Auswertung:

```
ersetze "Ein alter Text" 1 "alter" "neuer"
≙ ((((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer")
                              ->> "Ein neuer Text" :: Txt
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schrittweise Auswertung (1)

...`ersetze` und die nach fortgesetzter Argumentkonsumation entstehenden Funktionsterme sind mit Ausnahme des letzten von funktionalem Typ.

Schritt 1: Der Funktionsterm `ersetze` konsumiert **ein** Argument, den Wert `"Ein alter Text"` vom Typ `Txt`. Der dadurch entstehende Funktionsterm ist von funktionalem Typ:

```
(ersetze "Ein alter Text") ::
                        (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt)))
```

Schritt 2: Der Funktionsterm `(ersetze "Ein alter Text")` konsumiert **ein** Argument, den Wert `1` vom Typ `Vork`. Der dadurch entstehende Funktionsterm ist von funktionalem Typ:

```
((ersetze "Ein alter Text") 1) :: (Alt -> (Neu -> Txt))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Schrittweise Auswertung (2)

Schritt 3: Der Funktionsterm `((ersetze "Ein alter Text") 1)` konsumiert **ein** Argument, den Wert `"alter"` vom Typ `Alt`. Der dadurch entstehende Funktionsterm ist von funktionalem Typ:

```
(((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") :: (Neu -> Txt)
```

Schritt 4: Der Funktionsterm `(((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter")` konsumiert **ein** Argument, den Wert `"neuer"` vom Typ `Neu`. Der dadurch entstehende Term ist von nichtfunktionalem Typ:

```
((((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer") :: Txt
```

Insgesamt erhalten wir:

```
((((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer")
  ->> "Ein neuer Text" :: Txt
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionssignaturen, Funktionsterme

Funktionssignaturen (oder syntaktische Funktionssignaturen oder Signaturen)

- geben den Typ einer Funktion an.

Funktionsterme

- sind aus Funktionsaufrufen aufgebaute Ausdrücke.

Beispiele:

- Funktionssignatur

```
ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt
```

- Funktionsterme

```
ersetze "Ein alter Text"
ersetze "Ein alter Text" 1
ersetze "Ein alter Text" 1 "alter"
ersetze "Ein alter Text" 1 "alter" "neuer"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Klammereinsparungsregeln

...für Funktionssignaturen und Funktionsterme.

Rechtsassoziativität für Funktionssignaturen:

```
ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt
```

...steht abkürzend für die vollständig, aber nicht überflüssig rechtsassoziativ geklammerte Funktionssignatur:

```
ersetze :: (Txt -> (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt))))
```

Linksassoziativität für Funktionsterme:

```
ersetze "Ein alter Text" 1 "alter" "neuer"
```

...steht abkürzend für den vollständig, aber nicht überflüssig linksassoziativ geklammerten Funktionsterm:

```
((((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer")
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Hintergrund: Klammereinsparung

Die Festlegung von

- Rechtsassoziativität für Funktionssignaturen
- Linksassoziativität für Funktionsterme

dient der Einsparung von Klammern (vgl. Punkt- vor Strichrechnung in der Mathematik).

Die Festlegung erfolgt auf diese Weise, da so in

- Signaturen und Funktionstermen

meist möglichst wenige, oft gar keine Klammern nötig sind.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

1-Stelligkeit von Funktionen in Haskell

Das Beispiel illustriert, dass Haskell-Funktionen einstellig sind:

- Es wird stets **ein** Argument zur Zeit konsumiert!

```
ersetze :: Txt -> (Vork -> Alt -> Neu -> Txt)

ersetze "Ein alter Text" :: Vork -> (Alt -> Neu -> Txt)
        :: Txt
 :: Txt -> (Vork -> Alt -> Neu -> Txt)

(ersetze "Ein alter Text") 1 :: Alt -> (Neu -> Txt)
 :: Vork -> (Alt -> Neu -> Txt)   :: Vork

((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter" :: Neu -> Txt
      :: Alt -> (Neu -> Txt)        :: Alt

(((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer" :: Txt
                :: Neu -> Txt                :: Neu

->> "Ein neuer Text" :: Txt
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Zur 1-Stelligkeit von Funktionen

Es gilt: Konsumierte Argumente müssen nicht elementar sein; ausgedrückt durch Klammerung können sie

- zusammengesetzt und komplex sein.

Beispiel:

```
add' :: (Int -> Int) -> (Int -> Int) -> (Int,Int) -> Int
        'Arg. 1'       'Arg. 2'       'Arg. 3'    'Resultat'
add' f g (m,n) = (+) (f m) (g n)
```

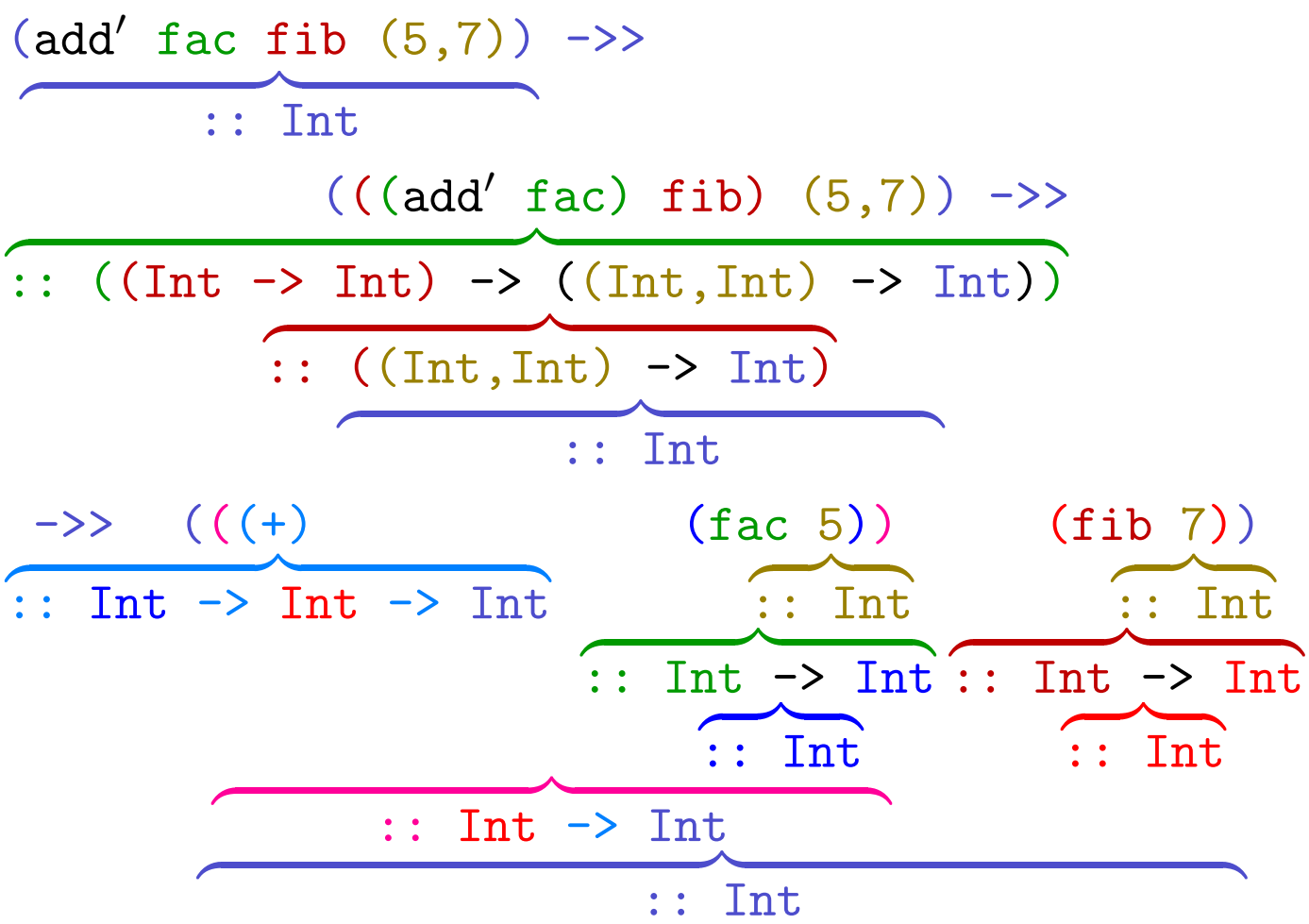
Vollständig, aber nicht überflüssig geklammert:

```
add' :: ((Int -> Int) -> ((Int -> Int) -> ((Int,Int) -> Int)))
add' f g (m,n) = (((+) (f m)) (g n))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

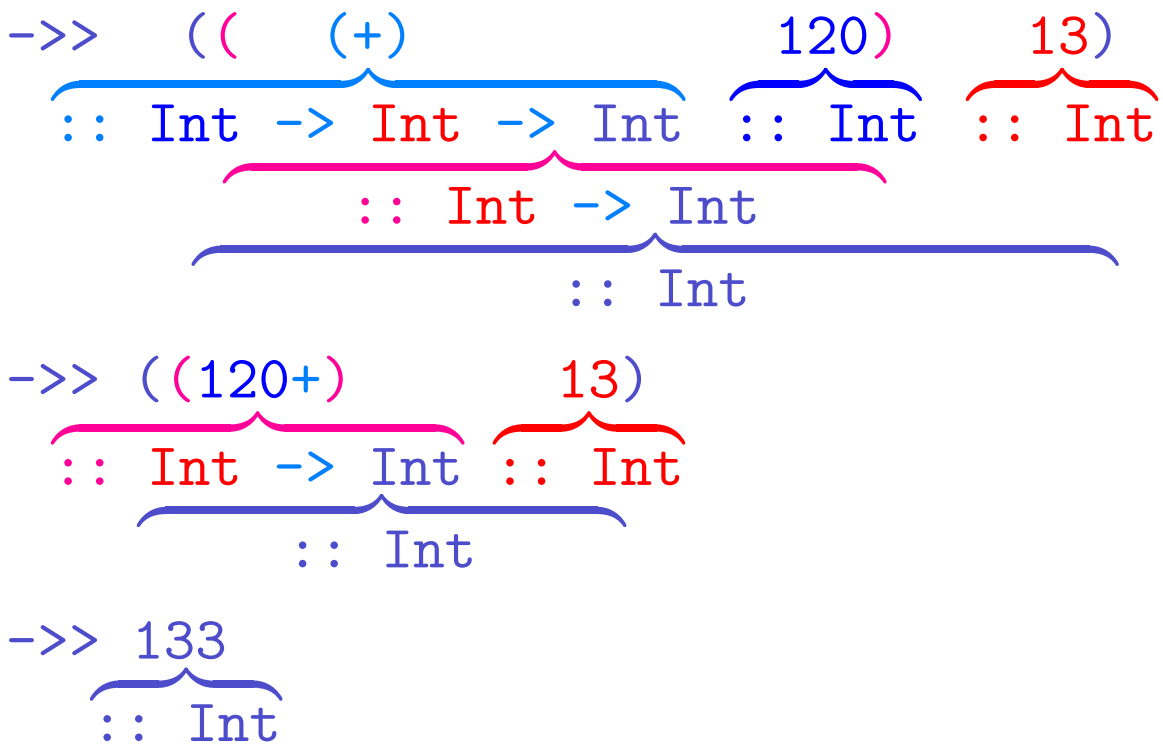
Beispiel 1: Konsumation komplexer Arg. (1)

```
add' :: ((Int -> Int) -> ((Int -> Int) -> ((Int,Int) -> Int)))
add' f g (m,n) = (((+) (f m)) (g n))
```



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Beispiel 1: Konsumation komplexer Arg. (2)



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Beispiel 2: Konsumation komplexer Argumente

```
type I = Int

op :: (I -> I) -> I -> (I -> I) -> I -> (I -> I -> I) -> I
op f m g n h = h (f m) (g n)
```

Vollständig, aber nicht überflüssig geklammert:

```
op :: ((I -> I) -> (I -> ((I -> I) -> (I -> ((I -> (I -> I)) -> I)))))
op f m g n h = ((h (f m)) (g n))
```

Aufrufbeispiel:

```
op fac 5 fib 8 ggt ->>
                    ((((((op fac) 5) fib) 8) ggt)
:: (I -> ((I -> I) -> (I -> ((I -> (I -> I)) -> I))))
    :: ((I -> I) -> (I -> ((I -> (I -> I)) -> I)))
          :: (I -> ((I -> (I -> I)) -> I))
                :: ((I -> (I -> I)) -> I)
                                  :: I
 ->> ggt (fac 5) (fib 8) ->> ((ggt (fac 5)) (fib 8))
 ->> ((ggt 120) 21)      ->> 3
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Klammereinsparungen für Funktionsterme (1)

...anhand einiger Beispiele:

```
fib :: Int -> Int
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = ((fib (n-2)) + (fib (n-1)))
```

Der vollständig, aber nicht überflüssig geklammerte Ausdruck

- `((fib (n-2)) + (fib (n-1)))`

kann bedeutungsgleich verkürzt werden zu:

- `fib (n-2) + fib (n-1)` (∗)

...aber nicht weiter:

- `fib n-2 + fib n-1` entspricht vollständig geklammert:
  `(((fib n) - 2) + ((fib n) - 1))` (∗∗)

Somit erhalten wir:

(∗) `fib (6-2) + fib (6-1) ->> fib 4 + fib 5 ->> 3 + 5 ->> 8`

(∗∗) `fib 6-2 + fib 6-1 ->> (8-2) + (8-1) ->> 6 + 7 ->> 13`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Klammereinsparungen für Funktionsterme (2)

Die vollständig, aber nicht überflüssig geklammerten Ausdrücke

- `((fac (fib 6)) - 1) ->> 119`
- `(fac ((fib 6) - 1)) ->> 24`
- `(fac (fib (6 - 1))) ->> 6`

können bedeutungsgleich verkürzt werden zu:

- `fac (fib 6) - 1 ->> fac 5 - 1 ->> 120 - 1 ->> 119`
- `fac (fib 6 - 1) ->> fac (5 - 1) ->> fac 4 ->> 24`
- `fac (fib (6 - 1)) ->> fac (fib 5) ->> fac 3 ->> 6`

Weitere Klammern können ohne Bedeutungsänderung nicht eingespart werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (1)

Eine naheliegende Frage im Zshg. mit der Funktion `ersetze`:

- Warum so viele Pfeile (`->`), warum so wenige Kreuze ($\times$) in der Signatur von `ersetze`?
- Warum nicht

  '`ersetze :: (Txt × Vork × Alt × Neu) -> Txt`'

  statt

  `ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt` ?

Beachte: Das Kreuzprodukt in Haskell wird durch Tupelbeistrich ausgedrückt, d.h. ',' statt $\times$. Die korrekte Haskell-Spezifikation für die Kreuzproduktvariante lautete daher:

```
ersetze :: (Txt,Vork,Alt,Neu) -> Txt
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (2)

Beide Formen

- sind möglich, sinnvoll und berechtigt.

Funktionspfeil

- führt jedoch zu höherer (Anwendungs-) Flexibilität als Kreuzprodukt, da partielle Auswertung von Funktionen möglich ist.
- ist daher in funktionaler Programmierung die weitaus häufiger verwendete Form.

Zur Illustration:

- Berechnung der Binomialkoeffizienten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (3)

Vergleiche die Funktionspfeilform:

```
binom :: Integer -> Integer -> Integer
binom n k
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise    = binom (n-1) (k-1) + binom (n-1) k
```

...mit der Kreuzproduktform:

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k)
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise    = binom' (n-1,k-1) + binom' (n-1,k)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (4)

Die höhere Flexibilität der Funktionspfeilform zeigt sich in der Anwendungssituation:

Der Funktionsterm `(binom 45)`

- ist von funktionalem Typ `(Integer -> Integer)`, eine Funktion, die ganze Zahlen in sich abbildet.
- liefert angewendet auf eine natürliche Zahl k die Anzahl der Möglichkeiten, auf die man k Elemente aus einer 45-elementigen Grundgesamtheit herausgreifen kann:

  (`(binom 45)` entspricht der Funktion `k_aus_45`)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (5)

Wir können den Funktionsterm `(binom 45)` deshalb auch benutzen, um in argumentfreier Weise eine neue Funktion zu definieren, z.B. die Funktion `k_aus_45` (vgl. Kap. 1.1.1):

```
k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 = binom 45 -- arg.frei: k_aus_45 ist nicht
                    -- von einem Arg. gefolgt
```

Die Funktion `k_aus_45` und der Funktionsterm `(binom 45)` bezeichnen dieselbe Funktion; sie sind Synonyme.

Aufrufe folgender Form sind deshalb möglich:

```
(binom 45) 6 ->> 8.145.060
 binom 45 6  ->> 8.145.060  -- Klammereinsparungsr.
 k_aus_45 6  ->> binom 45 6 ->> 8.145.060
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (6)

Beachte: Auch die Funktion

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
```

ist im Haskell-Sinn einstellig.

Folgende Schreibweise macht dies besonders deutlich:

```
type IntPair = (Integer,Integer)

binom' :: IntPair -> Integer -- 1 Argument: 1-stellig
binom' p
  | snd(p) == 0 || fst(p)==snd(p) = 1
  | otherwise = binom' (fst(p)-1,snd(p)-1)
                + binom' (fst(p)-1,snd(p))
```

p vom Typ IntPair, das eine Argument von binom' ist von einem Paartyp.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (7)

Beachte: `binom'` bietet nicht die Flexibilität von `binom`:

- `binom'` konsumiert ihr eines Argument `p` vom Paartyp `(Integer,Integer)` und liefert unmittelbar ein Resultat vom elementaren Typ `Integer`.

```
binom' (45,6) ->> 8.145.060 :: Integer
```

- ein funktionales Zwischenresultat entsteht anders als bei `binom` nicht.
- Eine lediglich teilweise Versorgung mit Argumenten und damit partielle Auswertung von `binom'` ist nicht möglich.

  Aufrufe der Form:

```
binom' 45
```

  sind syntaktisch inkorrekt und führen zu Fehlermeldungen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Vordef. arithmetische Operationen in Pfeilform

Auch die arithmetischen (und viele weitere) Operationen sind in Haskell aus diesem Grund in der Funktionspfeilform vordefiniert:

```
(+) :: Num a => a -> a -> a
(*) :: Num a => a -> a -> a
(-) :: Num a => a -> a -> a
...
```

Nachstehend instantiiert für den Typ `Int`:

```
(+) :: Int -> Int -> Int
(*) :: Int -> Int -> Int
(-) :: Int -> Int -> Int
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionsstelligkeiten: Mathematik vs. Haskell

...unterschiedliche Sichtweisen und Akzentsetzungen.

Mathematik: Betonung der 'Teile' – eine Funktion der Form:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

wird zweistellig angesehen: $\binom{\cdot}{\cdot} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Allgemein: $f : M_1 \times \ldots \times M_n \to M$ hat Stelligkeit n.

Haskell: Betonung des 'Ganzen' – eine Funktion der Form:

```
type I = Integer
binom' (n,k)
  | k==0 || n==k = 1
  | otherwise = binom' (n-1,k-1) + binom' (n-1,k)
```

wird einstellig angesehen: `binom' :: (I,I) -> I`

Allgemein: `f :: (M1,...,Mn) -> M` hat Stelligkeit 1.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Zusammenfassung (1)

Für Haskell gilt:

Die Klammerung unvollständig geklammerter

- Funktionssignaturen ist rechtsassoziativ
- Funktionsterme ist linksassoziativ

zu vervollständigen.

Funktionen sind

- einstellig; sie konsumieren stets ein Argument zur Zeit.

Argumente und Werte von Funktionen und Funktionstermen

- können elementaren, zusammengesetzten oder funktionalen Typs sein.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Zusammenfassung (2)

Klammern in Signaturen und Funktionstermen

- sind mehr als schmückendes Beiwerk; sie bestimmen die Bedeutung.

Wann immer eine von den Klammereinsparungsregeln induzierte abweichende Argument- oder/und Resultatstruktur gewollt ist, muss dies durch

- explizite Klammerung in Signatur und Funktionsterm

ausgedrückt werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Zusammenfassung (3)

...exakte vs. saloppe Lesart für curryfizierte Funktionen.

Exakt: `binom` ist eine 1-stellige Funktion:

```
binom :: Integer -> (Integer -> Integer)
binom n = g where g k = if ... then ... else ...
```

`:: (Integer -> Integer)`

...die ganze Zahlen als Argument auf 1-stellige Funktionen abbildet, die ganze Zahlen auf ganze Zahlen abbilden.

Salopp: `binom` ist eine 2-stellige Funktion:

```
binom :: Integer -> Integer -> Integer
binom n k = k' where k' = if ... then ... else ...
```

`:: Integer`

...die Paare ganzer Zahlen als Argument auf ganze Zahlen abbildet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Übungsaufgabe 3.2.1

1. Wie liest sich die Signatur der Editor-Funktion

   ```
   ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt
   ```

   gemäß

   1.1 exakter Sichtweise:

   ```
   ersetze :: Txt -> (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt)))
   ```

   1.2 salopper Sichtweise:

   ```
   ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt
   ```

2. Wie sind die Signaturen der Funktionen

   ```
   f :: (I -> I -> I) -> I -> [I] -> I
   g :: (I -> I) -> (I -> I) -> [I] -> I
   h :: I -> (I -> I -> I) -> [I] -> I
   ```

   exakt bzw. salopp zu lesen (`type I = Int`)?

3. Wiederholen Sie die Übung mit anderen curryfizierten Funktionssignaturen aus den bisherigen Kapiteln oder/und dem Standard-Präludium.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 3.3

Curryfizierte, uncurryfizierte Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Scharf oder mild

...curryfiziert oder uncurryfiziert, das ist hier die Frage.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Curryfiziert und uncurryfiziert

...bezeichnen bestimmte ineinander überführbare Deklarationsweisen für Funktionen.

Entscheidend für die Unterscheidung ist die

- Art der Konsumation der Argumente.

Erfolgt die Konsumation

- Einzeln Argument für Argument: curryfiziert
- Alle auf einmal als Tupel: uncurryfiziert

Implizit liefert dies eine Unterscheidung in

- curryfizierte Funktionen
- uncurryfizierte Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Ein Beispiel

...die Funktionen `binom` und `binom'`:

- `binom :: Integer -> Integer -> Integer`

  ...ist curryfiziert deklariert.

- `binom' :: (Integer,Integer) -> Integer`

  ...ist uncurryfiziert deklariert.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Das Beispiel: Vollständig ausformuliert

...Funktion binom, curryfiziert deklariert:

```
binom :: Integer -> Integer -> Integer
binom n k
  | k==0 || n==k = 1
  | otherwise = binom (n-1) (k-1) + binom (n-1) k
```

```
binom 45 6 ->> (binom 45) 6 ->> 8.145.060
           :: Integer -> Integer
                :: Integer
```

...Funktion binom′, uncurryfiziert deklariert:

```
binom′ :: (Integer,Integer) -> Integer
binom′ (n,k)
  | k==0 || n==k = 1
  | otherwise = binom′ (n-1,k-1) + binom′ (n-1,k)
```

```
binom′ (45,6) ->> 8.145.060
 :: Integer
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Informell

Curryfizieren ersetzt

- Produkt-/Tupelbildung '$\times$' durch Funktionspfeil '$\rightarrow$'.

Uncurryfizieren ersetzt

- Funktionspfeil '$\rightarrow$' durch Produkt-/Tupelbildung '$\times$'.

Bemerkung: Die Bezeichnung erinnert an Haskell B. Curry; die Idee selbst ist älter und geht auf Moses Schönfinkel und die Mitte der 1920er-Jahre zurück.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Die Funktionale curry und uncurry

...die Mittler zwischen curryfizierter und uncurryfizierter Darstellung von Funktionen:

Das Funktional curry:

```
curry :: ((a,b) -> c)        ->      (a -> b -> c)
```

Argumenttyp von curry: uncurryfiziert!

Resultattyp von curry: curryfiziert!

```
curry          f                =              g
                                    where g x y = f (x,y)
```

Das Funktional uncurry:

```
uncurry :: (a -> b -> c)      ->      ((a,b) -> c)
```

Argumenttyp von uncurry: curryfiziert!

Resultattyp von uncurry: uncurryfiziert!

```
uncurry        g                =              f
                                    where f (x,y) = g x y
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Beachte: Auflösen der `where`-Klausel

...liefert kürzere Funktionsdefinitionen.

Statt:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f = g where g x y = f (x,y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry g = f where f (x,y) = g x y
```

können wir bedeutungsgleich kürzer schreiben:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry g (x,y) = g x y
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Die Implementierungen v. curry u. uncurry (1)

Das Funktional curry:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)    -- x, y wird zu (x,y)
                         -- zusammengesetzt und so
                         -- für f verarbeitbar
```

Das Funktional uncurry:

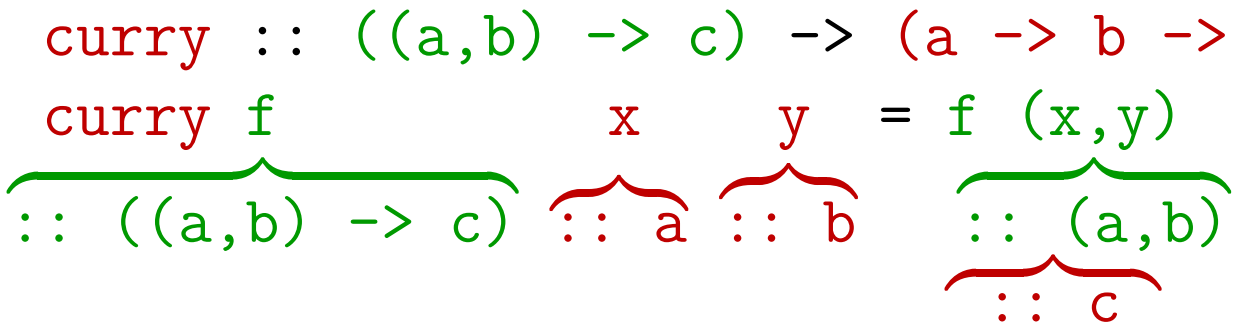
```
uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry g (x,y) = g x y    -- (x,y) wird in x, y
                           -- getrennt und so
                           -- für g verarbeitbar
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

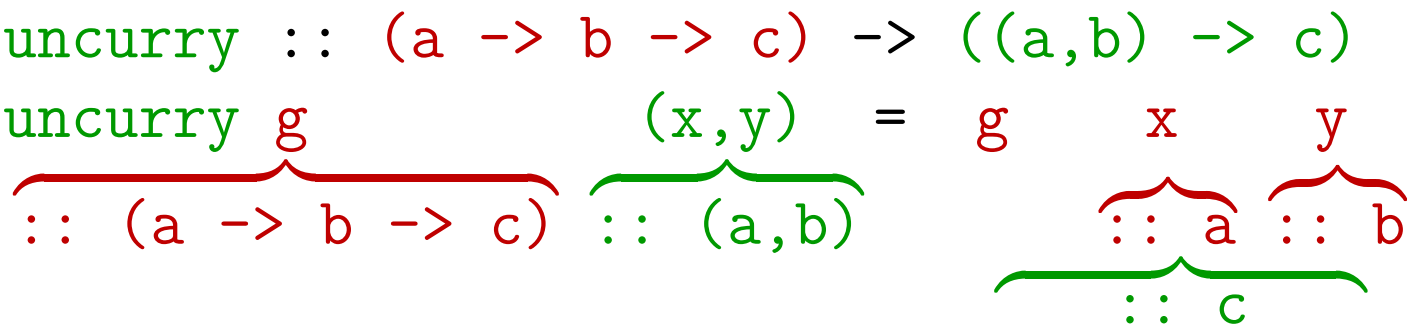
Die Implementierungen v. curry u. uncurry (2)

...in größerem Detail:

Das Funktional curry:



Das Funktional uncurry:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

curry: Schritt für Schritt zur Definition

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c))
curry f x y = f (x,y)
```

Sei `f` eine Funktion mit Signatur

```
f :: ((a,b) -> c)
```

Mit `f` erhalten wir für die Signaturen der Funktionsterme:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c))
(curry f) :: (a -> (b -> c))
((curry f) x) :: (b -> c)
(((curry f) x) y) :: c
```

Entsprechend erhalten wir für den Typ des rechtss. Fkt-Terms:

```
(((curry f) x) y) = f (x,y) :: c
```

Nach Einsparung von Klammern erhalten wir insgesamt:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c))
curry f x y = f (x,y)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Anwendung von curry

Sei f uncurryfiziert gegebene Funktion mit Signatur

```
f :: ((a,b) -> c)
```

Definiere

```
g :: (a -> (b -> c))
g = curry f                                    -- argumentfrei!
```

Damit

```
f (x,y) = g x y  = (curry f) x y = curry f x y
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Zur Klammerung von curry und uncurry

...vollständig, aber nicht überflüssig geklammert:

```
curry :: (((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c)))
curry f x y  = f (x,y)

uncurry :: ((a -> (b -> c)) -> ((a,b) -> c))
uncurry g (x,y)  =  g x y
```

...miminal geklammert gemäß Klammereinsparungsregeln:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> a -> b -> c
curry f x y  = f (x,y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> (a,b) -> c
uncurry g (x,y)  =  g x y
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Übungsaufgabe 3.3.1

Vollziehe die Schritt-für-Schritt-Entwicklung zur Definition und Anwendung von `curry` für `uncurry` nach, d.h. entwickle nach dem Beispiel von `curry` Schritt für Schritt die Definition und Anwendung von `uncurry`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Die Funktionale curry und uncurry

...bilden

- uncurryfizierte Funktionen auf ihre curryfizierten Gegenstücke ab:

  Für uncurryfiziertes `f :: (a,b) -> c` ist

  ```
  curry f :: a -> (b -> c)
  ```

  curryfiziert (entsprechend `g :: a -> (b -> c)`).

- curryfizierte Funktionen auf ihre uncurryfizierten Gegenstücke ab:

  Für curryfiziertes `g :: a -> (b -> c)` ist

  ```
  uncurry g :: (a,b) -> c
  ```

  decurryfiziert (entsprechend `f :: (a,b) -> c`).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Anwendungen von curry und uncurry

Betrachte:

```
binom  :: Integer -> Integer -> Integer
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
```

und

```
curry   :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
```

Anwendung von curry und uncurry liefert:

```
curry binom' :: Integer -> Integer -> Integer
uncurry binom :: (Integer,Integer) -> Integer
```

Somit sind folgende Aufrufe möglich und gültig:

```
curry binom' 45 6      ->> binom' (45,6) ->> 8.145.060
uncurry binom (45,6) ->> binom 45 6   ->> 8.145.060
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Curryfiziert oder uncurryfiziert?

...das ist die Frage.

Geschmackssache? Notationelle Spielerei?

- `f x`, `f x y`, `f x y z`,... vs. `f(x)`, `f(x,y)`, `f(x,y,z)`,...
  Allenfalls bei oberflächlicher Betrachtung.

Denn es gilt: Nur curryfizierte Funktionen unterstützen das

- Prinzip partieller Auswertung und damit das Prinzip:

  $\rightsquigarrow$ Funktionen liefern Funktionen als Ergebnis!

  Beispiel: Die für das Argument `45` partiell ausgewertete Funktion `binom` liefert als Resultat eine einstellige Funktion, die Funktion `k_aus_45 :: Integer -> Integer` definiert durch `k_aus_45 = (binom 45)`.

Die Bevorzugung curryfizierter Formen ist deshalb sachlich gut begründet, vorteilhaft und in der Praxis vorherrschend.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Faustregel: Funktionsdefinitionen

...curryfiziert, wo möglich, uncurryfiziert nur dort, wo nötig.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 3.4

Operatoren, Präfix- und Infixverwendung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Unterschiedliche Operatorverwendungsarten

Präfix

- Operator ist den Operanden vorangestellt:

  Beispiele: `fac 5`, `binom (45,6)`, `reverse "desserts"`, `quickSort [4,2,1,9,3,7,5]`,...

Infix

- Operator ist zwischen die Operanden gestellt:

  Beispiele: `2+3`, `5*7`, `5^3`, `4:[3,2,1]`, `[1,2,3,4]!!2`, `[3,2,1]++[1,2,3]`,...

Postfix

- Operator ist den Operanden nachgestellt:

  Beispiele: In Haskell keine; in der Mathematik wenige, etwa die Fakultätsfunktion "!"; regelmäßig bei Verwendung "umgekehrt polnischer Notation".

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

In Haskell

...ist Präfixverwendung

- Regelfall, insbesondere für alle selbstdeklarierten Operatoren (d.h. selbstdeklarierte Funktionen).

  Beispiele:

  - Vordefinierte Funktionen: `div`, `reverse`, `zip`,...
  - Selbstdefinierte Funktionen: `fac`, `binom`, `quicksort`,...

...ist Infixverwendung

- Regelfall für einige vordefinierte Operatoren und Relatoren, darunter viele arithmetische Operatoren und Relatoren.

  Beispiele: `2+3`, `5*7`, `5^3`, `4:[3,2,1]`, `[1,2,3,4]!!2`, `[3,2,1]++[1,2,3]`, `[3,2,1]==[1,2,3]`, `4<=5`, `"Fun"<"More Fun"`,...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Für binäre Operatoren

...ist in Haskell Infix- und Präfixverwendung möglich, gleich ob

- vor- oder selbstdefiniert.

Allgemein: Wird der Binäroperator `bop` im Regelfall als

- Präfixoperator verwendet, so kann `bop` mit Hochkommata als Infixoperator `` `bop` `` verwendet werden.

  Beispiele: `45 `binom` 6`, `3 `mult` 5`
  (statt standardmäßig: `binom 45 6`, `mult 3 5`)

- Infixoperator verwendet, so kann `bop` geklammert als Präfixoperator `(bop)` verwendet werden.

  Beispiele: `(+) 2 3`, `(++) [3,2,1] [1,2,3]`
  (statt standardmäßig: `2+3`, `[2,1] ++ [1,2]`)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Beispiel

...berechne das Maximum dreier ganzer Zahlen:

```
maximum :: Int -> Int -> Int -> Int
maximum p q r
  | (mx p q == p) && (p `mx` r == p) = p
  | (mx p q == q) && (q `mx` r == q) = q
  | otherwise                        = r

  where mx :: Int -> Int -> Int
        mx p q
        | p >= q    = p
        | otherwise = q
```

Beachte: Der Binäroperator `mx` wird in `maximum` als Präfix-operator (`mx p q`) und Infixoperator (`p `mx` r`) verwendet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Weitere Beispiele

...für Infix- und Präfixverwendung von Binäroperatoren anhand einiger arithmetischer Funktionen:

- Inkrement
- Dekrement
- Halbieren
- Verdoppeln
- 10er-Inkrement
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Infixverwendete Binäroperatoren

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc n = n + 1
```

- Dekrement

```
dec :: Integer -> Integer
dec n = n - 1
```

- Halbieren

```
hlv :: Integer -> Integer
hlv n = n `div` 2   -- Nichtstandardverwendung
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl n = 2 * n
```

- 10er-Inkrement

```
inc10 :: Integer -> Integer
inc10 n = n + 10
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Präfixverwendete Binäroperatoren

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc n = (+) n 1          -- Nichtstandardverw.
```

- Dekrement

```
dec :: Integer -> Integer
dec n = (-) n 1          -- Nichtstandardverw.
```

- Halbieren

```
hlv :: Integer -> Integer
hlv n = div n 2              -- Standardverw.
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl n = (*) 2 n          -- Nichtstandardverw.
```

- 10er-Inkrement

```
inc10 :: Integer -> Integer
inc10 n = (+) n 10       -- Nichtstandardverw.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Punktfrei als partiell ausgewertete Funktionen

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+) 1
```

- Eins_minus (nicht Dekrement)

```
eins_minus :: Integer -> Integer
eins_minus = (-) 1      -- (-) nicht kommutativ
```

- Zwei_durch (nicht Halbieren)

```
zwei_durch :: Integer -> Integer
zwei_durch = div 2      -- div nicht kommutativ
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (*) 2
```

- 10er-Inkrement

```
inc10 :: Integer -> Integer
inc10 = (+) 10
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Operandenstellung und Klammerung

...führen uns zu sog. Operatorabschnitten:

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+1)
```

- Eins_minus

```
eins_minus :: Integer -> Integer
eins_minus = (1-)
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (2*)
```

- Halbieren

```
hlv :: Integer -> Integer
hlv = (`div` 2)
```

Beachte die unterschiedliche Klammerung und Operandenstellung in `inc` und `eins_minus` sowie in `dbl` und `hlv`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 3.5

Operatorabschnitte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Operatorabschnitte (1)

Partiell ausgewertete Binäroperatoren heißen in Haskell

- Operatorabschnitte (engl. operator sections)

Beispiele:

- `(*2)` `dbl`, die Funktion, die ihr Argument verdoppelt $(\lambda x.\, x * 2)$
- `(2*)` `dbl`, s.o. $(\lambda x.\, 2 * x)$
- `(<2)` `x_kleiner_als_2`, das Prädikat, das überprüft, ob sein Argument kleiner als `2` ist $(\lambda x.\, x < 2)$
- `(2<)` `2_kleiner_als_x`, das Prädikat, das überprüft, ob `2` kleiner als sein Argument ist $(\lambda x.\, 2 < x)$
- `(2:)` `headAppend`, die Funktion, die `2` an den Anfang einer typkompatiblen Liste setzt $(\lambda xs.\, (2 : xs))$
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Operatorabschnitte (2)

Beispiele (fgs.):

- `(+1)`, `(1+)` `inc`, die Funktion, die ihr Argument um 1 erhöht $(\lambda x.\, x + 1)$ bzw. $(\lambda x.\, 1 + x)$
- `(1-)` `eins_minus`, die Funktion, die ihr Argument von 1 abzieht $(\lambda x.\, 1 - x)$
- `(-1)` kein Operatorabschn., sondern d. Zahl '-1'.
- `(+(-1))` `dec`, die Funktion, die ihr Argument um 1 erniedrigt $(\lambda x.\, x + (-1))$ bzw. $(\lambda x.\, x - 1)$
- `('div` `2)` `hlv`, die Funktion, die ihr Argument ganzzahlig halbiert $(\lambda x.\, x \; div \; 2)$
- `(2 'div')` `zwei_durch`, die Funktion, die 2 ganzzahlig durch ihr Argument teilt $(\lambda x.\, 2 \; div \; x)$
- ...
- `(div 2)`, `div 2` `zwei_durch`, s.o. $(\lambda x.\, 2 \; div \; x)$; keine echten Operatorabschnitte, sondern gewöhnliche Präfixoperatorverwendung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Operatorabschnitte (3)

Operatorabschnitte können in Haskell gebildet werden mit

1. vordefinierten
2. selbstdefinierten

binären Operatoren.

Beispiele für die curryfizierte Funktion `binom` (vgl. Kap. 3.2):

- `(binom 45)` `45_über_k`, die Funktion `k_aus_45`.
- `(45 ‘binom‘)` `45_über_k`, s.o.
- `(‘binom‘ 6)` `n_über_6`, die Funktion `6_aus_n`.
- ...

Beachte: Mit der uncurryifzierten Funktion `binom'` (vgl. Kapitel 3.2) können keine Operatorabschnitte gebildet werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Anwendung: Punktfreie, argumentlose

...Funktionsdefinitionen mit Operatorabschnitten:

- 45_über_k bzw. k_aus_45

```
k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 = binom 45
```

```
k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 = (45 `binom`)
```

- n_über_6 bzw. 6_aus_n

```
sechs_aus_n :: Integer -> Integer
sechs_aus_n = (`binom` 6)
```

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+1)
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (2*)
```

- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Nichtkommutative Operatoren

...benötigen Obacht bei der Bildung von Operatorabschnitten.

Infix- und Präfixbenutzung hat für nichtkommutative Operatoren einen Bedeutungsunterschied. Am Beispiel von `div`:

- Infixverwendung führt zu den Funktionen `hlv` und `zwei_durch`.
- Präfixverwendung führt zur Funktion `zwei_durch`.

bei ansonsten gleicher partieller Auswertung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Am Beispiel von div für hlv und zwei_durch

- Halbieren (durch_zwei) (div infixverwendet)

```
hlv :: Integer -> Integer
hlv = (`div` 2)                    -- Operatorabschnitt

hlv 5 ->> 2, hlv 10 ->> 5, hlv 15 ->> 7
```

- zwei_durch (div präfixverwendet)

```
zwei_durch :: Integer -> Integer
zwei_durch = div 2                  -- Präfixverwendung
-- bedeutungsgleich mit:
zwei_durch = (2 `div`)              -- Operatorabschnitt

zwei_durch 5 ->> 0, zwei_durch 2 ->> 1,
zwei_durch 1 ->> 2
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Am Beispiel von (-) für eins_minus

- eins_minus ((-) infixverwendet)

```
eins_minus :: Integer -> Integer
eins_minus = (1-)          -- Operatorabschnitt

eins_minus 5    ->> -4, eins_minus 1 ->> 0,
eins_minus (-1) ->> 2
```

- eins_minus ((-) präfixverwendet)

```
eins_minus :: Integer -> Integer
eins_minus = (-) 1          -- Präfixverwendung
 -- bedeutungsgleich mit:
eins_minus = (1-)          -- Operatorabschnitt
```

Beachte: (-1) repräsentiert die Zahl '-1', keinen Operatorabschnitt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Am Beispiel von (+) für inc

...kein Unterschied wg. Kommutativität der Addition:

- Inkrement ((+) infixverwendet)

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+1)                    -- Operatorabschnitt
-- bedeutungsgleich mit:
inc = (1+)                    -- Operatorabschnitt

inc 5 ->> 6, inc 10 ->> 11, inc 15 ->> 16
```

- Inkrement ((+) präfixverwendet)

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+) 1                    -- Präfixverwendung
-- entspricht:
inc = (1+)

inc 5 ->> 6, inc 10 ->> 11, inc 15 ->> 16
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Am Beispiel von (*) für dbl

...kein Unterschied wg. Kommutativität der Multiplikation:

- Verdoppeln ((*) infixverwendet)

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (*2)                    -- Operatorabschnitt
-- bedeutungsgleich mit:
dbl = (2*)                    -- Operatorabschnitt

dbl 5 ->> 10, dbl 10 ->> 20, dbl 15 ->> 30
```

- Verdoppeln ((*) präfixverwendet)

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (*) 2                    -- Präfixverwendung
-- entspricht:
dbl = (2*)

dbl 5 ->> 10, dbl 10 ->> 20, dbl 15 ->> 30
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Zusammenfassung

...Operatorabschnitte: Notationelle Abkürzungen ('syntaktischer Zucker') für anonyme λ-Abstraktionen.

Im Detail: Ist `op` ein Binäroperator und sind `x` und `y` typgeeignete Operanden für `op`, dann heißen die Ausdrücke:

- `(op)`, `(x op)`, `(op y)`

Operatorabschnitte, die für folgende Funktionen stehen:

- `(op)` = `(λx. (λy. x op y))`
- `(x op)` = `(λy. x op y)`
- `(op y)` = `(λx. x op y)`

und somit besonders knappe Funktionsdefinitionen erlauben (Sonderfall: Der Subtraktionsoperator `(-)`).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 3.6

Angemessene, unangemessene Funktionsdefinitionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Funktionen

...wie die Fakultäts- und Fibonacci-Funktion sind (auf den natürlichen Zahlen) total definiert:

$$! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

$$fib : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ fib(n-2) + fib(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Ihre naheliegenden Implementierungen

...in einer Programmiersprache sind hingegen häufig nur partiell definiert. So terminieren folgende Implementierungen nur für nichtnegative Argumente und sind für negative Argumente nicht definiert:

```
fac :: Int-> Int
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n - 1)

fib :: Int -> Int
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-2) + fib (n-1)
```

In Programmiersprachen sind total definierte Funktionen die Ausnahme, partiell definierte Funktionen die Regel.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Guter Prog.-Stil: Offenlegen der Partialität

...die Partialität der Implementierungen `fac` und `fib` ist

- i.w. technisch induziert (Abwesenheit eines Datentyps für natürliche Zahlen).

Explizite, transparente Sichtbarmachung der Partialität ist jedoch sinnvoll, angemessen und auch einfach möglich:

```
fac :: Int -> Int
fac n | n == 0 = 1
      | n >= 1 = n * fac (n - 1)
      | otherwise = error "undefiniert"

fib :: Int -> Int
fib n | n == 0 = 1
      | n == 1 = 1
      | n >= 2 = fib (n-2) + fib (n-1)
      | otherwise = error "undefiniert"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Auch die Funktionen f, g und h

...sind partiell definiert:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$f(z) = \begin{cases} 2 & \text{falls } z \geq 1 \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$g(z) = \begin{cases} 2^z & \text{falls } z \geq 1 \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$h(z) = \begin{cases} 2^1 & \text{falls } z = 1 \\ 2^{(|z|+2)} & \text{falls } z \leq 0 \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Wir können sie angemessen implementieren

...so dass die Partialität der Implementierungen transparent und offen zutageliegt:

```
f :: Integer -> Integer
f z | z >= 1    = 2
    | otherwise = error "undefiniert"

g :: Integer -> Integer
g z | z >= 1    = 2^z
    | otherwise = error "undefiniert"

h :: Integer -> Integer
h z | z == 1    = 2
    | z <= 0    = 2^((abs z)+2)
    | otherwise = error "undefiniert"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

...oder unangemessen, so dass das nicht gilt:

Betrachte dazu folgende intransparente, die Partialität verschleiernde Implementierung von `f`:

```
f :: Integer -> Integer
f 1 = 2
f x = 2 * (f x)
```

Auch wenn man sich durch Nachrechnen vergewissern kann, dass die Auswertung von `f` terminiert für $n = 1$:

```
f 1 ->> 2
```

...aber für keinen von 1 verschiedenen Argumentwert, ist die Implementierung diesbezüglich intransparent und verschleiernd.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Auswertungsbeispiele für f

Die Auswertung von f terminiert für $n = 1$:

```
f 1     ->> 2
```

Die Auswertung von f terminiert nicht für $n \neq 1$:

```
f (-9) ->> 2 * (f (-9)) ->> 2 * (2 * (f (-9)))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f (-9)))) ->>...
f (-1) ->> 2 * (f (-1)) ->> 2 * (2 * (f (-1)))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f (-1)))) ->>...
f 0    ->> 2 * (f 0)    ->> 2 * (2 * (f 0))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f 0)))    ->>...
f 2    ->> 2 * (f 2)    ->> 2 * (2 * (f 2))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f 2)))    ->>...
f 3    ->> 2 * (f 3)    ->> 2 * (2 * (f 3))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f 3)))    ->>...
f 9    ->> 2 * (f 9)    ->> 2 * (2 * (f 9))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f 9)))    ->>...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Angemessenheit vs. Unangemessenheit für `f`

...beide Implementierungen der Funktion f sind formal und inhaltlich korrekt, dennoch:

Die Deklaration:

```
f :: Integer -> Integer
f 1 = 2
f x = 2 * (f x)
```

...ist unangemessen, weil intransparent und verschleiernd.

```
f :: Integer -> Integer
f z | z = 1      = 2
    | otherwise = error "undefiniert"
```

...ist angemessen, weil transparent und offen legend.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Unangemessene Implementierungen von g, h

Betrachte folgende intransparente Implementierungen von g und h:

```
g :: Integer -> Integer
g 1     = 2
g (x+1) = 2 * (g x)

h :: Integer -> Integer
h 1 = 2
h x = 2 * (h (x+1))
```

Bemerkung: Muster der Form (x+1) wie in der Definition von g nicht mehr zulässig in neueren Haskell-Versionen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Auswertungsbeispiele für g

Die Ausw. von g terminiert für echt positive Argumentwerte:

```
g 1 ->> 2
g 2 ->> g (1+1) ->> 2 * (g 1) ->> 2 * 2 ->> 4
g 3 ->> g (2+1) ->> 2 * (g 2) ->> 2 * g (1+1)
    ->> 2 * (2 * (g 1)) ->> 2 * (2 * 2) ->> 2 * 4
    ->> 8
g 9 ->> g (8+1) ->> 2 * (2 * (g 8)) ->> ... ->> 512
```

Die Auswertung von g terminiert nicht sonst:

```
g 0    ->> g ((-1)+1)          ->> 2 * (g (-1))
       ->> 2 * (g ((-2)+1)) ->> 2 * (2 * (g (-2)))
       ->> 2 * (2 * (g ((-3)+1)))
       ->> 2 * (2 * (2 * (g (-3)))) ->>...
g (-1) ->> g ((-2)+1)          ->> 2 * (g (-2))  ->>...
g (-9) ->> g ((-10)+1)         ->> 2 * (g (-10)) ->>...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Auswertungsbeispiele für h

Die Auswertung von h terminiert für Argumentwerte ≤ 1:

```
h 1     ->> 2
h 0     ->> 2 * (h (0+1)) ->> 2 * (h 1) ->> 2 * 2
        ->> 4
h (-1) ->> 2 * (h ((-1)+1)) ->> 2 * (h 0)
        ->> ... ->> 2 * 4 ->> 8
h (-9) ->> 2 * (h ((-9)+1))
        ->> 2 * (h (-8)) ->> ... ->> 2048
```

Die Auswertung von h terminiert nicht sonst:

```
h 2 ->> 2 * (h (2+1)) ->> 2 * (h 3)
    ->> 2 * (2 * (h (3+1))) ->> 2 * (2* (h 4)) ->>...
h 3 ->> 2 * (h (3+1)) ->> 2 * (h 4)  ->>...
h 9 ->> 2 * (h (9+1)) ->> 2 * (h 10) ->>...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Angemessenheit vs. Unangemessenheit für g, h

...beide Implementierungen der Funktionen *g* und *h* sind formal und inhaltlich korrekt, dennoch:

Die Deklarationen:

```
g :: Integer -> Integer
g 1      = 2
g (x+1) = 2 * (g x)
```

```
h :: Integer -> Integer
h 1 = 2
h x = 2 * (h (x+1))
```

...sind unangemessen, weil intransparent und verschleiernd.

```
g :: Integer -> Integer
g z
 | z >= 1 = 2^z
 | otherwise
    = error "undefiniert"
```

```
h :: Integer -> Integer
h z
 | z == 1 = 2
 | z <= 0 = 2^((abs z)+2)
 | otherwise
    = error "undefiniert"
```

...sind angemessen, weil transparent und offen legend.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 3.7

Funktions- und Programmformatierung, Abseitsregel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Programmformatierung, Programmbedeutung

Für die meisten Programmiersprachen gilt:

- Die Formatierung (engl. layout) des Programmtexts beeinflusst
  - seine Lesbarkeit, Verständlichkeit, Wartbarkeit
  - aber nicht seine Bedeutung

Nicht so für Haskell – für Haskell gilt:

- Die Formatierung des Programmtexts trägt Bedeutung!

Dieser Aspekt des Sprachentwurfs

- ist für Haskell grundsätzlich anders entschieden worden als für Sprachen wie Java, Pascal, C und viele andere.
- ersetzt begin/end- oder {/}-Paare durch Formatierungsanforderungen.
- kann als Reminiszenz an Sprachen wie Cobol, Fortran gesehen werden, findet sich aber auch in anderen neueren Sprachen wie z.B. occam, Miranda, Curry und anderen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Bindungs- und Gültigkeitsbereiche in Haskell

...bestimmt durch formatierungsabhängige Syntax.

Eröffnung, Fortsetzung und Beendigung eines Bindungs- und Gültigkeitsbereichs (Jargon: 'Box') gemäß 'Abseits'-Regel*):

- Das jeweils erste Zeichen einer Deklaration (auch nach `let`, `where`) eröffnet eine neuen Bereich.
- Ist die nächste Zeile
  - gegenüber der aktuellen Box nach rechts eingerückt:
    $\rightsquigarrow$ die aktuelle Zeile wird fortgesetzt
  - genau am linken Rand der aktuellen Box:
    $\rightsquigarrow$ eine neue Deklaration innerhalb der aktuellen Box wird eingeleitet
  - weiter links als die aktuelle Box:
    $\rightsquigarrow$ die aktuelle Box wird beendet und eine neue eröffnet ('Abseitssituation')

*) Die Abseitsregel findet sich bereits in: Peter J. Landin. *The next 700 Programming Languages*. Communications of the ACM 9(3):157-166, 1966 (S. 160, linke Spalte unten).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

kugel_OV 'üblich' gestaltet

...Veranschaulichung der Abseitsregel anhand einer Funktion kugel_OV zur Berechnung von Oberfläche und Volumen einer Kugel mit Radius r: Oberfläche: $4\pi r^2$; Volumen: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

```
type Radius      = Float
type Oberflaeche = Float
type Volumen     = Float

pi = 3.14

kugel_OV :: Radius -> (Oberflaeche,Volumen)
kugel_OV r = (oberflaeche r,volumen r)
 where oberflaeche :: Radius -> Oberflaeche
       oberflaeche r = 4 * pi * square r

       volumen :: Radius -> Volumen
       volumen r = (4/3) * pi * cubic r
        where cubic x = x * square x

square :: Float -> Float
square x = x^2
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

kugel_OV korrekt, aber 'unschön' formatiert

```
type Radius      = Float
type Oberflaeche = Float
type Volumen     = Float

pi = 3.14 :: Float

kugel_OV :: Radius -> (Oberflaeche,Volumen)
kugel_OV r =
 (oberflaeche r,
   volumen r)
    where oberflaeche :: Radius -> Oberflaeche
          oberflaeche r = 4 * pi *
              square r
          volumen :: Radius -> Volumen
          volumen r = (4/3)
               * pi * cubic r
              where cubic x = x * square x

square :: Float -> Float
square x = x^2
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Graphische Veranschaulichung des Box-Begriffs

```
type Radius      = Float -- Radius, Oberflaeche, Volumen und pi
type Oberflaeche = Float -- global im Gesamtprogramm sichtbar
type Volumen     = Float

pi = 3.14 :: Float
-------------------------------------------
| -- kugel_OV global im Gesamtprogramm sichtbar
kugel_OV :: Radius -> (Oberflaeche,Volumen)
kugel_OV =
|(oberflaeche r,
|  volumen r)
|         ---------------------------------
|         | -- oberflaeche lokal in kugelOV sichtbar
|   where oberflaeche :: Radius -> Oberflaeche
|         oberflaeche r = 4 * pi *
|         |   square r
|         ------------------------->
|         ---------------------------------
|         | -- volumen lokal in kugelOV sichtbar
|         volumen :: Radius -> Volumen
|         volumen r = (4/3)
|         |    * pi * cubic r
|         | ------------------------
|         | | -- cubic lokal in volumen sichtbar
|         | | where cubic x = x * square x
|         | ------------------->
|         ------------------------>
|
-----------------------------------------------
-------------------------------------------
| -- square global im Gesamtprogramm sichtbar
square :: Float -> Float
square x = x^2
------------------------------------->
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Bewährte Formatierungskonventionen (1)

...zur Einhaltung der Abseitsregel für Funktionsdefinitionen:

```
funktionsName parameter_1 parameter_2... parameter_n
  | waechter_1 = ausdruck_1
  | waechter_2 = ausdruck_2
  ...
  | otherwise  = ausdruck_k
    where
    v_1 a_1 ... a_n = r_1     -- v_1, v_2,..., sichtbar
    v_2             = r_2     -- in der gesamten Funk-
    ...                       -- tion funktionsName,
                              -- aber nicht außerhalb.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Bewährte Formatierungskonventionen (2)

...für lange Bedingungen und Ausdrücke:

```
funktionsName parameter_1 parameter_2... parameter_n
  | waechter_1 = ausdruck_1
  | waechter_2 = ausdruck_2
  | diesIsteineGanz
    BesondersLangeMehrzeilige
     BedingungAlsWaechter
                = diesIstEinBesonders
                   LangerMehrzeiliger
                    AusdruckZurWertfestlegung
  | waechter_4 = ausdruck_4
  ...
  | otherwise  = ausdruck_k
    where...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Sprachkonstrukt- und Formatierungswahl

...nach Angemessenheitserwägungen:

- Was ist gut und einfach lesbar und verständlich?

Illustration:

Vergleiche folgende je drei Implementierungen der Rechenvorschriften miteinander:

- `fib :: Int -> Int`
- `maximum :: Int -> Int -> Int -> Int`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Zwei Bsp.: Drei Implementierungen für `fib`

Mit Mustern:

```
fib :: Int -> Int
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-2) + fib (n-1)
```

Mit bedingten Ausdrücken:

```
fib :: Int -> Int
fib n = if (n == 0) || (n == 1) then 1
           else fib (n-2) + fib (n-1)
```

Mit geschachtelten bedingten Ausdrücken:

```
fib :: Int -> Int
fib n = if n == 0
           then 1
           else if n == 1
                then 1
                else fib (n-2) + fib (n-1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Drei Implementierungen für `maximum`

Mit anonymer λ-Abstraktion und geschachtelten bedingten Ausdrücken:

```
maximum :: Int -> Int -> Int -> Int
maximum = \p q r -> if p>=q then (if p>=r then p else r)
                    else (if q>=r then q else r)
```

Mit geschachtelten bedingten Ausdrücken:

```
maximum :: Int -> Int -> Int -> Int
maximum p q r = if (p>=q) && (p>=r) then p
                else if (q>=p) && (q>=r) then q else r
```

Mit bewachten Ausdrücken:

```
maximum :: Int -> Int -> Int -> Int
maximum p q r
  | (p>=q) && (p>=r)  = p
  | (q>=p) && (q>=r)  = q
  | otherwise         = r
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Leitlinie

Programme können grundsätzlich
auf zwei Arten geschrieben werden:
So einfach, dass sie offensichtlich keinen Fehler enthalten;
so kompliziert, dass sie keinen offensichtlichen Fehler enthalten.

C.A.R. 'Tony' Hoare (* 1934)
Turing Award Preisträger 1980

Gut gewählte Sprachkonstrukte u. gut gewählte Formatierung

- unterstützen dabei, Programme einfach und offensichtlich fehlerfrei zu schreiben (vgl. Kap. 3.6)!

In Haskell heißt das

- 'schönes' Einrücken und zumeist die Verwendung bewachter Ausdrücke und Muster anstelle (geschachtelter) bedingter Ausdrücke (vgl. Kap. 3.1).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 3.8

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 3 (1)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 3, Funktionen und Operatoren; Kapitel 4, Rekursion als Entwurfstechnik)

Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 2, Expressions, types and values)

Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 1, Elemente funktionaler Programmierung)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 3.5, Function types; Kapitel 3.6, Curried functions; Kapitel 4, Defining functions; Kapitel 6, Recursive functions)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 3 (2)

Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 3, Syntax in Functions; Kapitel 4, Hello Recursion!)

Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 4, Functional Programming - Partial Function Application and Currying)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 6, Ein bisschen syntaktischer Zucker)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 7, Defining functions over lists)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 4

Typsynonyme, Neue Typen, Typklassen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 4.1

Typsynonyme

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.1.1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Was bedeuten unsere Daten?

Werte und ihre Typinformation allein erlauben i.a. nur wenig oder keinen Aufschluss darüber, was für Daten sie modellieren, d.h. in der äußeren Welt repräsentieren. Betrachte dazu:

```
('A',True)   :: (Char,Bool)
('Z',False)  :: (Char,Bool)

("Fun",3)    :: (String,Int)
("Hello",5)  :: (String,Int)

(5.0,8.0,6.8) :: (Float,Float,Float)
(7.2,9.7,8.7) :: (Float,Float,Float)

[(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
                    :: [(Float,Float,Float)]
[(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7)],
 (6.3,7.8,7.2)] :: [(Float,Float,Float)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Sprechende Funktionsnamen

...können helfen, die äußere Semantik der modellierten Daten in Anwendungen offen zu legen:

```
erstes_Zeichen_Vokal :: String -> (Char,Bool)
erstes_Zeichen_Vokal "" = error "Fehler: Leeres Arg."
erstes_Zeichen_Vokal (c:_)
  = (c, elem c [‘a‘,‘A‘,‘e‘,‘E‘,‘i‘,‘I‘,‘o‘,‘O‘,‘u‘,‘U‘])

erstes_Zeichen_Vokal "alpha" ->> (‘a‘,True)
erstes_Zeichen_Vokal "beta"  ->> (‘b‘,False)

echo_Laenge :: String -> (String,Int)
echo_Laenge s = (s,length s)

echo_Laenge "Fun"   ->> ("Fun",3)
echo_Laenge "Hello" ->> ("Hello",5)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Aber nicht immer

...zumindest nicht immer vollständig oder zweifelsfrei:

```
auswertung :: (Float,Float) -> (Float,Float,Float)
auswertung (x,y) = (x,y,geglaettet)
 where geglaettet = (4*x+6*y)/10

auswertung (5.0,8.0) ->> (5.0,8.0,6.8)
auswertung (7.2,9.7) ->> (7.2,9.2,8.7)

reihenausw :: [(Float,Float)] -> [(Float,Float,Float)]
reihenausw [] = []
reihenausw ((x,y) : xys)
              = (auswertung (x,y)) : reihenausw xys

reihenausw [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)]
  ->> [(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
reihenausw [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)],(6.3,7.8)]
  ->> [(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7),
       (6.3,7.8,7.2)]
```

Die äußere Semantik der Gleitkommatupel bleibt verborgen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Was bedeuten also unsere Daten?

Wofür stehen Gleitkommapaare und -tripel wie

```
(5.0,8.0)
(7.2,9.7)
```

```
(5.0,8.0,6.8)
(7.2,9.7,8.7)
```

...und wofür Listen solcher Paare und Tripel?

```
[(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)]
```

```
[(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7),
 (6.3,7.8,7.2)]
```

Für Aktienkurse, für Pegelstände, für Positionsdaten?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.1.2

Typsynonyme

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Aktienkurse

```
type Kurs                = Float
type Niedrigst           = Kurs
type Hoechst             = Kurs
type Bewertet            = Kurs
type Kursausschlag       = (Niedrigst,Hoechst)
type Ausschlagsanalyse   = (Niedrigst,Hoechst,Bewertet)
type Kursverlauf         = [Kursausschlag]
type Verlaufsanalyse     = [Ausschlagsanalyse]
```

Typsynonymverw. führt jetzt zu sprechenderen Funktionsdef.:

```
auswertung :: Kursausschlag -> Ausschlagsanalyse
auswertung (x,y) = (x,y,geglaettet) -- Moderat risiko-
 where geglaettet = (4*x+6*y)/10    -- freud. Investor

reihenausw :: Kursverlauf -> Verlaufsanalyse
reihenausw [] = []
reihenausw ((x,y) : xys)
              = (auswertung (x,y)) : reihenausw xys
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Aktienkurse

...und Anwendungsaufrufen:

```
ausschlag1 = (5.0,8.0) :: Kursausschlag
ausschlag2 = (7.2,9.7) :: Kursausschlag

auswertung ausschlag1 ->> (5.0,8.0,6.8) :: Ausschlagsanalyse
auswertung ausschlag2 ->> (7.2,9.7,8.7) :: Ausschlagsanalyse

verlauf1 = [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)] :: Kursverlauf
verlauf2 = [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)] :: Kursverlauf

reihenausw verlauf1
 ->> [(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
                                        :: Verlaufsanalyse
reihenausw verlauf2
 ->> [(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7)]
                      :: Verlaufsanalyse
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Pegelstände

```
type Pegelstand        = Float
type Niedrig           = Pegelstand
type Hoch              = Pegelstand
type Mittel            = Pegelstand
type Messung           = (Niedrig,Hoch)
type Auswertung        = (Niedrig,Hoch,Mittel)
type Messreihe         = [Messung]
type Auswertungsreihe = [Auswertung]
```

Typsynonymverw. ermöglicht jetzt folgende Funktionsdefinitionen:

```
auswertung' :: Messung -> Auswertung
auswertung' (x,y) = (x,y,geglaettet)
 where geglaettet = (x+y)/2          -- Rechn. Mittelwert

reihenausw' :: Messreihe -> Auswertungsreihe
reihenausw' [] = []
reihenausw' ((x,y) : xys)
                 = (auswertung' (x,y)) : reihenausw' xys
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Pegelstände

...und Anwendungsaufrufe:

```
mess1 = (5.0,8.0) :: Messung
mess2 = (7.2,9.7) :: Messung

auswertung' mess1 ->> (5.0,8.0,6.5) :: Auswertung
auswertung' mess2 ->> (7.2,9.7,8.45) :: Auswertung

messreihe1 = [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)] :: Messreihe
messreihe2 = [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)] :: Messreihe

reihenausw' messreihe1
 ->> [(5.0,8.0,6.5),(7.2,9.7,8.45),(2.1,4.6,3.75)]
                                        :: Auswertungsreihe
reihenausw' messreihe2
 ->> [(2.4,7.9,5.15),(3.2,5.7,4.45),(2.8,9.3,6.05)]
                                        :: Auswertungsreihe
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Positionsdaten

```
type Koordinate  = Float
type X           = Koordinate
type Y           = Koordinate
type Z           = Koordinate
type Ebenenpunkt = (X,Y)
type Raumpunkt   = (X,Y,Z)
type Flaeche     = [Ebenenpunkt]
type Koerper     = [Raumpunkt]
```

Typsynonymverw. ermöglicht folgende Funktionsdefinitionen:

```
auswertung'' :: Ebenenpunkt -> Raumpunkt
auswertung'' (x,y) = (x,y,geglaettet)
 where geglaettet = x+y     -- Summe als Z-Koord.-Wert

reihenausw'' :: Flaeche -> Koerper
reihenausw'' [] = []
reihenausw'' ((x,y) : xys)
                 = (auswertung'' (x,y)) : reihenausw'' xys
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Positionsdaten

...und Anwendungsaufrufe:

```
xy1 = (5.0,8.0) :: Ebenenpunkt
xy2 = (7.2,9.7) :: Ebenenpunkt

auswertung'' xy1 ->> (5.0,8.0,13.0) :: Raumpunkt
auswertung'' xy2 ->> (7.2,9.7,16.9) :: Raumpunkt

flaeche1 = [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)] :: Flaeche
flaeche2 = [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)] :: Flaeche

reihenausw'' flaeche1
 ->> [(5.0,8.0,13.0),(7.2,9.7,16.9),(2.1,4.6,6.7)] :: Koerper
reihenausw'' flaeche2
 ->> [(2.4,7.9,10.3),(3.2,5.7,8.9),(2.8,9.3,12.1)] :: Koerper
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.1.3

Tupeltypsynonyme und Selektorfunktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Selektorfunktionen für Tupeltypen

...oder kurz Selektoren für Tupeltypen wie `Kursausschlag`, `Ausschlagsanalyse`, `Messung`, `Auswertung`, `Ebenenpunkt`, `Raumpunkt` sind in Haskell

- vordefiniert für Paartypen (`fst`, `snd`) (s. Kap. 2.2.1)
- selbst zu definieren für höherstellige Tupeltypen.

Generell gilt: Musterbasierte Definitionen sind für Selektoren meist am zweckmäßigsten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Selektoren für Wertpapierdaten

...in musterbasierter Definitionsweise:

```
ndgstKurs :: Kursausschlag -> Niedrigst
ndgstKurs (ndgst,_) = ndgst

hchstKurs :: Kursausschlag -> Hoechst
hchstKurs (_,hchst) = hchst

ndgstKursA :: Ausschlagsanalyse -> Niedrigst
ndgstKursA (ndgst,_,_) = ndgst

hchstKursA :: Ausschlagsanalyse -> Hoechst
hchstKursA (_,hchst,_) = hchst

bwKursA :: Ausschlagsanalyse -> Bewertet
bwKursA (_,_,bwk) = bwk
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

In gleicher Weise

...lassen sich Selektoren für

- Pegelstandsdaten
- Positionsdaten

definieren.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Selektoren für Pegelstandsdaten

...in musterbasierter Definitionsweise:

```
nPglM :: Messung -> Niedrig
nPglM (n,_) = n

hPglM :: Messung -> Hoch
hPglM (_,h) = h

nPglA :: Auswertung -> Niedrig
nPglA (n,_,_) = n

hPglA :: Auswertung -> Hoch
hPglA (_,h,_) = h

mPglA :: Auswertung -> Mittel
mPglA (_,_,m) = m
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Selektoren für Positionsdaten

...in musterbasierter Definitionsweise:

```
xE :: Ebenenpunkt -> X
xE (x,_) = x
yE :: Ebenenpunkt -> Y
yE (_,y) = y

xR :: Raumpunkt -> X
xR (x,_,_) = x
yR :: Raumpunkt -> Y
yR (_,y,_) = y
zR :: Raumpunkt -> Z
zR (_,_,z) = z
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Die Selektoren

...für Kursverläufe, Messungen und Ebenenpunkte alternativ (punktfrei) auf die vordefinierten Paarselektoren abgestützt:

```
ndgstKurs :: Kursausschlag -> Niedrigst
ndgstKurs = fst

hchstKurs :: Kursausschlag -> Hoechst
hchstKurs = snd

nPglM :: Messung -> Niedrig
nPglM = fst

hPglM :: Messung -> Hoch
hPglM = snd

xE :: Ebenenpunkt -> X
xE = fst

yE :: Ebenenpunkt -> Y
yE = snd
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.1.4

Weitere Beispiele

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Studenten- und Buchhandelsdaten

...als zwei weitere Bespiele für Tupeltypsynonyme mit zugehörigen Selektoren:

- Studentendaten
- Buchhandelsdaten

Beachte dabei die Präfixverwendung der Tupelkonstruktoren `(,,,)` und `(,,,,)` zur Kreierung von Vier- und Fünftupeln.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsynonyme + Selektoren f. Studentendaten

Typsynonyme:

```
type Vorname         = String
type Nachname        = String
type Email           = String
type Studienkennzahl = Int
type Skz             = Studienkennzahl
type Student         = (Vorname,Nachname,Email,Skz)
```

Ein Student-Wert:

```
(,,,) "Max" "Mux" "e123456@stud.tuw.ac.at" 534
 ->> ("Max","Mux","e123456@stud.tuw.ac.at",534 ) :: Student
```

Selektoren:

```
vorname :: Student -> Vorname                    (Ausschließlich
vorname (v,n,e,k) = v                            Variablenmuster)

nachname :: Student -> Nachname
nachname (v,n,e,k) = n

email :: Student -> Email
email (v,n,e,k) = e

skz :: Student -> Studienkennzahl
skz (v,n,e,k) = k
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsynonyme + Selektoren f. Buchhandelsdat.

Typsynonyme:

```
type Autor   = String
type Titel   = String
type Auflage = Int
type Jahr    = Int
type Lagernd = Bool
type Buch    = (Autor,Titel,Auflage,Jahr,Lagernd)
```

Ein Buch-Wert:

```
(,,,,) "S. Thompson" "Haskell" 3 2011 True
  ->> ("S. Thompson","Haskell",3,2011,True) :: Buch
```

Selektoren:

```
autor :: Buch -> Autor
autor (a,_,_,_,_) = a
```

(Variablenmuster, wo nötig, sonst ‘wild card’)

```
titel :: Buch -> Titel
titel (_,t,_,_,_) = t

auflage :: Buch -> Auflage
auflage (_,_,a,_,_) = a

erschienen :: Buch -> Jahr
erschienen (_,_,_,j,_) = j

lagernd :: Buch -> Lagernd
lagernd (_,_,_,_,l) = l
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.1.5

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zusammenfassung

Typsynonyme

- erlauben die äußere Semantik von Datentypen durch Wahl eines guten und sprechenden Namens offenzulegen und mitzuteilen.
- ermöglichen damit aussagekräftigere und sprechendere Funktionssignaturen.
- erhöhen dadurch die Lesbarkeit, Verständlichkeit und Transparenz von und in Programmen.

Aber: Typsynonyme

- führen keine neuen Typen ein, sondern ausschließlich neue Namen für bereits existierende Typen, sog. Alias-Namen oder Synonyme.
- leisten daher keinen Beitrag zu mehr Typsicherheit.

Dazu mehr in Kapitel 4.2 und Kapitel 5.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.1.1
4.1.2
4.1.3
4.1.4
4.1.5
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.2

Neue Typen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 4.2.1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Motivation

Typsynonyme (oder: Typaliase)

- führen neue Namen für bereits existierende Typen ein, sog. Aliasnamen, Synonyme; keine neuen Typen.
- dürfen überall dort stehen und verwendet werden, wo auch ihre jeweiligen Grundtypen stehen dürfen und umgekehrt.

Das heißt: Typsynonyme und ihre jeweiligen Grundtypen

- dürfen sich ohne Einschränkung wechselweise vertreten und liefern deshalb keinen Beitrag zu höherer Typsicherheit.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Datenzusammengehörigkeit

...im Sinn intendierter Typbedeutung ist vertikal ausgedrückt:

Grundtyp	Durch Typsynonym intendierter Typ		
	Wertpapierdaten	Pegeldaten	Positionsdaten
`Float`	Kurs Niedrigst Hoechst Bewertet	Pegelstand Niedrig Hoch Mittel	Koordinate X Y Z
`(Float,Float)`	Kursausschlag (ndgst,hchst)	Messung (ndg,hch)	Ebenenpunkt (x,y)
`(Float,Float,Float)`	Ausschlagsanalyse (ndgst,hchst,gg)	Auswertung (ndg,hch,mtt)	Raumpunkt (x,y,z)
`[(Float,Float)]`	Kursverlauf Kursausschlag-L.	Messreihe Mess'gen-L.	Fläche E'punkt-Liste
`[(Float,Float,Float)]`	Verlaufsanalyse Ausschlagsa'yse-L.	Ausw'gsreihe Ausw'gs-L.	Körper R'punkt-Liste

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Datenzusammengehörigkeit

...im Sinn tatsächlicher Typbedeutung ist horizontal ausgedrückt:

Die (jeweils gleichfarbigen) Typ (-bezeichner)

- `Float` mit seinen Aliasen
  `Kurs`, `Niedrigst`, `Hoechst`, `Bewertet`,
  `Pegelstand`, `Niedrig`, `Hoch`, `Mittel`,
  `Koordinate`, `X`, `Y`, `Z`
- `(Float,Float)` mit seinen Aliasen
  `Kursausschlag`, `Messung`, `Ebenenpunkt`
- `(Float,Float,Float)` mit seinen Aliasen
  `Ausschlagsanalyse`, `Auswertung`, `Raumpunkt`
- [(Float,Float)] mit seinen Aliasen
  Kursverlauf, Messreihe, Flaeche
- [(Float,Float,Float)] mit seinen Aliasen
  Verlaufsanalyse, Auswertungsreihe, Koerper

...dürfen einander (im Widerspruch zu ihrer intendierten Bedeutung) wechselweise vertreten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Typisierung aus Haskell-Sicht (1)

...für die Typisierung gilt deshalb (trotz/wegen der Verwendung von Typsynoymen):

```
Kurs, Niedrigst, Hoechst, Bewertet,
Pegelstand, Hoch, Niedrig, Mittel,
Koordinate, X, Y, Z                                  :: Float

Kursausschlag, Messung, Ebenenpunkt  :: (Float,Float)

Ausschlagsanalyse, Auswertung, Raumpunkt
                                     :: (Float,Float,Float)

Kursverlauf, Messreihe, Flaeche :: [(Float,Float)]

Verlaufsanalyse, Auswertungsreihe, Koerper
                                  :: [(Float,Float,Float)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Typisierung aus Haskell-Sicht (2)

...sowie für die darauf aufbauenden Verarbeitungsfunktionen:

Wertpapierdaten:

```
auswertung :: (Float,Float) -> (Float,Float,Float)
reihenausw :: [(Float,Float)] -> [(Float,Float,Float)]
```

Wasserstandsdaten:

```
auswertung' :: (Float,Float) -> (Float,Float,Float)
reihenausw' :: [(Float,Float)] -> [(Float,Float,Float)]
```

Positionsdaten:

```
auswertung'' :: (Float,Float) -> (Float,Float,Float)
reihenausw'' :: [(Float,Float)] -> [(Float,Float,Float)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Folglich (1)

...aufgrund der paarweisen Typgleichheiten von

- `auswertung`, `auswertung'`, `auswertung''`
- `reihenausw`, `reihenausw'`, `reihenausw''`

und der paarweisen Typgleichheiten von

- `Kursausschlag`, `Messung`, `Ebenenpunkt`
- `Kursverlauf`, `Messreihe`, `Flaeche`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Folglich (2)

...arbeiten die Funktionen

- `auswertung`, `auswertung'`, `auswertung''`

typfehlerfrei auf jedem Wert der Typen

- `Kursausschlag`, `Messung`, `Ebenenpunkt`

Ebenso typfehlerfrei arbeiten die Funktionen

- `reihenausw`, `reihenausw'`, `reihenausw''`

auf jedem Wert der Typen

- `Kursverlauf`, `Messreihe`, `Flaeche`

Daten können so Argument von Funktionen werden, für die das gemäß der mit den Typsynonymen ausgedrückten intendierten Semantik nicht möglich sein sollte.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Typsicherheit sieht anders aus (1)

Die Funktionen zur Wertpapierdatenverarbeitung sind typfehlerfrei auch auf Wasserstands- und Positionsdaten anwendbar:

Wasserstandsdaten

```
auswertung mess1 ->> (5.0,8.0,6.8)
auswertung mess2 ->> (7.2,9.7,8.7)

reihenausw messreihe1
 ->> [(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
reihenausw messreihe2
 ->> [(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7)]
```

Positionsdaten

```
auswertung xy1 ->> (5.0,8.0,6.8)
auswertung xy2 ->> (7.2,9.7,8.7)

reihenausw flaeche1
 ->> [(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
reihenausw flaeche2
 ->> [(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Typsicherheit sieht anders aus (2)

Die Funktionen zur Wasserstandsdatenverarbeitung sind typfehlerfrei auch auf Wertpapier- und Positionsdaten anwendbar:

Wertpapierdaten

```
auswertung' ausschlag1 ->> (5.0,8.0,6.5)
auswertung' ausschlag2 ->> (7.2,9.7,8.45)

reihenausw' verlauf1
 ->> [(5.0,8.0,6.5),(7.2,9.7,8.45),(2.1,4.6,3.35)]
reihenausw' verlauf2
->> [(2.4,7.9,5.15),(3.2,5.7,4.45),(2.8,9.3,6.05)]
```

Porsitonsdaten

```
auswertung' xy1 ->> (5.0,8.0,6.5)
auswertung' xy2 ->> (7.2,9.7,8.45)

reihenausw' flaeche1
 ->> [(5.0,8.0,6.5),(7.2,9.7,8.45),(2.1,4.6,3.35)]
reihenausw' flaeche2
 ->> [(2.4,7.9,5.15),(3.2,5.7,4.45),(2.8,9.3,6.05)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Typsicherheit sieht anders aus (3)

Die Funktionen zur Positionsdatenverarbeitung sind typfehlerfrei auch auf Wertpapier- und Wasserstandsdaten anwendbar:

Wertpapierdaten

```
auswertung'' ausschlag1 ->> (5.0,8.0,13.0)
auswertung'' ausschlag2 ->> (7.2,9.7,16.9)

reihenausw'' verlauf1
 ->> [(5.0,8.0,13.0),(7.2,9.7,16.9),(2.1,4.6,6.7)]
reihenausw'' verlauf2
->> [(2.4,7.9,10.3),(3.2,5.7,8.9),(2.8,9.3,12.1)]
```

Wasserstandsdaten

```
auswertung'' mess1 ->> (5.0,8.0,13.0)
auswertung'' mess2 ->> (7.2,9.7,16.9)

reihenausw'' messreihe1
 ->> [(5.0,8.0,13.0),(7.2,9.7,16.9),(2.1,4.6,6.7)]
reihenausw'' messreihe2
 ->> [(2.4,7.9,10.3),(3.2,5.7,8.9),(2.8,9.3,12.1)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Fehlende Typsicherheit

...kann weit reichende Folgen haben. Was mit der Verarbeitung von

- Wertpapierdaten, Wasserständen, Positionsdaten

möglich ist, ist auch mit Werten anderer Typsynonyme möglich, z.B. für:

- Meilen/Kilometer, Pferdestärken/Kilowatt, Kraftpfund (engl. pound-force, lb, lbf))/Newton, etc.

```
type Meile     = Float
type Kilometer = Float
type PS        = Float
...
```

Eine Petitesse? Fragen Sie die NASA!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Marssonde ‘Climate Orbiter’

Ereignis

– Totalverlust der Sonde Mars Climate Orbiter am 23.09.1998 beim Versuch in die Marsatmosphäre einzutauchen.

Ursache

– Widersprüchliche Verwendung metrischer und nichtmetrischer Daten zwischen Lockheed Martin Astronautics und NASA-Labor Jet Propulsion Laboratory (JPL):

Pound-force vs. Newton und weiterer metrischer und SI-Einheiten.

Schadenssumme

– Rd. 125 Millionen US$.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Marssondendebakel, Hintergrundmaterial

NASA-Datenbank 'Lessons Learned':

http://www-bcf.usc.edu/~meshkati/fea03/appendix_html/Mars%20Climate%20Orbiter%20NASA%20LLIS%Database.htm

NASA-Berichte zu Sondenverlust (...0930) und Ursache (...1110):

http://mars.nasa.gov/msp98/news/mco990930.html

http://mars.nasa.gov/msp98/news/mco991110.html

Weitere zusammenfassende Berichte (...0052) und über ignorierte Warnhinweise in der Anflugphase (...report/):

http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263786309000052

https://www.wired.com/2010/11/1110mars-climate-observer-report/

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Typsynonyme (1)

...verhindern nicht, die sprichwörtlichen Äpfel und Birnen

```
type Apfel = String
type Birne = String

jonathan = "Jonathan" :: Apfel
williams = "Williams" :: Birne

apfel    = "Williams" :: Apfel
birne    = "Jonathan" :: Birne
```

...'erfolgreich' miteinander zu vergleichen:

```
[apfel,jonathan] == [williams,birne] ->> True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Typsynonyme (2)

...erlauben intendierte Typ- und Wertbenutzungen anzuzeigen,

- nicht aber durchzusetzen.

Typsynomyme können deshalb nicht verhindern, Funktionen

- dezidiert zur Verarbeitung von z.B. Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten

versehentlich, irrtümlich oder auch absichtlich auf

- ungeeignete und nicht dafür vorgesehene Daten

anzuwenden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Übertragen auf unser durchgehendes Beispiel

...zwischen Aktienkursen, Pegelständen und Positionsangaben

- besteht kein innerer oder sonstiger bedeutungsmäßiger Zusammenhang.
- Es gibt keinen vernünftigen Grund, Funktionen für Wertpapierdaten auf Wasserstandsdaten oder Positionsdaten anzuwenden und umgekehrt.
- Eine gute Programmiersprache sollte es ermöglichen, ungeeignete Verwendung auszuschließen:
  - Das programmiersprachliche Mittel dazu: Typsysteme!
  - Im Typsystem von Haskell: Neue Typen (und als Verallgemeinerung algebraische Datentypen, siehe Kapitel 5).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 4.2.2

Neue Typen

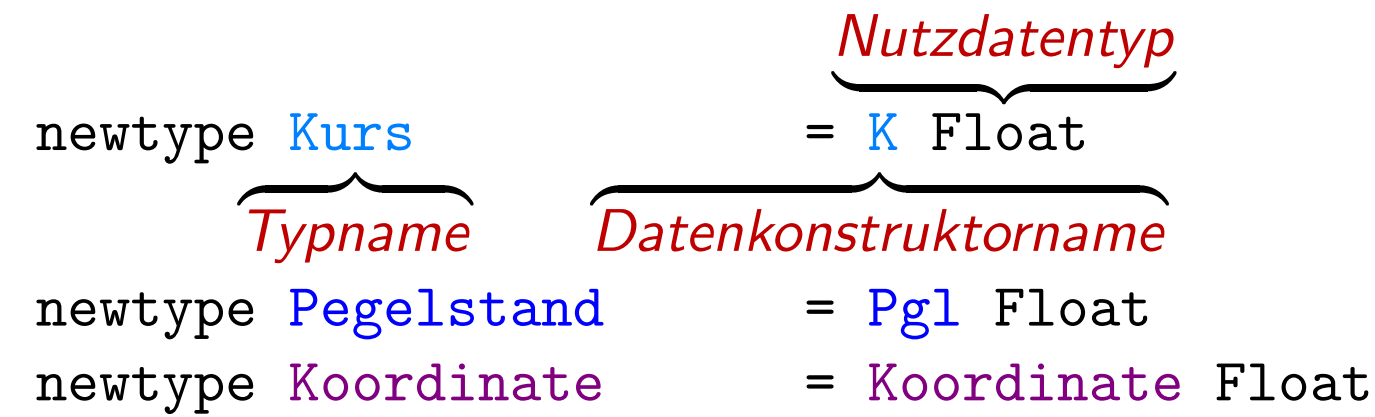
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Neue Typen

Wir ersetzen die Deklaration von Typsynonymen:

```
type Kurs        = Float
type Pegelstand  = Float
type Koordinate  = Float
```

durch die Deklaration Neuer Typen:



Beachte: Typname und Datenkonstruktorname dürfen übereinstimmen; sie sind durch den Anwendungskontext unterscheidbar.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Alles andere bleibt (syntaktisch) gleich

...am Beispiel für Wertpapierdaten:

```
newtype Kurs            = K Float
type Niedrigst          = Kurs
type Hoechst            = Kurs
type Bewertet           = Kurs
type Kursausschlag      = (Niedrigst,Hoechst)
type Ausschlagsanalyse  = (Niedrigst,Hoechst,Bewertet)
type Kursverlauf        = [Kursausschlag]
type Verlaufsanalyse    = [Ausschlagsanalyse]
```

Beachte allerdings:

- Wie Kurs sind auch Niedrigst, Hoechst und Bewertet keine Synonyme mehr für `Float`, sondern für den neuen Typ Kurs.
- In gleicher Weise sind auch Kursausschlag, Ausschlagsanalyse, Kursverlauf und Verlaufsanalyse keine Synonyme mehr für `Float`-Paare, `Float`-Tripel und Listen von `Float`-Paaren und `Float`-Tripeln.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Anpassung der Funktionsdefinitionen

..Konstruktoren in Argumentmustern, alles andere (syntaktisch) gleich:

```
auswertung :: Kursausschlag -> Ausschlagsanalyse
 auswertung  (K x,K y) = (K x,K y,K geglaettet)
  where geglaettet = (4*x+6*y)/10

 reihenausw :: Kursverlauf -> Verlaufsanalyse
 reihenausw [] = []
 reihenausw ((K x,K y)) : xys)
                 = (auswertung (K x, K y)) : reihenausw xys
```

statt (wie mit Typsynonymen in Kapitel 4.1):

```
 auswertung :: Kursausschlag -> Ausschlagsanalyse
 auswertung (x,y) = (x,y,geglaettet)
  where geglaettet = (4*x+6*y) / 10

 reihenausw :: Kursverlauf -> Verlaufsanalyse
 reihenausw [] = []
 reihenausw ((x,y) : xys)
                 = (auswertung (x,y)) : reihenausw xys
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Analog für Wasserstandsdaten

Modifizierte Typdeklarationen:

```
newtype Pegelstand     = Pgl Float
type Niedrig           = Pegelstand
type Hoch              = Pegelstand
type Mittel            = Pegelstand
type Messung           = (Niedrig,Hoch)
type Auswertung        = (Niedrig,Hoch,Mittel)
type Messreihe         = [Messung]
type Auswertungsreihe = [Auswertung]
```

Angepasste Funktionsdefinitionen:

```
auswertung' :: Messung -> Auswertung
auswertung' (Pgl x,Pgl y) = (Pgl x,Pgl y,Pgl geglaettet)
 where geglaettet = (x+y)/2

reihenausw' :: Messreihe -> Auswertungsreihe
reihenausw' [] = []
reihenausw' ((Pgl x,Pgl y) : xys)
              = (auswertung' (Pgl x,Pgl y)) : reihenausw' xys
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Analog für Positionsdaten

Modifizierte Typdeklarationen:

```
newtype Koordinate = Koordinate Float
type X             = Koordinate
type Y             = Koordinate
type Z             = Koordinate
type Ebenenpunkt   = (X,Y)
type Raumpunkt     = (X,Y,Z)
type Flaeche       = [Ebenenpunkt]
type Koerper       = [Raumpunkt]
```

Angepasste Funktionsdefinitionen:

```
auswertung'' :: Ebenenpunkt -> Raumpunkt
auswertung'' (Koordinate x,Koordinate y)
  = (Koordinate x,Koordinate y,Koordinate geglaettet)
    where geglaettet = x+y

reihenausw'' :: Flaeche -> Koerper
reihenausw'' [] = []
reihenausw'' ((Koordinate x,Koordinate y) : xys)
 = (auswertung'' (Koordinate x,Koordinate y)) : reihenausw'' xys
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 4.2.3

Typsicherheit erreicht

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Typsicherheit erreicht!

...die (Nutz-) Daten, die Gleitkommawerte, liegen jetzt geschützt hinter Datenkonstruktoren:

Wertpapierdaten:

```
ausschlag = (K 5.0,K 8.0)
verlauf   = [(K 5.0,K 8.0),(K 7.2,K 9.7),(K 2.1,K 4.6)]
```

Wasserstandsdaten:

```
messung   = (Pgl 5.0,Pgl 8.0)
messreihe = [(Pgl 5.0,Pgl 8.0),(Pgl 7.2,Pgl 9.7),
             (Pgl 2.1,Pgl 4.6)]
```

Positionsdaten:

```
ebenenpunkt = (Koordinate 5.0,Koordinate 8.0)
flaeche     = [(Koordinate 5.0,Koordinate 8.0),
               (Koordinate 7.2,Koordinate 9.7),
               (Koordinate 2.1,Koordinate 4.6)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Wertpapierdaten typgesichert typsicher!

Wertpapierdatenverarbeitungsfunktionen:

```
auswertung :: Kursausschlag -> Ausschlagsanalyse
reihenausw :: Kursverlauf -> Verlaufsanalyse
```

Anwendbarkeit auf Wertpapierdaten wie gewünscht:

```
auswertung ausschlag ->>  (K 5.0,K 8.0,K 6.8)
reihenausw verlauf   ->> [(K 5.0,K 8.0,K 6.8),
                          (K 7.2,K 9.7,K 8.7),
                          (K 2.1,K 4.6,K 3.6)]
```

Keine Anwendbarkeit auf Wasserstands-, Positionsdaten oder Gleitkommazahlen:

```
auswertung messung     ->> "Fehler: Typen passen nicht."
reihenausw messreihe   ->> "Fehler: Typen passen nicht."

auswertung ebenenpunkt ->> "Fehler: Typen passen nicht."
reihenausw flaeche     ->> "Fehler: Typen passen nicht."

auswertung (5.0,8.0)   ->> "Fehler: Typen passen nicht."
reihenausw [5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)]
                       ->> "Fehler: Typen passen nicht."
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

In gleicher Weise jetzt auch

...Wasserstands- und Positionsdaten jetzt typgesichert typsicher!

Wasserstandsdaten:

```
auswertung' :: Messung    -> Auswertung
reihenausw' :: Messreihe -> Auswertungsreihe
```

Positionsdaten:

```
auswertung'' :: Ebenenpunkt -> Raumpunkt
reihenausw'' :: Flaeche -> Koerper
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Mission erfüllt: Typsicherheit erreicht!

Das Konzept Neuer Typen, Nutzdaten hinter Datenkonstruktoren zu verbergen und schützen, erlaubt

- zusätzlich zum Anzeigen intendierter Typ- und Wertbenutzungen

diese auch durchzusetzen und (Nutz-) Daten so vor

- versehentlicher wie absichtlicher oder böswilliger Verarbeitung durch nicht dafür vorgesehene Funktionen

wirksam zu schützen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.2.1
4.2.2
4.2.3
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 4.3

Typklassen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.3.1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsicherheit erreicht. Mission erfüllt? (1)

Betrachte folgende Wertpapierdaten:

- Typgesichert (`newtype Kurs = K Float`):

```
gs_kurs1      =  K 5.0
gs_kurs2      =  K 7.2
gs_ausschlag1 = (K 5.0,K 8.0)
gs_ausschlag2 = (K 7.2,K 9.7)
gs_verlauf1   = [(K 5.0,K 8.0),(K 7.2,K 9.7),
                 (K 2.1,K 4.6)]
gs_verlauf2   = [(K 2.4,K 7.9),(K 3.2,K 5.7),
                 (K 2.8,K 9.3)]
```

- Typungesichert (`type Kurs = Float`):

```
ugs_kurs1      = 5.0
ugs_kurs2      = 7.2
ugs_ausschlag1 = (5.0,8.0)
ugs_ausschlag2 = (7.2,9.7)
ugs_verlauf1   = [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)]
ugs_verlauf2   = [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsicherheit erreicht. Mission erfüllt? (2)

...und die Ergebnisse folgender Ausdrucksvergleiche:

```
ugs_kurs1 == ugs_kurs1 ->> True
ugs_kurs1 /= ugs_kurs2 ->> True

gs_kurs1  == gs_kurs1  ->> "Fehler: (==) unbekannt"
gs_kurs1  /= gs_kurs2  ->> "Fehler: (/=) unbekannt"

ugs_ausschlag1 == ugs_ausschlag1 ->> True
ugs_ausschlag1 /= ugs_ausschlag2 ->> True

gs_ausschlag1  == gs_ausschlag1  ->> "Fehler: (==) unbekannt"
gs_ausschlag1  /= gs_ausschlag2  ->> "Fehler: (/=) unbekannt"

ugs_verlauf1 == ugs_verlauf1 ->> True
ugs_verlauf1 /= ugs_verlauf2 ->> True

gs_verlauf1  == gs_verlauf1  ->> "Fehler: (==) unbekannt"
gs_verlauf1  /= gs_verlauf2  ->> "Fehler: (/=) unbekannt"
```

Schutz vor missbräuchlicher Nutzung überschießend? Auch definitiv gewollte Zugriffe und Verarbeitung jetzt nicht mehr möglich?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Ad hoc Abhilfe (1)

Definiere Gleichheitstests für Kurse, Kursausschläge, Kursverläufe:

```
k_eq :: Kurs -> Kurs -> Bool
(K k1) `k_eq` (K k2) = k1==k2

k_neq :: Kurs -> Kurs -> Bool
k1 `k_neq` k2 = not (k1 `k_eq` k2)

ka_eq :: Kursausschlag -> Kursausschlag -> Bool
(K k1,K k2) `ka_eq` (K k3,K k4) = (k1,k2)==(k3,k4)

ka_neq :: Kursausschlag -> Kursausschlag -> Bool
ka1 `ka_neq` ka2 = not (ka1 `ka_eq` ka2)

kv_eq :: Kursverlauf -> Kursverlauf -> Bool
[] `kv_eq` [] = True
(ka:kas) `kve_q` (la:las) = ka `ka_eq` la && kas `kv_eq` las
_ `kv_eq` _ = False

kv_neq :: Kursverlauf -> Kursverlauf -> Bool
kv1 `kv_neq` kv2 = not (kv1 `kv_eq` kv2)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Ad hoc Abhilfe (2)

Damit ergeben sich folgende Vergleichsergebnisse:

```
gs_kurs1       `k_eq`   gs_kurs1       ->> True
gs_kurs1       `k_neq`  gs_kurs2       ->> True
gs_ausschlag1  `ka_eq`  gs_ausschlag1  ->> True
gs_ausschlag1  `ka_neq` gs_ausschlag2  ->> True
gs_verlauf1    `kv_eq`  gs_verlauf1    ->> True
gs_verlauf1    `kv_neq` gs_verlauf2    ->> True
```

$\rightsquigarrow$ *Ad hoc* Abhilfe erfüllt den Zweck.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Ad hoc Abhilfe generalisierbar?

Gleichheits- und Ungleichheitstests

- könnten von uns in gleicher Weise für Wasserstands- und Positionsdaten definiert werden.

Jedoch wäre dies:

- Aufwändig, unpraktisch, wenig elegant (allein die Wahl der vielen Namen wäre bereits in hohem Maß unschön und mühsam).

Haskell bietet ein zweckmäßigeres und schlagkräftigeres Sprachmittel an:

- Typklassen (vordefiniert und selbstdefiniert)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.3.2

Vordefinierte Typklassen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typklassen in Haskell

Typklassen (gleich ob vor- oder selbstdefiniert)

- haben Typen als Elemente.
- legen eine Menge von Operationen und Relationen fest, die auf den Werten ihrer Elemente implementiert werden müssen.
- können für diese Operationen und Relationen bereits vollständige Standardimplementierungen oder noch zu vervollständigende Protoimplementierungen vorsehen.

Typen

- werden durch Instanzbildung zu Elementen bzw. Instanzen einer Typklasse.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel 1: Vordefinierte Typklasse Eq

...für Typen, deren Werte absolut verglichen werden können, d.h. auf Gleichheit, Ungleichheit:

```
class Eq a where
 (==), (/=) :: a -> a -> Bool
 x /= y = not (x==y)    -- Protoimplementierungen
 x == y = not (x/=y)    -- für (/=) und (==)
```

Die Typklasse Eq

- verlangt von Instanzen die Implementierung von zwei Wahrheitswertfunktionen (oder Prädikaten): (==), (/=).
- stellt für beide Wahrheitswertfunktion eine Protoimplementierung zur Verfügung.

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Eq:

- Implementierung von entweder (==) oder (/=).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Bemerkung

Die Protoimplementierungen für sich allein sind

- unvollständig und nicht ausreichend, da sie sich wechselweise aufeinander abstützen.

Dennoch ergibt sich folgender Vorteil aus ihrer Angabe:

- Bei Instanzbildungen reicht es, entweder eine Implementierung für `(==)` oder für `(/=)` anzugeben und deren Protoimplementierung dadurch zu überschreiben. Für den jeweils anderen Operator ist seine Protoimplementierung dadurch automatisch vollständig.
- Auch für beide Funktionen können bei der Instanzbildung Implementierungen angegeben werden. In diesem Fall werden beide Protoimplementierungen überschrieben.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildungen für die Typklasse Eq (1)

...am Beispiel des Typs `Bool` der Wahrheitswerte:

```
instance Eq Bool where
 True  == True  = True      -- Überschreiben der
 False == False = True      -- Proto-Impl. von (==)
     _ == _     = False
```

Alternativ, gleichwertig:

```
instance Eq Bool where
 True  /= True  = False     -- Überschreiben der
 False /= False = False     -- Proto-Impl. von (/=)
     _ /= _     = True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildungen für die Typklasse Eq (2)

...am Beispiel eines Typs Punkt für Punkte in der reellwertigen (x,y)-Ebene:

```
type X_Koord  = Float
type Y_Koord  = Float
newtype Punkt = Pkt (X_Koord,Y_Koord)

instance Eq Punkt where
  (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v')) = (u==u') && (v==v')
```

...Punkte sind 'gleich', wenn sie in x- **und** y-Koordinate übereinstimmen, d.h. gleich sind.

Beachte:

- Gleichheit von Punkt-Werten wird zurückgeführt auf die Gleichheit von Float-Werten.
- Sprechweise: Das Relatorsymbol (==) wird (durch die Instanzbildung) überladen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildungen für die Typklasse Eq (3)

Auch andere Auffassungen von 'Gleichheit' von Punkten wären möglich, z.B. folgende schwächere Gleichheitsauffassung:

```
instance Eq Punkt where
  (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v')) = (u==u') || (v==v')
```

...Punkte sind 'gleich', wenn sie in x- **oder** y-Koordinate übereinstimmen, d.h. auf derselben Parallele zur y- oder x-Achse liegen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel 2: Vordefinierte Typklasse Ord

...für Typen, deren Werte relativ verglichen werden können:

```
class Eq a => Ord a where
 compare              :: a -> a -> Ordering
 (<), (<=), (>), (>=) :: a -> a -> Bool
 max, min             :: a -> a -> a

 compare x y                    -- Protoimplementierungen
  | x == y    = EQ
  | x <= y    = LT
  | otherwise = GT
 x <= y       = compare x y /= GT
 x < y        = compare x y == LT
 x >= y       = compare x y /= LT
 x > y        = compare x y == GT
               \_____________________________/
 max x y       Vergleiche auf Ordering-Werten
  | x <= y    = y
  | otherwise = x
 min x y
  | x <= y    = x
  | otherwise = y
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Bemerkung

Die Typklasse `Ord`

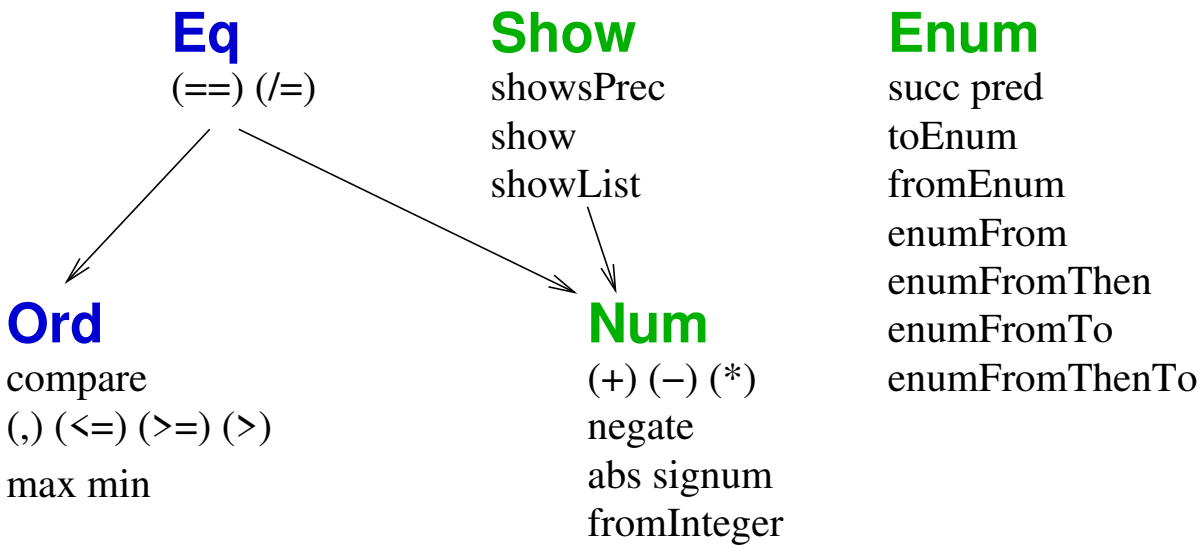
- verlangt von Instanzen die Implementierung der Funktionen `compare`, `max` und `min` sowie der Prädikate `(<)`, `(<=)`, `(>=)`, `(>)`.
- stellt für alle diese Funktionen und Prädikate Protoimplementierungen zur Verfügung.

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für `Ord`:

- Implementierung von entweder `compare` oder `(<=)`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typklassen in Haskell bilden eine Hierarchie



Quelle: Fethi Rabhi, Guy Lapalme. Algorithms - A Functional Approach. Addison-Wesley, 1999, Abb. 2.4 (Ausschnitt).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Informelle Typklassenbeschreibungen

Bereits besprochen:

- `Eq`: Werte von `Eq`-Typen müssen auf Gleichheit und Ungleichheit vergleichbar sein.
- `Ord`: Werte von `Ord`-Typen müssen über Gleichheit und Ungleichheit hinaus bezüglich ihrer relativen Größe vergleichbar sein.

Noch nicht besprochen:

- `Show`: Werte von `Show`-Typen müssen eine Darstellung als Zeichenreihe besitzen.
- `Num`: Werte von `Num`-Typen müssen mit ausgewählten numerischen Operationen verknüpfbar sein, d.h. addiert, multipliziert, subtrahiert, etc. werden können.
- `Enum`: Werte von `Enum`-Typen müssen aufzählbar sein, d.h. einen Vorgänger- und Nachfolgerwert innerhalb des Typs besitzen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel 3: Vordefinierte Typklasse Show

...für Typen, deren Werte als Zeichenreihe dargestellt werden können:

```
type ShowS = String -> String

class Show a where
 showsPrec :: Int -> a -> ShowS
 show :: a -> String
 showList :: [a] -> ShowS

 showsPrec _ x s = show x ++ s      -- Protoimplementierungen
 show x = showsPrec 0 x ""
 showList [] = showString "[]"
 showList (x:xs) = showChar '[' . shows x . showl xs
                   where showl []     =  showChar ']'
                         showl (x:xs) =
                          showChar ',' . shows x . showl xs
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Show:

- Implementierung von entweder show oder showsPrec.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildungen für die Typklasse Show

...am Beispiel der Typen Punkt und MyBool:

```
instance Show Punkt where
 show (Pkt (u,v))
  = "(" ++ show u ++ "," ++ show v ++ ") Punkt"
      ++ (if v==0 then " " else " nicht ")
      ++ "auf x-Achse."

show (Pkt (42,4711)) ->> "(42.0,4711.0) Punkt nicht auf x-Achse"
show (Pkt (42,0))    ->> "(42.0,0.0) Punkt auf x-Achse"

newtype MyBool = MB Bool

instance Show MyBool where
 show (MB True)  = "Wahr"
 show (MB False) = "Falsch"

show (MB True)  ->> "Wahr"
show (MB False)  ->> "Falsch"
```

Anmerkung: Bool ist bereits vordefiniert als Instanz von Show (show True ->> "True", show False ->> "False") und kann deshalb nicht erneut zur Instanz gemacht werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel 4: Vordefinierte Typklasse Read

...für Typen, deren Werte aus einer Zeichenreihe abgeleitet werden können:

```
type ReadS a = String -> [(a,String)]

class Read a where
 readsPrec :: Int -> ReadS a
 readList  :: ReadS [a]
 readList = ...   -- Protoimpl., hier nicht ausgeführt
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für `Read`:

- Implementierung von `readsPrec`.

...siehe Standard-Präludium und Sprachbericht für hier nicht angegebene Hilfsfunktionen von `Read` (und `Show`).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel 5: Vordefinierte Typklasse Enum

...für Typen, deren Werte aufgezählt werden können:

```
class Enum a where                    -- Informelle Bedeutung:
 succ, pred      :: a -> a    -- Vorgänger-, Nachfolgerwert
 toEnum          :: Int -> a                -- Typkonversion
 fromEnum        :: a -> Int                -- Typkonversion
 enumFrom        :: a -> [a]                   -- [n..]
 enumFromThen    :: a -> a -> [a]              -- [n,n'..]
 enumFromTo      :: a -> a -> [a]              -- [n..m]
 enumFromThenTo :: a -> a -> a -> [a]          -- [n,n'..m]
 succ              = toEnum . (+1) . fromEnum  -- Protoimpl.
 pred              = toEnum . (subtract 1) . fromEnum
 enumFrom x        = map toEnum [fromEnum x ..]
 enumFromTo x      = map toEnum [fromEnum x .. fromEnum y]
 enumFromThen x y =
  map toEnum [fromEnum x, fromEnum y .. fromEnum]
 enumFromThenTo x y z =
  map toEnum [fromEnum x, fromEnum y .. fromEnum z]
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Enum:

- Implementierung von toEnum und fromEnum.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel 6: Vordefinierte Typklasse Num

...für Typen, deren Werte numerisch behandelt werden können:

```
class (Eq a, Show a) => Num a where
 (+), (-), (*) :: a -> a -> a
 negate :: a -> a
 abs, signum :: a -> a
 fromInteger :: Integer -> a
 x - y    = x + negate y          -- Protoimplemen-
 negate x = 0 - x                 -- tierungen
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Num:

- Implementierung aller Funktionen mit Ausnahme von entweder negate oder (-).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Weitere numerische Typklassen

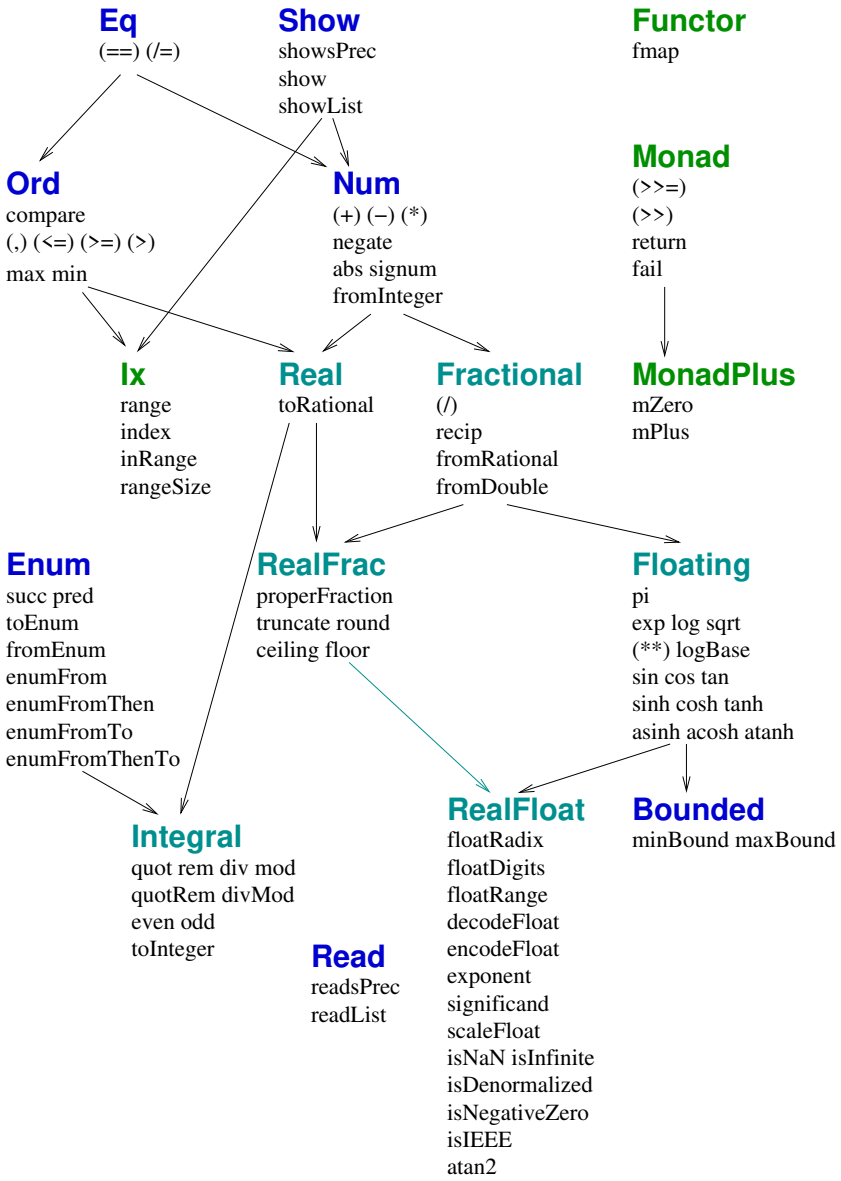
...neben bzw. als Erweiterung von Num und Enum:

```
class (Num a, Ord a)    => Real a where...
class (Real a, Enum a) => Integral a where...
class (Num a)           => Fractional a where...
class (Fractional a)            => Floating a where...
class (Real a, Fractional a)    => RealFrac a where...
class (RealFrac a, Floating a) => RealFloat a where...
```

...siehe Standard-Präludium und Sprachbericht für Einzelheiten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typklassenhierarchie im Überblick (Ausschnitt)



Quelle: Fethi Rabhi, Guy Lapalme. Algorithms - A Functional Approach. Addison-Wesley, 1999, Abb. 2.4.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beschreibung ausgewählter Typklassen

Typklasse für:

- 'Gleichheit' `Eq`: Klasse der Typen mit Gleichheits- `(==)` und Ungleichheitsrelation `(/=)`.
- 'Ordnung' `Ord`: Klasse der Typen mit Ordnungsrelationen ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, etc.).
- 'Numerisch' `Num`: Klasse der Typen, deren Werte sich numerisch verhalten (Bsp.: `Int`, `Integer`, `Float`, `Double`)
- 'Aufzählung' `Enum`: Klasse der Typen, deren Werte aufgezählt werden können (Bsp.: `[2,4..29] :: Int`).
- 'Ausgabe' `Show`: Klasse der Typen, deren Werte als Zeichenreihen dargestellt werden können (Bsp.: `Bool`, `Int`, `Integer`, `[Int]`, `(Bool,Int)`,...)
- 'Eingabe' `Read`: Klasse der Typen, deren Werte aus Zeichenreihen herleitbar sind (Bsp.: `Bool`, `Int`, `Float`, `[Float]`, `[(Bool,Float)]`,...)
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.3.3

Instanzbildung für Typklassen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildung für die Typklasse Eq

...mache Typ Kurs zu einem Element von Eq:

```
newtype Kurs = K Float

instance Eq Kurs where
 K k1 == K k2 = k1 == k2
```

Beachte: (==) ist der in Haskell vordefinierte Vergleich auf Werten vom Typ Float:

```
(==) :: Float -> Float -> Bool
```

wohingegen (==) der in der Instanzdeklaration selbstdefinierte Vergleich auf Werten vom Typ Kurs ist:

```
(==) :: Kurs -> Kurs -> Bool
```

dessen Definition sich auf den Vergleich (==) abstützt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Anwendungen von Kurs als Eq-Typ

...mit der Eq-Instanzbildung für Kurs unmittelbar möglich:

```
gs_kurs1       == gs_kurs1       ->> True
gs_kurs1       /= gs_kurs2       ->> True

gs_ausschlag1 == gs_ausschlag1 ->> True
gs_ausschlag1 /= gs_ausschlag2 ->> True

gs_verlauf1    == gs_verlauf1    ->> True
gs_verlauf1    /= gs_verlauf2    ->> True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildung für die Typklasse `Ord`

...mache Typ `Kurs` zu einem Element von `Ord`:

```
newtype Kurs = K Float

instance Ord Kurs where
 K k1 <= K k2 = k1 <= k2
```

Beachte: `(<=)` ist der in Haskell vordefinierte Vergleich auf Werten vom Typ `Float`:

```
(<=) :: Float -> Float -> Bool
```

wohingegen `(<=)` der in der Instanzdeklaration selbstdefinierte Vergleich auf Werten vom Typ `Kurs` ist:

```
(<=) :: Kurs -> Kurs -> Bool
```

dessen Definition sich auf den Vergleich `(<=)` abstützt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Anwendungen von Kurs als Ord-Typ

...mit der Ord-Instanzbildung für Kurs unmittelbar möglich:

```
gs_kurs1 <= gs_kurs1 ->> True
gs_kurs1 > gs_kurs2 ->> False

gs_ausschlag1 >= gs_ausschlag2 ->> False
gs_ausschlag1 `max` gs_ausschlag2 ->> (K 7.2,K 9.7)

gs_verlauf1 `min` gs_verlauf2
   ->> [(K 2.4,K 7.9),(K 3.2,K 5.7),(K 2.8,K 9.3)]
gs_verlauf1 `compare` gs_verlauf2 ->> GT
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Übungsaufgabe 4.3.3.1

Mache die Neuen Typen

- `Pegelstand`
- `Positionsdaten`

aus Kapitel 4.2.2 zu Instanzen der Typklassen:

1. `Eq` auf zwei alternative, gleichwertige Weisen durch Implementierung jeweils von:
   1.1 `(==)`
   1.2 `(/=)`
2. `Ord` auf zwei alternative, gleichwertige Weisen durch Implementierung jeweils von:
   2.1 `(<=)`
   2.2 `compare`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.3.4

Automatische Instanzbildung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Automatische Instanzbildungen

Für ausgewählte Typklassen können explizite Instanzbildungen wie für Pegelstand und Koordinate für Typklasse Eq:

```
newtype Pegelstand = Pgl Float
instance Eq Pegelstand where
 Pgl p1 == Pgl p2 = p1 == p2
newtype Koordinate = Koordinate Float
instance Eq Koordinate where
 Koordinate k1 /= Koordinate k2 = k1 /= k2
```

bedeutungsgleich durch automatische Instanzbildungen mittels einer deriving-Klausel ersetzt werden:

```
newtype Pegelstand = Pgl Float deriving Eq
newtype Koordinate = Koordinate Float deriving Eq
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Automatische Instanzbildungen

...sind möglich (ausschließlich!) für die vordefinierten Typklassen `Eq`, `Ord`, `Enum`, `Bounded`, `Show` und `Read` (s. Kap. 11.4.3).

Für unser durchgehendes Beispiel liefern die automatischen Instanzbildungen das gewünschte Verhalten und sind deshalb am bequemsten:

```
newtype Kurs        = K Float
                        deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Pegelstand  = Pgl Float
                        deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Koordinate  = Koordinate Float
                        deriving (Eq,Ord,Show)
```

Ist ein anderes als das automatisch erzeugte 'offensichtliche' Verhalten gewünscht, muss die Instanzbildung explizit mit einer `instance`-Deklaration erfolgen (s. Kap. 11.4.3).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel anhand des Typs Punkt (1)

...die Deklaration mit deriving-Klausel:

```
type X_Koord  = Float
type Y_Koord  = Float
newtype Punkt = Pkt (X_Koord,Y_Koord) deriving Eq
```

ist äquivalent zur Instanz-Deklaration:

```
instance Eq Punkt where
  (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v')) = (u==u') && (v==v')
```

(==) auf Punkt

(==) auf Float

Ist 'Gleichheit' von Punkten anders gewünscht, etwa Gleichheit bereits bei übereinstimmender x- oder y-Koordinate, so ist eine Instanz-Deklaration erforderlich:

```
instance Eq Punkt where
  (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v')) = (u==u') || (v==v')
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel anhand des Typs Punkt (2)

...oder bei:

'Gleichheit' als 'nicht zu weit voneinander entfernt', d.h. innerhalb eines Quadrats mit Seitenlänge $\varepsilon > 0$ umeinander:

```
instance Eq Punkt where
  (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v'))
    = (abs (u-u') <= epsilon/2) &&
      (abs (v-v') <= epsilon/2) where epsilon = 0.1
```

'Gleichheit' als 'gleich weit vom Ursprung $(0,0)$ entfernt', d.h. auf derselben Kreislinie um den Ursprung:

```
instance Eq Punkt where
  (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v'))
    = sqrt (u*u +v*v) == sqrt (u'*u' + v'*v')
```

oder...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Antibeispiel anhand des Typs Punkt (1)

Beachte: Folgender Instanzbildungsversuch schlüge fehl:

```
newtype Temperatur = Tmp Float
newtype Regenmenge = Rmg Float

instance Eq Punkt where
 (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v'))
  = (Tmp u == Tmp u')  ||  (Rmg v == Rmg v')
```

(==) auf Temperatur, nicht auf Float

(==) auf Regenmenge, nicht auf Float

...da Temperatur und Regenmenge selbst noch keine Instanzen von Eq sind und das Relationssymbol (==) deshalb für Temperatur- und Regenmenge-Werte noch keine Bedeutung hat (abgesehen vom zweifelhaften semantischen Zusammenhang von Orts-, Temperatur- und Regenmengendaten).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Antibeispiel anhand des Typs `Punkt` (2)

Beachte: Folgende Instanzbildung wäre syntaktisch möglich, aber semantisch kontraintuitiv: Punkte würden durch diese Instanzbildung als

- gleich angesehen, wenn sie sich in x- oder/und y-Koordinate unterscheiden.
- ungleich angesehen, wenn sie in x- und y-Koordinate übereinstimmen.

```
instance Eq Punkt where
 (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v')) = (u/=u') || (v/=v')
 (Pkt (u,v)) /= (Pkt (u',v')) = (u==u') && (v==v')
```

...in der Anwendung wäre diese kontraintuitive Festlegung der Bedeutung der Relatorsymbole (==) und (/=) für Punktwerte Quelle vielfacher Programmierfehler und daher abzulehnen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.3.5

Selbstdefinierte Typklassen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Selbstdefinierte Typklassen, Wiederverwendung

...auf Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten sind Operationen zur Auswertung einzelner Ereignisse und Ereignisfolgen anwendbar.

Alle diese Funktionen haben ähnliche Funktionalität und ähnliche Namen:

- `auswertung`, `auswertung'`, `auswertung''`
- `reihenausw`, `reihenausw'`, `reihenausw''`

Es bietet sich deshalb an,

- diese Operationen in einer selbstdefinierten neuen Typklasse zu bündeln,
- so Namen einzusparen und wiederzuverwenden,
- die Verwendungsähnlichkeit der Typen für Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten auszudrücken.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Bsp. 1: Selbstdef. Typklasse Analysierbar

Wir bündeln die Auswertungsfunktionen auf Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten in der selbstdefinierten neuen Typklasse Analysierbar:

```
class (Ord a, Fractional a) => Analysierbar a where
 auswertung :: (a,a) -> (a,a,a)
 reihenausw :: [(a,a)] -> [(a,a,a)]
 geglaettet :: a -> a -> a

 reihenausw [] = []                -- Protoimplementierung
 reihenausw ((x,y) : xys)          -- für reihenausw
  = (auswertung (x,y)) : reihenausw xys
 geglaettet x y = (x+y)/2          -- Vollst. Implementierung
                                   -- für geglaettet
```

Minimalvervollst. bei Instanzbildungen für Analysierbar:

- Implementierung von auswertung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Vorbereitungen

Die Instanzbildungen für Kurs, Pegelstand und Koordinate:

```
newtype Kurs        = K Float
                            deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Pegelstand  = Pgl Float
                            deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Koordinate  = Koordinate Float
                            deriving (Eq,Ord,Show)
```

für die Typklasse Analysierbar setzen folgende (hier als Übungsaufgabe gelassene) nicht automatisch ableitbare Instanzbildungen für die Typklasse Num voraus (Typ Float ist vordefinierte Instanz von Num):

```
instance Num Kurs where...  -- Vervollständigung:
instance Num Pegelstand where... -- Übungsaufgabe
instance Num Koordinate where...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildungen für Typklasse Analysierbar

...für die Typen Float, Kurs, Pegelstand und Koordinate:

```
instance Analysierbar Float where
 auswertung (f1,f2) = (f1,f2,geglaettet f1 f2)

instance Analysierbar Kurs where
 auswertung (K k1,K k2)
  = (K k1,K k2,K (geglaettet k1 k2))
 geglaettet k k' = (4*k+6*k')/10     -- überschrieben!

instance Analysierbar Pegelstand where
 auswertung (Pgl p1,Pgl p2)
  = (Pgl p1,Pgl p2,Pgl (geglaettet p1 p2))

instance Analysierbar Koordinate where
 auswertung (Koordinate k1,Koordinate k2)
  = (Koordinate k1,Koordinate k2,
     Koordinate (geglaettet k1 k2))
 geglaettet k k' = k+k'                  -- überschrieben!
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Bsp. 2: Selbstdefinierte Typklasse Warnung

...die Auswertung von Wertpapier- und Wasserstandsdaten mag vorteilhafte oder gefährliche Situationen erkennen lassen, die entsprechende 'Warnungen' ermöglichen sollte.

Wir bündeln diese Funktionen in einer weiteren neuen Typklasse Warnung, die sich auf Analysierbar abstützt:

```
class Analysierbar a => Warnung a where
 warnung   ::  (a,a)  -> String
 warnreihe :: [(a,a)] -> String
 warnreihe xys = warnung (wr xys (0,0)) -- Proto-
  where wr [] pq = pq                   -- implementierung
        wr ((x,y) : xys) (p,q) = wr xys (x+p,y+q)
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Warnung:

- Implementierung von warnung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildungen für Typklasse Warnung (1)

...für Typ Kurs:

```
instance Warnung Kurs where
 warnung (K k1,K k2)
   | k2 > 9*k1 = "Verkaufen! Aktie zu spekulativ."
   | k2 > 6*k1 = "Halten! Aktie an Spekulationsschwelle."
   | k2 > 3*k1 = "Zukaufen! Aktie hat Phantasie."
   | otherwise = "Verkaufen! Aktie ohne Phantasie."

 -- Für Kurs passt uns die Protoimplementierung von
 -- warnreihe, so dass nichts weiter für uns zu tun ist.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildungen für Typklasse Warnung (2)

...für Typ Pegelstand:

```
instance Warnung Pegelstand where
 warnung (Pgl p1,Pgl p2)
  | p2 >= 100 = "Evakuieren! Deich kurz vor Bruch."
  | p2 >=  80 = "Achtung! Deich an Belastungsgrenze."
  | p1 <=  20 = "Sperrwerk öffnen! Pegel zu niedrig."
  | otherwise = "Pegel im Normalbereich."

 -- Für Pegelstand passt uns die Protoimplementierung von
 -- warnreihe nicht. Wir überschreiben sie daher:
 warnreihe pgs = meldung anteil
  where anzahlEreignisse = length pgs
        anzahlGefahrEreignisse
         = length [max | (Pgl min,Pgl max) <- pgs, max >= 100]
        anteil = (anzahlGefahrEreignisse * 100)
                    `div` anzahlEreignisse
        meldung n
         | n >= 30   = "Anteil Gefahrereignisse hoch"
         | n >= 10   = "Anteil Gefahrereignisse moderat"
         | otherwise = "Anteil Gefahrereignisse gering"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Instanzbildungen für Typklasse `Warnung` (3)

...für Typ `Koordinate`.

Für Positionsdaten als Punkte im zwei- bzw. dreidimensionalen mathematischen Raum besteht

- kein Grund

Warnungen auszugeben. Deshalb ist eine Instanzbildung von `Koordinate` für die Typklasse `Warnung` unnötig und wird

- unterlassen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Vordefinierte Instanzen von Typklassen

Viele Typen, inbesondere

- Elementartypen (`Bool`, `Char`, `Int`,...)
- Tupel von Elementartypen
- Listen von Elementartypen (speziell Zeichenreihen)
- ...

sind bereits vordefinierte Instanzen der passenden Typklassen.

Deshalb sind wir damit ausgekommen, Instanzbildungen für

- `Kurs`, `Pegelstand` und `Koordinate` vorzunehmen.

Auf die darauf aufbauenden Tupel- und Listentypen wie `Kursausschlag`, `Kursverlauf`, etc., haben sich die Eigenschaften automatisch übertragen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typsicherheit bleibt gewahrt!

Beachte: Die Funktionen

- `auswertung`, `reihenausw` der Typklasse `Analysierbar` sind überladen und auf
  - Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten anwendbar.
- `warnung`, `warnreihe` der Typklasse `Warnung` sind überladen und auf
  - Wertpapier- und Wasserstandsdaten anwendbar.

Dabei gilt: Typsicherheit wird nicht korrumpiert!

- Alle Aufrufe der überladenen Funktionen erfolgen (wg. der jeweiligen Instanzbildungen) mit typspezifischem Code!

Die Typsicherheit bleibt deshalb in vollem Umfang gewahrt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Anwendungsszenario für selbstdef. Typklassen

...statt Standardoperatoren oder -relatoren mit einer Nicht-standardbedeutung zu unterlegen wie in:

```
instance Eq Punkt where
 (Pkt (u,v)) == (Pkt (u′,v′))
   = sqrt (u*u +v*v) == sqrt (u′*u′ + v′*v′)
```

besser eine neue Typklasse einführen mit sprechend(er)en Namen:

```
class Aehnlich a where
 aehnlich :: a -> a -> Bool

instance Aehnlich Punkt where
 aehnlich (Pkt (u,v)) (Pkt (u′,v′))
   = sqrt (u*u +v*v) == sqrt (u′*u′ + v′*v′)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Anwendungsszenario für selbstdef. Typklassen

...eingebettet in einen größeren Kontext:

```
type X_Koord  = Float
type Y_Koord  = Float
newtype Punkt = Pkt (X_Koord,Y_Koord) deriving Eq

class Aehnlich a where                  -- Jeder Typ kann Instanz
 aehnlich :: a -> a -> Bool             -- von Aehnlich werden.

instance Aehnlich Punkt where
 aehnlich (Pkt (u,v)) (Pkt (u',v'))
   = sqrt (u*u +v*v) == sqrt (u'*u' + v'*v')

class (Eq a) => Aehnlich' a where       -- Nur Eq-Instanzen können
 aehnlich' :: a -> a -> Bool            -- Inst. v. Aehnlich' werden.

instance Aehnlich' Punkt where
 aehnlich' (Pkt (u,v)) (Pkt (u',v')) = (u==u') || (v==v')
```

...wobei für (==), (/=) die 'erwartete' Standardbedeutung für Punkt-Werte bewahrt wird, zugew. d. die deriving-Klausel.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.3.6

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Typklassen vs. objektorientierte Klassen

Haskells Typklassenkonzept unterscheidet sich wesentlich vom Klassenkonzept objektorientierter Sprachen.

Objektorientiert: Klassen

- dienen der Strukturierung von Programmen.
- liefern Blaupausen zur Generierung von Werten.

In Haskell: Typklassen

- dienen der Organisation und Verwaltung von Überladung.
- dienen nicht der Strukturierung von Programmen; liefern keine Blaupausen zur Generierung von Werten.
- sind Sammlungen von Typen, deren Werte typspezifisch, aber mit Funktionen gleichen Namens bearbeitet werden sollen (`(==)`, `(>=)`, `(+)`, `(-)`, etc.).
- erhalten Typen durch explizite Instanzbildung (`instance`-Deklaration) oder implizite automatische Instanzbildung (`deriving`-Klausel) als Elemente zugewiesen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Faustregel zu Haskells Typklassenphilosophie

Bei Einführung eines neuen Typs:

1. Überlege, welche Operationen/Relationen (semantische Begriffe: plus, gleich) auf Werte dieses Typs anwendbar sind und ob es bereits passende Operatoren/Relatoren (syntaktische Begriffe: `(+)`, `(==)`) in existierenden Typklassen dafür gibt.
2. Mache den neuen Typ zu Instanzen derjenigen Typklassen, in denen diese Operatoren/Relatoren eingeführt sind; oft reichen dafür `deriving`-Klauseln aus.
3. Sind auf die Werte des neuen Typs Operationen/Relationen anwendbar, für die es keine passenden Operatoren/Relatoren in existierenden Typklassen gibt, so
   - führe eine neue Typklasse (z.B. `Waehrung`) mit passenden Operatoren/Relatoren ein (wo möglich, zusammen mit vollständigen Implementierungen oder zu vervollständigenden Protoimplementierungen),

   wenn anzunehmen ist, dass diese konzeptuell auch für weitere erst noch zu definierende Datentypen relevant sein werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Woran erkennen wir überladene Funktionen?

...am nichtleeren Signaturkontext:

- Direkt überladene Funktionen

```
(==) :: Eq a  => a -> a -> Bool
(>=) :: Ord a => a -> a -> Bool
(+)  :: Num a => a -> a -> a
betrag_in_Muenzen_verschieden_zahlbar ::
                                Waehrung a => a -> Int
```

  ...sind unmittelbar in einer Typklasse eingeführt.

- Indirekt überladene Funktionen

```
f :: (Num a,Waehrung a) => a -> a -> a
f x y
 = ...betrag_in_muenzen_verschieden_zahlbar (x+y)...
```

  ...sind nicht selbst in einer Typklasse eingeführt, stützen sich aber auf solche Funktionen ab.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Woran erkennen wir nicht überladene Fkt.?

...am leeren Signaturkontext:

```
fac     :: Integer -> Integer
first   :: (a,b) -> a
length  :: [a] -> Int
(++)    :: [a] -> [a] -> [a]
curry   :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Ausblick

...wir kommen auf

- Typdefinitionen
- Typklassen

im Zusammenhang mit

- algebraischen Datentypdeklarationen (Kap. 5)
- *Ad hoc* Polymorphie, Überladung (Kap. 11)

noch einmal zurück.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Übungsaufgabe 4.3.6.1

Vergleiche das Typklassenkonzept aus Haskell mit dem Schnittstellenkonzept aus Java.

Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede fallen auf?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 4.4

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 4 (1)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 7.1, Typsynonyme mit type; Kapitel 7.2, Einfache algebraische Typen mit data und newtype; Kapitel 7.4, Automatische Instanzen von Typklassen; Kapitel 7.8, Eigene Klassen definieren)

Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 2, Expressions, types and values; Kapitel 3, Numbers)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 3, Types and classes; Kapitel 8, Declaring types and classes)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 4 (2)

Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 2, Believe the Type)

Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 3, Defining Types, Streamlining Functions; Kapitel 6, Using Typeclasses)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 13.4, A tour of the built-in Haskell classes)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 5

Algebraische Datentypdeklarationen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 5.1

Überblick, Orientierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Grundlegende Datentypstrukturen

...in Programmiersprachen sind:

- Aufzählungstypen
- Produkttypen (Verbundtypen, Record-Typen)
- Summentypen (Variantentypen, Vereinigungstypen)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Charakterisierung und typische Beispiele

Aufzählungstypen

- Typen mit jeweils endlich vielen Werten.

  Beispiel: Typ `Jahreszeiten` mit Werten `Fruehling`, `Sommer`, `Herbst` und `Winter`.

Produkttypen (oder Verbundtypen (engl. record types))

- Typen mit möglicherweise unendlich vielen (Tupel-) Werten.

  Beispiel: Typ `Mensch` mit Werten `(Adam,Riese,männlich)`, `(Ada,Lovelace,weiblich)`, etc.

Summentypen (oder Vereinigungstypen)

- Typen mit Werten, die sich aus der Vereinigung der Werte verschiedener Typen mit jeweils möglicherweise unendlich vielen Werten ergeben.

  Beispiel: Typ `Sammelsurium` als Vereinigung der (Werte der) Typen `Buch`, `KFZ`, `Haustier`, etc.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Bereits besprochen: Typsynonyme, Neue Typen

...mittels:

- `type`-Deklarationen zur Definition von Typsynonymen, d.h. neue Namen für existierende Typen, Typaliase:

```
type Kurs = Float
type Niedrigst = Kurs
type Hoechst = Kurs
type Kursauschlag
 = (Niedrigst,Hoechst)
```

```
type Pegelstand = Float
type Niedrig = Pegelstand
type Hoch = Pegelstand
type Messung = (Niedrig,Hoch)
```

```
type Koordinate = Float
type X = Koordinate
type Y = Koordinate
type Ebenenpunkt = (X,Y)
```

...keine zusätzliche Typsicherheit; unterstützen Transparenz.

- `newtype`-Deklarationen zur Definition von Typidentitäten:

```
newtype Kurs = K Float
type Niedrigst = Kurs
type Hoechst = Kurs
type Kursauschlag
 = (Niedrigst,Hoechst)
```

```
newtype Pegelstand = Pgl Float
type Niedrig = Pegelstand
type Hoch = Pegelstand
type Messung = (Niedrig,Hoch)
```

```
newtype Koordinate = Koordinate Float
type X = Koordinate
type Y = Koordinate
type Ebenenpunkt = (X,Y)
```

...Typsicherheit durch (Datenwert-) Konstruktoren.

Allerdings: Beschränkt auf 1 Konstruktor mit 1 (Daten-) Feld.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Neu: Algebraische Datentypen

...mittels:

- `data`-Deklarationen zur Definition originär neuer Typen, von Aufzählungs-, Produkt- und Summentypen.
  - Aufzählungstypen

```
data Jahreszeiten = Fruehling | Sommer
                  | Herbst | Winter
data Geschlecht   = Maennlich | Weiblich
```

  - Produkttypen

```
type Vorname  = String
type Nachname = String
data Mensch   = M Vorname Nachname Geschlecht
```

  - Summentypen

```
data Baum = Blatt Int | Wurzel Baum Int Baum
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Damit

...Datentypdeklarationen in Haskell mittels dreier Sprachkonstrukte:

- `type` (Kap. 4.1)
- `newtype` (Kap. 4.2)
- `data` (Kap. 5.2)

Anschließend:

- Funktionen auf algebraischen Datentypen (Kap. 5.3)
- Feldsyntax für algebraische Datentypen (Kap. 5.4)
- Zusammenfassung, Anwendungshinweise (Kap. 5.5)
- Literaturhinweise (Kap. 5.6)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 5.2

Algebraische Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Kapitel 5.2.1

Aufzählungstypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele vordefinierter Aufzählungstypen

Typ der Ordnungswerte, 3 Werte:

```
data Ordering = LT | EQ | GT deriving (Eq,Ord,
                                       Bounded,
                                       Enum, Read,
                                       Show)
```

Typ der Wahrheitswerte, 2 Werte:

```
data Bool = False | True deriving (Eq,Ord,Bounded,
                                   Enum,Read,Show)
```

Trivialer Typ (oder Nulltupeltyp), 1 Wert:

```
data () = () deriving (Eq,Ord,Bounded,Enum,Read,
                       Show)
```

...Nulltupeltyp und einziger (def.) Wert ident bezeichnet: `()`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele selbstdefinierter Aufzählungstypen

```
data Jahreszeit = Fruehling | Sommer
                | Herbst | Winter
                deriving (Eq,Ord,Bounded,
                          Enum,Read,Show)

data Spielfarbe = Karo | Herz | Pik | Kreuz
                deriving (Eq,Ord,Bounded,
                          Enum,Read,Show)

data Werktag    = Montag | Dienstag | Mittwoch
                | Donnerstag | Freitag
                deriving (Eq,Ord,Bounded,
                          Enum,Read,Show)

data Wochenende = Samstag | Sonntag
                deriving (Eq,Ord,Bounded,
                          Enum,Read,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Kapitel 5.2.2

Produkttypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele selbstdefinierter Produkttypen

```
type Vorname    = String          -- Personendaten
type Nachname   = String
data Geschlecht = Maennlich
                | Weiblich deriving (Eq,Show)
type Gemeinde   = String            -- Adressdaten
type Strasse    = String
type Hausnr     = Int
type Land       = String

data Person     = P Vorname Nachname Geschlecht d...
data Anschrift  = A Gemeinde Strasse Hausnr Land d...
data Einwohner  = E Land Gemeinde [Person] deriving...
data Wohnsitze  = W Land (Person -> [Anschrift])
data Gemeldet   = G (Land -> Gemeinde -> Strasse
                         -> Hausnr -> [Person])
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Kapitel 5.2.3

Summentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele vordefinierter Summentypen

Listen (polymorph)

```
data [a] = []
         | a : [a] deriving (Eq,Ord)
                        -- Kein gültiges Haskell;
                         -- nur zur Illustration!
```

Der Möglicherweise-Typ (polymorph)

```
data Maybe a = Nothing
             | Just a deriving (Eq,Ord,Read,Show)
```

Der Entweder/Oder-Typ (polymorph)

```
data Either a b = Left a
                | Right b deriving (Eq,Ord,Read,
                                    Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele selbstdefinierter Summentypen (1)

```
type Autor           = String          -- Buch-/E-Buchdaten
type Titel           = String
type Verlag          = String
type Auflage         = Int
type Lieferbar       = Bool
type LizenzBisJahr   = Int
type Hauptdarsteller = [String]        -- Videodaten
type Regisseur       = String
type Sprachen        = [String]
type Kuenstler       = String          -- Audiodaten
type Std             = Int
type Min             = Int
type Sek             = Int
type Spieldauer      = (Std,Min,Sek)

data SchriftBildTontraeger =
 Buch Autor Titel Verlag Auflage Lieferbar
 | E_Buch Autor Titel Verlag LizenzBisJahr
 | DVD Titel Hauptdarsteller Regisseur Sprachen
 | CD Kuenstler Titel Spieldauer deriving (Eq,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele selbstdefinierter Summentypen (2)

```
type Autor          = String                -- Buch-/E-Buchdaten
type Titel          = String
type Verlag         = String
type Auflage        = Int
type Lieferbar      = Bool
data Kategorie      = PKW | LKW | Bus | Cabrio | SUV
                      deriving (Eq,Show)    -- Fahrzeugdaten
type Marke          = String
type Listenpreis    = Float
data Tierart        = Hund | Katze | Maus | Kanarienvogel
                      deriving (Eq,Show)    -- Haustierdaten
type Rufname        = String
type Gewicht_in_kg  = Float
type Vielfrass      = Bool

data Sammelsurium =
 Buch Autor Titel Verlag Auflage Lieferbar
 | KFZ Kategorie Marke Listenpreis
 | Haustier Tierart Rufname Gewicht_in_kg Vielfrass
 deriving (Eq,Show)
```

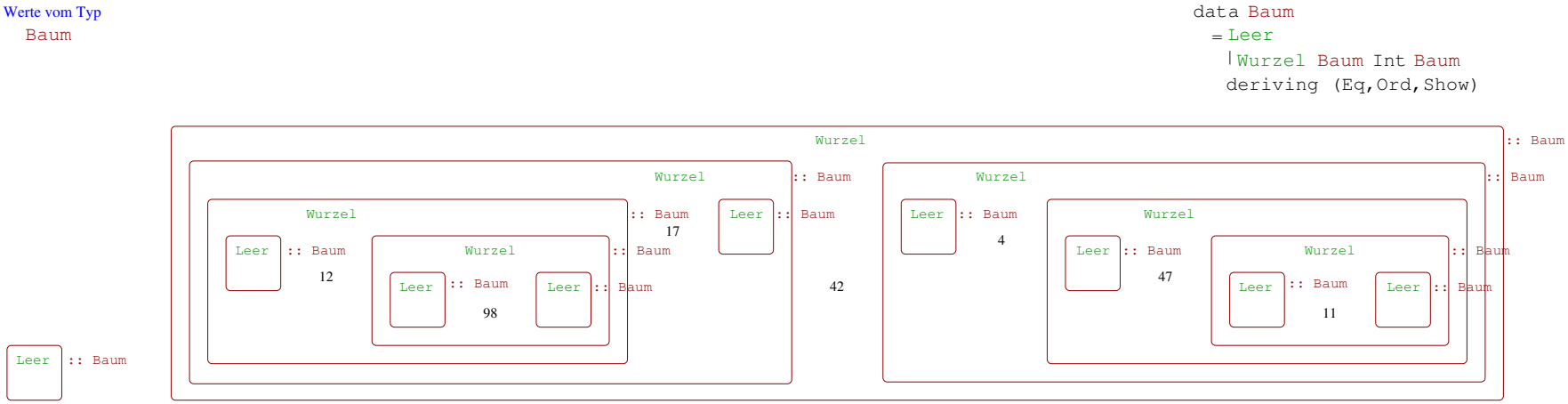
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele rekursiver Summentypen (1)

Zweistellige Bäume (oder Binärbäume)

```
data Baum = Leer
          | Wurzel Baum Int Baum
          deriving (Eq,Ord,Show)
```

Veranschaulichung: Werte vom Typ Baum:



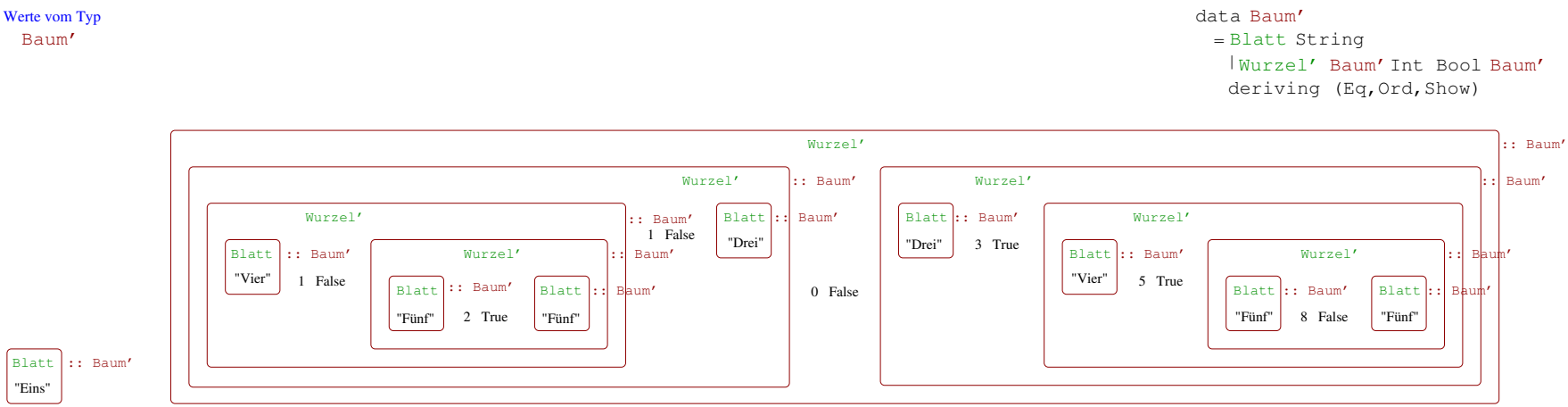
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele rekursiver Summentypen (2)

Zweistellige Bäume (oder Binärbäume)

```
data Baum' = Blatt String
           | Wurzel' Baum' Int Bool Baum'
           deriving (Eq,Ord,Show)
```

Veranschaulichung: Werte vom Typ Baum':



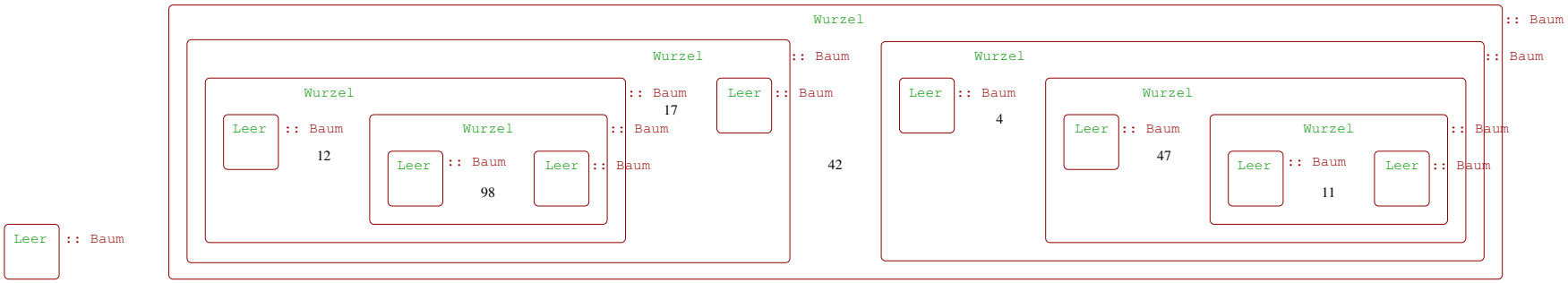
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele rekursiver Summentypen (3)

Werte der Typen `Baum` und `Baum'`, zum Vergleich auf einer Seite:

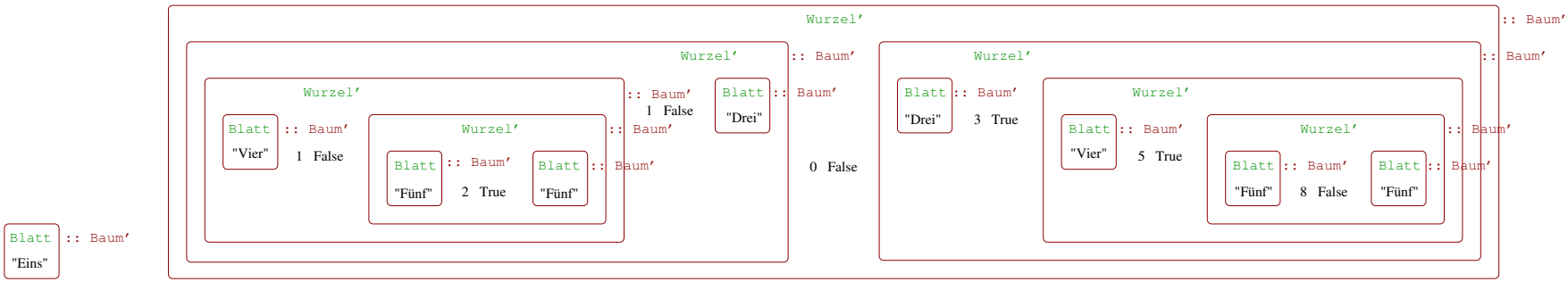
Werte vom Typ `Baum`

```
data Baum
  = Leer
  | Wurzel Baum Int Baum
  deriving (Eq,Ord,Show)
```



Werte vom Typ `Baum'`

```
data Baum'
  = Blatt String
  | Wurzel' Baum' Int Bool Baum'
  deriving (Eq,Ord,Show)
```

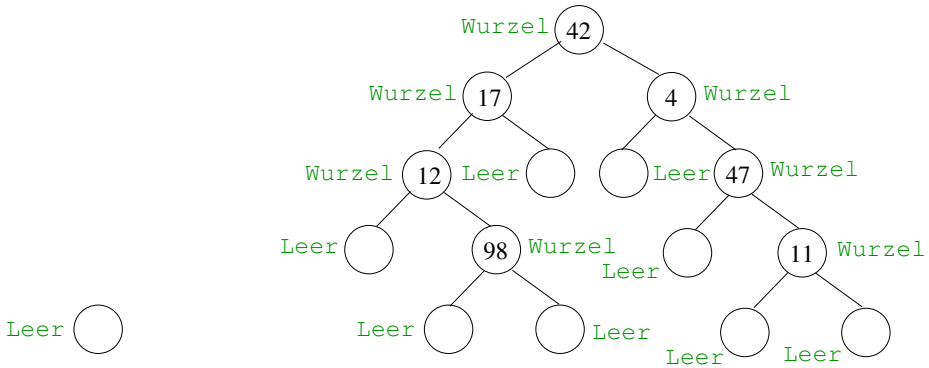


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele rekursiver Summentypen (4)

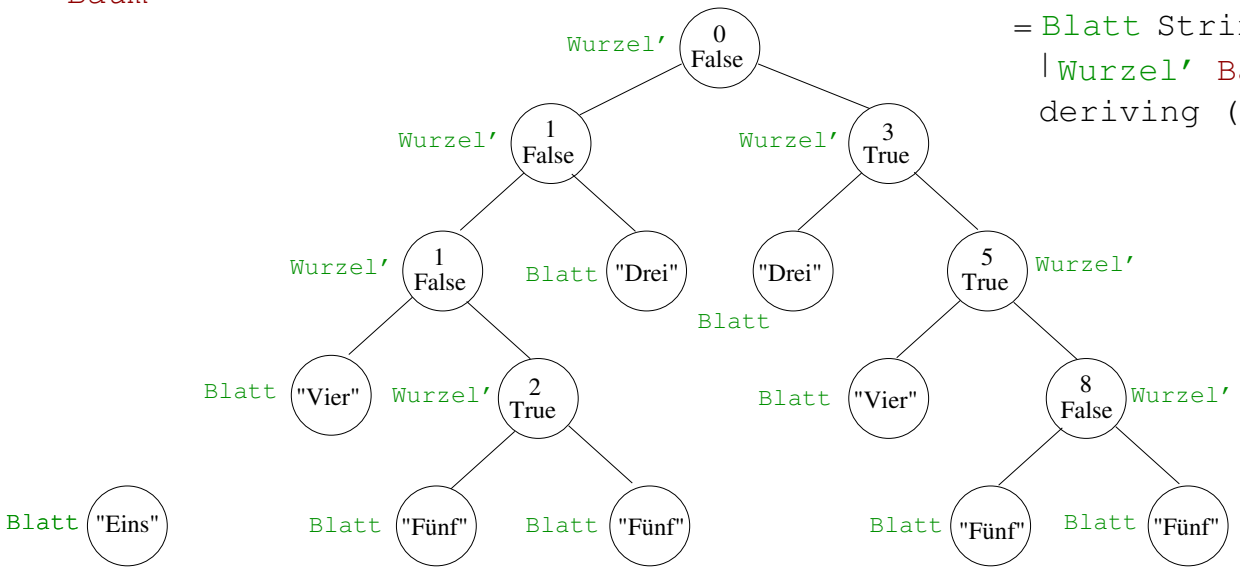
Werte d. Typen `Baum` und `Baum'`: 'Konventionelle' Darstellung

Zwei Werte vom Typ `Baum`




```
data Baum
  = Leer
  | Wurzel Baum Int Baum
  deriving (Eq,Ord,Show)
```

Zwei Werte vom Typ `Baum'`




```
data Baum'
  = Blatt String
  | Wurzel' Baum' Int Bool Baum'
  deriving (Eq,Ord,Show)
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele rekursiver Summentypen (5)

Dreistellige Bäume (oder Trinärbäume)

```
data TBaum = Nichts
           | Gabel Person TBaum TBaum TBaum
           deriving (Eq,Ord,Show)

data TBaum' = Laub Person [Anschrift]
            | Gabel' Person [Anschrift]
                     TBaum' TBaum' Tbaum'
            deriving (Eq,Ord,Show)
```

n-stellige Bäume

```
data NBaum      = NB Int [NBaum]
                  deriving (Eq,Ord,Show)

data NBaum'     = NB' (Person,[Anschrift]) [NBaum']
                  deriving (Eq,Ord,Show)

data Nadelbaum = Nb String Int Char Baum TBaum
                    [Nadelbaum] deriving...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele rekursiver Summentypen (6)

Suchbäume

```
type Schluessel  = Int
type Information = String
data Suchbaum    = Sb Schluessel Information
                 | Sk Schluessel Information
                        Suchbaum Suchbaum
                 deriving (Eq,Ord,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele rekursiver Summentypen (7)

Kartei

```
type Soz_Vers_Nr = Int
type Schluessel  = Soz_Vers_Nr
type Str         = Strasse
type Hnr         = Hausnr
type Info        = (Person,
                    (Land -> Gemeinde -> [(Str,Hnr)]))

data Kartei = Kb Schluessel Info
            | Kk Schluessel Info Kartei Kartei
            deriving (Eq,Ord,Show)
                              -- Kb für Karteiblatt.
                              -- Kk für Karteikasten.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Beispiele wechselw. rekursiver Summentypen

Bürgernetzwerk von Freunden und verwandten und bekannten Nachbarn

```
type Verwandt = Bool
type Bekannt  = Bool
data Wohnform = EFH | ZFH | MFH | DH | RH | HH | PH
                deriving (Eq,Show)

data Buerger  = B Person Wohnform Nachbarn Freunde
                deriving (Eq,Show)
data Nachbarn = N [(Buerger,Verwandt,Bekannt)]
                deriving (Eq,Show)
data Freunde  = F [Buerger]
                deriving (Eq,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Kapitel 5.2.4

Allgemeines Muster

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Das allgemeine Muster

...algebraischer Datentypdefinitionen:

```
data Typname = Kon_1 t_11 ... t_1k_1
             | Kon_2 t_21 ... t_2k_2
               ...
             | Kon_n t_n1 ... t_nk_n
```

Dabei sind:

- `Typname`: Freigewählter frischer Identifikator als Typname.
- `Kon_i`: Freigewählte frische Identifikatoren als (Datenwert-) Konstruktornamen.
- `k_i`: Stelligkeit des Konstruktors `Kon_i`.
- `t_ij`: Namen bereits existierender Typen.
- Typ- und Konstruktornamen müssen stets mit einem Großbuchstaben beginnen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

(Datenwert-) Konstruktoren

...können als Funktionsdefinitionen gelesen werden:

```
Kon_i t_i1 ... t_ik_i -> Typname
```

Die Konstruktion von Werten eines algebraischen Datentyps erfolgt durch Anwendung eines Konstruktors auf Werte 'passenden' Typs:

```
v_i1 :: t_i1 ... v_ik_i :: t_ik_i
Kon_i v_i1 ... v_ik_i :: Typname
```

Beispiele:

```
P "Adam" "Riese" Maennlich :: Person
A "Wien" "Karlsplatz" 13 "Austria" :: Anschrift
E_Buch "Simon Thompson" "Haskell" "Pearson" 2018
                          :: SchriftBildSchriftTontraeger
Haustier Katze "Garfield" 3.14 True :: Sammelsurium
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Kapitel 5.2.5

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Anzahl und Stelligkeit der Konstruktoren

...liefern eine Aufteilung der algebraischen Datentypen in i.w.:

1. (Echte) Summentypen:
   - Mindestens zwei Konstruktoren, mindestens ein nicht nullstelliger Konstruktor.
2. (Echte) Produkttypen:
   - Exakt ein zwei- oder höherstelliger Konstruktor.
3. Aufzählungstypen:
   - Ausschließlich nullstellige Konstruktoren.

Anmerkungen:

- Die Aufteilung lässt folgenden Randfall. Ein algebraischer Datentyp mit genau einem einstelligen Konstruktor lässt sich in gleicher Weise als unechter Summen- wie als unechter Produkttyp ansehen.
- Die Bezeichnungen Produkt- und Summentyp sind Grund in der Gesamtheit von algebraischen Datentypen zu sprechen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Aufzählungstypen

...gekennzeichnet durch ausschließlich 0-stellige Konstruktoren:

Beispiele:

```
data ()          = ()                  -- Ein 0-st. Konstr.
data Bool        = False | True        -- Zwei 0-st. Konstr.
data Ordering    = LT | EQ | GT        -- Drei 0-st. Konstr.
data Spielfarbe = Karo | Herz
                  | Pik | Kreuz        -- Vier 0-st. Konstr.
data Werktag     = Montag | Dienstag
                  | Mittwoch | Donnerstag
                  | Freitag            -- Fünf 0-st. Konstr.
```

Wertbeispiele:

- `()` einziger (def.) Wert des Typs `()`.
- `False`, `True` einzige (def.) Werte des Typs `Bool`.
- `LT`, `EQ`, `GT` einzige (def.) Werte des Typs `Ordering`.
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Produkttypen

...gekennzeichnet durch genau einen nicht 0-stelligen Konstruktor:

Beispiele:

```
data Person     = P Vorname Nachname Geschlecht
data Anschrift  = A Gemeinde Strasse Hausnr Land
data Einwohner  = E Land Gemeinde [Person]
data Wohnsitze  = W Land (Person -> [Anschrift])
data Gemeldet   = G (Land -> Gemeinde -> Strasse
                         -> Hausnr -> [Person])
```

Wertbeispiele:

```
adam = P "Adam" "Riese" Maennlich  :: Person
ada  = P "Ada" "Lovelace" Weiblich :: Person
E "Austria" "Wien" [adam,ada] :: Einwohner
W "Australia" ws :: Wohnsitze
ws = \p -> case p of
            adam -> [A "Perth" "Main St" 42 "Australia"]
            ada  -> [A "Sydney" "High St" 1 "Australia",
                     A "Adelaide" "1st Ave" 10 "Australia"]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Summentypen

...gekennzeichnet durch mehrere Konstruktoren, davon mindestens einer nicht 0-stellig:

Beispiele:

```
data [a]          = []              -- Kein gültiges Haskell;
                  | a : [a]          -- nur zur Illustration!
data Maybe a      = Nothing
                  | Just a
data Either a b = Left a
                  | Right b
```

Wertbeispiele:

```
[] :: []; [1,2,3] :: [Int]; [True,False,True] :: [Bool]
Nothing   :: Maybe a;     Just 42  :: Maybe Int
Just 'a'  :: Maybe Char, Just ada :: Maybe Person
Left 42   :: Either Int Char, Right 'a' :: Either Int Char
Left adam :: Either Person (Person -> [Anschrift])
Right ws  :: Either Person (Person -> [Anschrift])
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Summentypen (fgs.)

Beispiel:

```
data SchriftBildTontraeger =
 Buch Autor Titel Verlag Auflage Lieferbar
 | E_Buch Autor Titel Verlag LizenzBisJahr
 | DVD Titel Hauptdarsteller Regisseur Sprachen
 | CD Kuenstler Titel Spieldauer
```

Wertbeispiele:

```
Buch "Richard Bird" "Thinking Functionally"
     "Cambridge University Press" 1 True
  :: SchriftBildTontraeger
E_Buch "Simon Thompson" "Haskell" "Pearson" 2018
  :: SchriftBildTontraeger
DVD "Der Pate" ["Marlon Brando","Al Pacino"]
    "Francis Ford Coppola" ["Englisch","Deutsch","Italienisch"]
  :: SchriftBildTontraeger
CD "Angelika Nebel" "Klaviersonaten" (1,1,48)
  :: SchriftBildTontraeger
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Summentypen (fgs.)

Beispiel:

```
data Baum = Leer
          | Wurzel Baum Int Baum
          deriving (Eq,Ord,Show)

data TBaum' = Laub Person [Anschrift]
            | Gabel' Person [Anschrift]
                     TBaum' TBaum' Tbaum'
```

Wertbeispiele:

```
Leer :: Baum
Wurzel Leer 42 Leer :: Baum
Wurzel (Wurzel Leer 17 Leer) 42 Leer :: Baum
adrs = [A "Sydney" "High St" 1 "Australia",
        A "Adelaide" "1st Ave" 10 "Australia"] :: [Anschrift]
t1 = Laub ada adrs :: TBaum'
t2 = Laub adam [A "Perth" "Main St" 42 "Australia"] :: TBaum'
t3 = Gabel' (P "Haskell" "Curry" Maennlich) [] t1 t2 t1 :: TBaum'
t4 = Gabel' ada adrs t2 t3 t4 :: TBaum'       -- nicht endlich!
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Zusammenfassung

...mit `data` ein einheitliches Sprachkonstrukt in Haskell für

- Aufzählungstypen, Produkttypen, Summentypen als Ausprägungen algebraischer Datentypen.
- oft unterschiedliche Sprachkonstrukte in anderen Sprachen, z.B. drei in Pascal (siehe Anhang D).

Aufzählungs- und Produkttypen erscheinen als

- Randfall oder Spezialfall von Summentypen.

Algebraische Datentypdeklarationen können

- rekursiv (z.B. `Baum`, `TBaum'`) und wechselweise rekursiv (z.B. `Buerger`, `Nachbarn`) aufeinander Bezug nehmen.
- rekursive Typen ermöglichen es, Werte potentiell nicht beschränkter Größe (z.B. `t4 :: TBaum'`) zu konstruieren.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.2.1
5.2.2
5.2.3
5.2.4
5.2.5
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8

Kapitel 5.3

Funktionen auf algebraischen Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Algebraische Datentypen

...führen in natürlicher Weise zu musterbasierten Funktionsdefinitionen.

Leitfrage bei der Funktionsdefinition:

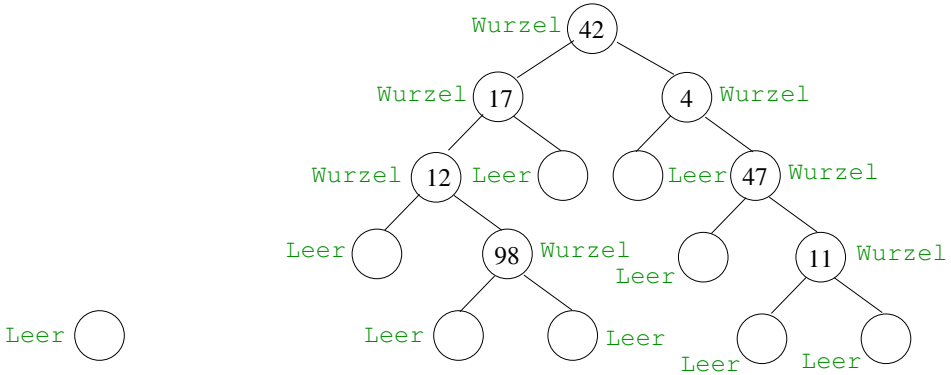
- Wenn der Wert meines algebraischen Datentyps aussieht wie ‘das und das Muster’, dann ist der Wert der Funktion ’der und der’.

In der Folge betrachten wir einige Beispiele zur Illustration.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

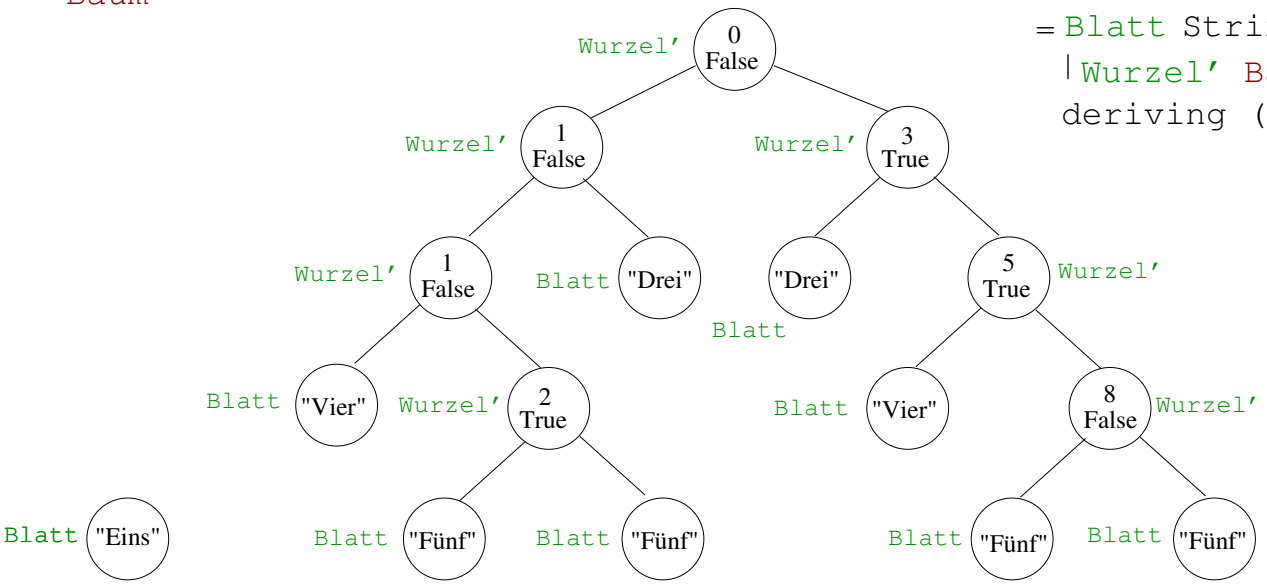
Beispiele zweier unterschiedlicher Baumtypen

Zwei Werte vom Typ `Baum`




```
data Baum
  = Leer
  | Wurzel Baum Int Baum
  deriving (Eq,Ord,Show)
```

Zwei Werte vom Typ `Baum'`




```
data Baum'
  = Blatt String
  | Wurzel' Baum' Int Bool Baum'
  deriving (Eq,Ord,Show)
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Funktionen auf diesen Baumtypen

...zum Aufsummieren der Marken, zum Berechnen der Tiefe:

```
summiereMarken :: Baum -> Int
summiereMarken Leer = 0
summiereMarken (Wurzel ltb n rtb)
     = n + summeMarken ltb + summeMarken rtb

tiefe :: Baum' -> Int
tiefe (Blatt _) = 1
tiefe (Wurzel' ltb _ _ rtb)
    = 1 + max (tiefe ltb) (tiefe rtb)
```

Aufrufbeispiele:

```
summiereMarken Leer ->>  0
summiereMarken (Wurzel Leer 2 (Wurzel Leer 3 Leer)) ->> 5
tiefe (Blatt "Fun")  ->> 1
tiefe (Wurzel' (Blatt "Fun") 4 False
       (Wurzel' (Blatt "Prog") 11 True (Blatt ""))) ->> 3
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Funktion auf Schrift-, Bild-, Tonträgerwerten

...die Selektorfunktion `selektiereTitel`:

```
selektiereTitel :: SchriftBildTonTraeger -> Titel
selektiereTitel (Buch autor titel verlag auflage lieferbar) = titel
selektiereTitel (E_Buch aut titel verl lizenz)        = titel
selektiereTitel (DVD t _ _ _) = t
selektiereTitel (CD  _ t _)   = t
```

Aufrufbeispiele:

```
selektiereTitel (Buch "Richard Bird" "Thinking Functionally"
      "Cambridge University Press" 1 True)
  ->> "Thinking Functionally" :: Titel
selektiereTitel (E_Buch "Simon Thompson" "Haskell" "Pearson" 2018)
  ->> "Haskell" :: Titel
selektiereTitel (DVD "Der Pate" ["Marlon Brando","Al Pacino"]
     "Francis Ford Coppola" ["Englisch","Deutsch","Italienisch"])
  ->> "Der Pate" :: Titel
selektiereTitel (CD "Angelika Nebel" "Klaviersonaten" (1,1,48))
  ->> "Klaviersonaten" :: Titel
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Funktionen auf Bürgernetzwerkdaten

...verwandteNachbarn und verwandteNachbarnNamen:

```
type Verwandt = Bool
type Bekannt  = Bool
data Wohnform = EFH | ZFH | MFH | DH | RH | HH | PH
                deriving (Eq,Ord,Show)

data Buerger  = B Person Wohnform Nachbarn Freunde
                deriving (Eq,Ord,Show)
data Nachbarn = N [(Buerger,Verwandt,Bekannt)]
                deriving (Eq,Ord,Show)
data Freunde  = F [Buerger]
                deriving (Eq,Ord,Show)

verwandteNachbarn :: Buerger -> [Person]
verwandteNachbarn (B _ _ (N ls) _)
 = [p | (B p _ _ _,verwandt,_) <- ls, verwandt == True]

verwandteNachbarnNamen :: Buerger -> [(Nachname,Vorname)]
verwandteNachbarnNamen (B _ _ (N ls) _)
 = [(nn,vn) | (B (P vn nn _) _ _ _,vw,_) <- ls, vw == True]
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 5.4

Feldsyntax

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Ziel: Transparente, sprechende Typdeklarationen

...in Haskell bieten sich dafür drei Möglichkeiten an:

1. Kommentierung
2. Typsynonyme
3. Feldsyntax (Verbundtypsyntax)

   ...mit dem Zusatzvorteil

   - 'geschenkter' Selektorfunktionen
   - wesentlich vereinfachter weiterer Verarbeitungsfkt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

1.) Transparente, sprechende Typdeklarationen

...durch Kommentierung:

```
newtype Gb       = Gb (String,String,String)
                     deriving (Eq,Ord,Show)
data G           = M | W deriving (Eq,Ord,Show)

data Meldedaten = Md String   -- Vorname
                     String   -- Nachname
                     Gb       -- Geboren (tt,mm,jjjj)
                     G        -- Geschlecht (m/w)
                     String   -- Gemeinde
                     String   -- Strasse
                     Int      -- Hausnummer
                     Int      -- PLZ
                     String   -- Land
                   deriving (Eq,Ord,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

2.) Transparente, sprechende Typdeklarationen

...durch Typsynonyme:

```
type Vorname       = String
type Nachname      = String
type Ziffernfolge  = String
type Zf            = Ziffernfolge
newtype Gb         = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)
type Geboren       = Gb
data G             = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
type Geschlecht    = G
type Gemeinde      = String
type Strasse       = String
type Hausnummer    = Int
type PLZ           = Int
type Land          = String

data Meldedaten    = Md Vorname Nachname Geboren
                        Geschlecht Gemeinde Strasse
                        Hausnummer PLZ Land deriving (Eq,Ord,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Kap. 10

3.) Transparente, sprechende Typdeklarationen

...durch Feldsyntax (oder: Verbundtypsyntax):

```
type Ziffernfolge = String
type Zf           = Ziffernfolge
data G            = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Gb        = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)

data Meldedaten   = Md { vorname     :: String,
                         nachname    :: String,
                         geboren     :: Gb
                         geschlecht  :: G,
                         gemeinde    :: String,
                         strasse     :: String,
                         hausnummer  :: Int,
                         plz         :: Int,
                         land        :: String
                       } deriving (Eq,Ord,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Typgleiche Felder

...können in der Feldsyntax durch Beistrich getrennt zusammengefasst werden:

```
type Ziffernfolge = String
type Zf           = Ziffernfolge
data G            = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Gb        = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)

data PersDaten    = PD { vorname,
                         nachname,
                         gemeinde,
                         strasse,
                         land        :: String,
                         geboren     :: Gb,
                         geschlecht  :: G,
                         hausnummer,
                         plz         :: Int
                       } deriving (Eq,Ord,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Feldnamen in Alternativen

...dürfen wiederholt verwendet werden, wenn ihr Typ für alle Vorkommen ident ist:

```
type Ziffernfolge = String
type Zf           = Ziffernfolge
data G            = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Gb        = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)

data Meldedaten   = Md { vorname,
                         nachname,
                         gemeinde,
                         strasse,
                         land        :: String,
                         geboren     :: Gb
                         geschlecht  :: G,
                         hausnummer,
                         plz         :: Int
                       }
                  | KurzMd { vorname,
                             nachname :: String
                           } deriving (Eq,Ord,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Insgesamt: Transparente, sprechende Typ-

...deklarationen durch Kommentar, Typsynonyme, Feldsyntax:

```
type Vorname      = String
type Nachname     = String
type Ziffernfolge = String
type Zf           = Ziffernfolge
newtype Gb        = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)
type Geboren      = Gb
data G            = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
type Geschlecht   = G
type Gemeinde     = String
type Strasse      = String
type Hausnummer   = Int
type PLZ          = Int
type Land         = String
```

```
data Meldedaten = Md { vorname     :: Vorname,
                       nachname    :: Nachname,
                       geboren     :: Geboren, -- (tt,mm,jjjj)
                       geschlecht  :: Geschlecht,
                       gemeinde    :: Gemeinde,
                       strasse     :: Strasse,
                       hausnummer  :: Hausnummer,
                       plz         :: PLZ,
                       land        :: Land
                     } deriving (Eq,Ord,Show)
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Mittels Kommentierung und Typsynonymen

...definierte Typen erfordern üblicherweise musterdefinierte Selektor-, Wertsetzungs- und Werterzeugungsfunktionen, etwa folgende 9 Selektorfunktionen:

```
vornameVon :: Meldedaten -> Vorname
vornameVon (Md vn _ _ _ _ _ _ _ _)  = vn

nachnameVon :: Meldedaten -> Nachname
nachnameVon (Md _ nn _ _ _ _ _ _ _) = nn

...

plzVon :: Meldedaten -> PLZ
plzVon (Md _ _ _ _ _ _ _ _ plz _) = hsnr

landVon :: Meldedaten -> Land
landVon (Md _ _ _ _ _ _ _ _ land)   = land
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

In gleicher Weise

...sind 9 Wertsetzungsfunktionen zu schreiben:

```
setzeVorname :: Vorname -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeVorname vn (Md _ nn geb gs gem str hsnr plz land)
 = Md vn nn geb gs gem str hsnr plz land

setzeNachname :: Nachname -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeNachname nn (Md vn _ geb gs gem str hsnr plz land)
 = Md vn nn geb gs gem str hsnr plz land

...

setzePLZ :: PLZ -> Meldedaten -> Meldedaten
setzePLZ plz (Md vn nn geb gs gem str hsnr _ land)
 = Md vn nn geb gs gem str hsnr plz land

setzeLand :: Land -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeLand land (Md vn nn geb gs gem str hsnr plz _)
 = Md vn nn geb gs gem str hsnr plz land
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Und schließlich

...noch 9 Werterzeugungsfunktionen:

```
undef = undef                -- Auswertung terminiert nicht!

erzeugeMdMitVorname :: Vorname -> Meldedaten
erzeugeMdMitVorname vorname
 = Md vorname undef undef undef undef undef undef
      undef undef

...

erzeugeMdMitLand :: Land -> Meldedaten
erzeugeMdMitLand land
 = Md undef undef undef undef undef undef undef
      undef land)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Selektorfunktionen ‘geschenkt’

...bei Feldnamenverwendung – die Feldnamen selbst sind die Selektorfunktionen:

```
vornameVon :: Meldedaten -> Vorname
vornameVon = vorname

nachnameVon :: Meldedaten -> Nachname
nachnameVon = nachname

...

plzVon :: Meldedaten -> PLZ
plzVon = plz

landVon :: Meldedaten -> Land
landVon = land
```

Beachte: Die Funktionen `vornameVon`, `nachnameVon`, etc., sind nur mehr Synonyme bzw. Aliase der Feldnamen `vorname`, `nachname`, etc.; ihre Einführung deshalb obsolet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Andere Funktionen auf Meldedaten

...wie die Wertsetzungs- und Werterzeugungsfunktionen lassen sich dank Feldnamen wesentlich einfacher schreiben:

```
setzeVorname :: Vorname -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeVorname vn md = md {vorname = vn}

setzeNachname :: Nachname -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeNachname nn md = md {nachname = nn}

...

erzeugeMdMitVorname :: Vorname -> Meldedaten
erzeugeMdMitVorname vn = Md {vorname = vn}

erzeugeMdMitNachname :: Nachname -> Meldedaten
erzeugeMdMitNachname nn = Md {nachname = nn}
```

...nicht genannte Felder werden automatisch*) 'undefiniert' gesetzt.

*) Sprachimplementierungsabhängig: 'Gute' Übersetzer und Interpretierer sollten das jedenfalls tun.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Auch mehrere Felder

...können gleichzeitig gesetzt werden, hier sind es je zwei:

```
setzeName :: Vorname -> Nachname -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeName vn nn md = md {vorname=vn, nachname=nn}
          -- Nicht genannte Felder behalten ihren Wert.

...

erzeugeMdMitName :: Vorname -> Nachname -> Meldedaten
erzeugeMdMitName vn nn = Md {vorname=vn, nachname=nn}
-- Nicht genannte Felder werden 'undefiniert' gesetzt.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Weitere Beispiele von Feldnamenverwendungen

...liefere Vor- und Nachnamen, getrennt durch ein Leerzeichen:

```
vollerNameVon :: Meldedaten -> String
vollerNameVon md
 = vorname md ++ " " ++ nachname md

vollerNameVon' :: Meldedaten -> String
vollerNameVon' (Md {vorname = vn, nachname = nn})
 = vn ++ " " ++ nn
```

Gleichwertig ohne Feldnamenverwendung:

```
vollerNameVon'' :: Meldedaten -> String
vollerNameVon'' (Md vn nn _ _ _ _ _ _ _)
 = vn ++ " " ++ nn
```

doch weniger bequem, da

- die Zahl der Unterstriche exakt stimmen muss.
- änderungsaufwändig bei Hinzu-/Wegnahme von Feldkomponenten (alle Aufrufstellen müssen angepasst werden!)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Ausblick

...in Kapitel 10 und 11 werden wir über

- monomorphe (Daten-) Typen und Funktionen

hinausgehen und

- polymorphe (Daten-) Typen
- echt und unecht polymorphe Funktionen

besprechen (statt 'unecht polymorph' sagt man auch 'überladen' oder '*ad hoc* polymorph', statt 'echt polymorph' kürzer auch 'polymorph').

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 5.5

Zusammenfassung, Anwendungshinweise

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zusammenfassung

1. `type` erlaubt existierenden Typen
   - zusätzliche, neue Namen zu geben (Synonyme, Aliase).

   Typ und Typsynonym sind ident; alle Funktionen auf dem Typ stehen daher auch auf jedem Typsynomym zur Verfügung; Typ und Typsynonyme können sich wechselweise vertreten.
2. `newtype` erlaubt existierenden Typen
   - unverwechselbare, neue Identitäten zu verleihen.

   Typ und davon abgeleiteter Neuer Typ sind verschieden und unverwechselbar; keine auf dem Typ zur Verfügung stehende Funktion überträgt sich auf den abgeleiteten Neuen Typ; alle auf Werten des Neuen Typs benötigte Fkt. sind selbst zu implementieren; manchmal reicht eine `deriving`-Klausel dafür.
3. `data` erlaubt
   - originär neue Typen und ihre Werte einzuführen.

   Alle auf Werten des neuen Typs benötigte Fkt. sind selbst zu implementieren; manchm. reicht eine `deriving`-Klausel dafür.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 5.5.1

Faustregeln

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Die Faustregel zur Verwendung von `type`

Verwende `type`-Deklarationen wie

```
type Euro    = Float
type Celsius = Float
```

wenn

- sprechendere Typnamen die beabsichtigte Bedeutung von Typwerten anzeigen sollen.
- die Bequemlichkeit geschätzt wird, alle auf dem Grundtyp vorhandenen Funktionen unmittelbar weiterverwenden zu können (z.B. `(==)`, `(/=)`, `(+)`, `(-)`,...).

unter bewusster Inkaufnahme, dass

- dies auch für semantisch unsinnige Fkt. gilt (z.B. Logarithmus, trigonometrische Fkt. für `Float`-Werte, die für Euro-Beträge oder Temperaturwerte stehen).
- auch semantisch unsinnige Verküpfungen möglich sind (z.B. Vergleich, Addition von Euro-, Temperaturwerten).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Die Faustregel zur Verwendung von `newtype`

Verwende `newtype`-Deklarationen wie

```
newtype Euro    = EUR Float
newtype Celsius = C Float
```

wenn

- über sprechendere Typnamen hinaus die (Typ-) Sicherheit benötigt wird, dass semantisch unsinnige Verküpfungen durch das Typsystem verhindert werden u. ausgeschlossen sind (z.B. Vergleich, Addition von Euro-, Temperaturwerten).

unter bewusster Inkaufnahme, dass

- keine der auf dem Grundtyp vorhand. Fkt. unmittelbar weiterverwendet werden können (wie `(==)`, `(+)`,...), sondern alle auf dem Neuen Typ benötigten Fkt. erst zu implementieren sind
  - entweder unter neu erdachten Namen (`euro_gleich`, `celsius_gleich`, `euro_plus`, `celsius_plus`,...)
  - oder bei der Instanzbildung f. passende Typklassen (`instance Eq Euro...`, `instance Num Celsius...`) zur Wiederverw. überlad. Fkt.-Namen (wie `(==)`, `(+)`,...).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Die Faustregel zur Verwendung von data

Verwende data-Deklarationen wie für Ausblick, Waehrung:

```
newtype Zentralbank_Diskontzinssatz = ZS Float
type Diskont  = Zentralbank_Diskontzinssatz
type Betrag   = Float
data Ausblick = Steigt | Sinkt | Unveraendert
data Waehrung = EUR Betrag Diskont Ausblick
              | USD Betrag Diskont Ausblick
              | GBP Betrag Diskont Ausblick
```

wenn

- Namen und Werte originär neuer Typen benötigt werden (z.B. für Bäume, Personen, Netzwerke, Währungen,...)

und deshalb

- weder type- noch newtype-Deklarationen infrage kommen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

In der Folge

...betrachten wir noch einige (besondere) Fälle anhand von Beispielen genauer.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 5.5.2

Produkttypen vs. Tupeltypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Produkttypen vs. Tupeltypen

...am Beispiel des Typs `Person` als Produkt- und als Tupeltyp:

Produkttyp

```
data Person = P Vorname Nachname Geschlecht
          -- Echter Produkttyp: Konstruktor P mehrstellig
data Person = P (Vorname,Nachname,Geschlecht)
          -- Unechter Produkttyp: Konstruktor P einstellig
newtype Person = P (Vorname,Nachname,Geschlecht)
  -- Kein Produkttyp im strengen Sinn: newtype statt data
```

Tupeltyp

```
type Person = (Vorname, Nachname, Geschlecht)
```

Offensichtlicher Unterschied: Kein Konstruktor im Tupeltyp von `Person` wie im entsprechenden Produkttyp, hier `P`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Vorteile von Produkt- gegenüber Tupeltypen

...zusammengefasst in einem Wort: Typsicherheit.

- Werte des Produkttyps sind typgesichert, da sie mit dem mit dem Konstruktor 'markiert' sind.
- 'Zufällig' passende Werte sind deshalb nicht irrtümlich, versehentlich oder absichtlich als Wert des Produkttyps manipulierbar: Typsicherheit! (Vgl. frühere Beispiele zu Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten).
- Aussagekräftigere (Typ-) Fehlermeldungen; Typsynonyme können wg. Expansion in Fehlermeldungen fehlen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Vorteile von Tupel- gegenüber Produkttypen

...zusammengefasst in einem Wort: Anwendungskomfort.

- Auf den Grundtypen (von Typsynonymen) und Tupeln vordefinierte Funktionen stehen ohne Einschränkung zur Verfügung (z.B. `fst`, `snd`, `(+)`, `(*)`,...).
- Tupelwerte erfordern keine Konstruktoren und sind deshalb (geringfügig) kompakter (weniger Schreibaufwand für den Programmquelltext).
- (Geringfügig) höhere Ausführungsperformanz, da 'ein-' und 'auspacken' von Tupelwerten entfällt.

  Hinweis: Bei einstelligen Produkttypen ist statt einer `data`- auch eine `newtype`-Deklaration möglich; hier kein Performanzverlust, da der Konstruktor nur zur Übersetzungszeit für die Überprüfung der Typkorrektheit benötigt wird.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel: Telefonbuch

...ausschließlich mittels type-Deklarationen:

```
type Vorname     = String
type Nachname    = String
type Spitzname   = String
type Name        = (Vorname,Nachname)
type Telefonnr   = Int
type Telefonbuch = [(Name,Telefonnr)]

gibTelnr :: Name -> Telefonbuch -> Telefonnr
gibTelnr name ((name',tnr):tb_rest)
 | name == name' = tnr
 | otherwise     = gibTelnr name tb_rest
gibTelnr _ []    = error "Telefonnummer unbekannt"

gibSpitzname :: Telefonnr -> Telefonbuch -> Spitzname
gibSpitzname tnr (((vn,_),tnr'):tb_rest)
 | tnr == tnr'     = vn++"ilein"
 | otherwise       = gibSpitzname tnr tb_rest
gibSpitzname _ [] = error "Spitzname unbekannt"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel: Telefonbuch

...ausschließlich mittels newtype-Deklarationen:

```
newtype Vorname     = Vn String deriving (Eq,Show)
newtype Nachname    = Nn String deriving (Eq,Show)
newtype Spitzname   = Sn String deriving (Eq,Show)
newtype Name        = N (Vorname,Nachname) deriving (Eq,Show)
newtype Telefonnr   = T Int deriving (Eq,Show)
newtype Telefonbuch = Tb [(Name,Telefonnr)] deriving (Eq,Show)

gibTelnr :: Name -> Telefonbuch -> Telefonnr
gibTelnr (N name) (Tb ((N name',T tnr):tb_rest))
 | name == name'    = T tnr
 | otherwise        = gibTelnr (N name) (Tb tb_rest)
gibTelnr _ (Tb []) = error "Telefonnummer unbekannt"

gibSpitzname :: Telefonnr -> Telefonbuch -> Spitzname
gibSpitzname (T tnr) (Tb ((N (Vn vn,_),T tnr'):tb_rest))
 | tnr == tnr'          = Sn (vn++"ilein")
 | otherwise            = gibSpitzname (T tnr) (Tb tb_rest)
gibSpitzname _ (Tb []) = error "Spitzname unbekannt"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Vergleich der `type`- und `newtype`-Varianten

`type`-Deklarationen:

- Die ‘eigentlichen’ Werte (der Typen `String`, `Int`) liegen frei zutage und können direkt in Mustern bezeichnet werden.
- Ergebnisse können unmittelbar zurückgegeben werden.

`newtype`-Deklarationen:

- Typkonstruktoren (`Vn`, `Nn`, `Sn`, `N`, `T`, `Tb`) sind integraler Bestandteil von Werten und müssen deshalb explizit in Argumentmustern angegeben werden, um die ‘eigentlichen’ Werte (der Typen `String`, `Int`) freizulegen und bezeichnen zu können.
- Bei der Rückgabe von Ergebnissen muss der ‘eigentliche’ Wert (der Typen `String`, `Int`) in den passenden Konstruktor ‘eingepackt’ werden (in `gibTelnr`: ‘`T tnr`’ statt ‘`tnr`’; in `gibSpitzname`: ‘`Sn vn++"ilein"`’ statt ‘`vn++"ilein"`’).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 5.5.3

Typsynonyme vs. neue Typen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Eigenschaften von `newtype`-Deklarationen

`newtype`-Deklarationen entsprechen im Hinblick auf

- Typsicherheit `data`-Deklarationen:
  Datenwerte liegen geschützt und markiert hinter `newtype`-Datenkonstruktoren.
- Performanz `type`-Deklarationen:
  `newtype`-Datenkonstruktoren werden ausschließlich zur Übersetzungszeit für die Typprüfung benötigt; nicht zur Laufzeit.

`newtype`-Deklarationen vereinen somit die

- besten Eigenschaften von `data`- und `type`-Deklarationen.

Aber: Typsicherheit zur Laufzeit ohne Zusatzaufwand hat einen Preis ('there is no free lunch')!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beschränkungen von `newtype`-Deklarationen

`newtype`-Deklarationen sind beschränkt auf Deklarationen mit

- genau einem (Datenwert-) Konstruktor mit genau einem (Daten-) Feld.

Beispiele:

```
                                  1 Datenfeld
newtype Person = P (Vorname, Nachname, Geboren)
    Ein 1-stelliger Konstruktor          -- Zulässig!

                                  3 Datenfelder
newtype Person = P Vorname Nachname Geboren
    Ein 3-stelliger Konstruktor        -- Unzulässig!
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 5.5.4

Auf einen Blick

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zur Wahl von `type`-Deklarationen

`type`-Deklarationen führen einen

- neuen Namen für einen existierenden Typ ein.

Sind sinnvoll, wenn

- durch 'sprechendere' Typnamen die Transparenz und Verständlichkeit von Signaturen erhöht werden soll.
- auf den Komfort, die auf dem Grundtyp definierten Funktionen weiterzubenutzen, nicht verzichtet werden soll.

Allerdings:

- `type`-Deklarationen liefern keine höhere Typsicherheit.
- Instanzen von Typklassen können nicht gebildet werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zur Wahl von `newtype`-Deklarationen

`newtype`-Deklarationen führen eine

- neue Identität für einen existierenden Typ ein.

Sind sinnvoll, wenn

- zusätzlich zu 'sprechenderen' Typnamen auch Typsicherheit erreicht werden soll.
- 'Erhöhte' Laufzeitkosten algebraischer Typen vermieden werden sollen (falls `newtype` anwendbar ist (s.u.)).
- Typen zu Instanzen von Typklassen gemacht werden sollen (siehe Kap. 4.3 und Kap. 11.4).

Allerdings:

- Eingeschränkte Anwendbarkeit. Nur möglich für Typen mit genau einem Datenwertkonstruktor und genau einem Datenfeld.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zur Wahl von `data`-Deklarationen

`data`-Deklarationen erlauben in freier Weise

- originär neue Typen und ihre Werte zu kreieren.

Sind sinnvoll (bzw. nötig), wenn

- Typsicherheit benötigt wird.
- eine newtype-Deklaration ausscheidet, weil ein neuer bislang nicht existierender Typ mit mehr als einem Konstruktor oder mehr als einem Datenfeld benötigt wird.

Allerdings:

- Im Vergleich zu `newtype`- Deklarationen etwas höhere Verarbeitungskosten, da Konstruktorbehandlung nicht nur zur Übersetzungs-, sondern auch zur Laufzeit nötig ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Summa summarum

`type`- vs. `newtype`-/`data`-Deklarationen:

...`type`-Deklarationen überall dort

- wo 'angemessen' und 'ausreichend' und zusätzliche Typsicherheit nicht erforderlich ist.
- `newtype`/`data`-Deklarationen dort, wo zusätzliche Typsicherheit nötig und unverzichtbar ist.

`newtype`- vs. `data`-Deklarationen:

...`newtype`-Deklarationen überall dort

- wo möglich (d.h. wo anwendbar).
- `data`-Deklarationen, wo nötig.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.5.1
5.5.2
5.5.3
5.5.4
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 5.6

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 5 (1)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 7, Eigene Typen und Typklassen definieren)

Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 8, Benutzerdefinierte Datentypen)

Ernst-Erich Doberkat. *Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte*. Oldenbourg Verlag, 2012. (Kapitel 4, Algebraische Datentypen)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 8.1, Type declarations; Kapitel 8.2, Data declarations; Kapitel 8.3, Newtype declarations; Kapitel 8.4, Recursive types)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 5 (2)

Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 7, Making our own Types and Type Classes; Kapitel 12, Monoids – Wrapping an Existing Type into a New Type)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 12, Konstruktion von Datenstrukturen)

Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung: Sprachdesign und Programmiertechnik*. Springer-V., 2006. (Kapitel 6, Typen; Kapitel 8, Polymorphe und abhängige Typen; Kapitel 9, Spezifikationen und Typklassen)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 5 (3)

Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 2, Types and Functions; Kapitel 3, Defining Types, Streamlining Functions – Defining a New Data Type, Type Synonyms, Algebraic Data Types)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 14, Algebraic types)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 14, Algebraic types)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
5.1
5.2
5.3
5.4
5.5
5.6
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 6

Muster und mehr

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Muster...

Muster, Musterpassung (Kap. 6.1)

- Elementare Datentypen
- Tupeltypen
- Listentypen
- Algebraische Datentypen

...und mehr:

Listenkomprehension (Kap. 6.2)

- Alleinstellungsmerkmal funktionaler Programmiersprachen

Konstruktoren, Operatoren (Kap. 6.3)

- Begriffsbestimmung und Vergleich am Beispiel von Listen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 6.1

Muster, Musterpassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster, Musterpassung

Muster sind

- (syntaktische) Ausdrücke, die die Struktur von Werten beschreiben.

Musterpassung (engl. pattern matching) dient

- in Funktionsdefinitionen durch Muster festgelegte Alternativen auszuwählen. Die Muster werden dabei in einer festen Reihenfolge (von oben nach unten) auf Passung ausprobiert; passt die Struktur eines (Argument-) Werts auf ein Muster, wird diese Alternative ausgewählt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Beispiel

Musterbasierte Funktionsdefinition:

```
sortiere :: [Integer] -> [Integer]
sortiere []     = []        (Muster der leeren Liste)
sortiere (n:[]) = [n]   (Muster einelementiger Liste)
sortiere (n:ns) = ...         (Muster zwei- oder mehr-
                                    elementiger Liste)
```

Aufrufe:

```
ns1 = []
ns2 = [2] (== 2:[])
ns3 = [2,3,1] (== 2:[3,1])

sortiere ns1 ->> []     (Wert ns1 passt auf Muster [])
sortiere ns2 ->> [2] (Wert ns2 passt auf Muster (n:[]))
sortiere ns3 ->> ... (Wert ns3 passt auf Muster (n:ns))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 6.1.1

Muster für Werte elementarer Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte elementarer Datentypen (1)

...am Beispiel von Funktionen auf Wahrheitswerten:

Konstanten und Joker als Muster:

```
nicht :: Bool -> Bool
nicht True  = False
nicht _     = True

und :: Bool -> Bool -> Bool
und True True = True
und _ _       = False

oder :: Bool -> Bool -> Bool
oder False False = False
oder _ _         = True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte elementarer Datentypen (2)

Konstanten, Variablen und Joker als Muster:

```
nund :: Bool -> Bool -> Bool
nund True True = False
nund _ _       = True

noder :: Bool -> Bool -> Bool
noder False False = True
noder _ _         = False

xoder :: Bool -> Bool -> Bool
xoder a b = a /= b

wenn_dann_sonst :: Bool -> a -> a -> a
wenn_dann_sonst True  t _ = t
wenn_dann_sonst False _ e = e
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte elementarer Datentypen (3)

...am Beispiel von Funktionen auf ganzen Zahlen:

Konstanten, Variablen und Joker als Muster:

```
mult :: Int -> Int -> Int
mult _ 0 = 0
mult 0 _ = 0
mult m 1 = m
mult 1 n = n
mult m n = m * n

potenz :: Integer -> Integer -> Integer
potenz _ 0 = 1
potenz m 1 = m
potenz m n = m * potenz m (n-1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zusammenfassung

Muster für Werte elementarer Datentypen sind:

- Konstanten: `0`, `42`, `3.14`, `'c'`, `True`,...
  $\rightsquigarrow$ ein Wert passt auf das Muster, wenn es eine Konstante vom entsprechenden Wert ist.
- Variablen: `b`, `m`, `n`, `t`, `e`,...
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (und ist rechtsseitig verwendbar).
- Joker (eng. wild card): `_`
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (aber ist rechtsseitig nicht verwendbar).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 6.1.2

Muster für Werte von Tupeltypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte von Tupeltypen

...am Beispiel von polymorphen Funktionen und Funktionen auf ganzen Zahlen:

Konstanten, Variablen und Joker als Muster:

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k)
  | k==0 || n==k = 1
  | otherwise    = binom' (n-1,k-1) + binom' (n-1,k)

fst' :: (a,b,c) -> a
fst' (x,_,_) = x

snd' :: (a,b,c) -> b
snd' (_,y,_) = y

thd' :: (a,b,c) -> c
thd' (_,_,z) = z
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zusammenfassung

Muster für Werte von Tupeltypen sind:

- Konstanten: `(0,0)`, `(0,"Null")`, `(3.14,"pi",True)`,...
  $\rightsquigarrow$ ein Wert passt auf das Muster, wenn es eine Konstante vom entsprechenden Wert ist.
- Variablen: `t`, `t1`,...
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (und ist rechtsseitig verwendbar).
- Joker (eng. wild card): `_`
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (aber ist rechtsseitig nicht verwendbar).
- Kombinationen aus Konstanten, Variablen, Jokern:
  `(m,n)`, `(True,n,_)`, `(_,(m,_,n),3.14,k,_)`,...
  $\rightsquigarrow$ ein Wert passt, wenn er strukturell mit dem Muster übereinstimmt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 6.1.3

Muster für Werte von Listentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte von Listentypen (1)

Konstanten als Muster; Konstruktormuster mit Konstanten, Variablen und Jokern:

```
add :: [Int] -> Int
add []     = 0
add (0:xs) = add xs
add (x:xs) = x + add xs

mult :: [Int] -> Int
mult []     = 1
mult (1:[]) = 1
mult (0:_)  = 0
mult (1:xs) = mult xs
mult (x:xs) = x * mult xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte von Listentypen (2)

Konstanten, Variablen und Joker als Muster; Konstruktormuster mit Jokern:

```
kopf :: [a] -> a
kopf (x:_)  =  x

rest :: [a] -> [a]
rest (_:xs) = xs

leer :: [a] -> Bool
leer []     = True
leer _      = False

verbinde :: [a] -> [a] -> [a] -> [a]
verbinde ps qs rs = ps ++ qs ++ rs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte von Listentypen (3)

Konstanten und Joker als Muster; Konstruktormuster mit Variablen und Jokern:

```
nimm :: Int -> [a] -> [a]   -- entspricht vordef.
nimm m ys = case (m,ys) of                -- Fkt. take
              (0,_)       -> []
              (_,[])      -> []
              (n,(x:xs)) -> x : nimm (n - 1) xs

streiche :: Int -> [a] -> [a] -- entspricht vordef.
streiche m ys = case (m,ys) of            -- Fkt. drop
              (0,_)       -> ys
              (_,[])      -> []
              (n,(_:xs)) -> streiche (n - 1) xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte von Listentypen (4)

Konstruktormuster erlauben auch, ‘endlich tief’ in eine Liste hineinzusehen:

```
maxElem :: Ord a => [a] -> a
maxElem []          = error "Ungueltige Eingabe"
maxElem (y:[])      = y
maxElem (x:y:ys)    = maxElem ((max x y) : ys)

length' :: [a] -> Int
length' [] = 0
length' (u:v:w:x:y:z:zs) = 6 + length' zs
length' (v:w:x:y:z:zs) = 5 + length' zs
length' (w:x:y:z:zs) = 4 + length' zs
length' (x:y:z:zs) = 3 + length' zs
length' (y:z:zs) = 2 + length' zs
length' _ = 1
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte von Listentypen (5)

Konstanten, Variablen und Joker als Muster für Zeichenreihenwerte; Konstruktormuster mit Variablen für Zeichenreihen:

```
anfuegen :: String -> String -> String
anfuegen "" t = t
anfuegen s "" = s
anfuegen s t  = s ++ t

ist_prefix :: String -> String -> Bool
ist_prefix "" _           = True
ist_prefix (c:_) ""       = False
ist_prefix (c:cs) (d:ds) = (c==d) && ist_prefix cs ds
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zusammenfassung (1)

Muster für Werte von Listentypen, speziell Zeichenreihen, sind:

- Konstanten: `[]`, `""`, `[1,2,3]`, `[1..50]`, `['a'..'z']`, `[True,False,True,True]`, `"aeiou"`,...
  $\rightsquigarrow$ ein Wert passt auf das Muster, wenn es eine Konstante vom entsprechenden Wert ist.
- Variablen: `p`, `q`, `ps`, `qs`...
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (und ist rechtsseitig verwendbar).
- Joker (eng. wild card): `_`
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (aber ist rechtsseitig nicht verwendbar).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zusammenfassung (2)

- Konstruktormuster:
  `(`⟨`muster_listenkopf`⟩`:`⟨`muster_listenrest`⟩`)`,
  `(p:ps)`, `(p:q:qs)`,...
  ⇝ ein Listenwert *ls* passt auf das Konstruktormuster `(`⟨`muster_listenkopf`⟩`:`⟨`muster_listenrest`⟩`)`, wenn ⟨`muster_listenkopf`⟩ und ⟨`muster_listenrest`⟩ gültige Musterausdrücke für Listenköpfe und Listenreste sind, *ls* nicht leer ist, der Kopf von *ls* strukturell mit ⟨`muster_listenkopf`⟩ übereinstimmt und der Rest von *ls* mit ⟨`muster_listenrest`⟩.

  ls passt strukturell auf das Konstruktormuster `(p:ps)` bzw. `(p:q:qs)` mit `p`, `ps`, `q`, `qs` Variablenmuster, wenn *ls* nicht leer ist bzw. mindestens 2 Elemente enthält.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 6.1.4

Muster für Werte algebraischer Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte algebraischer Datentypen (1)

...mit 0-stelligen Konstruktoren entsprechend Konstanten als Muster:

```
type Zeichenreihe = [Char]
data Jahreszeit   = Fruehling
                  | Sommer
                  | Herbst
                  | Winter

wetter :: Jahreszeit -> Zeichenreihe
wetter Fruehling = "Launisch"
wetter Sommer    = "Sonnig"
wetter Herbst    = "Windig"
wetter Winter    = "Frostig"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte algebraischer Datentypen (2)

Konstruktormuster mit Variablen:

```
type Zett      = Int
data Ausdruck = Opd Zett
              | Add Ausdruck Ausdruck
              | Sub Ausdruck Ausdruck
              | Quad Ausdruck

eval :: Ausdruck -> Zett
eval (Opd z)      = z
eval (Add e1 e2) = (eval e1) + (eval e2)
eval (Sub e1 e2) = (eval e1) - (eval e2)
eval (Quad e)     = (eval e)^2
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte algebraischer Datentypen (3)

Konstanten als Muster; Konstruktormuster mit Variablen und Jokern:

```
type Zett      = Int
data Baum a b = Blatt a
              | Wurzel b (Baum a b) (Baum a b)
data Liste a  = Leer
              | Kopf a (Liste a)

tiefe :: (Baum a b) -> Zett
tiefe (Blatt _)       = 1
tiefe (Wurzel _ l r) = 1 + max (tiefe l) (tiefe r)

laenge :: (Liste a) -> Zett
laenge Leer         = 0
laenge (Kopf _ xs) = 1 + laenge xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Muster für Werte algebraischer Datentypen (4)

Konstruktormuster erlauben wie für Listen auch in Werte algebraischer Datentypen 'endlich tief' hineinzusehen:

```
type Zett = Int
data Baum = Blatt Zett
          | Gabel Zett Baum Baum

putzig :: Baum -> Zett
putzig (Blatt 7) = 42
putzig (Blatt n) = n*n
putzig (Gabel n (Blatt m) (Gabel p (Blatt q) (Blatt r)))
                 = n+m+p+q+r
putzig (Gabel n (Gabel _ (Blatt q) (Blatt r)) (Blatt _))
                 = n*(q+r)
putzig _         = 0
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zusammenfassung

Muster für Werte algebraischer Typen sind:

- Konstanten: `Sommer`, `Winter`, `Empty`,...
  $\rightsquigarrow$ ein Wert passt auf das Muster, wenn es eine Konstante vom entsprechenden Wert ist.
- Variablen: `e`, `e1`, `e2`, `t`,...
  $\rightsquigarrow$jeder Wert passt (und ist rechtsseitig verwendbar).
- Joker (eng. wild card): `_`
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (aber ist rechtsseitig nicht verwendbar).
- Konstruktormuster: `(Opd e)`, `(Add e1 e2)`, `(Blatt' 7)`, `(Blatt' n)`, `(Blatt' _)`, `(Gabel 42 l r)`, (Kopf _ hs),...
  $\rightsquigarrow$ ein Wert passt strukturell auf das Konstruktormuster, wenn seine Struktur mit der des Musters übereinstimmt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 6.1.5

Das als-Muster

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Das als-Muster (1)

Sehr nützlich ist oft das sog. als-Muster (engl. as pattern).

Betrachte folgendes Beispiel:

```
nichtleere_postfixe :: String -> [String]
nichtleere_postfixe (c:cs)
  = (c:cs) : nichtleere_postfixe cs
nichtleere_postfixe _ = []

nichtleere_postfixe "Curry"
  ->> ["Curry","urry","rry","ry","y"]
```

Die rechte Seite der ersten definierenden Gleichung nimmt Bezug auf

- das gesamte strukturierte Argument: `(c:cs)`
- einen Teil des strukturierten Arguments: `cs`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Das als-Muster (2)

Das als-Muster erlaubt dies einfacher auszudrücken:

```
nichtleere_postfixe :: String -> [String]
nichtleere_postfixe s@(_:cs)
                     = s : nichtleere_postfixe cs
nichtleere_postfixe _ = []
```

Das als-Muster `s@(_:cs)` (`@` gelesen als 'als' (engl. 'as')) bietet je einen Namen an für

- das gesamte Argument, in diesem Beispiel: `s`
- für die relevanten strukturellen Komponenten des Argu-ments, in diesem Beispiel für den Rest der Liste, wenn die Argumentliste nicht leer ist: `cs`
- Auch möglich: Alle Strukturkomponenten namentlich zu bezeichnen, z.B. `s@(c:cs)`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Vorteile aus der Verwendung des als-Musters

...anhand des Beispiels der Funktion `nichtleere_postfixe`:

- Mittels `s` lässt sich auf das gesamte Argument Bezug nehmen; mittels `cs` auf die strukturelle Komponente des Listenrests, wenn die Argumentliste nicht leer ist.
- Die Verwendung des als-Musters führt deshalb wie in diesem Beispiel meist zu einfacheren und übersichtlicheren Definitionen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Zum Vergleich

...beide Definitionen noch einmal gegenübergestellt:

- Mit `als`-Muster:

```
nichtleere_postfixe :: String -> [String]
nichtleere_postfixe s@(_:cs)
 = s : nichtleere_postfixe cs
nichtleere_postfixe _ = []
```

- Ohne `als`-Muster:

```
nichtleere_postfixe :: String -> [String]
nichtleere_postfixe (c:cs)
 = (c:cs) : nichtleere_postfixe cs
nichtleere_postfixe _ = []
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Weitere Beispiele (1)

...Listen und als-Muster.

Die Funktion `list_transform` mit `als`-Muster:

```
list_transform :: [a] -> [a]
list_transform ys@(x:xs) = (x : ys) ++ xs
```

Zum Vergleich `list_transform` ohne `als`-Muster:

```
list_transform :: [a] -> [a]
list_transform (x:xs) = (x : (x : xs)) ++ xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Weitere Beispiele (2)

...Tupel und als-Muster.

Die Funktion `tausche` mit `als`-Muster:

```
tausche :: Eq a => (a,a) -> (a,a)
tausche paar@(x,y)
  | x /= y     = (y,x)
  | otherwise = paar
```

Zum Vergleich `tausche` ohne `als`-Muster:

```
tausche :: Eq a => (a,a) -> (a,a)
tausche (x,y)
  | x /= y     = (y,x)
  | otherwise = (x,y)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Weitere Beispiele (3)

...Tupel und als-Muster.

Die Funktion `tausche_bedingt` mit `als`-Muster:

```
tausche_bedingt :: (a,Bool,a) -> (a,Bool,a)
tausche_bedingt tripel@(x,b,y)
  | b      = (y,b,x)
  | not b = tripel
```

Zum Vergleich `tausche_bedingt` ohne `als`-Muster:

```
tausche_bedingt :: (a,Bool,a) -> (a,Bool,a)
tausche_bedingt (x,b,y)
  | b      = (y,b,x)
  | not b = (x,b,y)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Generell

...ist das als-Muster

- über Listen und Tupel hinaus

allgemein für

- algebraische Datentypen mit strukturierten Werten

nützlich.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 6.1.6

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Vorteile musterbasierter Funktionsdefinitionen

Musterbasierte Funktionsdefinitionen

- sind elegant.
- führen (i.a.) zu knappen, gut lesbaren Spezifikationen.

Zur Illustration: Die Funktion `binom'` mit Mustern sowie ohne Muster mittels Standardselektoren:

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k)     -- mit Muster für Paarwerte
  | k==0 || n==k = 1
  | otherwise    = binom' (n-1,k-1) + binom' (n-1,k)

binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' p         -- ohne Muster mit Std.-Selektoren
  | snd(p)==0 || snd(p)==fst(p) = 1
  | otherwise = binom' (fst(p)-1,snd(p)-1)
                + binom' (fst(p)-1,snd(p))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Allerdings

...musterbasierte Funktionsdefinitionen können

- zu subtilen Fehlern führen.
- Programmänderungen/-weiterentwicklungen erschweren, 'bis hin zur Tortur', etwa beim Hinzukommen eines oder mehrerer weiterer Parameter.

(siehe dazu: Peter Pepper. Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2003, S. 164.)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.1.1
6.1.2
6.1.3
6.1.4
6.1.5
6.1.6
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Kapitel 6.2

Listenkomprehension

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehension

...ein charakteristisches, elegantes und ausdruckskräftiges Sprachmittel

- funktionaler Programmiersprachen

das die Mengenbildungsoperation aus der Mathematik auf Listen nachbildet und ohne Parallele in Sprachen anderer Paradigmen ist; ein Alleinstellungsmerkmal funktionaler Sprachen!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehensionsausdrücke

...beschreiben Listen auf eine Weise, in der ihre Elemente durch

- filtern, testen, transformieren der Elemente

anderer Listen automatisch erzeugt werden.

Zur Illustration: Eine Reihe von Beispielen zur Anwendung von Listenkomprehension in

- Ausdrücken
- Funktionsdefinitionen
- Zeichenreihen (als speziellen Listen)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehension in Ausdrücken (1)

Zwei Listen:

```
ns1 = [1,2,3,4]
ns2 = [1,2,4,7,8,11,12,42]
```

Ein Generator, eine Transformation:

```
[3 * n | n <- ns1]
 ->> [3,6,9,12]

[square n | n <- ns2]
 ->> [1,4,16,49,64,121,144,1764]

[isPrime n | n <- ns2]
 ->> [False,True,False,True,False,True,False,False]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehension in Ausdrücken (2)

Ein Generator, ein bzw. zwei Tests, eine Transformation:

```
[ fac n | n <- ns2, isPowOfTwo n ]
 ->> [1,2,24,40320]

[ id n | n <- ns2, isPowOfTwo n, n>=5 ]      -- ‘,’
 ->> [8]                                     -- steht für ‘und’
```

Zwei Generatoren, ein Filter, zwei Tests, eine Transformation:

```
[ ((m,n),m+n) | m <- ns1, n <- tail ns2, m<=2, n<=7 ]
  ->> [((1,2),3),((1,4),5),((1,7),8),
       ((2,2),4),((2,4),6),((2,7),9)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehension in Ausdrücken (3)

Zwei Generatoren, zwei Filter, ein Test, eine Transformation:

```
[fib ((+) m n) | m <- take 3 ns1, n <- drop 5 ns2,
                 (odd (m+n) || (m*n)>100) ]
 ->> [fib ((+) m n) | m <- [1,2,3], n <- [11,12,42],
                      (odd (m+n) || (m*n)>100) ]
 ->> [fib (1+12),fib (1+42),
      fib (2+11),
      fib (3+12),fib (3+42)]
 ->> [fib 13, fib 43, fib 13, fib 15, fib 45]
 ->> ...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehension in Fkt.-Definitionen (1)

Abstandsberechnung vom Ursprung einer Liste von Punkten:

```
type Punkt = (Float,Float)

abstand_vom_ursprung :: [Point] -> [Float]
abstand_vom_ursprung ps
       = [ sqrt (squ x + squ y) | (x,y) <- ps ]
abstand_vom_ursprung [(3.0,4.0),(1.0,1.0),(-1.0,3.0)]
 ->> [5.0,1.414,3.1623]
```

Test auf Ungradheit, Gradheit aller Listenelemente:

```
all_odd :: [Integer] -> Bool
all_odd ns = ([ n | n <- ns, is_odd n ] == ns)

all_odd [2..22] ->> False

all_even :: [Integer] -> Bool
all_even ns = ([ n | n <- ns, is_odd n ] == [])

all_even [2,4..22] ->> True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehension in Fkt.-Definitionen (2)

```
grab_cap_vowels :: String -> String
grab_cap_vowels cs = [ c | c <- cs, is_cap_vowel c ]

is_cap_vowel :: Char -> Bool
is_cap_vowel 'A' = True
is_cap_vowel 'E' = True
is_cap_vowel 'I' = True
is_cap_vowel 'O' = True
is_cap_vowel 'U' = True
is_cap_vowel _   = False

grab_cap_vowels "Alles Eint Informatik Ohne Unterschied!"
                ->> "AEIOU"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehension in Fkt.-Definitionen (3)

Schnelles Sortieren, QuickSort:

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                   ++ [n]
                   ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

Anmerkung: Funktionsanwendung bindet stärker als Listenkonstruktion; deshalb Klammerung des Musters `(n:ns)` in der zweiten definierenden Gleichung `quickSort (n:ns) = ...` erforderlich.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehension und Zeichenreihen

...Zeichenreihen sind in Haskell ein Typsynonym für Listen von Zeichen:

```
type String = [Char]
```

Beispiel:

```
"Haskell" == [‘H‘,‘a‘,‘s‘,‘k‘,‘e‘,‘l‘,‘l‘]
```

Für Zeichenreihen als spezielle Listen stehen deshalb dieselben

- Funktionen
- Komprehensionsmechanismen

zur Verfügung wie für allgemeine Listen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenfunktionen für Zeichenreihen

Beispiele für Funktionen auf Zeichenreihen als Listen:

```
"Haskell"!!3 ->> 'k'
(!!) "Haskell" 3 ->> 'k'
take 5 "Haskell" ->> "Haske"
drop 5 "Haskell" ->> "ll"
length "Haskell" ->> 7
zip "Haskell" [1,2,3] ->> [('H',1),('a',2),('s',3)]
"Haskell" `zip` [1,2,3] ->> [('H',1),('a',2),('s',3)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Listenkomprehension für Zeichenreihen

Zählen der Kleinbuchen in einer Zeichenreihe:

```
lowers :: String -> Int
lowers cs = length [c | c <- cs, is_lowercase_char c]

lowers "Haskell" ->> 6
```

Zählen der Vorkommen eines bestimmten Zeichens in einer Zeichenreihe:

```
count :: Char -> String -> Int
count c cs = length [c | d <- cs, d == c]

count `s` "Mississippi" ->> 4
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 6.3

Konstruktoren, Operatoren

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Konstruktoren vs. Operatoren

Konstruktoren führen zu eindeutigen Darstellungen von Werten, Operatoren nicht.

Beispiel:

- `(:)` ist (einziger) Konstruktor für Listen.
- `(++)` ist (einer von vielen) Operator(en) auf Listen.

Betrachte:

```
[42,17,4] == (42:(17:(4:[])))   -- Eindeutige Dar-
                                 -- stellung von [42,17,4]
                               -- mittels des Konstruktors (:).

[42,17,4] == [42,17] ++ [] ++ [4]   -- Viele Darstel-
          == [42] ++ [17,4] ++ []     -- lungen von
          == [42] ++ [] ++ [17,4]       -- [42,17,4]
          == ...                      -- mittels des
                                    -- Operators (++).
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Verwendbarkeit von Konstruktoren, Operatoren

...in Mustern.

Operatoren (wie z.B. `(++)` für Listen) implizieren anders als Konstruktoren (`(:)` für Listen) (i.a.) keine Zerlegungseindeutigkeit von Werten.

In Musterausdrücken dürfen deshalb ausschließlich Konstruktoren, keine Operatoren verwendet werden:

- `xs@(x:(y:(z:zs)))` zulässig als Muster.
- `xs@(ys ++ zs)` unzulässig als Muster.

Bemerkung:

- Darstellungen wie `(42:(17:(4:[])))` deuten an, dass Listen ein Objekt sind; erzwungen durch die Typstruktur.
- Anders in imperativen/objektorientierten Sprachen: Listen sind dort nur indirekt existent, nämlich bei 'geeigneter' Verbindung von Elementen durch Zeiger.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Beispiel

```
delete_two :: (Char,Char) -> String -> String
delete_two _ ""     = ""
delete_two _ (s:[]) = [s]
deleteTwo (c,d) (s:(t:ts))
  | [c,d] == [s,t]   = delete_two (c,d) ts
  | otherwise        = s : (delete_two (c,d) (t:ts))
```

...ist sinnvoll und zulässig, weil das Muster `(s:(t:ts))` die Struktur 'passender' Argumentwerte und damit das Resultat eindeutig festlegt.

```
delete_two :: (Char,Char) -> String -> String
delete_two _ ""     = ""
delete_two _ (s:[]) = [s]
delete_two (c,d) s@(ts1++ts2)
  | [c,d] == ts1     = delete_two (c,d) ts2
  | otherwise        = (head s) : (delete_two (c,d) (tail s))
```

...ist nicht sinnvoll und unzulässig, weil das 'Muster `(ts1++ts2)`' die Wahl von `ts1` und `ts2` zur Zerlegung von `s` nicht eindeutig festlegt und sich je nach Zerlegung ein anderes Resultat ergäbe.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 6.4

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 6 (1)

Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Prentice Hall, 2. Auflage, 1998. (Kapitel 4.2, List operations)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 5.1.4, Automatische Erzeugung von Listen)

Antonie J. T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 7.4, List comprehensions)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 4.4, Pattern matching; Kapitel 5, List comprehensions)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 6 (2)

Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 3, Syntax in Functions – Pattern Matching)

Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 12, Barcode Recognition – List Comprehensions)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 13, Mehr syntaktischer Zucker)

Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 2.4, Lists; Kapitel 4.1, Lists)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 6 (3)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999.
(Kapitel 5.4, Lists in Haskell; Kapitel 5.5, List comprehensions; Kapitel 7.1, Pattern matching revisited; Kapitel 7.2, Lists and list patterns; Kapitel 9.1, Patterns of computation over lists; Kapitel 17.3, List comprehensions revisited)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011.
(Kapitel 5.5, Lists in Haskell; Kapitel 5.6, List comprehensions; Kapitel 7.1, Pattern matching revisited; Kapitel 7.2, Lists and list patterns; Kapitel 10.1, Patterns of computation over lists; Kapitel 17.3, List comprehensions revisited)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
6.1
6.2
6.3
6.4
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Teil III

Applikative Programmierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Applikatives Programmieren im strengen Sinn

...ist das

- Programmieren und Rechnen auf dem Niveau elementarwertiger Ausdrücke und Funktionen mit elementaren Werten als Argument und Resultat.
- Funktionen werden durch Abstraktion nach (unabhängig (variabel!) angesehenen) Ausdrucksoperanden gebildet.
- Funktionen werden auf Ausdrücke aus Konstanten, Variablen u. Funktionstermen elementaren Werts appliziert.

Summa summarum:

- Das tragende Prinzip applikativen Programmierens ist die Bildung von Funktionen durch Abstraktion v. Ausdrücken nach unabh. Variablen und die Applikation v. Funktionen auf elementare Werte mit elementarem Resultat; kurz: Das Rechnen mit elementaren Werten.

Wolfram-Manfred Lippe. Funktionale und Applikative Programmierung. eXamen.press, 2009, Kapitel 1.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Funktionales Programmieren im strengen Sinn

...ist das

- Programmieren und Rechnen auf dem Niveau von Funktionen als Argument und Resultat.
- Aus Funktionen werden mithilfe von Funktionen höherer Ordnung neue Funktionen gebildet.
- Funktionen werden auf Funktionen appliziert; Applikationen von Funktionen auf elementare Werte gibt es nicht.

Summa summarum:

- Das tragende Prinzip funktionalen Programmierens ist die Bildung von Funktionen aus Funktionen mithilfe v. Funktionen höherer Ordnung und die Applikation von Funktionen auf Funktionen; kurz: Das Rechnen mit Funktionen.

Wolfram-Manfred Lippe. Funktionale und Applikative Programmierung. eXamen.press, 2009, Kapitel 1.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Plakativ gesprochen

Applikatives Programmieren ist das

- Programmieren und Rechnen mit Funktionen über
  - elementaren Werten.
- Argument und Resultat von Funktionen sind
  - elementare Werte (Zahlen, Zeichen, Wahrheitswerte,...)!

Funktionales Programmieren ist das

- Programmieren und Rechnen mit Funktionen über
  - Funktionen.
- Argument und Resultat von Funktionen sind
  - Funktionen (sin, cos, tan, !, fib, $\binom{n}{\cdot}$, $\binom{\cdot}{k}$ $\binom{\cdot}{\cdot}$,...)!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe III.1

Kommen Sie zwischendurch, spätestens am Ende von Kapitel 10.6, wieder auf diese Charakterisierung und Abgrenzung applikativer und funktionaler Programmierung zurück (s.a. Übungsaufgabe 10.6.1).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 7

Rekursion

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 7.1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Rekursion

...zentrales Mittel funktionaler Sprachen

- Wiederholungen auszudrücken (Beachte: In funktionalen Sprachen gibt es keine Anweisungen und deshalb auch keine Schleifen).

Rekursives Vorgehen

- führt oft auf sehr elegante Lösungen, die konzeptuell wesentlich einfacher und intuitiver sind als schleifenbasierte imperative Lösungen (Typische Beispiele: Quicksort, Türme von Hanoi).

Rekursion für fkt. Programmierung so wichtig, dass eine

- Klassifizierung von Rekursionstypen zweckmäßig ist.

...eine solche Klassifizierung nehmen wir in der Folge vor.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Quicksort, Türme von Hanoi

...zwei Beispiele, für die rekursives Vorgehen auf besonders

- intuitive, einfache und elegante Lösungen

führt:

1. Quicksort: Schnelles Sortieren.
2. Türme von Hanoi: Umschichten eines Turms aus 50 goldenen Scheiben nach bestimmten Regeln, womit nach einer hinterindischen Sage eine Gruppe von Mönchen seit dem Anbeginn der Zeit betraut ist.*

* Die Sage berichtet, dass das Ende der Welt gekommen ist, wenn die Mönche ihre Aufgabe vollendet haben.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Kapitel 7.1.1

Schnelles Sortieren, Quicksort

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

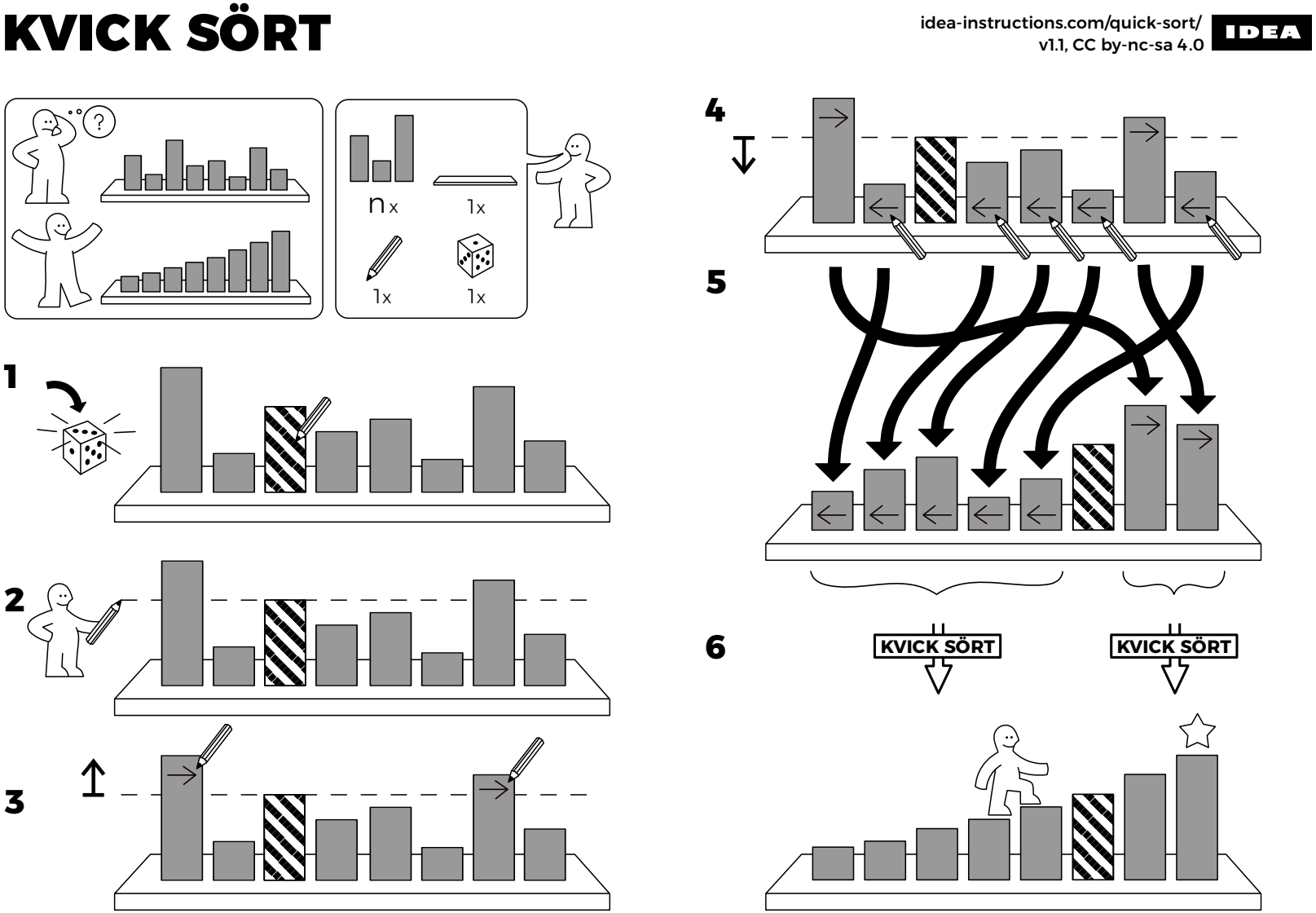
Quicksort

...bereits besprochen (vgl. Kap. 1.2.1):

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) =
 quickSort smaller   -- Alle Elemente m aus ns kleiner als n
                     -- rekursiv sortiert an den Anfang.
 ++ [n]              -- n selbst steht automatisch richtig
                     -- sortiert in der Mitte.
 ++ quickSort larger -- Alle Elemente m aus ns grösser als n
                     -- rekursiv sortiert ans Ende.
  where smaller = [m | m<-ns, m<=n]
        larger  = [m | m<-ns, m>n]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung im IKDEA-Stil



http://idea-instructions.com/quick-sort v.1.1, CC by-cs-sa 4.0

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 7.1.1

Türme von Hanoi

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Türme von Hanoi

Aufgabe, Regelwerk:

Ausgangssituation:

Gegeben sind drei Stapelplätze A, B und C. Auf Platz A liegt ein Stapel paarweise verschieden großer goldener Scheiben, die mit von unten nach oben abnehmender Größe übereinander geschichtet sind.

Aufgabe:

Schichte den Scheibenstapel von Platz A auf Platz C um unter Ausnutzung von Platz B als Zwischenablage.

Regelwerk:

Bei jedem Umschichtungszug darf stets nur eine Scheibe bewegt werden; nie darf eine größere Scheibe oberhalb einer kleineren Scheibe auf einem der drei Plätze zu liegen kommen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (1)

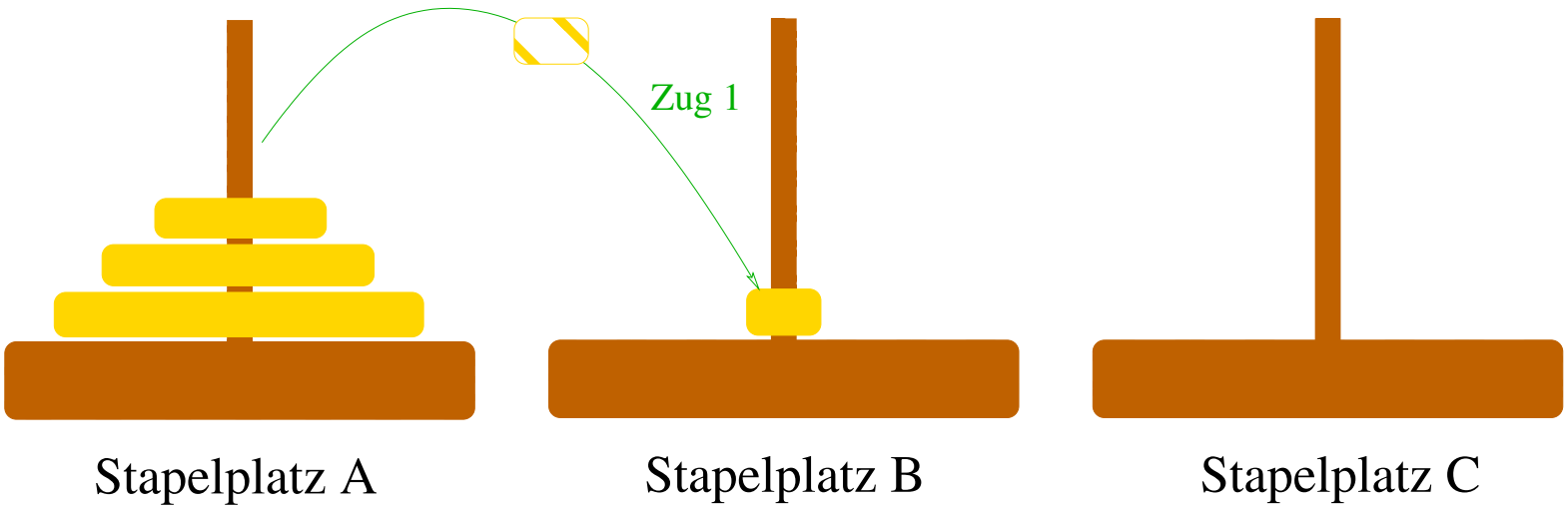
Ausgangssituation:

Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (2)

Nach einem Zug:

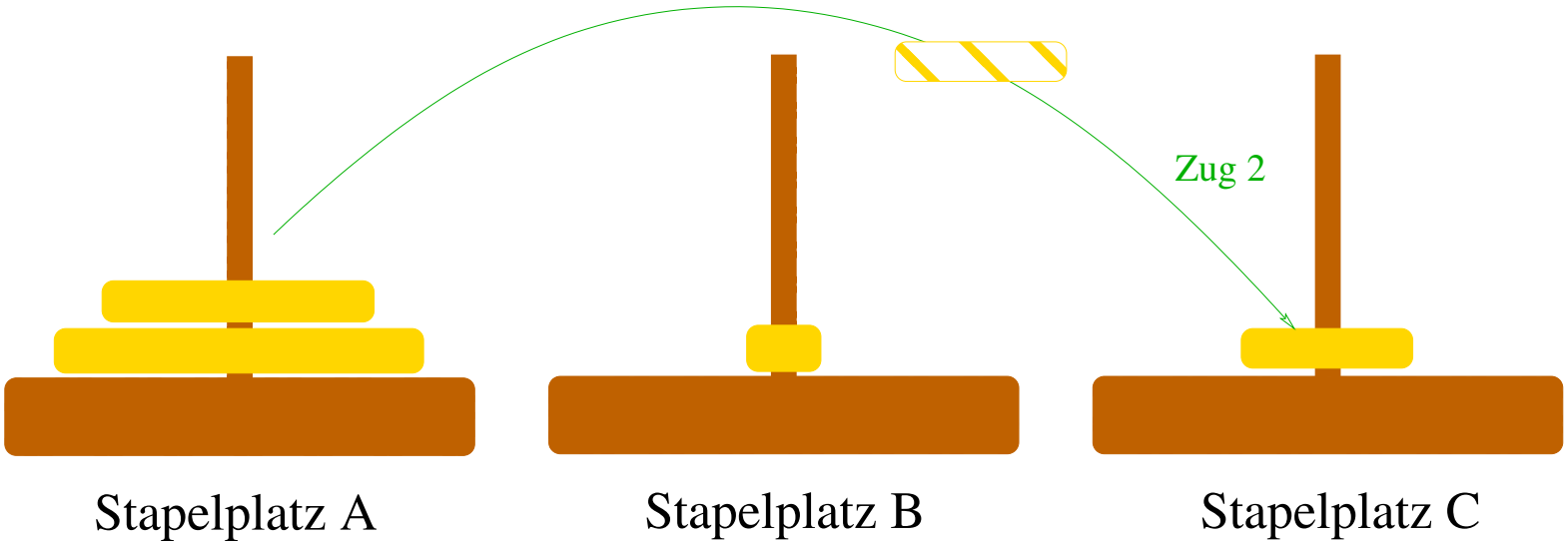


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (3)

Nach zwei Zügen:

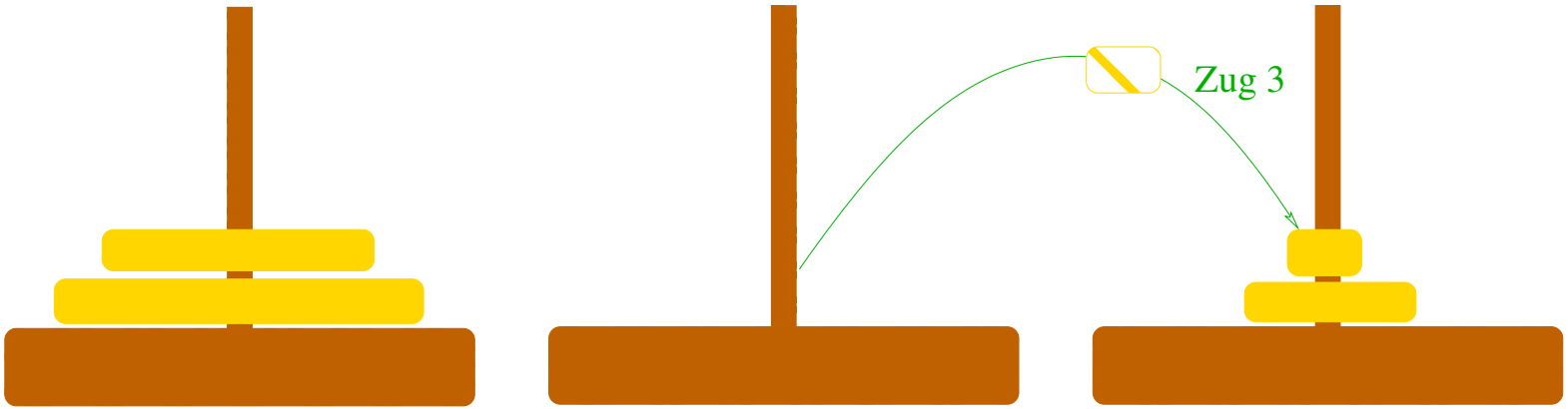


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (4)

Nach drei Zügen:

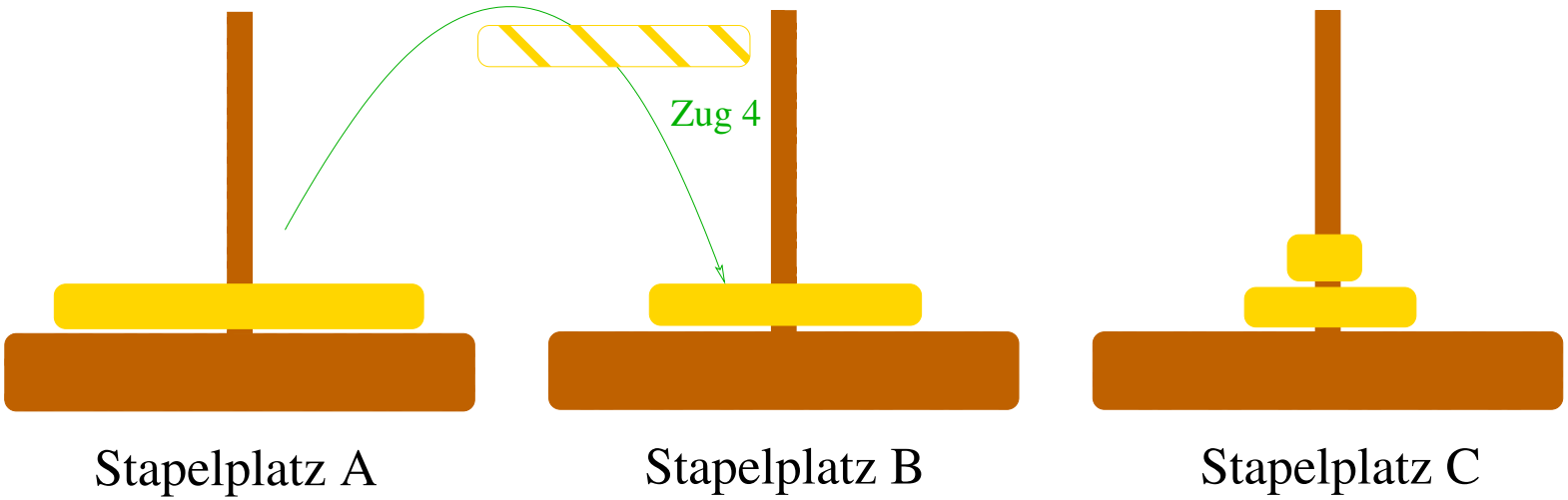


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (5)

Nach vier Zügen:

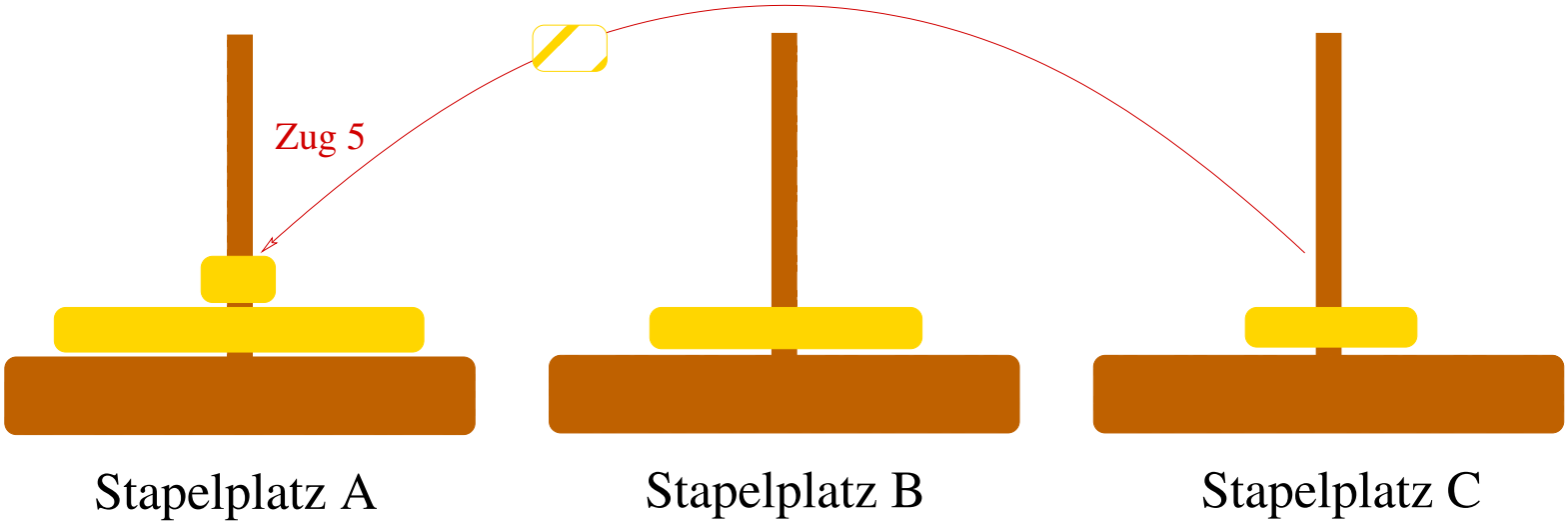


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (6)

Nach fünf Zügen:

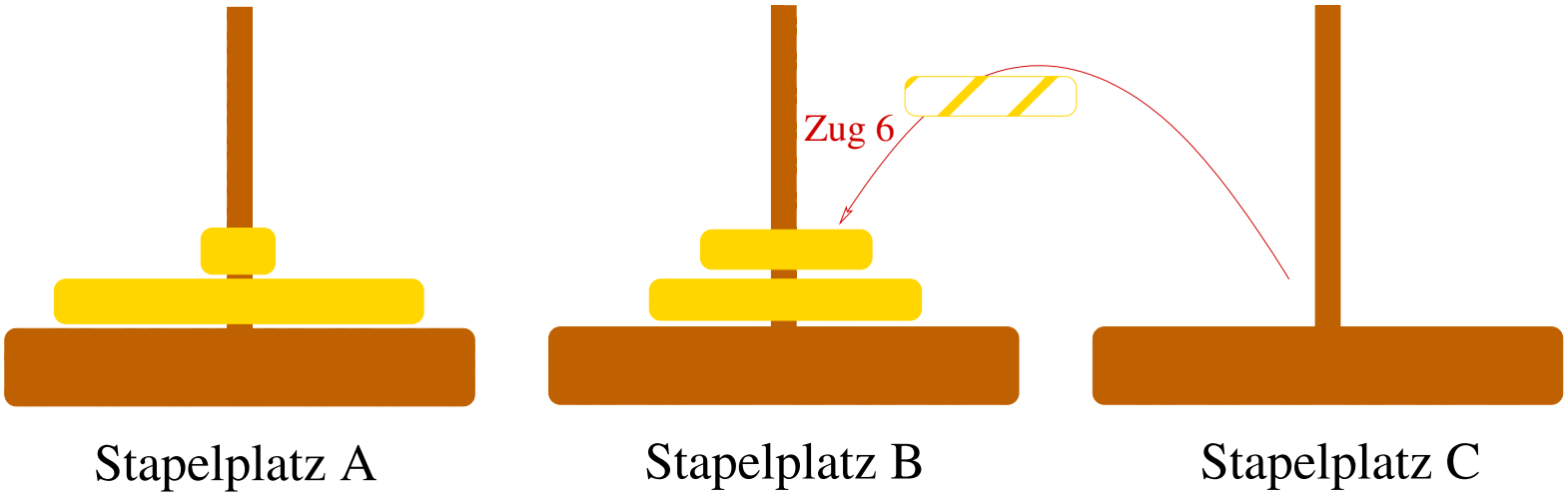


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (7)

Nach sechs Zügen:

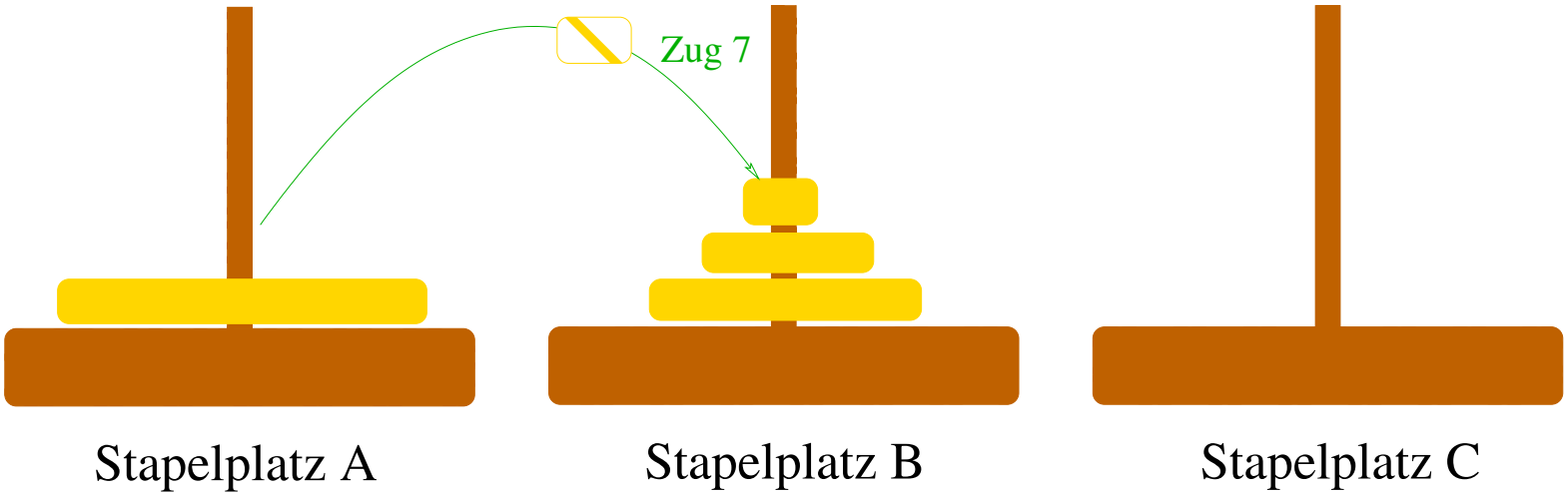


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (8)

Nach sieben Zügen:

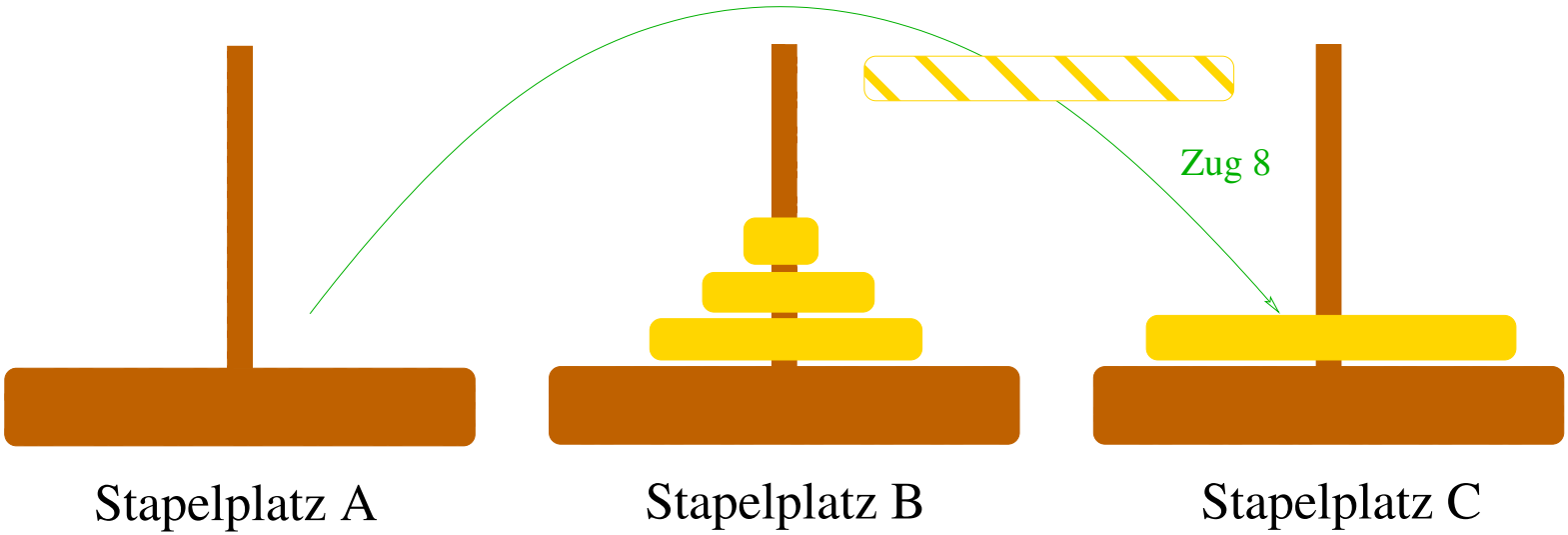


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (9)

Nach acht Zügen:

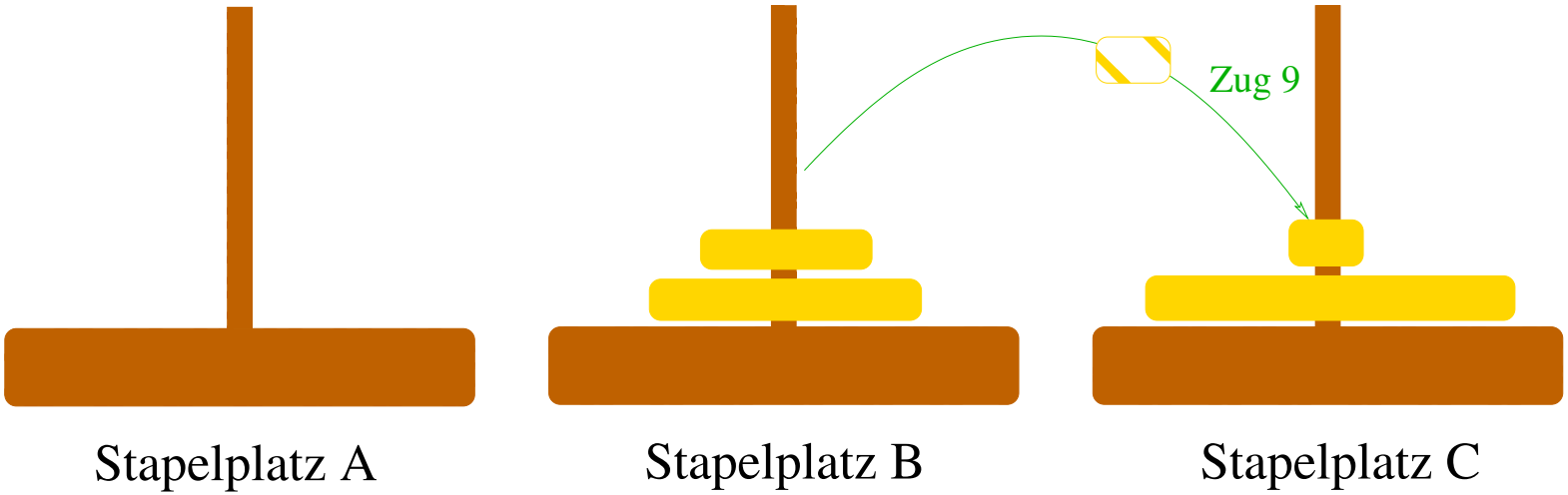


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (10)

Nach neun Zügen:

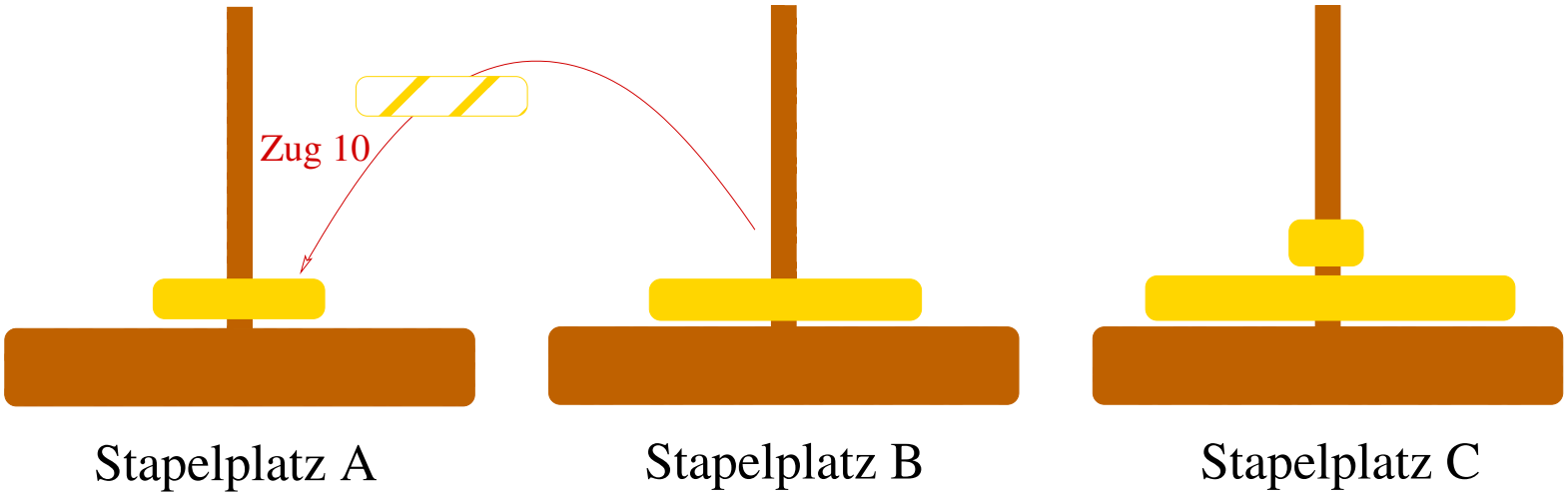


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (11)

Nach zehn Zügen:

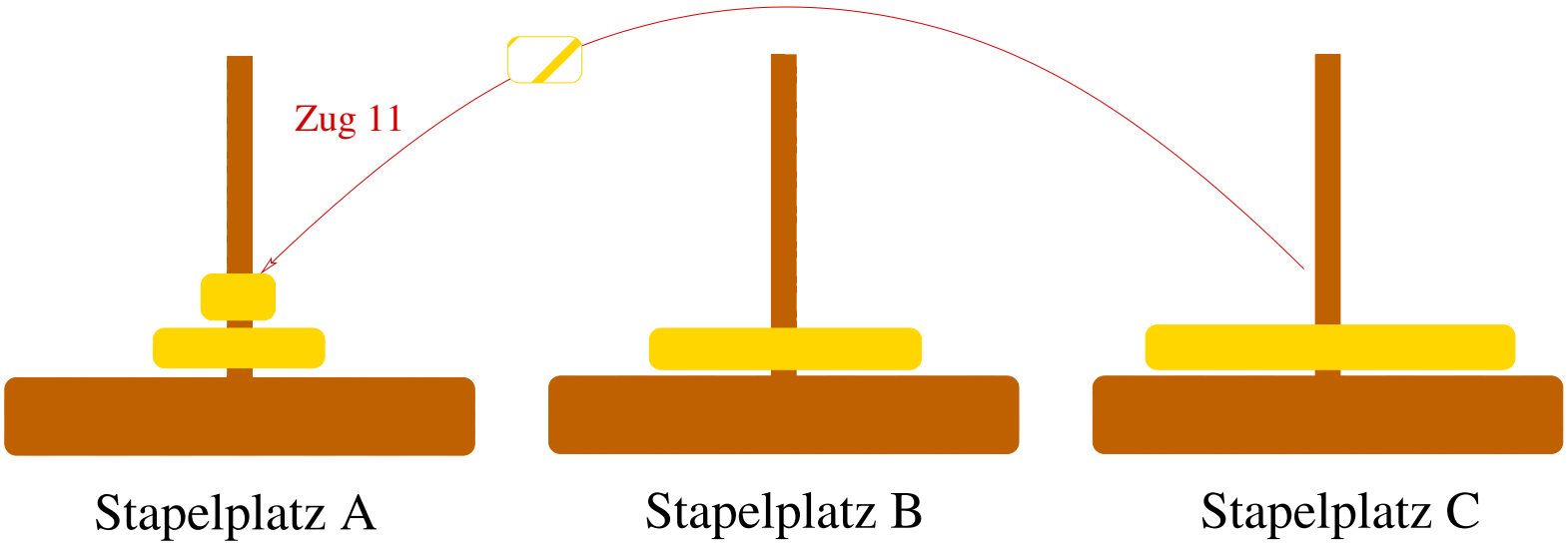


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (12)

Nach elf Zügen:

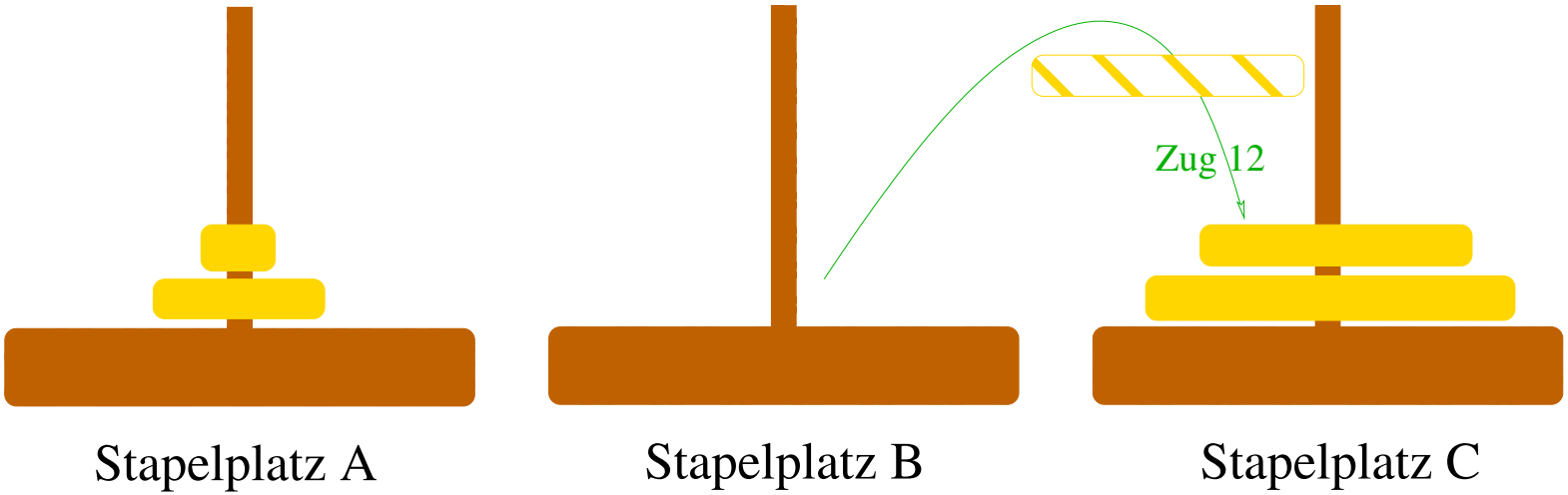


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (13)

Nach zwölf Zügen:

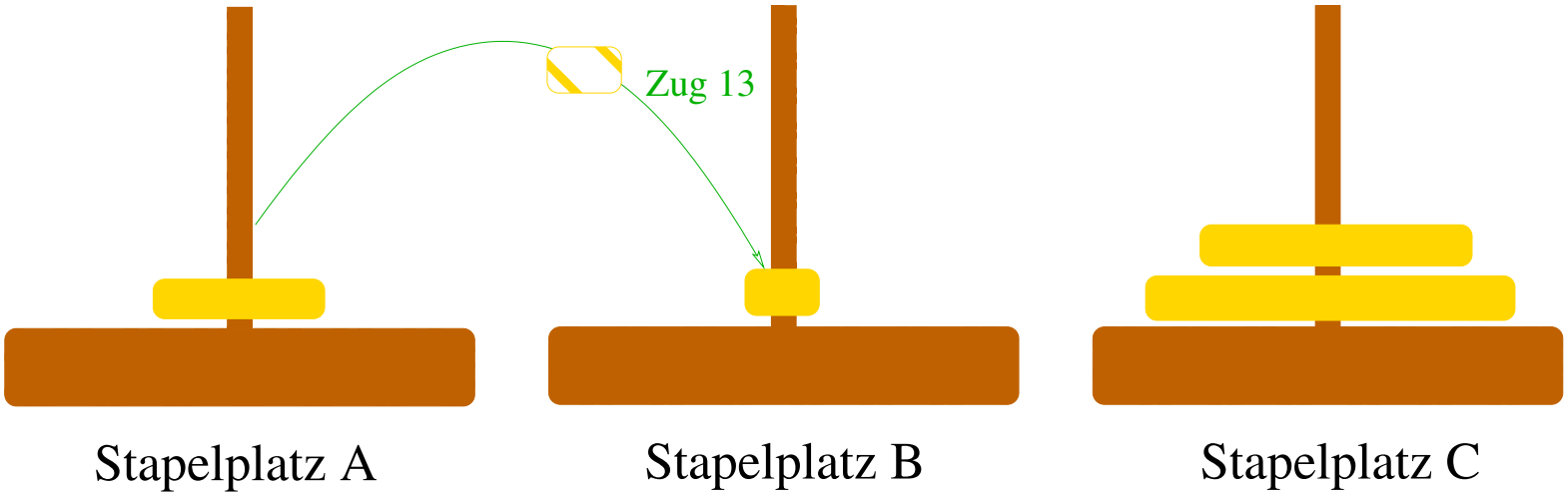


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (14)

Nach dreizehn Zügen:

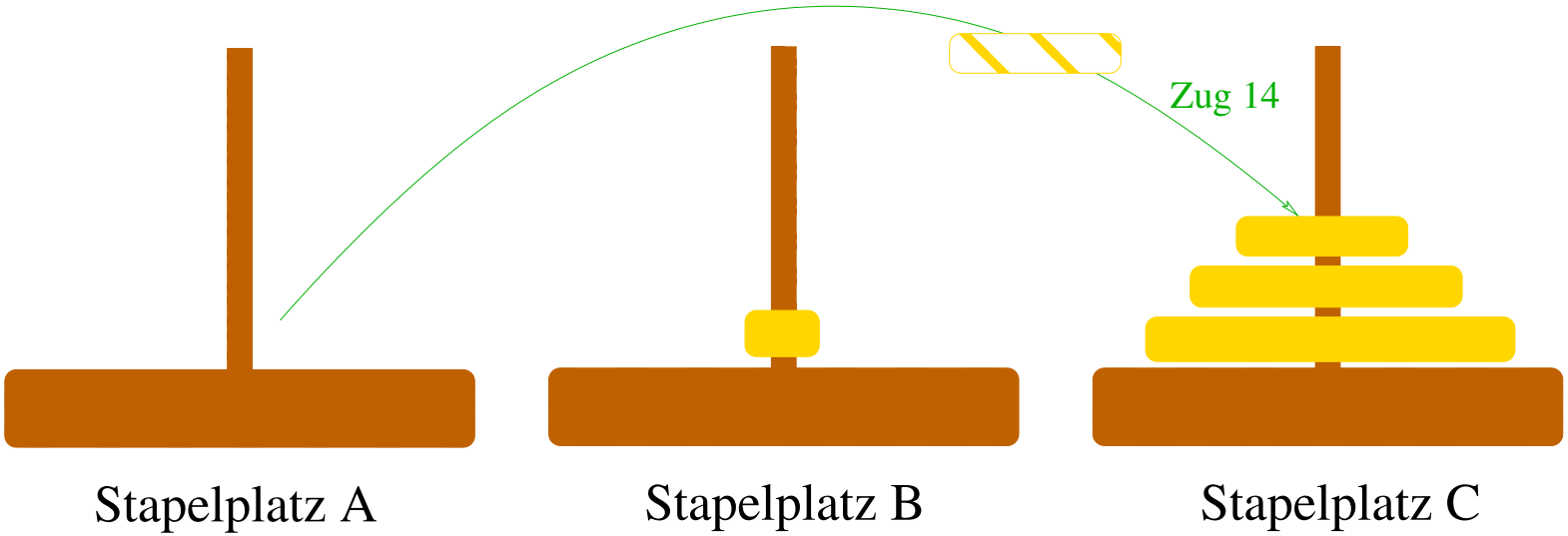


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (15)

Nach vierzehn Zügen:

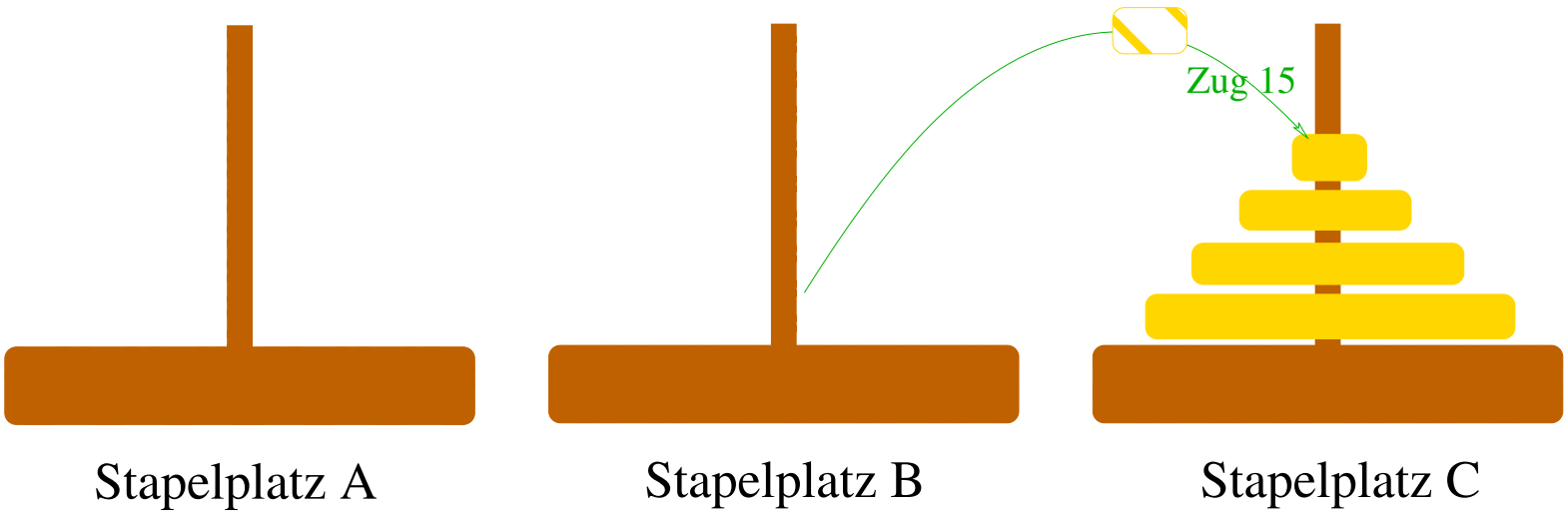


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (16)

Nach fünfzehn Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung der Rekursionsidee (1)

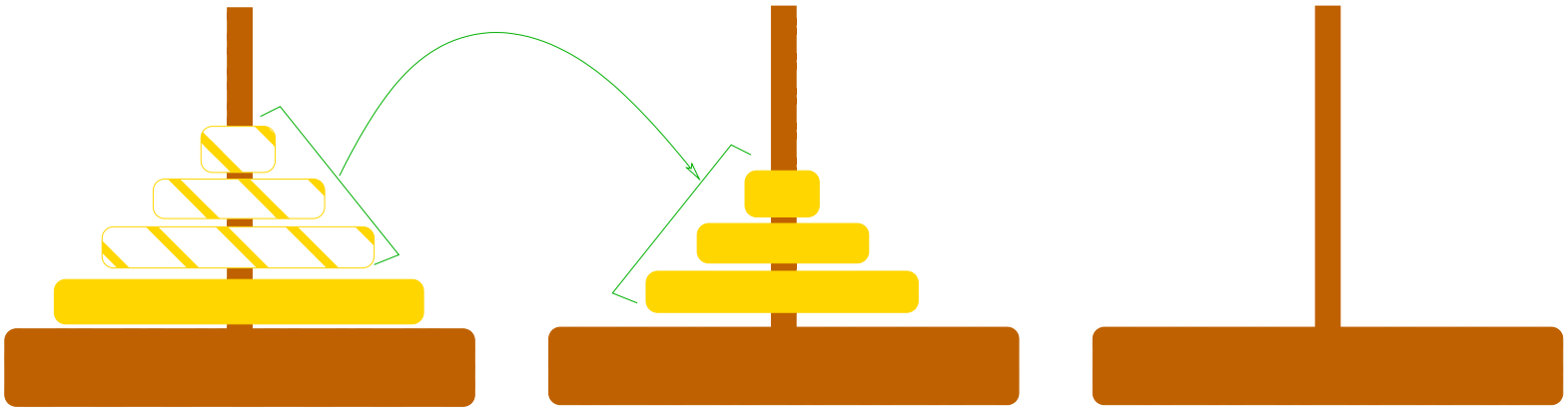
Aufgabe: Schichte Turm $[1, 2, \ldots, N]$ von Ausgangsstapel A auf Zielstapel C um unter Verwendung von Stapelplatz B als Zwischenablage.

Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung der Rekursionsidee (2)

Schritt 1 – Scheibe N freispielen:
Schichte Turm $[1, 2, \ldots, N-1]$ (rekursiv) von Ausgangsstapel A auf Zwischenablage B als temporärer Zielstapel unter Ausnutzung von Stapelplatz C als temporäre Zwischenablage um.

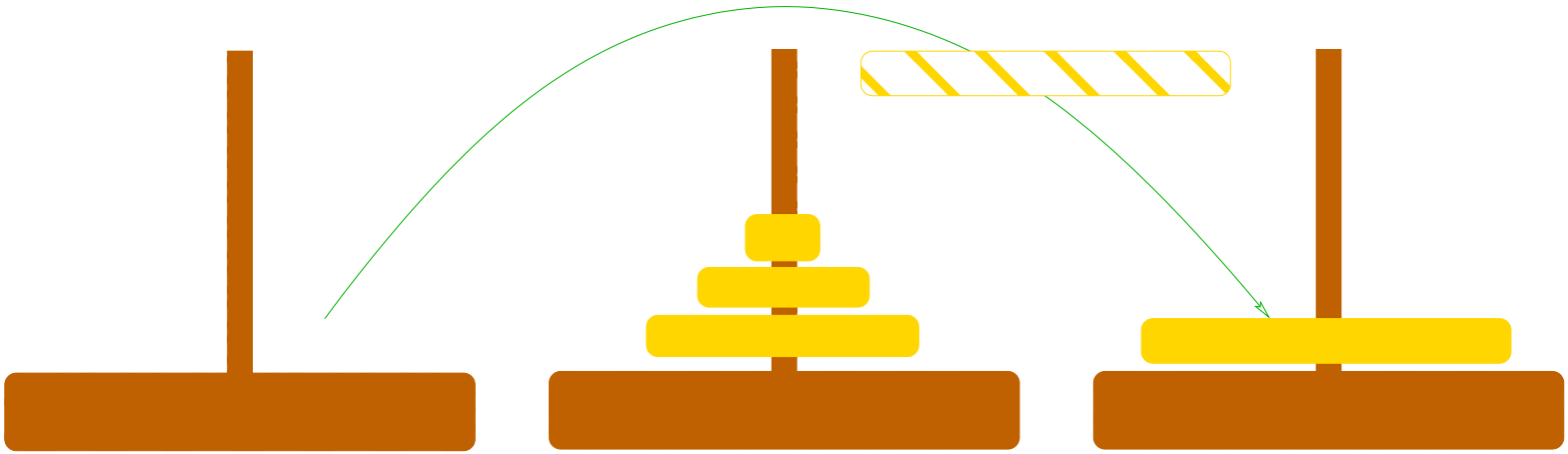


Ausgangsstapel Zielstapel Zwischenablage

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung der Rekursionsidee (3)

Schritt 2 – Scheibe N spielen:
Verschiebe Scheibe N von Ausgangsstapel A auf Zielstapel C.

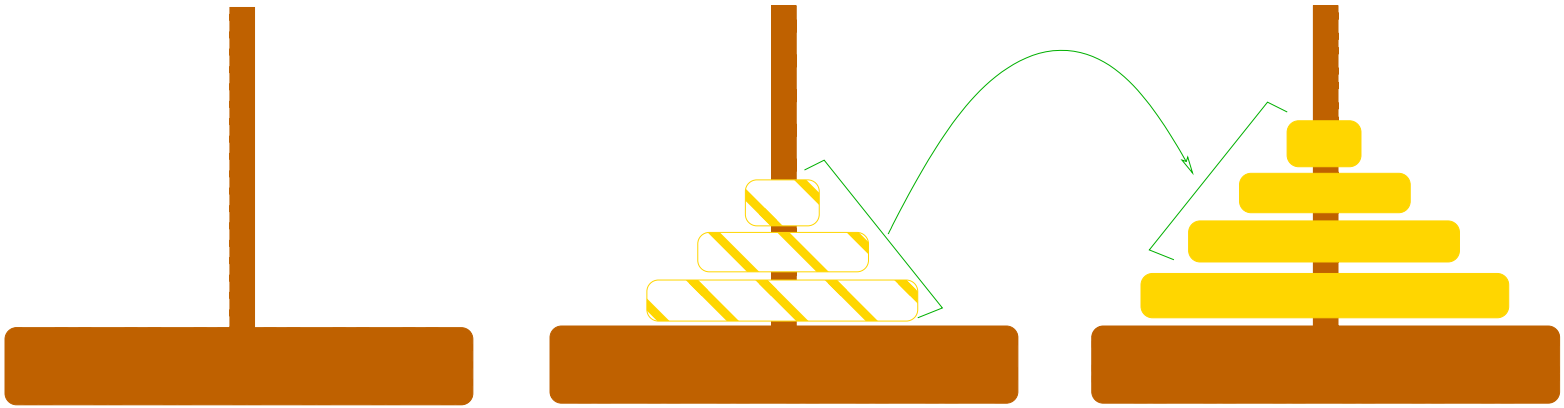


Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Veranschaulichung der Rekursionsidee (4)

Schritt 3 – Verbleibenden Turm umschichten:
Schichte Turm $[1, 2, \ldots, N-1]$ (rekursiv) von Stapel B als temporärer Ausgangsstapel auf Zielstapel C unter Ausnutzung von Stapelplatz A als temporärer Zwischenablage um.



Zwischenablage Ausgangsstapel Zielstapel

Beachte: A, B und C tauschen für Schritt 3 gegenüber Schritt 1 ihre Rollen als Ausgangs-, Ziel- und Hilfsstapelplatz.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Zusammenfassung der Rekursionsidee

...für das Problem der Türme von Hanoi:

Der Turm $[1, 2, \ldots, N-1, N]$ mit N Scheiben, in zunehmender Größe benannt von 1 bis N, wird von Ausgangsstapel A auf Zielstapel C unter Zuhilfenahme von Stapelplatz B als Zwischenablage wie folgt umgeschichtet:

1) Schichte den Turm $[1, 2, \ldots, N-1]$ mit $(N-1)$ Scheiben rekursiv von Platz A auf Platz B unter Zuhilfenahme von Platz C als Zwischenablage um.
2) Verschiebe (die dadurch jetzt frei liegende unterste und größte) Scheibe N von Platz A auf Platz C.
3) Schichte den Turm $[1, 2, \ldots, N-1]$ mit $(N-1)$ Scheiben rekursiv von Platz B auf Platz C unter Zuhilfenahme von Platz A als Zwischenablage um.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Türme von Hanoi: Modellierung in Haskell

Modellierung:

```
type Turmhoehe = Int      -- Anzahl Scheiben
type Scheibe   = Int      -- Scheibenidentifikator

data Stapel    = A | B | C deriving Show

type A_Stapel  = Stapel   -- Ausgangsstapel A
type Z_Stapel  = Stapel   -- Zielstapel Z
type H_Stapel  = Stapel   -- Hilfsstapel H
type Von       = Stapel   -- Stapelbezeichner
type Nach      = Stapel   -- Stapelbezeichner

hanoi :: Turmhoehe -> A_Stapel -> Z_Stapel -> H_Stapel
                                  -> [(Scheibe,Von,Nach)]

hanoi n a z h = <Code, der einen n-scheibigen Turm
                 vom Platz a auf den Platz z um-
                 schichtet unter Ausnutzung von
                 Hilfplatz h als Zwischenablage>
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Türme von Hanoi: Implementierung in Haskell

Implementierung:

```
hanoi :: Turmhoehe -> A_Stapel -> Z_Stapel -> H_Stapel
                                        -> [(Scheibe,Von,Nach)]
hanoi n a z h
 | n == 0    = [] -- Fertig, Turm ist umgeschichtet!
 | otherwise =
     {- Schritt 1: Verschiebe (n-1)-Turm rek. von
        Platz a auf Platz h über z als Hilfsplatz -}
    (hanoi (n-1) a h z)
     {- Schritt 2: Verschiebe Scheibe n von Platz a
        auf Platz z -}
    ++ [(n,a,z)]
     {- Schritt 3: Verschiebe (n-1)-Turm rek. von
        Platz h nach Platz z über a als Hilfsplatz -}
    ++ (hanoi (n-1) h z a)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10

Türme von Hanoi: Aufrufe der Funktion hanoi

```
Main>hanoi 1 A C B
[(1,A,C)]                                  (1 Zug für Schritt 2)

Main>hanoi 2 A C B
[(1,A,B),                                  (1 Zug für Schritt 1)
 (2,A,C),                                  (1 Zug für Schritt 2)
 (1,B,C)]                                  (1 Zug für Schritt 3)

Main>hanoi 3 A C B
[(1,A,C),(2,A,B),(1,C,B),                  (3 Züge für Schritt 1)
 (3,A,C),                                  (1 Zug für Schritt 2)
 (1,B,A),(2,B,C),(1,A,C)]                  (3 Züge für Schritt 1)

Main>hanoi 4 A C B
[(1,A,B),(2,A,C),(1,B,C),                  (7 Züge für Schritt 1)
 (3,A,B),(1,C,A),(2,C,B),(1,A,B),
 (4,A,C),                                  (1 Zug für Schritt 2)
 (1,B,C),(2,B,A),(1,C,A),                  (7 Züge für Schritt 3)
 (3,B,C),(1,A,B),(2,A,C),(1,B,C)]
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.1.1
7.1.2
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 7.2

Rekursionstypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Klassifikation der Rekursionstypen

Eine Rechenvorschrift heißt rekursiv, wenn sie

- in ihrem Rumpf (direkt oder indirekt) aufgerufen wird.

Wir unterscheiden zwischen Rekursion auf

- mikroskopischer Ebene
  ...betrachtet einzelne Rechenvorschriften und die syntaktische Gestalt der rekursiven Aufrufe.
- makroskopischer Ebene
  ...betrachtet Systeme von Rechenvorschriften und ihre wechselseitigen Aufrufe.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 7.2.1

Mikroskopische Ebene

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Rekursion auf mikroskopischer Ebene (1)

...folgende Unterscheidungen und Sprechweisen sind üblich:

1. Repetitive (schlichte, endständige) Rekursion
   $\rightsquigarrow$ pro Zweig höchstens ein rekursiver Aufruf und diesen stets als äußerste Operation.

   Beispiel:

```
ggt :: Integer -> Integer -> Integer
ggt m n
  | n == 0 = m                          -- Zweig 1
  | m >= n = ggt (m-n) n                -- Zweig 2
  | m < n  = ggt (n-m) m                -- Zweig 3
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Rekursion auf mikroskopischer Ebene (2)

2. Lineare Rekursion

   $\rightsquigarrow$ pro Zweig höchstens ein rekursiver Aufruf, davon mindestens einer nicht als äußerste Operation.

   Beispiel:

```
powerThree :: Integer -> Integer
powerThree n
  | n == 0 = 1                          -- Zweig 1
  | n > 0  = 3 * powerThree (n-1)       -- Zweig 2
```

   Beachte: In Zweig 2, $n > 0$, ist "$*$" die äußerste Operation, nicht `powerThree`!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Rekursion auf mikroskopischer Ebene (3)

3. Baumartige (kaskadenartige) Rekursion
   $\rightsquigarrow$ pro Zweig können mehrere rekursive Aufrufe nebeneinander vorkommen.

   Beispiel:

```
binom :: Integer -> Integer -> Integer
binom n k
 | k == 0 || n == k = 1                    -- Zweig 1
 | otherwise =
    binom (n-1) (k-1) + binom (n-1) k -- Zweig 2
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Rekursion auf mikroskopischer Ebene (4)

4. Geschachtelte Rekursion
   $\rightsquigarrow$ rekursive Aufrufe enthalten rekursive Aufrufe als Argumente.

   Beispiel:

```
fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
  | n >  100 = n - 10
  | n <= 100 = fun91 (fun91 (n+11))
```

   Übungsaufgabe: Warum heißt die Funktion wohl `fun91`?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Zusammenfassung

...auf mikroskopischer Ebene sprechen wir von

- direkter (oder unmittelbarer) Rekursion

und unterscheiden genauer:

- Repetitive (oder schlichte oder endständige) Rekursion
- Lineare Rekursion
- Baumartige (oder kaskadenartige) Rekursion
- Geschachtelte Rekursion

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Übungsaufgabe 7.2.1.1

Von welchem Rekursionstyp sind die Implementierungen

1. `quickSort` (Kap. 7.1.1)
2. `hanoi` (Kap. 7.1.2)
3. `binom`, `binom′`, `binom″` (Kap. 1.1.1)
4. `zip` (Kap. 1.1.1)
5. `ggt` (Kap. 1.1.1)
6. `mod` (Kap. 1.1.1)

aus Kapitel 7.1 bzw. Kapitel 1.1.1?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 7.2.2

Makroskopische Ebene

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Rekursion auf makroskopischer Ebene

...folgende Sprechweise ist üblich:

- Indirekte (verschränkte, wechselweise) Rekursion
  $\rightsquigarrow$ zwei oder mehr Funktionen rufen sich wechselweise auf.

Beispiel:

```
isOdd :: Integer -> Bool
isOdd n
 | n == 0 = False
 | n > 0  = isEven (n-1)

isEven :: Integer -> Bool
isEven n
 | n == 0 = True
 | n > 0  = isOdd (n-1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 7.2.3

Eleganz und Effizienz, Effizienzfallen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Eleganz, Effizienz, Effizienzfallen

Viele Probleme sind rekursiv besonders

- elegant lösbar (z.B. Quicksort, Türme von Hanoi)
- jedoch nicht immer unmittelbar effizient ($\neq$ effektiv!)
  (z.B. die naive Berechnung der Fibonacci-Zahlen)
  - Gefahr: (Unnötige) Mehrfachberechnungen
  - Besonders anfällig: Baum-/kaskadenartige Rekursion

Aus Implementierungssicht ist (s.a. Anhang E)

- repetitive Rekursion am (kosten-) günstigsten.
- geschachtelte Rekursion am ungünstigsten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Die Folge der Fibonacci-Zahlen

...die unendliche Folge der Fibonacci-Zahlen $(f_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist folgendermaßen definiert:

$$f_0 = 0, \; f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

Anfang der Folge der Fibonacci-Zahlen:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (1)

Die naheliegende, unmittelbar an die Definition angelehnte naive Implementierung mit baumartiger Rekursion zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen:

```
fib :: Integer -> Integer
fib n
  | n == 0      = 0
  | n == 1      = 1
  | otherwise   = fib (n-2) + fib (n-1)
```

...ist sehr, seeehr laaangsaaaaaaaaam (ausprobieren!)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (2)

Veranschaulichung der durch die Mehrfachberechnung von Werten verursachten Ineffizienz durch manuelle Auswertung:

```
fib 0 ->> 0                          --  1 Aufrufe von fib

fib 1 ->> 1                          --  1 Aufrufe von fib

fib 2 ->> fib 0 + fib 1
      ->> 0 + 1
      ->> 1                          --  3 Aufrufe von fib

fib 3 ->> fib 1 + fib 2
      ->> 1 + (fib 1 + fib 0)
      ->> 1 + (1 + 0)
      ->> 2                          --  5 Aufrufe von fib
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (3)

```
fib 4 ->> fib 2 + fib 3
      ->> (fib 0 + fib 1) + (fib 1 + fib 2)
      ->> (0 + 1) + (1 + (fib 0 + fib 1))
      ->> (0 + 1) + (1 + (0 + 1))
      ->> 3                          --  9 Aufrufe von fib

fib 5 ->> fib 3 + fib 4
      ->> (fib 1 + fib 2) + (fib 2 + fib 3)
      ->> (1 + (fib 0 + fib 1)) +
             ((fib 0 + fib 1) + (fib 1 + fib 2))
      ->> (1 + (0 + 1)) +
             ((0 + 1) + (1 + (fib 0 + fib 1))
      ->> (1 + (0 + 1)) + ((0 + 1) + (1 + (0 + 1)))
      ->> 5                          -- 15 Aufrufe von fib
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (4)

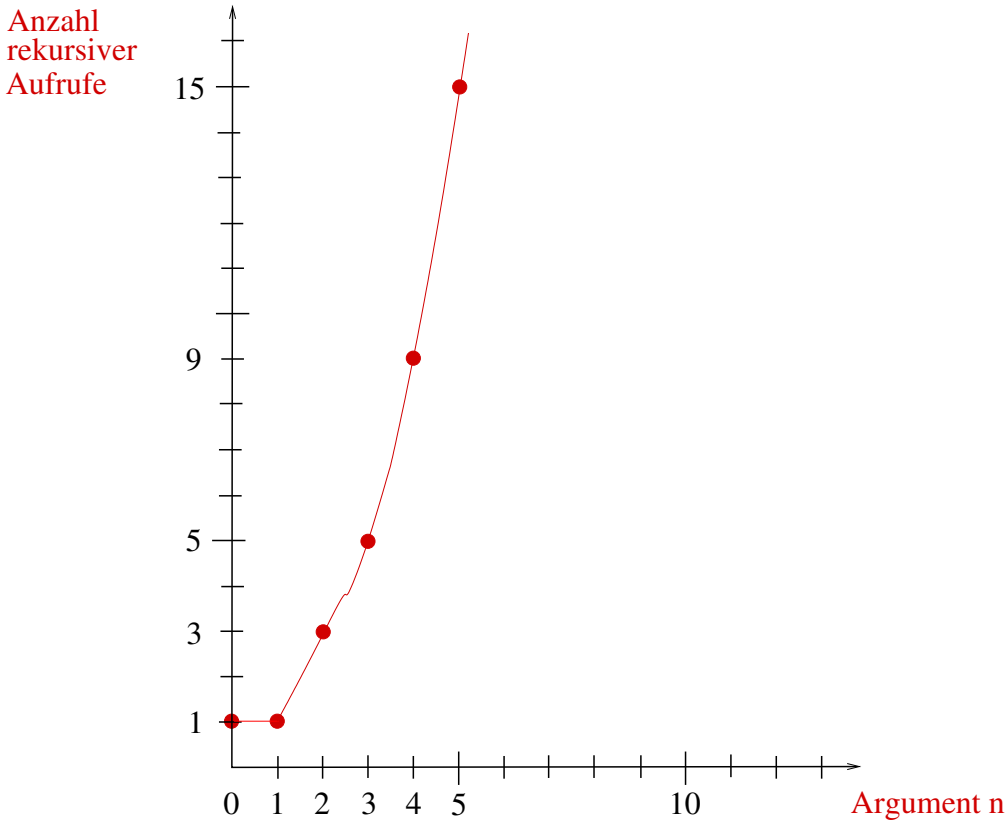
```
fib 8 ->> fib 6 + fib 7
      ->> + (fib 4 + fib 5) + (fib 5 + fib 6)
      ->> ((fib 2 + fib 3) + (fib 3 + fib 4))
          + ((fib 3 + fib 4) + (fib 4 + fib 5))
      ->> (((fib 0 + fib 1) + (fib 1 + fib 2))
           + (fib 1 + fib 2) + (fib 2 + fib 3)))
          + (((fib 1 + fib 2) + (fib 2 + fib 3))
           + ((fib 2 + fib 3) + (fib 3 + fib 4)))
      ->> ...
      ->> 21                          -- 60 Aufrufe von fib
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (5)

...die naive baumartig-rekursive Berechnung der Fibonacci-Zahlen führt zu äußerst vielen Mehrfachberechnungen.

Der Berechnungsaufwand wächst dabei exponentiell!



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Lsg. 1: Effiziente Berechnung der Fibonacci-Z.

Fibonacci-Zahlen lassen sich auf viele Arten effizient berechnen, z.B. mit der Idee des

- Rechnens auf Parameterposition!

Das Ergebnis wird hierbei in einem oder verteilt über mehrere zusätzliche (Akkumulations-) Parameter (hier zwei!) sukzessive akkumuliert:

```
fib :: Integer -> Integer
fib n = fib' n 0 1
 where
  fib' :: Integer -> Integer -> Integer -> Integer
  fib' 0 a b = a
  fib' n a b = fib' (n-1) b (a+b)
```

Beachte: Das Bsp. zeigt zugleich, wie eine baumartige Rekursion (in `fib` 'naiv') auf eine schlichte Rekursion (in `fib'`) zurückgeführt wird.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Lsg. 2: Effiziente Berechnung der Fibonacci-Z.

...die i.w. gleiche Idee verteilt auf mehrere Funktionen realisiert das System von Rechenvorschriften aus:

- `fibSchritt`, `fibPaar` und `fib`.

```
fibSchritt :: (Integer,Integer) -> (Integer,Integer)
fibSchritt (m,n) = (n,m+n)

fibPaar :: Integer -> (Integer,Integer)
fibPaar n
  | n == 0     = (0,1)
  | otherwise = fibSchritt (fibPaar (n-1))

fib :: Integer -> Integer
fib n = fst (fibPaar n)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Lsg. 3: Effiziente Berechnung der Fibonacci-Z.

...mit der Idee:

– Speichern und wiederbenutzen statt (neu) Berechnen

mithilfe sog. Memo-Funktionen; eine Idee, die zurückgeht auf:

Donald Michie. 'Memo' Functions and Machine Learning. Nature 218:19-22, 1968.

wobei hier die Memo-Funktion als (Memo-) Liste realisiert ist:

```
memo_fib :: [Int]
memo_fib = [fib' n | n <- [0..]]          -- Memo-Liste

fib' :: Int -> Int
fib' 0 = 0
fib' 1 = 1
fib' n = memo_fib !! (n-2) + memo_fib !! (n-1)

fib :: Int -> Int
fib n = memo_fib!!n
```

Hinweis: Die Listenelementzugriffsfunktion `(!!)` hat Typ `(!!) :: [a] -> Int -> a`; deshalb ist `fib` hier für `Int` definiert, nicht für `Integer`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Übungsaufgabe 7.2.3.1

Werte die effizienten Funktionen `fib` (sowie `fib'`, `memo_fib`) aus

1. Lsg. 1
2. Lsg. 2
3. Lsg. 3

händisch für jeweils einige Werte aus, um zu sehen, wie diese Implementierungen die Berechnung der Fibonacci-Zahlen vornehmen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Abhilfe bei ungünstigem Rekursionsverhalten

...oft ist folgende Verbesserung möglich:

- Ersetzung aufwandsungünstiger durch günstigere Rekursionsmuster!

Zum Beispiel die Rückführung

- baumartiger Rekursion
- linearer Rekursion

auf

- repetitive Rekursion (s.a. Lsg. 1, Kap. 7.2.3, und Anh. E).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Rückführung linearer auf repetitive Rek. (1)

...am Beispiel der Fakultätsfunktion:

Naheliegende Implementierung mittels linearer Rekursion:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
  | n == 0    = 1
  | otherwise = n * fac (n-1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Rückführung linearer auf repetitive Rek. (2)

Günstigere Formulierung mittels repetitiver Rekursion durch

- Rechnen auf Parameterposition

...mit einem zusätzlichen (Akkumulations-) Parameter, in dem sukzessive das Ergebnis akkumuliert wird:

```
type Akkumulation = Integer

fac :: Integer -> Integer
fac n = fac_repetitiv n 1

fac_repetitiv :: Integer -> Akkumulation -> Integer
fac_repetitiv n akkumulation
  | n == 0     = akkumulation
  | otherwise = fac_repetitiv (n - 1) (n * akkumulation)
```

Beachte: Überlagerungen mit anderen Effekten sind möglich, so dass sich möglicherweise kein Effizienzgewinn realisiert!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Weitere Möglichkeiten zur Verbesserung

...bieten spezielle Programmiertechniken wie

- Dynamische Programmierung
- Memoization

Zentrale Idee:

- Speicherung und Wiederverwendung statt Wiederberechnung bereits berechneter (Teil-) Ergebnisse.

  (Siehe etwa die effiziente Berechnung der Fibonacci-Zahlen mithilfe einer Memo-Liste; s. Lsg. 3, Kap. 7.2.3)

Hinweis: Dynamische Programmierung und Memoization werden in der LVA 185.A05 Fortgeschrittene funktionale Programmierung ausführlich behandelt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.2.1
7.2.2
7.2.3
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV

Kapitel 7.3

Aufrufgraphen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Struktur von Programmen

Programme funktionaler Programmiersprachen (auch Haskell-Programme) sind i.a.

- Systeme (wechselweiser) rekursiver Rechenvorschriften, die sich hierarchisch oder/und wechselweise aufeinander abstützen.

Aufrufgraphen erleichtern es, sich über die

- Struktur von Systemen von Rechenvorschriften

Klarheit zu verschaffen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Aufrufgraphen

...sei S ein System von Rechenvorschriften.

Definition 7.3.1 (Aufrufgraph)

Der Aufrufgraph von S ist ein Graph, der

- für jede in S deklarierte Rechenvorschrift einen Knoten mit dem Namen der Rechenvorschrift als Beschriftung enthält,
- eine gerichtete Kante vom Knoten f zum Knoten g genau dann enthält, wenn im Rumpf der zu f gehörigen Rechenvorschrift die zu g gehörige Rechenvorschrift aufgerufen wird.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Beispiel: Aufrufgraphen (1)

...der Rechenvorschriften bzw. Systeme von Rechenvorschriften

add, add′, fac, fib, max und mx:

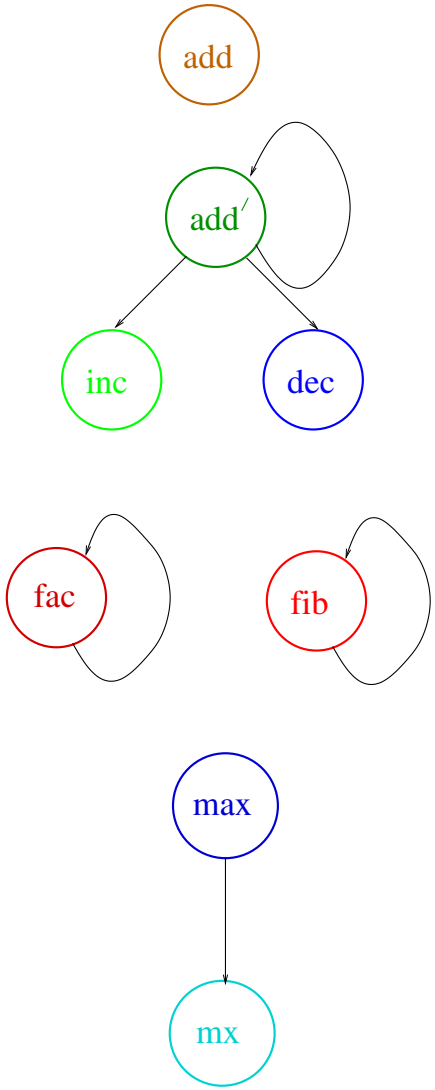
```
add :: Int -> Int -> Int
add m n = (+) m n

add'  :: Int -> Int -> Int
add' m n | n == 0    = m
         | n >0      = add' (inc m) (dec n)
         | otherwise = add' (dec m) (inc n)
 where inc :: Int -> Int
       inc n = n+1
       dec :: Int -> Int
       dec n = n-1

fac :: Integer -> Integer
fac n | n == 0    = 1
      | otherwise = n * fac (n-1)

fib :: Integer -> Integer
fib n | n == 0    = 0
      | n == 1    = 1
      | otherwise = fib (n-1) + fib (n-2)

max :: Int -> Int -> Int -> Int
max p q r
 | (mx p q == p) && (p `mx` r == p) = p
 | (mx p q == q) && (q `mx` r == q) = q
 | otherwise                        = r
 where mx :: Int -> Int -> Int
       mx p q | p >= q    = p
              | otherwise = q
```



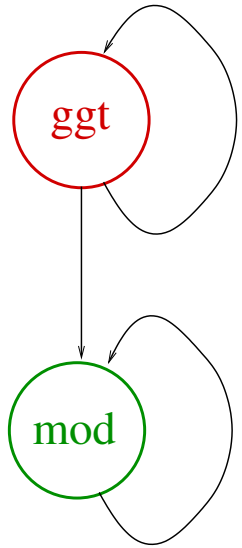
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Beispiel: Aufrufgraphen (2)

...des Systems hierarchischer Rechenvorschriften der Funktionen ggt und mod:

```
ggt :: Int -> Int -> Int
ggt m n
  | n == 0 = m
  | n > 0  = ggt n (mod m n)

mod :: Int -> Int -> Int
mod m n
  | m < n  = m
  | m >= n = mod (m-n) n
```



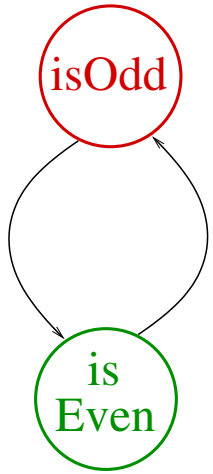
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Beispiel: Aufrufgraphen (3)

...des Systems wechselweise rekursiver Rechenvorschriften der Funktionen `isOdd` und `isEven`:

```
isOdd :: Integer -> Bool
isOdd n
 | n == 0 = False
 | n > 0  = isEven (n-1)


isEven :: Integer -> Bool
isEven n
 | n == 0 = True
 | n > 0  = isOdd (n-1)
```



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Beispiel: Aufrufgraphen (4)

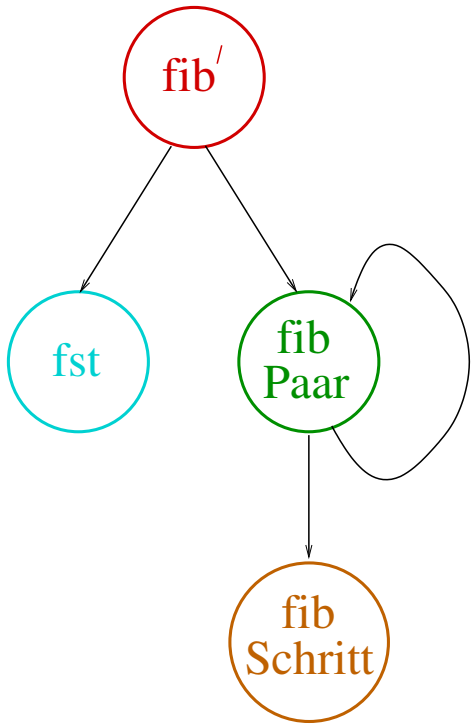
...des Systems hierarchischer Rechenvorschriften der Funktionen `fib`, `fibPaar`, `fibSchritt` und `fst`:

```
fibSchritt :: (Integer,Integer) -> (Integer,Integer)
fibSchritt (m,n) = (n,m+n)

fibPaar :: Integer -> (Integer,Integer)
fibPaar n =
 | n == 0    = (0,1)
 | otherwise = fibSchritt (fibPaar (n-1))

fib' :: Integer -> Integer
fib' n = fst (fibPaar n)

fst :: (a,b) -> a
fst (x,y) = x
```



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Interpretation von Aufrufgraphen (1)

Aus den Aufrufgraphen eines Systems von Rechenvorschriften ist u.a. ablesbar:

- Direkte Rekursivität einer Funktion: 'Selbstkringel'.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `fac` und `fib`)
- Wechselweise Rekursivität zweier Funktionen: Kreise mit zwei Kanten.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `isOdd` und `isEven`)
- Direkte hierarchische Abstützung einer Funktion auf eine andere: Es gibt eine Kante von Knoten f zu Knoten g, aber nicht umgekehrt.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `max` und `mx`)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Interpretation von Aufrufgraphen (2)

- Indirekte hierarchische Abstützung einer Funktion auf eine andere: Knoten g ist von Knoten f über eine Folge von Kanten erreichbar, aber nicht umgekehrt.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `fib'`, `fibPaar` und `fibSchritt`)
- Indirekte wechselweise Abstützung: Knoten g ist von Knoten f über eine Folge von Kanten erreichbar und umgekehrt (Kreise mit mehr als zwei Kanten).
- Unabhängigkeit/Isolation einer Funktion: Knoten f hat (ggf. mit Ausnahme eines Selbstkringels) weder ein- noch ausgehende Kanten.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `add`, `fac` und `fib`)
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 7.3.1

Gib ein System von Rechenvorschriften an, in dem sich zwei Funktionen `f` und `g` indirekt wechselweise aufeinander abstützen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 7.4

Komplexität, Komplexitätsklassen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Rechenaufwand von Algorithmen

...als Anzahl elementarer Operationen zu (angenommenen) Einheitskosten einer imaginären Maschine.

Sei

1. $\mathcal{A} : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$ ein Algorithmus, der Probleminstanzen p aus einer Menge $\mathcal{P}$ auf Lösungsinstanzen l aus einer Menge $\mathcal{L}$ abbildet.
2. $f_{\mathcal{A}} : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die für jede Probleminstanz $p \in \mathcal{P}$ die Zahl elementarer Operationen angibt, die $\mathcal{A}$ zur Lösung von p benötigt.
3. $\gamma : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die jeder Probleminstanz $p \in \mathcal{P}$ eine natürliche Zahl als Größe zuordnet.

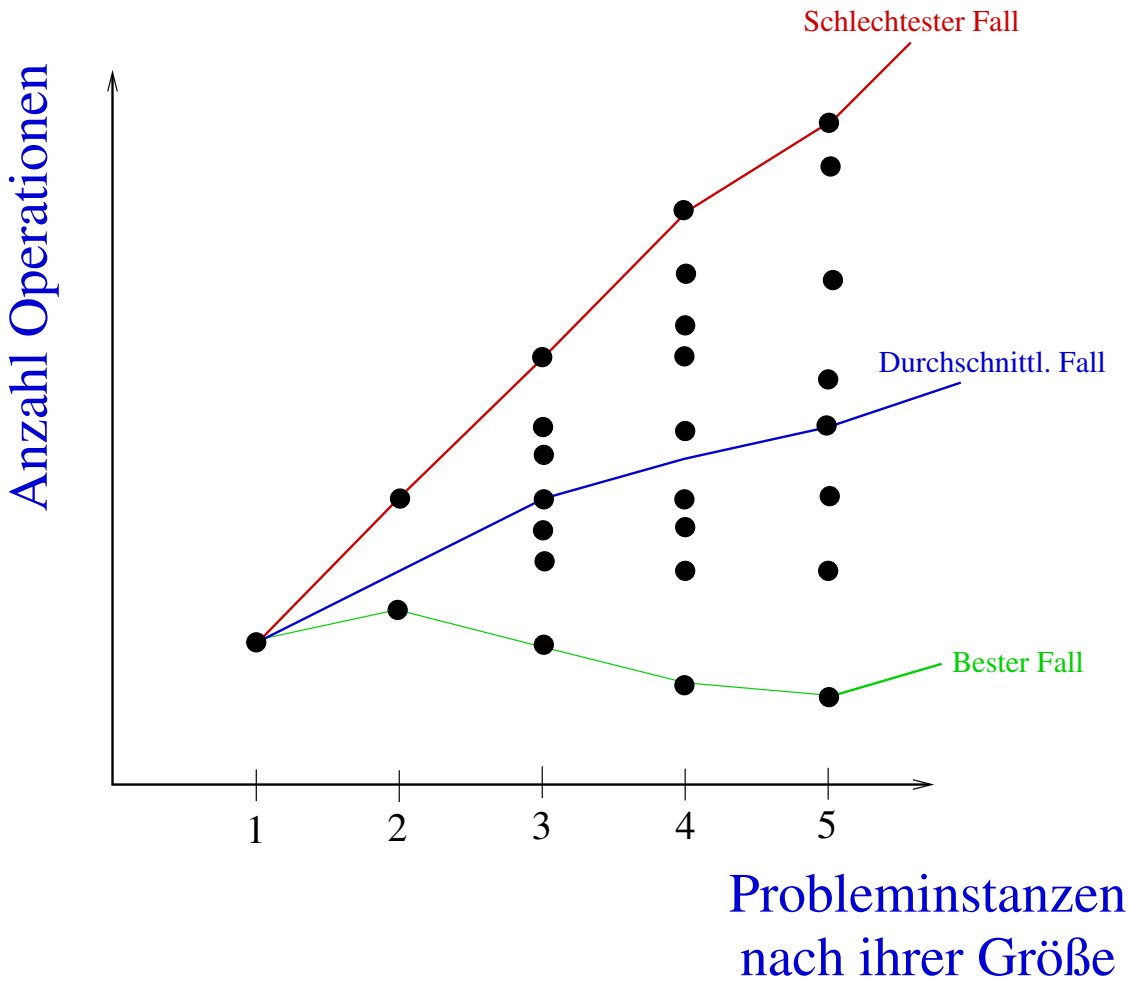
Beispiel: Sortieren ganzer Zahlen

- $\mathcal{P}$: Menge aller Listen über ganzen Zahlen.
- $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$: Menge aller aufsteigend sortierten Listen.
- $\mathcal{A}$: Quicksort
- $\gamma(p)$, $p \in \mathcal{P}$: Länge von p, d.h. Anzahl Elemente in p.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Aufwand in Abhängigkeit der Problemgröße

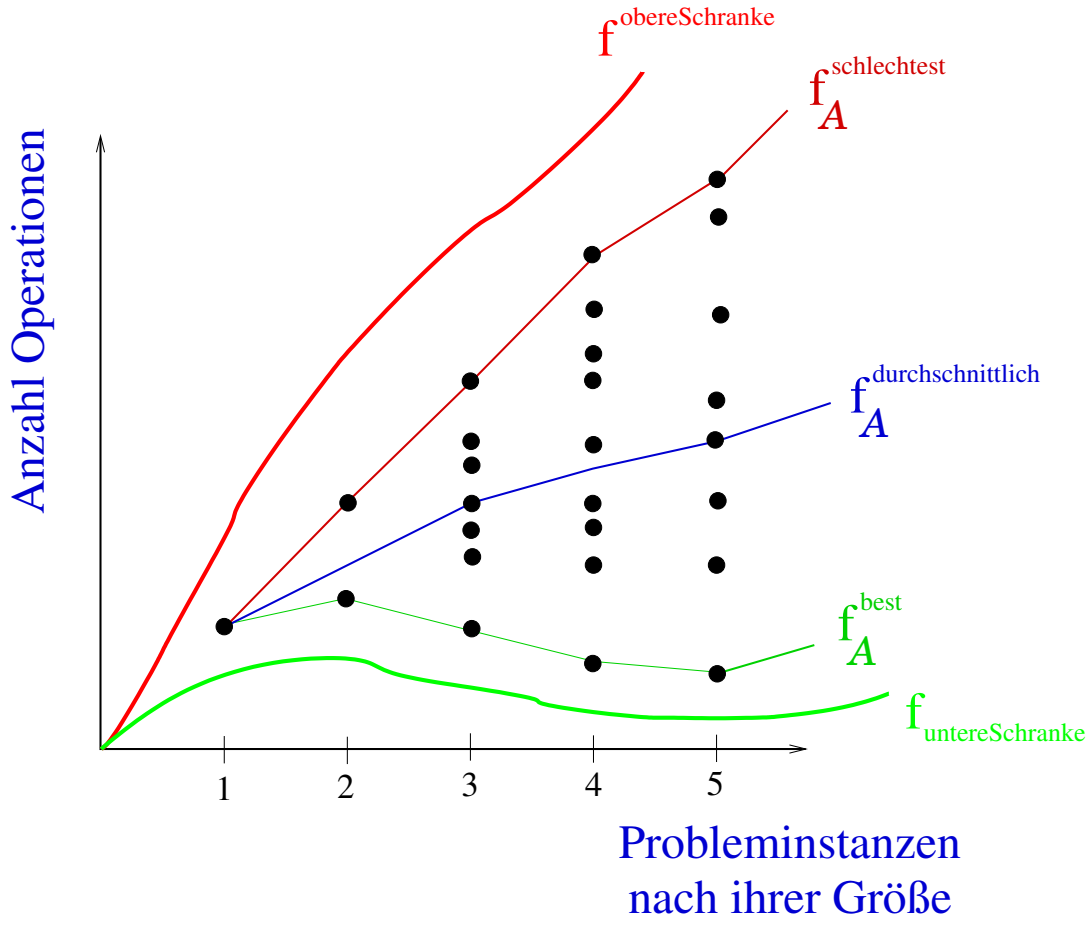
...von Algorithmus $\mathcal{A}$, wobei • Probleminstanzen darstellen:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Aus Gründen der Praktikabilität

...betrachtet man i.a nicht die (meist schwer beschreibbaren) Aufwandsfunktionen $f_{\mathcal{A}}^{schlechtest}$, $f_{\mathcal{A}}^{durchschnittlich}$ und $f_{\mathcal{A}}^{best}$ direkt, sondern konzentriert sich auf Funktionen $f^{obereSchranke}$ und $f_{untereSchranke}$, die $f_{\mathcal{A}}^{schlechtest}$ und $f_{\mathcal{A}}^{best}$ beschränken:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Obere, untere, einhüllende Schranken

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ zwei Funktionen von den natürlichen in die positiven reellen Zahlen (einschl. 0 jeweils; sonst $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$).

Definition 7.4.1 (Obere, untere, einhüll. Schranke)

g heißt asymptotische

1. obere Schranke von f gdw.
   $\exists k \in \mathbb{R}^+. \exists n_0 \in \mathbb{N}_0. \forall n \in \mathbb{N}_0. n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq k * g(n)$
   In diesem Fall schreiben wir: $f \in O(g)$ (oder $f = O(g)$).
2. untere Schranke von f gdw.
   $\exists k \in \mathbb{R}^+. \exists n_0 \in \mathbb{N}_0. \forall n \in \mathbb{N}_0. n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq k * g(n)$
   In diesem Fall schreiben wir: $f \in \Omega(g)$ (oder $f = \Omega(g)$).
3. einhüllende Schranke von f gdw. g ist obere und untere Schranke von f: $f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)$.
   In diesem Fall schreiben wir: $f \in \Theta(g)$ (oder $f = \Theta(g)$).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Asymptotische einhüllende Schranke

Es gilt:

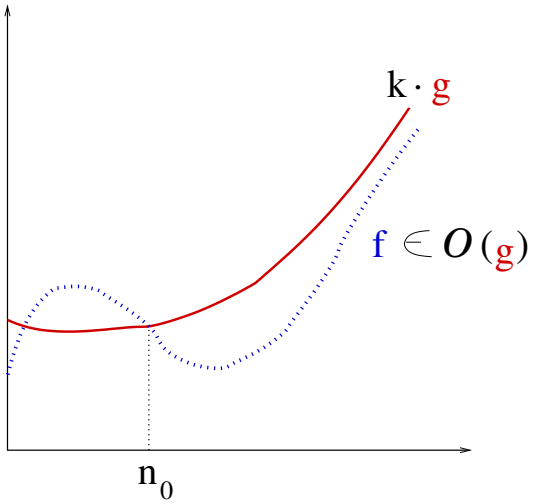
Proposition 7.4.2

Folgende Aussagen sind logisch äquivalent:

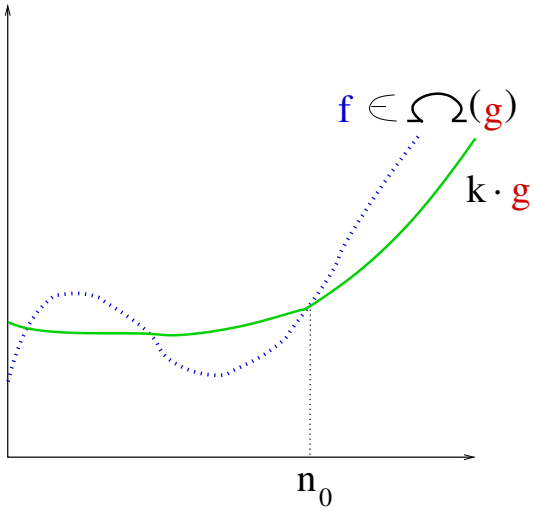
1. g ist einhüllende Schranke von f.
2. $\exists\, k, k' \in I\!R^+.\ \exists\, n_0, n_0' \in \mathbb{N}_0.$
   $(\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ f(n) \leq k * g(n)) \wedge$
   $(\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\ n \geq n_0' \ \Rightarrow\ f(n) \geq k' * g(n))$
3. $\exists\, k, k' \in I\!R^+.\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0.$
   $\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ (f(n) \leq k*g(n) \wedge f(n) \geq k'*g(n))$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

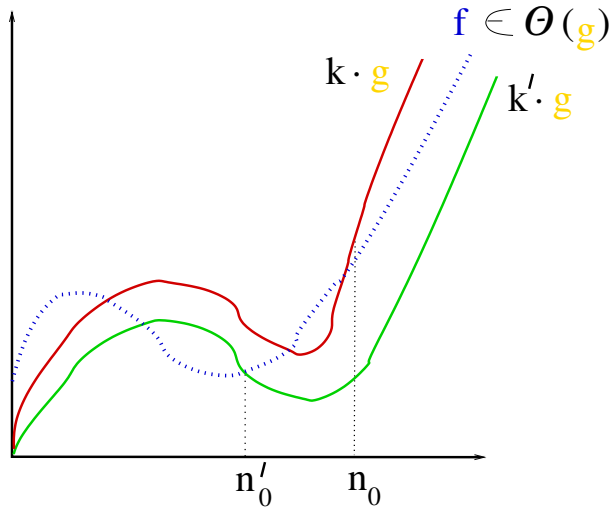
Asymptotische Schranken: Veranschaulichung



Obere Schranke



Untere Schranke



Einhüllende Schranke

1. $O(g) = \{f \mid g \text{ asympt. obere Schranke von } f\}$
2. $\Omega(g) = \{f \mid g \text{ asympt. untere Schranke von } f\}$
3. $\Theta(g) = \{f \mid g \text{ asympt. obere u. untere Schranke von } f\}$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Sprechweisen (für $f, g : \mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+$)

Man sagt, Funktion f

- ist
  (a) höchstens
  (b) mindestens
  (c) genau

  von der Größenordnung g
- wächst von der Größenordnung (oder größenordnungsmäßig)
  (a) höchstens
  (b) mindestens
  (c) genau

  so schnell wie g, wenn gilt:
  (a) $f \in O(g)$
  (b) $f \in \Omega(g)$
  (c) $f \in \Theta(g)$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Reflexivität, Transitivität, Symmetrie

Lemma 7.4.3 (Reflexivität)

$$f \in O(f),\ f \in \Omega(f),\ f \in \Theta(f)$$

Lemma 7.4.4 (Transitivität)

1. $f \in O(g) \wedge g \in O(h) \ \Rightarrow\ f \in O(h)$
2. $f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(h) \ \Rightarrow\ f \in \Omega(h)$
3. $f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) \ \Rightarrow\ f \in \Theta(h)$

Lemma 7.4.5 (Symmetrie)

$$f \in \Theta(g) \iff g \in \Theta(f)$$

Lemma 7.4.6 (Austauschsymmetrie)

$$f \in O(g) \iff g \in \Omega(f)$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Beachte

Die Schreibweise '$=$' für '$\in$', z.B. $f = O(g)$ für $f \in O(g)$ ist nützlich und verbreitet, aber ungenau, da '$=$' in diesem Kontext weder symmetrisch noch transitiv gelesen werden kann:

- Lesen wir $f = O(g)$ gleichbedeutend mit $f \in O(g)$, so ist die Schreibweise $O(g) = f$ sinnlos und ohne Bedeutung.
- Aus $f = O(g)$ und $h = O(g)$ kann nicht geschlossen werden: $f = h$.

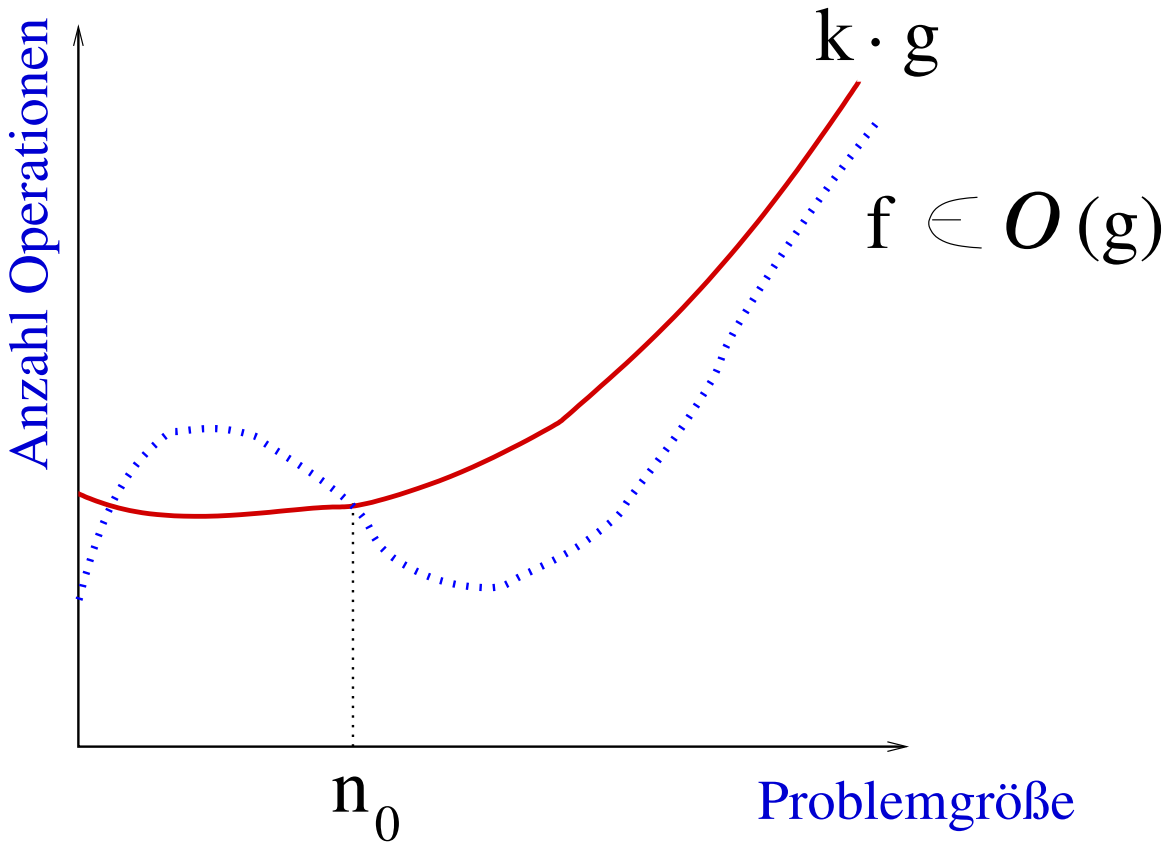
Das bedeutet:

- In Kontexten wie $f = O(g)$, $f = \Omega(g)$, $f = \Theta(g)$ ist '$=$' als Einweggleichung ausschließlich und nicht umkehrbar von links nach rechts zu lesen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

In der Praxis bes. wichtig: Asymp. obere Schr.

...sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die die max. Zahl elementarer Operationen eines Algorithmus $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit der durch eine natürliche Zahl beschriebenen Problemgröße angibt:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Einige Rechengesetze für Groß-O (1)

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+$ zwei Funktionen von den natürlichen in die positiven reellen Zahlen und seien $a, b \in I\!R_0^+$ zwei positive Konstanten.

Lemma 7.4.7

1. $a > 0 \;\Rightarrow\; O(af + b) = O(f)$
2. $g \in O(f) \;\Rightarrow\; O(f + g) = O(f)$
3. Ist g streng monoton wachsend ($\forall\, n, n' \in \mathbb{N}_0.\; n < n' \Rightarrow g(n) < g(n')$) oder monoton wachsend ($\forall\, n, n' \in \mathbb{N}_0.\; n < n' \Rightarrow g(n) \leq g(n')$) und nicht beschränkt ($\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\; \exists\, n' \in \mathbb{N}_0.\; g(n') > n$), so gilt:

$$O(f) \subsetneq O(f \cdot g)$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Einige Rechengesetze für Groß-O (2)

Lemma 7.4.8

Sind f, g polynomiale Funktionen mit

$$f(n) =_{df} \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot n^i, \quad g(n) =_{df} \sum_{j=1}^{l} b_i \cdot n^j$$

wobei $a_i, b_j \in IR_0^+$ für alle i, j und $a_k, b_l > 0$, so gilt:

1. $O(f) = O(g) \Leftrightarrow k = l$
2. $O(f) \subsetneq O(g) \Leftrightarrow k < l$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Einige Rechengesetze für Groß-O (3)

Für alle Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+$ gilt:

Lemma 7.4.9 (Umkehrinklusion)

$$O(f) \subseteq O(g) \iff \Omega(f) \supseteq \Omega(g)$$

Lemma 7.4.10 (Äquivalenzcharakterisierung)

Folgende Aussagen sind logisch äquivalent:

1. $f \in \Theta(g)$
2. $f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)$
3. $\Theta(f) = \Theta(g)$
4. $g \in O(f) \wedge g \in \Omega(f)$
5. $g \in \Theta(f)$

Lemma 7.4.11 (Quotientenfolgencharakterisierung)

Existiert $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ mit $0 < c \in I\!R^+$, so gilt: $f \in \Theta(g)$.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Einige Rechengesetze für Groß-O (4)

Aus Lemma 7.4.10 folgen als Korollare:

Korollar 7.4.12 (Äquivalenzrelation)

Die Relation 'ist genau von der Größenordnung' ist eine Äquivalenzrelation (d.h. reflexive, transitive, antisymmetrische Relation) auf der Menge $\mathcal{F} =_{df} [\mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+]$ aller Funktionen von den natürlichen in die positiven reellen Zahlen.

Da Äquivalenzrelationen eine Partitionierung der Grundmenge induzieren (d.h. Äquivalenzklassen paarweise verschieden, Vereinigung aller Äquivalenzklassen gleich Grundmenge) und umgekehrt, erhalten wir weiters:

Korollar 7.4.13 (Partitionierung)

Die Äquivalenzklassen der Relation 'ist genau von der Größenordnung' bilden eine Partitionierung von $\mathcal{F} =_{df} [\mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+]$.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Beispiele

...in der Praxis häufig auftretender Kostenfunktionen:

Kürzel	Aufwand	Intuition: *Vertausendfachte Eingabe heißt...*
$O(c)$	konstant	gleiche Arbeit
$O(log_2\ n)$	logarithmisch	nur zehnfache Arbeit
$O(n)$	linear	auch vertausendfachte Arbeit
$O(n\ log_2\ n)$	quasi-linear	zehntausendfache Arbeit
$O(n^2)$	quadratisch	millionenfache Arbeit
$O(n^3)$	kubisch	milliardenfache Arbeit
$O(n^c)$	polynomiell	gigantisch viel Arbeit (f. großes c)
$O(2^n)$	exponentiell	hoffnungslos

Peter Pepper. Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer. Springer-V., 2. Auflage, 2003, Kap. 11.

Anm.: Die Angabe der Basis bei (quasi-) logarithm. Komplexität entfällt üblicherw. (auch bei Pepper), da sie als Konstante in d. O-Not. aufgeht.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Veranschaulichung über Skalierbarkeit

...was das Wachstum von Probleminstanzen für die reale Ausführungszeit bedeutet (Annahme: Jede Elementarop. benötigt $1\,\mu s$; $f(n)$ Zahl max. benötigter Elementarop. für Instanzen d. Größe n):

Grösse n	Linear $f(n) = n$	Quadratisch $f(n) = n^2$	Kubisch $f(n) = n^3$	Exponentiell $f(n) = 2^n$
1	1 μs	1 μs	1 μs	2 μs
10	10 μs	100 μs	1 ms	1 ms
20	20 μs	400 μs	8 ms	1 s
30	30 μs	900 μs	27 ms	18 min
40	40 μs	2 ms	64 ms	13 Tage
50	50 μs	3 ms	125 ms	36 Jahre
60	60 μs	4 ms	216 ms	36 560 Jahre
100	100 μs	10 ms	1 sec	$4 * 10^{16}$ Jahre
1000	1 ms	1 sec	17 min	sehr, sehr lange...

Peter Pepper. Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer. Springer-V., 2. Auflage, 2003, Kap. 11.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Veransch. über handhabbare Problemgröße (1)

...mit folgender umgekehrter Fragestellung:

- Probleminstanzen welcher Größe können gerade noch gelöst werden, so dass das Ergebnis 'gefühlt sofort', ohne merklich wahrnehmbare Berechnungsverzögerung vorliegt?

Dafür nehmen wir an:

- Ein Ergebnis liegt 'gefühlt sofort' vor, wenn die Berechnungszeit bz nicht wesentlich mehr als eine Hundertstelsekunde beträgt, d.h. wenn für die Berechnungszeit $bz(p)$ einer Probleminstanz p gilt:

$$bz(p) < (10.000 + \varepsilon)\,\mu s = (10 + \varepsilon)\,ns = (0,01 + \varepsilon)\,s$$

- Eine Elementaroperation benötigt $1\,\mu s$.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Veransch. über handhabbare Problemgröße (2)

Gegeben seien:

1. Sechs unterschiedliche Lösungsalgorithmen mit
   - exponentiell ($\mathcal{A}_1$) $f_{\mathcal{A}_1} \in O(2^n)$
   - kubisch ($\mathcal{A}_2$) $f_{\mathcal{A}_2} \in O(n^3)$
   - quadratisch ($\mathcal{A}_3$) $f_{\mathcal{A}_3} \in O(n^2)$
   - quasi-linear ($\mathcal{A}_4$) $f_{\mathcal{A}_4} \in O(n \log_2 n)$
   - linear ($\mathcal{A}_5$) $f_{\mathcal{A}_5} \in O(n)$
   - logarithmisch ($\mathcal{A}_6$) $f_{\mathcal{A}_6} \in O(\log_2 n)$
2. Funktionen $f_{\mathcal{A}_i} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 6$, die für jeden Algorithmus angeben, wieviele Elementaroperationen $\mathcal{A}_i$ für die Lösung einer Probleminstanz der Größe n, $n \in \mathbb{N}$, höchstens benötigt.

   Informell: $f_{\mathcal{A}_i}$ übersetzt Problemgröße in (bis auf konstanten Faktor) max. Anzahl der von $\mathcal{A}_i$ benötigten Elementaroperationen zu je $1\,\mu s$.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Veransch. über handhabbare Problemgröße (3)

Algorithmus	Zeitbudget $(10.000 + \varepsilon)\,\mu s$	Handhabbare Problemgröße im Zeitbudget
Exponentiell $f_{\mathcal{A}_1}(n) = 2^n$	$f_{\mathcal{A}_1}(13) = 8.192$ $f_{\mathcal{A}_1}(14) = 16.384$	14
Kubisch $f_{\mathcal{A}_2}(n) = n^3$	$f_{\mathcal{A}_2}(21) = 9.261$ $f_{\mathcal{A}_2}(22) = 10.648$ $f_{\mathcal{A}_2}(26) = 17.576$	26
Quadratisch $f_{\mathcal{A}_3}(n) = n^2$	$f_{\mathcal{A}_3}(100) = 10.000$	100
Quasi-linear $f_{\mathcal{A}_4}(n) = n\,log_2 n$	$f_{\mathcal{A}_4}(1.000) \approx 10.000$	1.000
Linear $f_{\mathcal{A}_5}(n) = n$	$f_{\mathcal{A}_5}(10.000) = 10.000$	10.000
Logarithmisch $f_{\mathcal{A}_6}(n) = log_2 n$	$f_{\mathcal{A}_6}(2^{10.000}) = 10.000$	$2^{10.000}$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Wachstum informell gedeutet

– Exponentiell: Die Zahl der Operationen wächst im Vergleich zur Problemgröße äußerst schnell:

Problemgröße n	Anzahl Operationen 2^n
1	2
14	16.384
1.000	$2^{1.000}$
n	2^n

– Logarithmisch: Die Zahl der Operationen wächst im Vergleich zur Problemgröße äußerst langsam:

Problemgröße 2^n	Anzahl Operationen n
1	0
$16 \approx 14$	4
$1.024 \approx 1.000$	10
$2^{16.384}$	16.384
2^{2^n}	2^n

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Lohnt der Kauf eines schnelleren Rechners?

Algorithmus	Alter Rechner	Neuer schnellerer Rechner		
		10x	100x	1.000x
Exponentiell $f_{\mathcal{A}_1}(n) = 2^n$	14 ($2^{14} = 16.384$)	17 ($2^{17} = 131.072$)	20 ($2^{20} = 1.048.576$)	24 ($2^{24} = 16.777.216$)
Kubisch $f_{\mathcal{A}_2}(n) = n^3$	26 ($26^3 = 17.576$)	47 ($47^3 = 103.823$)	100 ($100^3 = 1.000.000$)	216 ($216^3 = 10.077.696$)
Quadratisch $f_{\mathcal{A}_3}(n) = n^2$	100 ($100^2 = 10.000$)	317 ($317^2 = 100.489$)	1.000 ($1.000^2 = 1.000.000$)	3.163 ($3.163^2 = 10.004.569$)
Quasi-linear $f_{\mathcal{A}_4}(n) = n \log_2 n$	1.000 ($10^3 \log_2 10^3 \approx 10^3 * 10 = 10.000$)	9.000 ($9.000 \log_2 9.000 \approx 9.000 * 13 = 117.000$)	65.000 ($65.000 \log_2 65.000 \approx 65.000 * 16 = 1.040.000$)	530.000 ($530.000 \log_2 530.000 \approx 530.000 * 19 = 10.070.000$)
Linear $f_{\mathcal{A}_5}(n) = n$	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
Logarithmisch $f_{\mathcal{A}_6}(n) = \log_2 n$	$2^{10.000}$ ($\log_2 2^{10^4} = 10.000$)	$2^{100.000}$ ($\log_2 2^{10^5} = 100.000$)	$2^{1.000.000}$ ($\log_2 2^{10^6} = 1.000.000$)	$2^{10.000.000}$ ($\log_2 2^{10^7} = 10.000.000$)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Beobachtung

Der Kauf eines neuen, schnelleren Rechners bringt verglichen mit dem Finden und Wechsel zu einem asymptotisch besseren Algorithmus fast nichts.

- Exponentieller Algorithmus, Rechner um Faktor 1.000 schneller, im Bsp. wächst handhabbar von 14 auf 24:

  $\rightsquigarrow$ bedeutungslos, weil noch immer weit zu wenig.
- Logarithmischer Algorithmus, Rechner um Faktor 1.000 schneller, im Bsp. wächst handbabbar von $2^{10.000}$ auf $2^{10.000.000}$:

  $\rightsquigarrow$ bedeutungslos, weil schon $2^{10.000}$ riesig (genug) ist.

Kein Königsweg:

- Das Finden eines asymptotisch besseren Algorithmus ist kein Selbstläufer; möglicherweise gibt es auch keinen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Interpretation, Folgerungen

- Einem asymptotisch schlechten Algorithmus hat auch ein schneller(er) Rechner nichts entgegenzusetzen:

  Selbst ein 100.000-fach schnellerer Rechner mit 1.000.000.000 Operationen pro $0,01\,\mathrm{s}$ erlaubte bei exponentiellem Algorithmus ohne Verlängerung der erlaubten Antwortzeit lediglich Probleme bis zur Größe 30 zu lösen: $2^{30} = 1.073.741.824$.
- Ein asymp. schlechter Algorithmus verhält sich schlecht, auch wenn er auf einen schnelleren Rechner portiert wird.
- Asymp. schlechtes Alg.-Verhalten ist portierungsinvariant.

Faustregel:

- Ein langsamer Rechner mit asymptotisch gutem Algorithmus gewinnt gegen einen schnellen Rechner mit asymptotisch schlechtem oder auch nur schlechterem Algorithmus bei Probleminstanzen nichttrivialer Größe immer!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Abschließend

Die Beispiele und Überlegungen dieses Abschnitts machen deutlich:

- Rekursionsmuster beeinflussen (auch) die Effizienz einer Implementierung (siehe die naive baumartig-rekursive Implementierung der Fibonacci-Funktion).
- Die Wahl eines zweckmäßigen und zweckmäßig eingesetzten Rekursionsmusters ist deshalb wichtig.

WICHTIG: Nicht bestimmte Rekursionsmuster an sich sind

- problematisch, sondern ihr unzweckmäßiger Einsatz, wenn etwa wie im Fall der Fibonacci-Funktion baumartige Rekursion zu (unnötigen) Vielfachberechnungen von Werten führt!

Zweckmäßig eingesetzt bietet z.B. baumartige Rekursion viele Vorteile, darunter zur Parallelisierung! *Stichwort*: Teile und herrsche (oder divide et impera oder divide and conquer)!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 7.4.14

Vervollständige jede Spalte so weit bis d. Ausführungszeiten f. praktische Berechnungen gänzlich nutzlose Werte annehmen:

Grösse n	$f(n) = \log_{10} n$	$f(n) = \log_2 n$	$f(n) = n$	$f(n) = n \log_{10} n$	$f(n) = n \log_2 n$	$f(n) = n!$
1			1 μs			
10			10 μs			
20			20 μs			
30			30 μs			
40			40 μs			
50			50 μs			
60			60 μs			
100			100 μs			
1.000			1 ms			
10.000			10 ms			
100.000			100 ms			
1.000.000			1 s			

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 7.4.15

Angenommen, ein Rechner einer neuen Generation benötigt für jede Elementaroperation nur noch $1ns$ statt einer $1\mu s$.

1. Wie ändern sich die Werte in den beiden Tabellen aus Abschnitt 7.4 und Übungsaufgabe 7.4.14?
2. Bis zu jeweils welcher Problemgröße können Algorithmen der verschiedenen Komplexitätsklassen unter praktischen Gesichtspunkten eingesetzt werden, d.h. wie lange sind wir willens, auf ein Ergebnis zu warten? (Am Bsp. der Tabelle aus Abschnitt 7.4: 18 Minuten, vermutlich ja; 13 Tage, möglicherweise noch; 36 Jahre, eher nicht).
3. Ist für Algorithmen mit logarithmischer Komplexität ($\log n$, $n \log n$) der Unterschied zur Basis 10 oder zur Basis 2 unter praktischen Gesichtspunkten (d.h. im Sinn der vorherigen Teilaufgabe) bedeutsam oder vernachlässigbar?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 7.4.16 (1)

Manchmal, z.B. weil man keine asymptotische Schranke kennt oder findet, betrachtet man starke (oder nicht-scharfe) asymptotische Schranken.

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+$ zwei Funktionen von den natürlichen in die positiven reellen Zahlen.

Definition 7.4.17 (Starke obere, untere Schranke)

g heißt starke (oder nicht-scharfe) asymptotische

1. obere Schranke von f gdw.
   $\forall k \in I\!R^+. \exists n_0 \in \mathbb{N}_0. \forall n \in \mathbb{N}_0. n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq k * g(n)$
   In diesem Fall schreiben wir: $f \in o(g)$ (oder $f = o(g)$).
2. untere Schranke von f gdw.
   $\forall k \in I\!R^+. \exists n_0 \in \mathbb{N}_0. \forall n \in \mathbb{N}_0. n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq k * g(n)$
   In diesem Fall schreiben wir: $f \in \omega(g)$ (oder $f = \omega(g)$).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 7.4.16 (2)

Lemma 7.4.18 (Quotientenfolgencharakterisierung)

1. Ist $f \in o(g)$, so gilt:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad (\wedge \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty \text{ wenn ex. })$$

2. Ist $f \in \omega(g)$, so gilt:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \quad (\wedge \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \text{ wenn ex. })$$

Informell:

1. Gilt $f \in o(g)$, so sind für große n die Werte von $f(n)$ unbedeutend gegenüber denen von $g(n)$.
2. Gilt $f \in \omega(g)$, so sind für große n die Werte von $g(n)$ unbedeutend gegenüber denen von $f(n)$.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 7.4.16 (3)

Welche folgender Aussagen gelten? Beweis oder Gegenbeispiel.

1. Reflexivität:
   - 1.1 $f \in o(f)$
   - 1.2 $f \in \omega(f)$
2. Transitivität:
   - 2.1 $f \in o(g) \wedge g \in o(h) \Rightarrow f \in 0(h)$
   - 2.2 $f \in \omega(g) \wedge g \in \omega(h) \Rightarrow f \in \omega(h)$
3. Symmetrie:
   - 3.1 $f \in o(g) \iff g \in o(f)$
   - 3.2 $f \in \omega(g) \iff g \in \omega(f)$
4. Austauschsymmetrie: $f \in o(g) \iff g \in \omega(f)$
5. Umkehrinklusion: $o(f) \subseteq o(g) \iff \omega(f) \supseteq \omega(g)$
6. Schnitt:
   - 6.1 $O(g) \cap \omega(g) = \emptyset$
   - 6.2 $o(g) \cap \Omega(g) = \emptyset$
   - 6.3 $o(g) \cap \omega(g) = \emptyset$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 7.4.16 (4)

Gilt $f \in O(g)$ ($f \in \Omega(g)$), so kann g asymptotisch scharfe obere (untere) Schranke von f sein oder nicht.

Gib je ein Beispiel für Funktionen f und g an, so dass gilt:

1. $f \in O(g)$ und g ist
   - 1.1 scharfe
   - 1.2 nicht-scharfe

   asymptotische obere Schranke von f.
2. $f \in \Omega(g)$ und g ist
   - 2.1 scharfe
   - 2.2 nicht-scharfe

   asymptotische untere Schranke von f.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Landausche Symbole

Die Symbole O, Ω, Θ, o und ω heißen Landausche Symbole und gehen zurück auf Arbeiten von:

- Edmund Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Band I und II, B. G. Teubner, 1909. (o-Notation)
- Paul Bachmann. Die Analytische Zahlentheorie. Zahlentheorie, B. G. Teubner, 1894. (O-Notation)
- Godfrey H. Hardy, John E. Littlewood. Some Problems of Diophantine Approximation. Acta Mathematica 37:155-238, 1914. (Ω-Notation; mit vom heutigen Gebrauch abweichender Bedeutung von Ω als 'o-Negation')

Für einen genaueren historischen Abriss siehe die Arbeit:

- Donald E. Knuth. Big Omicron and Big Omega and Big Theta. ACM SIGACT News 8(2):18-24, 1976.

...der für die Verwendung der Landauschen Symbole in ihrer heutigen Bedeutung maßgeblicher Einfluss zukommt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 7.5

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 7 (1)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 4, Rekursion als Entwurfstechnik; Kapitel 9, Laufzeitanalyse von Algorithmen; Kapitel 9.2, Landau-Symbole)

Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 11, Software-Komplexität)

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald Rivest, Clifford Stein. *Algorithmen – Eine Einführung*. Oldenbourg Verlag, 2004. Kapitel 3, Wachstum von Funktionen; Kapitel 3.1, Asymptotische Notation (Θ, O, Ω, o, ω); Kapitel 3.2, Standardnotationen und Standardfunktionen)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 7 (2)


Ben Goldreich. *Invitation to Complexity Theory*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):18-22, 2012.


Neil D. Jones. *Constant Time Factors do Matter*. In Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'93), 602-611, 1993.


Donald E. Knuth. *Big Omicron and Big Omega and Big Theta*. ACM SIGACT News 8(2):18-24, 1976.
(s.a. Nachdruck unter gleichem Titel in: Donald E. Knuth. *Selected Papers on Analysis of Algorithms*. CSLI Lecture Notes Number 102, CSLI Publications, 35-41, 2012.)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 7 (3)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 5, Rekursion; Kapitel 11, Formalismen 3: Aufwand und Terminierung)

Steven S. Skiena. *The Algorithm Design Manual*. Springer-V., 1998. (Kapitel 1.3.2, Best, Worst, and Average-Case Complexity; Kapitel 1.4, The Big Oh Notation)

Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik. Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014. (Kapitel 4.1.3, Induktiv definierte Algorithmen. Türme von Hanoi)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 7 (4)

Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018. (Kapitel 4.1.3, Inductively defined Algorithms. Towers of Hanoi)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 20, Time and space behaviour)

Ingo Wegener. *Komplexität*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 119-144, 2006. (Kapitel 5.1, Größenordnungen und die $\mathcal{O}$-Notation)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 8

Auswertung einfacher Ausdrücke

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Auswertung von Ausdrücken

...hat das Ziel, Ausdrücke soweit zu vereinfachen wie nur irgend möglich und so ihren Wert zu berechnen.

Dafür ist das Zusammenspiel des

- Expandierens ($\rightsquigarrow$ Funktionsterme, Funktionsaufrufe)
- Simplifizierens ($\rightsquigarrow$ Funktionstermfreie Ausdrücke)

von Ausdrücken zu organisieren.

In der Folge illustrieren wir das am Beispiel funktionstermfreier und einfacher funktionstermbehafteter Ausdrücke.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 8.1

Auswertung von Ausdrücken ohne Funktionsterme

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Auswertung funktionstermfreier Ausdrücke

Viele (Simplifikations-) Wege führenZiel, zum stets selben (!) Ziel (s.a. Kap. 12.3,13.3), hier zum Wert 42, der Semantik (oder: Bedeutung) des Ausdrucks 3*(9+5):

1. Simplifikations-Weg:

```
                3 * (9+5)
(S)  ->>  3 * 14
(S)  ->>  42
```

2. S-Weg:

```
                3 * (9+5)
(S)  ->>  3*9 + 3*5
(S)  ->>  27 + 3*5
(S)  ->>  27 + 15
(S)  ->>  42
```

3. S-Weg:

```
                3 * (9+5)
(S)  ->>  3*9 + 3*5
(S)  ->>  3*9 + 15
(S)  ->>  27 + 15
(S)  ->>  42
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 8.2

Auswertung einfacher Ausdrücke mit Funktionstermen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 1: Auswertung von Funktionstermen

```
simple x y z :: Int -> Int -> Int -> Int
simple x y z = (x + z) * (y + z)
```

Der Funktionsterm `simple 2 3 4` hat als Semantik (oder: Bedeutung) den Wert `42`:

1. ES-Weg:

```
                simple 2 3 4
(Expandieren)  ->> (2 + 4) * (3 + 4)
(Simplifizieren) ->> 6 * (3 + 4)
             (S) ->> 6 * 7
             (S) ->> 42
```

2. ES-Weg:

```
                simple 2 3 4
           (E) ->> (2 + 4) * (3 + 4)
           (S) ->> (2 + 4) * 7
           (S) ->> 6 * 7
           (S) ->> 42
```

...und viele weitere ES-Wege; alle zur selben Bedeutung: `42`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 2: Auswertung von Funktionstermen

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip _ []          = []
zip [] _          = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
```

Der Funktionsterm `zip [1,3,5] [2,4,6,8,10]` hat als Semantik (oder: Bedeutung) den Wert `[(1,2),(3,4),(5,6)]`:

```
        zip [1,3,5] [2,4,6,8,10]
        -- Syntakt. Zucker der Listennotation auflösen
    ->> zip (1:(3:(5:[]))) (2:(4:(6:(8:(10:[])))))
(E/S) ->> (1,2) : zip (3:(5:[])) (4:(6:(8:(10:[]))))
(E/S) ->> (1,2) : ((3,4) : zip (5:[]) (6:(8:(10:[]))))
(E/S) ->> (1,2) : ((3,4) : ((5,6) : zip [] (8:(10:[]))))
(E/S) ->> (1,2) : ((3,4) : ((5,6) : []))
        -- Syntakt. Zucker für Listennotation einführen
    ->> [(1,2),(3,4),(5,6)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 3: Auswertung von Funktionstermen

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))
```

Der Funktionsterm `fac 2` hat als Semantik (oder: Bedeutung) den Wert 2:

```
                          fac 2
(Expandieren)        ->>  if 2 == 0 then 1
                          else (2 * fac (2 - 1))
(Simplifizieren)     ->>  2 * fac (2 - 1)
                     ->>  ...
```

Für die Fortführung der Berechnung mit dem Funktionsterm `fac (2 - 1)` gibt es jetzt

- Freiheitsgrade und damit verschiedene Möglichkeiten.

...die beiden in der Praxis wichtigsten führen wir genauer aus.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 3: 2 Hauptauswertungsvorgehensweisen

A): Applikativ – Argumentauswertung vor Expansion

```
                    2 * fac (2 - 1)
(Simplifizieren) ->> 2 * fac 1
(Expandieren)    ->> 2 * (if 1 == 0 then 1
                             else (1 * fac (1-1)))
                 ->> ... in diesem Stil fortfahren
```

B): Normal – Argumentauswertung nach Expansion

```
                    2 * fac (2 - 1)
(Expandieren)    ->> 2 * (if (2-1) == 0 then 1
                       else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(Simplifizieren) ->> 2 * ((2-1) * fac ((2-1)-1))
                 ->> ... in diesem Stil fortfahren
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 3: Vollständige Auswertung gemäß A)

```
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))

        fac 2
 (E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2 - 1))
 (S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2 - 1))
 (S) ->> (2 * fac (2 - 1))
 (S) ->> 2 * fac 1
 (E) ->> 2 * (if 1 == 0 then 1 else (1 * fac (1 - 1)))
 (S) ->> 2 * (if False then 1 else (1 * fac (1 - 1)))
 (S) ->> 2 * ((1 * fac (1 - 1)))
 (S) ->> 2 * (1 * fac 0)
 (E) ->> 2 * (1 * (if 0 == 0 then 1
                      else (0 * fac (0 - 1))))
 (S) ->> 2 * (1 * (if True then 1
                      else (0 * fac (0 - 1))))
 (S) ->> 2 * (1 * 1)
 (S) ->> 2 * 1
 (S) ->> 2
```

$\rightsquigarrow$ sog. applikativer Auswertungstil.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 3: Vollständige Auswertung gemäß B)

```
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))

        fac 2
 (E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2 - 1))
 (S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2 - 1))
 (S) ->> (2 * fac (2 - 1))
 (E) ->> 2 * (if (2-1) == 0 then 1
                 else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(2S) ->> 2 * (if False then 1
                 else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
 (S) ->> 2 * (((2-1) * fac ((2-1)-1)))
 (S) ->> 2 * (1 * fac ((2-1)-1))
 (E) ->> 2 * (1 * (if ((2-1)-1) == 0 then 1
                   else ((2-1)-1) * fac (((2-1)-1)-1)))
(3S) ->> 2 * (1 * (if True then 1
                   else ((2-1)-1) * fac (((2-1)-1)-1)))
 (S) ->> 2 * (1 * 1)
(2S) ->> 2
```

$\rightsquigarrow$ sog. normaler Auswertungsstil.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 4: Applikative Auswertung von fac 3

```
        fac 3
(E) ->> if 3 == 0 then 1 else (3 * fac (3-1))
(S) ->> if False then 1 else (3 * fac (3-1))
(S) ->> (3 * fac (3-1))
(S) ->> 3 * fac 2
(E) ->> 3 * (if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2-1)))
(S) ->> 3 * (if False then 1 else (2 * fac (2-1)))
(S) ->> 3 * ((2 * fac (2-1)))
(S) ->> 3 * (2 * fac 1)
(E) ->> 3 * (2 * (if 1 == 0 then 1 else (1 * fac (1-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (if False then 1 else (1 * fac (1-1))))
(S) ->> 3 * (2 * ((1 * fac (1-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * fac 0))
(E) ->> 3 * (2 * (1 * (if 0 == 0 then 1 else (0 * fac (0-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * (if True then 1 else (0 * fac (0-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * (1)))
(S) ->> 3 * (2 * 1)
(S) ->> 3 * 2
(S) ->> 6
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 4: Normale Auswertung von fac 3 (1)

```
        fac 3
(E) ->> if 3 == 0 then 1 else (3 * fac (3-1))
(S) ->> if False then 1 else (3 * fac (3-1))
(S) ->> (3 * fac (3-1))
(E) ->> 3 * (if (3-1) == 0 then 1 else ((3-1) * fac ((3-1)-1)))
(S) ->> 3 * (if 2 == 0 then 1 else ((3-1) * fac ((3-1)-1)))
(S) ->> 3 * (if False then 1 else ((3-1) * fac ((3-1)-1)))
(S) ->> 3 * (((3-1) * fac ((3-1)-1)))
(S) ->> 3 * (2 * fac ((3-1)-1))
(E) ->> 3 * (2 * (if ((3-1)-1) == 0 then 1
                  else (((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (if (2-1) == 0 then 1
                  else (((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (if 1 == 0 then 1
                  else (((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (if False then 1
                  else (((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1))))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 4: Normale Auswertung von fac 3 (2)

```
(S) ->> 3 * (2 * (((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1)))
(S) ->> 3 * (2 * ((2-1) * fac (((3-1)-1)-1)))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * fac (((3-1)-1)-1)))
(E) ->> 3 * (2 * (1 *
          (if (((3-1)-1)-1) == 0 then 1
           else ((((3-1)-1)-1) * fac (((((3-1)-1)-1)-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 *
          (if ((2-1)-1) == 0 then 1
           else ((((3-1)-1)-1) * fac (((((3-1)-1)-1)-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 *
          (if (1-1) == 0 then 1
           else ((((3-1)-1)-1) * fac (((((3-1)-1)-1)-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 *
          (if 0 == 0 then 1
           else ((((3-1)-1)-1) * fac (((((3-1)-1)-1)-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 *
          (if True then 1
           else ((((3-1)-1)-1) * fac (((((3-1)-1)-1)-1)))))
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 4: Normale Auswertung von fac 3 (3)

```
(S) ->> 3 * (2 * (1 * (1)))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * 1))
(S) ->> 3 * (2 * 1)
(S) ->> 3 * 2
(S) ->> 6
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 5: Applikative Auswertung von natSum 3

```
natSum n = if n == 0 then 0 else natSum (n-1) + n
```

```
        natSum 3
(E) ->> if 3 == 0 then 0 else natSum (3-1) + 3
(S) ->> if False then 0 else natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum 2 + 3
(E) ->> (if 2 == 0 then 0 else natSum (2-1) + 2) + 3
(S) ->> (if False then 0 else natSum (2-1) + 2) + 3
(S) ->> (natSum (2-1) + 2) + 3
(S) ->> (natSum 1 + 2) + 3
(E) ->> ...
    ...
(S) ->> 6
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Bsp. 5: Normale Auswertung von natSum 3

```
natSum n = if n == 0 then 0 else natSum (n-1) + n

        natSum 3
(E) ->> if 3 == 0 then 0 else natSum (3-1) + 3
(S) ->> if False then 0 else natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum (3-1) + 3
(E) ->> (if (3-1) == 0 then 0 else natSum ((3-1)-1) + (3-1)) + 3
(S) ->> (if 2 == 0 then 0 else natSum ((3-1)-1) + (3-1)) + 3
(S) ->> (if False then 0 else natSum ((3-1)-1) + (3-1)) + 3
(S) ->> natSum ((3-1)-1) + (3-1) + 3
(E) ->> (if ((3-1)-1) == 0 then 0 else ... ) + (3-1) + 3
    ...
(S) ->> 6
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 8.2.1

Vervollständige die

1. applikative Auswertung
2. normale Auswertung

des Funktionsterms `natSum` 3 aus Beispiel 5.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 8.2.2

Vervollständige die unten begonnene applikative Auswertung des Funktionsterms `natSum 3` bzgl. der musterbasierten Definition von `natSum`:

```
natSum n
  | n == 0    = 0
  | otherwise = natSum (n-1) + n
```

```
        natSum 3
(E) ->> | 3 == 0    = 0
        | otherwise = natSum (3-1) + 3
(S) ->> | False = 0
        | True  = natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum 2 + 3
(E) ->> | 2 == 0    = 0
        | otherwise = natSum (2-1) + 2 + 3
(S) ->> | False = 0
        | True  = natSum (2-1) + 2 + 3
(S) ->> natSum (2-1) + 2 + 3
(S) ->> natSum 1 + 2 + 3
(E) ->> ... (S) ->> 6
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 8.2.3

Vervollständige die unten begonnene nomale Auswertung des Funktionsterms `natSum 3` bzgl. der musterbasierten Definition von `natSum`:

```
natSum n
  | n == 0     = 0
  | otherwise = natSum (n-1) + n
```

```
          natSum 3
(E) ->> | 3 == 0     = 0
          | otherwise = natSum (3-1) + 3
(S))->> | False = 0
          | True  = natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum (3-1) + 3
(E) ->> | (3-1) == 0 = 0
          | otherwise  = natSum ((3-1)-1) + (3-1) + 3
(S) ->> | False = 0
          | True  = natSum ((3-1)-1) + (3-1) + 3
(S) ->> natSum ((3-1)-1) + (3-1) + 3
(E) ->> | ((3-1)-1) == 0 = 0
          | otherwise      = ...
    ...
(S) ->> 6
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 8.2.4

Werte den Funktionsterm `fac 3`

1. applikativ
2. nomal

für die musterbasierte Definition der Funktion `fac` aus, die hier in der Variante mit bewachten Gleichungen angegeben ist:

```
fac n
  | n == 0     = 1
  | otherwise = n * fac (n-1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 8.2.5

Gegeben sind die musterbasierten Definitionen der Funktionen `fun91` und `fun91′`:

```
fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
  | n >  100 = n - 10
  | n <= 100 = fun91 (fun91 (n+11))

fun91′ :: Integer -> Integer
fun91′ n =
  if n > 100 then n - 10 else fun91′ (fun91′ (n+11))
```

Werte die vier Funktionsterme `(fun91 101)`, `(fun91 100)` und `(fun91′ 101)`, `(fun91′ 100)` für jeweils eine Handvoll Expansionsschritte

1. applikativ
2. nomal

aus.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Übungsaufgabe 8.2.6

Betrachte noch einmal die Definition der Funktion `zip` aus Beispiel 2:

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip _ []          = []
zip [] _          = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs y
```

Löse die in Beispiel 2 kombinierten Expansions-/Simplifikations-Schritte in Einzelschritte auf, wobei $\pi(\cdot,\cdot)$ für Musterpassung stehe und vervollständige die unten begonnene Auswertung:

```
        zip (1:(3:(5:[]))) (2:(4:(6:(8:(10:[])))))
(E) ->> | π(1:(3:(5:[])),_) π(2:(4:(6:(8:(10:[])))),[]) = []
        | π(1:(3:(5:[])),[]) π(2:(4:(6:(8:(10:[])))),_) = []
        | π(1:(3:(5:[])),x:xs) π(2:(4:(6:(8:(10:[])))),y:ys)
          = (x,y) : zip xs ys
(S) ->> | Failed  = []
        | Failed  = []
        | Matched = (1,2) : zip (3:(5:[])) (4:(6:(8:(10:[]))))
(S) ->> (1,2) : zip (3:(5:[])) (4:(6:(8:(10:[]))))
    ->> ... ->> (1,2) : ((3,4) : ((5,6) : []))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 8.3

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Zusammenfassung

...in Kapitel 8.1 und 8.2 haben wir anhand von Beispielen die Auswertung einfacher Ausdrücke

- ohne Funktionsterme
- mit Funktionstermen im
  - applikativen
  - normalen

  Auswertungsstil

als maximale (d.h. nicht mehr verlängerbare) Folgen von Simplifikations- und Expansions-Schritten vorgeführt.

Für alle Beispiele hat gegolten, dass die konkret gewählte Folge von Expansions- und Simplifikations-Schritten keinen Einfluss auf den Wert des jeweiligen Ausdrucks gehabt hat.

In Kapitel 12.3 und 13.3 werden wir sehen, dass dies stets gilt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Ausblick

...in Kapitel 12 und 13 werden wir weitergehend zeigen, dass dies auch dann stets gilt, wenn z.B.:

- Funktionsterme in komplexe Ausdrücke eingebettet sind
- applikativer und normaler Auswertungsstil gemischt werden
- in irgendeiner, weder applikativen noch normalen, terminierenden Reihenfolge ausgewertet wird.

Dieses für die Wohldefinierbarkeit der Semantik funktionaler Programmiersprachen zentrale Resultat geht auf Alonzo Church und John Barkley Rosser zurück, das wir hier im Vorgriff auf Kap. 12.3.4 und Kap. 13.3 anführen:

Theorem 8.3.1 (Church/Rosser, 1936)

Jede terminierende maximale Folge von Expansions- und Simplifikations-Schritten endet mit demselben Wert.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 8.4

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 8 (1)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 4, Rekursion als Entwurfstechnik)

Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 1, Problem Solving, Programming, and Calculation)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007. (Kapitel 1, Introduction)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 9, Formalismen 1: Zur Semantik von Funktionen)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 8 (2)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999.
(Kapitel 1, Introducing functional programming)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011.
(Kapitel 1, Introducing functional programming)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
8.1
8.2
8.3
8.4
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11

Kapitel 9

Programmentwicklung, Programmverstehen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Kapitel 9.1

Programmentwicklung

Exercitatio artem parat.
Übung verschafft Geschicklichkeit.

Tacitus (um 55 - um 120 n.Chr.)
röm. Geschichtsschreiber

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Motivation

Das Finden eines algorithmischen Lösungsverfahrens ist

- kreativer Prozess
- nicht vollständig automatisierbar (siehe Verfahren für automatische Programmsynthese)

Es gibt jedoch

- Vorgehensweisen, Faustregeln

die die Aussicht erhöhen, erfolgreich zu sein.

Eine von Graham Hutton vorgeschlagene Vorgehensweise zur

- systematischen Entwicklung rekursiver Programme

betrachten wir hier genauer.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Systematische Programmentwicklung

...für rekursive Programme als 5-schrittiger Prozess.

5-schrittiger Entwurfsprozess (Graham Hutton, 2007):

1. Lege die (Daten-) Typen fest.
2. Führe alle relevanten Fälle auf.
3. Lege die Lösung für die einfachen (Basis-) Fälle fest.
4. Lege die Lösung für die übrigen Fälle fest.
5. Verallgemeinere und vereinfache das Lösungsverfahren.

Dieses Vorgehen werden wir an drei Beispielen demonstrieren.

Repetitio est mater studiorum.
Wiederholung ist die Mutter der Studien.
lat., sprichwörtl.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Bsp. 1: Aufsummieren

...der Elemente einer Liste ganzer Zahlen.

- Schritt 1: Lege die (Daten-) Typen fest

```
sum :: [Integer] -> Integer
```

- Schritt 2: Führe alle relevanten Fälle auf

```
sum []     =
sum (n:ns) =
```

- Schritt 3: Lege die Lösung für die Basisfälle fest

```
sum []     = 0
sum (n:ns) =
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Bsp. 1: Aufsummieren (fgs.)

- Schritt 4: Lege die Lösung für die übrigen Fälle fest

```
sum []     = 0
sum (n:ns) = n + sum ns
```

- Schritt 5: Verallgemeinere u. vereinfache das Lösungsverf.

```
5a) sum :: Num a => [a] -> a
```

```
5b) sum = foldr (+) 0
```

Gesamtlösung nach Schritt 5:

```
sum :: Num a => [a] -> a
sum = foldr (+) 0
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Bsp. 2: Streichen

...der ersten n Elemente einer Liste beliebigen Elementtyps.

- Schritt 1: Lege die (Daten-) Typen fest

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
```

- Schritt 2: Führe alle relevanten Fälle auf

```
drop 0 []         =
drop 0 (x:xs)     =
drop (n+1) []     =
drop (n+1) (x:xs) =
```

- Schritt 3: Lege die Lösung für die Basisfälle fest

```
drop 0 []         = []
drop 0 (x:xs)     = x:xs
drop (n+1) []     = []
drop (n+1) (x:xs) =
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Bsp. 2: Streichen (fgs.)

- Schritt 4: Lege die Lösung für die übrigen Fälle fest

```
drop 0 []         = []
drop 0 (x:xs)     = x:xs
drop (n+1) []     = []
drop (n+1) (x:xs) = drop n xs
```

- Schritt 5: Verallgemeinere u. vereinfache das Lösungsv.

```
5a) drop :: Integral b => b -> [a] -> [a]
5b) drop 0 xs         = xs
    drop (n+1) []     = []
    drop (n+1) (x:xs) = drop n xs
5c) drop 0 xs         = xs
    drop _ []         = []
    drop (n+1) (_:xs) = drop n xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Bsp. 2: Streichen (fgs.)

Gesamtlösung nach Schritt 5:

```
drop :: Integral b => b -> [a] -> [a]
drop 0 xs          = xs
drop _ []          = []
drop (n+1) (_:xs) = drop n xs
```

Hinweis: Muster der Form `(n+1)` werden von neueren Haskell-Versionen nicht mehr unterstützt. Alternative:

```
drop :: Integral b => b -> [a] -> [a]
drop 0 xs     = xs
drop _ []     = []
drop n (_:xs) = drop (n-1) xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Bsp. 3: Entfernen

... des letzten Elements einer nichtleeren Liste beliebigen Elementtyps.

- Schritt 1: Lege die (Daten-) Typen fest

```
rmLast :: [a] -> [a]
```

- Schritt 2: Führe alle relevanten Fälle auf

```
rmLast (x:xs) =
```

- Schritt 3: Lege die Lösung für die Basisfälle fest

```
rmLast (x:xs) | null xs   = []
              | otherwise =
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Bsp. 3: Entfernen (fgs.)

- Schritt 4: Lege die Lösung für die übrigen Fälle fest

```
rmLast (x:xs) | null xs   = []
              | otherwise = x : rmLast xs
```

- Schritt 5: Verallgemeinere u. vereinfache das Lösungsverf.

```
5a) rmLast :: [a] -> [a] -- keine Verallg. moegl.
5b) rmLast [_]    = []
    rmLast (x:xs) = x : rmLast xs
```

Gesamtlösung nach Schritt 5:

```
rmLast :: [a] -> [a]
rmLast [_]    = []
rmLast (x:xs) = x : rmLast xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Verfeinerter Entwurfsprozess

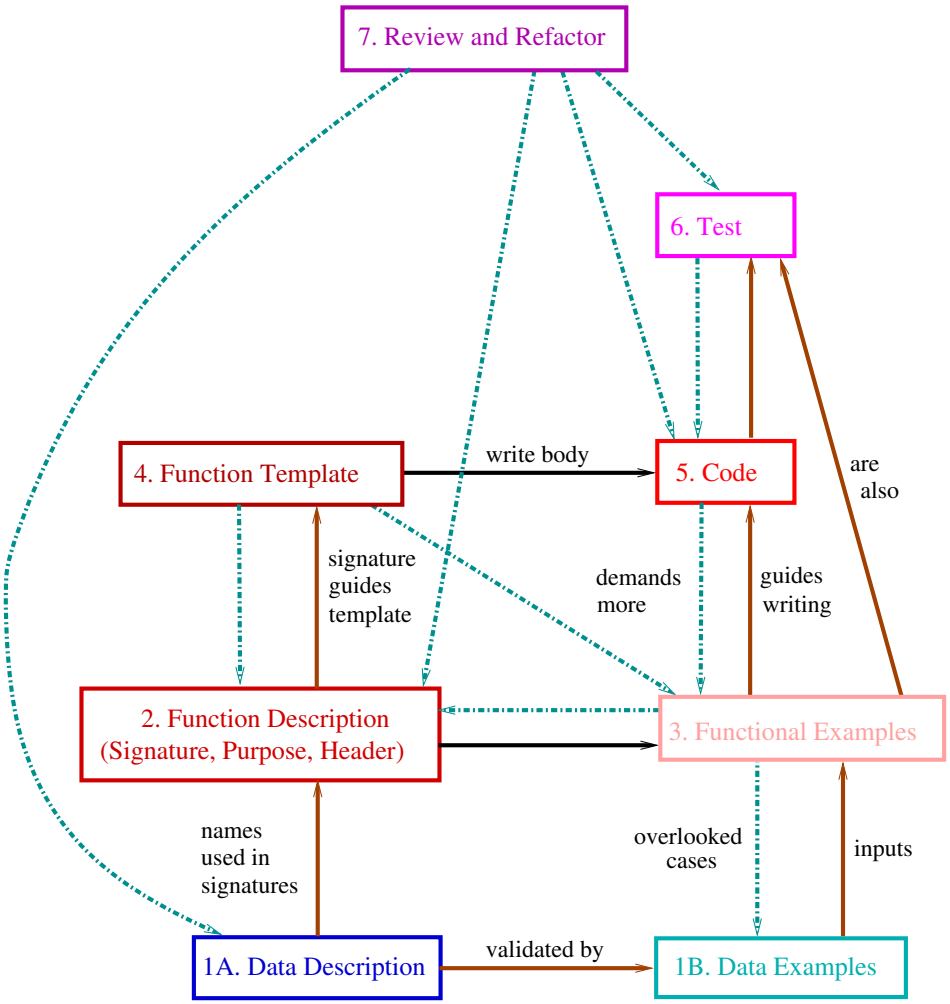
Norman Ramsey (2014) schlägt als Verfeinerung eines Vorschlags von Matthias Felleisen et al. (2001) einen vergleichbaren 7- bzw. 8-schrittigen Entwurfsprozess vor:

1. A.&B. Beschreibe die Daten, die die Funktion benutzt.
2. Beschreibe mithilfe der Signatur, einer Kopfzeile und eine Aufgabenbeschreibung, was die Funktion leistet.
3. Gib Beispiele an, die veranschaulichen und zeigen, was die Funktion leistet.
4. Schreibe ein Skelett (eine Definition mit noch auszufüllenden Lücken) der Funktion (engl. template).
5. Vervollständige das Skelett zu einer vollständigen Funktionsimplementierung (engl. code).
6. Teste die Funktion.
7. Beurteile die Funktion und refaktorisiere sie bei Bedarf.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Graphische Darstellung

...des Entwurfsprozesses nach Ramsey:



Solid arrows: show initial design
Dotted arrows: show feedback

Norman Ramsey.
On Teaching How to Design Programs.
In Proceedings ICFP 2014, Figure 1, p. 154.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Kapitel 9.2

Programmverstehen

Exercitatio optimus magister.
Übung ist der beste Lehrmeistert.

lat., sprichwörtl.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Motivation

...eine Binsenweisheit:

- Programme werden häufiger gelesen als geschrieben!

Deshalb ist es wichtig

- Strategien

zu besitzen, die durch geeignete Vorgehensweisen und Fragen an ein Programm helfen, Programme

- zu lesen und zu verstehen, besonders fremde Programme.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Vier Vorgehensweisen

...im Überblick:

1) Lesen des Programmtexts.
2) Nachdenken über das Programm, Ziehen von Schlussfolgerungen (z.B. Verhaltenshypothesen).

Zur Überprüfung von Verhaltenshypothesen, aber auch zu deren Auffinden kann hilfreich sein:

3) Gedankliche und/oder 'Papier- und Bleistift'-Programmausführung.

Auf einer konzeptuell anderen Ebene kann das Verständnis des Ressourcenbedarfs helfen, ein Programm zu verstehen:

4) Analyse des Zeit- und Speicherplatzverhaltens eines Programms.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Zur Illustration

...ein Beispiel:

```
mapWhile :: (a -> b) -> (a -> Bool) -> [a] -> [b]
mapWhile f p [] = []                                    (mW1)
mapWhile f p (x:xs)
  | p x         = f x : mapWhile f p xs                 (mW2)
  | otherwise = []                                      (mW3)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

1) Lesen des Programmtexts

Lesen der Funktionssignatur liefert bereits Einsichten in Art und Typ von Argumenten und Resultat. Im Beispiel:

- `mapWhile` erwartet als Argumente eine
  - Funktion `f` eines nicht weiter eingeschränkten Typs `(a -> b)`
  - Eigenschaft `p` von Objekten vom Typ `a`, genauer ein Prädikat (oder Wahrheitswertfunktion) vom Typ `(a -> Bool)`
  - Liste `l` von Elementen vom Typ `a`
- `mapWhile` liefert als Resultat
  - eine Liste l' von Elementen vom Typ `b`

...Lesen zusätzlich eingestreuter Programmkommentare, möglicherweise auch in Form von Vor- und Nachbedingungen ermöglicht (hoffentlich)

- weitere und tiefergehende Einsichten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

1) Lesen des Programmtexts (fgs.)

Lesen der Funktionsdefinition liefert erste weitere Einsichten in Verhalten und Bedeutung des Programms. Im Beispiel:

- Angewendet auf die leere Liste `[]`, ist gemäß (mW1) das Resultat die leere Liste `[]`.
- Angewendet auf eine nichtleere Liste, deren Kopfelement `x` Eigenschaft `p` erfüllt, ist gemäß (mW2) das Element `(f x)` vom Typ `b` das Kopfelement der Resultatliste, deren Rest sich durch den rekursiven Aufruf auf die Restliste `xs` ergibt.
- Erfüllt Kopfelement `x` die Eigenschaft `p` nicht, bricht gemäß (mW3) die Berechnung ab und liefert als Resultat die leere Liste `[]` zurück.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

2) Nachdenken über das Programm

Nachdenken liefert tiefere Einsichten über Programmverhalten und -bedeutung, auch durch den Beweis von Eigenschaften, die das Programm besitzt. Im Beispiel:

- Für alle Funktionen `f`, Prädikate `p` und endliche Listen `xs` können wir folgende Gleichheiten beweisen:

```
mapWhile f p xs = map f (takeWhile p xs)          (mW4)
mapWhile f (const True) xs = map f xs             (mW5)
mapWhile id p xs = takeWhile p xs                 (mW6)
```

  wobei (mW5) und (mW6) Folgerungen aus (mW4) sind.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

3) Gedankliche, Papier- u. Bleistiftausführung

...hilft, Verhaltenshypothesen zu validieren oder zu generieren durch Berechnung der Funktionswerte für ausgewählte Argumente. Im Beispiel:

```
mapWhile (+1) (>=7) [8,12,7,3,16]
 ->> (8+1) : mapWhile (+1) (>=7) [12,7,3,16]    wg. (mW2)
 ->> 9 : (12+1) : mapWhile (+1) (>=7) [7,3,16]  wg. (mW2)
 ->> 9 : 13 : (7+1) : mapWhile (+1) (>=7) [3,16] wg. (mW2)
 ->> 9 : 13 : 8 : []                            wg. (mW3)
 ->> [9,13,8]

mapWhile (+1) (>=0) [8,12,7,3,16]
 ->> ...
 ->> [9,13,8,4,17]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

4) Analyse des Ressourcenverbrauchs

...des Programms liefert:

- Für das Zeitverhalten: Unter der Annahme, dass `f` und `p` jeweils in konstanter Zeit ausgewertet werden können, ist die Auswertung von `mapWhile` linear in der Länge der Argumentliste, da im schlechtesten Fall die gesamte Liste durchgegangen wird.
- Für das Speicherverhalten: Der Platzbedarf ist konstant, da das Kopfelement stets schon 'ausgegeben' werden kann, sobald es berechnet ist (siehe unterstrichene Resultatteile):

```
mapWhile (+1) (>=7) [8,12,7,3,16]
 ->> (8+1) : mapWhile (+1) (>=7) [12,7,3,16]
 ->> 9 : (12+1) : mapWhile (+1) (>=7) [7,3,16]
 ->> 9 : 13 : (7+1) : mapWhile (+1) (>=7) [3,16]
 ->> 9 : 13 : 8 : []
 ->> [9,13,8]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Zusammenfassung (1)

...jede der vorgestellten 4 Vorgangsweisen

- bietet einen anderen Zugang zum Verstehen eines Programms.
- liefert für sich einen Mosaikstein zu seinem Verstehen, aus denen sich durch Zusammensetzen ein vollständig(er)es Gesamtbild ergibt.
- kann 'von unten nach oben' auch auf Systeme von auf sich wechselweise abstützenden Funktionen angewendet werden.
- bietet mit Vorgangsweise (3) der gedanklichen oder Papier- und Bleistiftausführung eines Programms einen stets anwendbaren (Erst-) Zugang zum Erschließen der Programmbedeutung an.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Zusammenfassung (2)

Lesbarkeit und Verständlichkeit eines Programms sollten

- immer schon beim Schreiben des Programms bedacht werden

...nicht zuletzt im eigenen Interesse!

Programme können grundsätzlich
auf zwei Arten geschrieben werden:
So einfach, dass sie offensichtlich keinen Fehler enthalten;
so kompliziert, dass sie keinen offensichtlichen Fehler enthalten.

C.A.R. 'Tony' Hoare (* 1934)

Turing Award Preisträger 1980

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Kapitel 9.3

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 9 (1)


Matthias Felleisen, Rober B. Findler, Matthew Flatt, Shriram Krishnamurthi. *How to Design Programs: An Introduction to Programming and Computing*. MIT Press, 2001.


Hugh Glaser, Pieter H. Hartel, Paul W. Garrat. *Programming by Numbers: A Programming Method for Novices*. The Computer Journal 43(4):252-265, 2000.


Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007. (Kapitel 6.6, Advice on Recursion)


Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 10, Functionally Solving Problems)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 9 (2)

Norman Ramsey. *On Teaching How to Design Programs*. In Proceedings of the 19th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2014), 153-166, 2014.

Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik. Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014. (Kapitel 4, Induktives Definieren)

Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018. (Kapitel 4, Inductive Definitions)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 9 (3)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999.
(Kapitel 7.4, Finding primitive recursive definitions; Kapitel 14, Designing and writing programs; Kapitel 11, Program development; Anhang D, Understanding programs)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011.
(Kapitel 4, Designing and writing programs; Kapitel 7.4, Finding primitive recursive definitions; Kapitel 9.1, Understanding definitions; Kapitel 12.7, Understanding programs)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

Teil IV

Funktionale Programmierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 10

Funktionen höherer Ordnung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Kapitel 10.1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Funktionen höherer Ordnung

...Bezeichnung für Funktionen, unter deren Argumenten oder Resultaten Funktionen sind.

Damit gilt:

Funktionen höherer Ordnung (abkürzend: Funktionale) sind

- spezielle Funktionen.

Beachte: Da Haskell-Funktionen grundsätzlich einstellig sind (vgl. Kap. 3.2) und damit in den meisten Fällen eine Funktion als Resultat liefern, sind in Haskell die allermeisten Funktionen Funktionen höherer Ordnung, selbst so einfach erscheinende wie die zur Addition von Zahlen:

```
(+) :: Num a => a          -> (a -> a)
       Argument(typ)       Resultat(typ)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Kapitel 10.1.1

Beispiele vordefinierter Funktionale

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Beispiele vordefinierter Funktionale in Haskell

Funktionen mit funktionalen Resultaten:

```
(+) :: Num a => a -> (a -> a)
((+) 1) :: Num a => (a -> a)                    -- Inkrementfkt.
splitAt :: Int -> ([a] -> ([a],[a]))
(splitAt 42) :: ([a] -> ([a],[a]))   -- Listenteilungsfkt.
```

Funktionen mit funktionalen Argumenten und Resultaten:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c))
(curry binom′) :: (Integer -> (Integer -> Integer))
                                                -- binom-Fkt.
uncurry :: (a -> (b -> c)) -> ((a,b) -> c)
(uncurry binom) :: ((Integer,Integer) -> Integer)
                                                -- binom′-Fkt.
zipWith :: (a -> (b -> c)) -> ([a] -> ([b] -> [c]))
(zipWith (&&)) :: ([Bool] -> ([Bool] -> [Bool]))
                                        -- 'Elementweise-und'-Fkt.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Kapitel 10.1.2

Beispiele selbstdefinierter Funktionale

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Beispiele selbstdef. Funktionale in Haskell

Funktionen mit funktionalen Argumenten (und nichtfunktionalen Resultaten):

```
f :: ((a -> b),a) -> b
f (g,x) = g x

f (fac,5) = 120 :: Integer
f (reverse,"stressed") = "desserts" :: String
f (concat,[[‘a‘,‘b‘,‘c‘],[‘d‘,‘e‘],[],[‘f‘]])
 = [‘a‘,‘b‘,‘c‘,‘d‘,‘e‘,‘f‘] :: [Char]
...

h :: ((a -> b -> c),a,b) -> c
h (g,x,y) = g x y

h (binom,49,6) = 13.983.816 :: Integer
h ((++),"Hallo"," Welt!") = "Hallo Welt!" :: String
h (zip,[‘a‘,‘b‘,‘c‘],[True,False])
 = ([(‘a‘,True),(‘b‘,False)] :: [(Char,Bool)]
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Bemerkung

...funktionale Programmiersprachen und Programmierung haben eine Präferenz für curryfizierte Funktionsdefinitionen.

Das erklärt die

- Abwesenheit vordefinierter Funktionale mit funktionalen Argumenten ohne funktionale Resultate

in Haskell.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Die Eingangsbeispiele

...zeigen:

Funktionen höherer Ordnung kommen in funktionalen Sprachen

- völlig beiläufig und natürlich daher.

So beiläufig, dass sie in funktionaler Programmierung

- der Regelfall, nicht die Ausnahme

sind.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Kapitel 10.1.3

Beispiele aus der Mathematik

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Funktionen höherer Ordnung

...in der Mathematik, z.B. in der Analysis:

- Differentialrechnung:

  $\frac{df(x)}{dx}$ $\rightsquigarrow$ `ableitung f x`

  ...Steigung der Funktion `f` an der Stelle `x`.

- Integralrechnung:

  $\int_a^b f(x)\,dx$ $\rightsquigarrow$ `integral f a b`

  ...Fläche unterhalb d. Fkt. `f` zwischen `a` und `b`.

- Stetigkeitstheorem:

  Die Komposition zweier stetiger Funktionen ist eine stetige Funktion, d.h. die Komposition der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g) : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ist stetig, wenn f und g stetig sind.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Kapitel 10.1.4

Beispiele aus anderen Informatikbereichen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Funktionen höherer Ordnung

...in anderen Informatikbereichen, z.B. der Semantik von Programmiersprachen:

- Die Bedeutung der while-Schleife im denotationellen Stil

$$[\![\texttt{while b do } \pi \texttt{ od}]\!]_{ds} : \Sigma \to \Sigma$$

...als kleinster Fixpunkt der Funktion höherer Ordnung FIX auf der Menge der Zustandstransformationen mit

  - V: Menge der Programmvariablen; D: Datenbereich.
  - $\Sigma =_{df} \{ \sigma \mid \sigma : V \to D \}$: Menge der (Prg.-) Zustände.
  - $ZT = [\Sigma \to \Sigma] =_{df} \{ zt \mid zt : \Sigma \to \Sigma \}$
    $= \{ zt \mid zt : (V \to D) \to (V \to D) \}$:
    Menge der (Prg.-) Zustandstransformationen.
  - $FIX : ((\Sigma \to \Sigma) \to (\Sigma \to \Sigma)) \to (\Sigma \to \Sigma)$:
    Fixpunktzustandstransformationsfunktional, das den kleinsten Fixpunkt des Argumentfunktionals liefert.

(siehe z.B. VU 185.278 Theoretische Informatik und Logik)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Die aufgefaltete Signatur

...des Fixpunktzustandstransformationsfunktionals:

$$FIX : (((V \to D) \to (V \to D)) \to ((V \to D) \to (V \to D))) \to ((V \to D) \to (V \to D))$$

$$FIX : \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}} \to \underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}}}_{\text{Zustandstransf.-fkt.}} \to \underbrace{\underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}} \to \underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}}}_{\text{Zustandstransf.-fkt.}}}_{\text{Zustandstransformationsfunktionenfunktion}} \to \underbrace{\underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}} \to \underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}}}_{\text{Zustandstransformationsfunktion}}}_{\text{Zustandsfunktionentransformationsfunktionenfunktionenfixpunktfunktion}}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Funktionen erster und höherer Ordnung

...am Beispiel von *FIX*:

- Zustandsfunktion:
  $(V \to D)$

  Funktion 1. Ordnung: Elementare Werte werden auf elementare Werte abgebildet.
- Zustandsfunktionentransformationsfunktion:
  $(V \to D) \to (V \to D)$

  Funktion höherer Ordnung 1. Stufe: Funktionen 1. Ordnung werden auf Funktionen 1. Ordnung abgebildet.
- Zustandsfunktionentransformationsfunktionenfunktion:
  $((V \to D) \to (V \to D)) \to ((V \to D) \to (V \to D))$

  Funktion höherer Ordnung 2. Stufe: Funktionen höherer Ordnung 1. Stufe werden auf Funktionen höherer Ordnung 1. Stufe abgebildet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Funktionen erster und höherer Ordnung (fgs.)

- Zustandsfunktionentransformationsfunktionenfunktionen-fixpunktfunktion:

$$((((V \to D) \to (V \to D)) \to ((V \to D) \to (V \to D))) \to (((V \to D) \to (V \to D))) \to (((V \to D) \to (V \to D)))$$

  Funktion höherer Ordnung 3. Stufe: Funktionen höherer Ordnung 2. Stufe werden auf Funktionen höherer Ordnung 1. Stufe abgebildet.

...oder kürzer:

Fixpunktzustandstransformationsfunktional!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Funktionen höherer Ordnung

...können dennoch überraschen oder gar verstören:

"The functions I grew up with, such as the sine, the cosine, the square root, and the logarithm were almost exclusively real functions of a real argument. [...] I was really ill-equipped to appreciate functional programming when I encountered it: I was, for instance, totally baffled by the shocking suggestion that the value of a function could be another function."(*)

Edsger W. Dijkstra (1930-2002)
Turing Award Preisträger 1972

(*) Zitat aus: Introducing a course on calculi. Ankündigung einer Lehrveranstaltung an der University of Texas, Austin, 1995.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Mit Funktionen höherer Ordnung

...machen wir den Schritt von applikativer zu funktionaler Programmierung, zum Rechnen mit Funktionen statt mit Werten!

Nach dem Vorbild von Hegel:

Der Mensch
wird erst durch Arbeit
zum Menschen.

Georg W.F. Hegel (1770-1831)
dt. Philosoph

Die funktionale Programmierung
wird erst durch Funktionen höherer Ordnung
zu funktionaler Programmierung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Mit Fug und Recht

...die vollumfängliche Integration von Funktionen höherer Ordnung als erstrangige Elemente (engl. first-class citizens), die das Tor zum Rechnen mit Funktionen aufstößt,

- ist charakteristisch und kennzeichnend für funktionale Programmierung.
- hebt funktionale Programmierung von anderen Programmierparadigmen/-stilen ab.
- ist wesentliches sprachliches Mittel funktionaler Sprachen für extrem ausdruckskräftige, elegante und flexible Programmiermethoden, insbesondere zur Unterstützung von Wiederverwendung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.1.1
10.1.2
10.1.3
10.1.4
10.2

Kapitel 10.2

Funktionale Abstraktion

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Abstraktionsprinzipien

Kennzeichnendes Strukturierungsprinzip für

- Prozedurale Sprachen: Prozedurale Abstraktion
  - Operanden werden zu Parametern von Prozeduren.
- Funktionale Sprachen: Funktionale Abstraktion
  - 1. Stufe: Funktionen
    $\rightsquigarrow$ Nichtfunktionale Operanden werden zu Parametern von Funktionen (funktionales Analogon zu prozeduraler Abstraktion).
  - höherer (2., 3.,...) Stufe: Funktionen höherer Ordnung
    $\rightsquigarrow$ Verknüpfungsvorschriften werden zu funktionalen Parametern von Funktionen höherer Ordnung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Kapitel 10.2.1

Funktionale Abstraktion 1. Stufe

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Funktionale Abstraktion 1. Stufe (1)

Idee: Operanden werden zu Parametern von Funktionen.

Beispiel: Statt viele strukturell gleiche Ausdrücke wie

```
(5 * 37 + 13) * (37 + 5 * 13)
(15 * 7 + 12) * (7 + 15 * 12)
(25 * 3 + 10) * (3 + 25 * 10)
...
```

...immer wieder von vorn hinzuschreiben und auszuwerten, führe eine funktionale Abstraktion durch, d.h. schreibe eine Funktion, die die Operanden des Ausdrucksmusters als Parameter erhält:

```
f :: (Int,Int,Int) -> Int
f (a,b,c) = (a * b + c) * (b + a * c)
```

und mit den ursprünglichen Ausdrucksoperanden(werten) aufgerufen wird.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Funktionale Abstraktion 1. Stufe (2)

Beispiel (fgs.): Die Funktion `f` erlaubt uns die gemeinsame Berechnungsvorschrift `(a * b + c) * (b + a * c)` der strukturell gleichen Ausdrücke wiederzuverwenden:

```
f (5,37,13) ->> 20.196
f (15,7,12) ->> 21.879
f (25,3,10) ->> 21.930
...
```

Gewinn: Wiederverwendung der gemeinsamen Berechnungsvorschrift durch

- funktionale Abstraktion 1. Stufe.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Kapitel 10.2.1

Funktionale Abstraktion höherer Stufe

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (1)

Idee: Verknüpfungsvorschriften werden zu funktionalen Parametern einer Funktion, die Funktion dadurch zu einer Funktion höherer Ordnung.

Beispiel: (siehe Fethi Rabhi, Guy Lapalme. Algorithms - A Functional Approach, Addison-Wesley, 1999, S. 7f.):

1. Fakultätsfunktion:

```
fac n | n==0    = 1
      | n>0     = n * fac (n-1)
```

2. Summe der n ersten natürlichen Zahlen:

```
natSum n | n==0   = 0
         | n>0    = n + natSum (n-1)
```

3. Summe der n ersten natürlichen Quadratzahlen:

```
natQuSum n | n==0   = 0
           | n>0    = n*n + natQuSum (n-1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (2)

Beobachtung:

- Die Definitionen von `fac`, `natSum` und `natQuSum` folgen demselben Rekursionsschema und der strukturell selben Verknüpfungsvorschrift ihrer Argumente.

Dieses gemeinsame Rekursionsschema und die Verknüpfungsvorschrift sind gekennzeichnet durch die Festlegung von im

- Basisfall: eines Basiswerts.
- Rekursionsfall: einer Verknüpfungsvorschrift des Argumentwerts `n` und des Funktionswerts für `(n-1)`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (3)

Diese Gemeinsamkeit legt es nahe

- Rekursionsschema
- Verknüpfungsvorschrift
- Basiswert

herauszuziehen, zu abstrahieren; eine Abstraktion höherer Stufe.

Das ergibt folgendes Rekursionsschema:

```
rekSchema :: Int -> (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int
rekSchema basiswert verknuepfe n
  | n==0 = basiswert
  | n>0  = verknuepfe n (rekSchema basiswert verknuepfe (n-1))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (4)

...diese funktionale Abstraktion höherer Stufe erlaubt nun, die Implementierungen von

- `fac`, `natSum`, `natQuSum`

zu ersetzen durch passende Aufrufe der

- Funktion höherer Ordnung `rekSchema`

der die Verknüpfungsvorschriften `fac`, `natSum`, `natQuSum` über den funktionalen Parameter `verknuepfe` übergeben werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (5)

Redefinition der Funktionen mittels `rekSchema`:

```
fac       = rekSchema 1 (*)
natSum    = rekSchema 0 (+)
natQuSum  = rekSchema 0 (\x y -> x*x + y)
```

...alternativ argumentbehaftet:

```
fac n       = rekSchema 1 (*) n
natSum n    = rekSchema 0 (+) n
natQuSum n  = rekSchema 0 (\x y -> x*x + y) n
```

Gewinn: Wiederverwendung des gemeinsamen Strukturmusters der Funktionen `fac`, `natSum` und `natQuSum` durch

- funktionale Abstraktion höherer Stufe.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Zusammenfassung d. rekSchema-Beispiels (1)

...die Signatur zeigt, dass rekSchema eine Funktion höherer Ordnung ist, die als ein Argument eine Funktion erwartet:

```
rekSchema :: Int -> (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int
```

Beachte: Streng genommen, ist rekSchema nach Kap. 3.2 eine einstellige Funktion, die mit einem ganzzahligen Argument z aufgerufen eine Funktion höherer Ordnung als Resultat liefert, nämlich den Wert des Funktionsterms (rekSchema z) vom Typ:

```
(rekSchema z) :: (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int
```

Die uncurryfizierte Version von rekSchema bzw. mit getauschter Argumentfolge macht deutlicher, dass das Rekursionsschema (u.a.) eine Funktion als Argument erwartet:

```
rekSchema'  :: (Int,(Int -> Int -> Int),Int) -> Int
rekSchema'' :: (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int -> Int
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Zusammenfassung d. `rekSchema`-Beispiels (2)

Für die Anwendungsbeispiele von `rekSchema` gilt:

	Basiswert	Verknüpfungsvorschrift
`fac`	1	`(*)`
`natSum`	0	`(+)`
`natQuSum`	0	`\x y -> x*x + y`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Übungsaufgabe 10.2.2.1

Ergänze die Deklarationen von

```
rekSchema' :: (Int,(Int -> Int -> Int),Int) -> Int

rekSchema'' :: (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int -> Int
```

zu vollständigen Implementierungen und teste sie mit geeigneten Argumenten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Zurück zum und weiter mit d. Eingangsbsp. (1)

- Funktionale Abstraktion 1. Stufe führt von Ausdrücken
  `(5*37+13)*(37+5*13), (15*7+12)*(7+15*12),...`
  zu Funktionen:

```
f:: (Int,Int,Int) -> Int
f (a,b,c) = (a * b + c) * (b + a * c)
```

  Aufrufbeispiele:

```
f (5,37,13) ->> 20.196
f (15,7,12) ->> 21.879
 ...
```

- Funktionale Abstraktion höherer Stufe führt von Funktionen zu Funktionen höherer Ordnung:

```
fho :: (((Int,Int,Int)->Int),Int,Int,Int) -> Int
fho (g,a,b,c) = g (a,b,c)
```

  Aufrufbeispiele:

```
fho (f,5,37,13) ->> 20.196
fho (f,15,7,12) ->> 21.879
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Zurück zum und weiter mit d. Eingangsbsp. (2)

...zusätzlich zur

- freien Wahl der elementaren Argumentwerte

(wie `f`) erlaubt die Funktion höherer Ordnung `fho` auch die

- freie Wahl der Vorschrift sie zu verknüpfen.

Beispiele:

```
f :: Int -> Int -> Int -> Int
f a b c = (a * b + c) * (b + a * c)

g :: Int -> Int -> Int -> Int
g a b c = a^b `div` c

h :: Int -> Int -> Int -> Int
h a b c = if (a `mod` 2 == 0) then b else c
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Zurück zum und weiter mit d. Eingangsbsp. (3)

Aufrufbeispiele:

```
fho (f,2,3,5) ->> f 2 3 5
              ->> (2*3+5)*(3+2*5)
              ->> (6+5)*(3+10)
              ->> 11*13
              ->> 143

fho (g,2,3,5) ->> g 2 3 5
              ->> 2^3 `div` 5
              ->> 8 `div` 5
              ->> 1

fho (h,2,3,5) ->> h 2 3 5
              ->> if (2 `mod` 2 == 0) then 3 else 5
              ->> if (0 == 0) then 3 else 5
              ->> if True then 3 else 5
              ->> 3
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Kapitel 10.2.3

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Zusammenfassung

...Gewinn durch funktionale Abstraktion 1. und höherer Stufe:

- Wiederverwendung

und dadurch kürzerer, verlässlicherer, wartungsfreundlicherer Code.

Zwingend erforderlich für erfolgreiches Gelingen:

- Funktionen höherer Ordnung (kurz: Funktionale).

Zum Abschluss nachgetragen:

- Allgemeinster Typ des Funktionals `rekSchema` (s.a. Kap. 11 und 14):

```
rekSchema :: (Num a, Ord a) =>
                        b -> (a -> b -> b) -> a -> b
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.2.1
10.2.2
10.2.3
10.3

Kapitel 10.3

Funktionen als Argument

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.3.1
10.3.2
10.4

Kapitel 10.3.1

Beispiele

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.3.1
10.3.2
10.4

Funktionen als Argument: 1-tes Beispiel

Betrachte die spezialisierten Vergleichsfunktionen `min`, `max`:

```
min :: Ord a => a -> a -> a
min x y
  | x < y     = x
  | otherwise = y

max :: Ord a => a -> a -> a
max x y
  | x > y     = x
  | otherwise = y
```

Abstraktion höherer Stufe mit Herausziehen der Vergleichsoperation erlaubt die Vergleichsfunktionen in einer Generalisierung aufgehen zu lassen...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.3.1
10.3.2
10.4

Funktionen als Argument: 1. Beispiel (fgs.)

...in einer mit einer Wahrheitswertfunktion parameterisierten Funktion höherer Ordnung `extreme`, die zu `min`, `max` spezialisiert werden kann:

```
extreme :: Ord a => (a -> a -> Bool) -> a -> a -> a
extreme wwf m n
  | wwf m n   = m
  | otherwise = n

min = extreme (<)                    -- argumentfrei
max = extreme (>)

min x y = extreme (<) x y      -- argumentbehaftet
max x y = extreme (>) x y
```

...oder `min`, `max` durch Aufrufe auch gänzlich ersetzen lässt:

```
max 17 4 ->> extreme (>) 17 4 ->> 17
min 17 4 ->> extreme (<) 17 4 ->> 4
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.3.1
10.3.2
10.4

Funktionen als Argument: 2. Beispiel

Betrachte die Funktion `zip`:

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
zip  _      _     = []
```

...und die Funktion höherer Ordnung `zipWith`:

```
zipWith :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
zipWith f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith f xs ys
zipWith f  _      _     = []
```

`zipWith` erlaubt `zip` zu implementieren (und zu ersetzen):

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip xs ys  = zipWith v xs ys
             where v :: a -> b -> (a,b)
                   v = (,)  -- (,) Paarbildungsop.

-- v x y = (x,y) gleichbedeutend zu: v x y = (,) x y
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.3.1
10.3.2
10.4

Funktionen als Argument: 2. Beispiel (fgs.)

...aufgrund der Parametrisierung leistet `zipWith` mehr als `zip` zu implementieren (und ist in diesem Sinn genereller).

Betrachte dazu etwa folgende Beispiele:

```
f :: a -> b -> (a,b)
f x y = (x,y)

g :: a -> a -> [a]
g x y = [x,y]

h :: Num a => a -> a -> a
h x y = x+y

k :: Ord a => a -> a -> Bool
k x y = x > y

zipWith f [‘a‘,‘b‘] [1,2,3] ->> [(‘a‘,1),(‘b‘,2)]
zipWith g [1,2,3] [5,6,7,8] ->> [[1,5],[2,6],[3,7]]
zipWith h [1,2,3] [10,20,30,40] ->> [11,22,33]
zipWith k [10,20,30] [5,15,35,85] ->> [True,True,False]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.3.1
10.3.2
10.4

Funktionen als Argument: 3. Beispiel

Transformation der Marken eines benannten Baums bzw. Heraus-filtern der Marken mit einer bestimmten Eigenschaft:

```
data Baum a = Leer | Wurzel a (Baum a) (Baum a)

map_Baum :: (a -> a) -> Baum a -> Baum a
map_Baum _ Leer = Leer
map_Baum tf (Wurzel marke ltb rtb) =
 Wurzel (tf marke) (map_Baum tf ltb) (map_Baum tf rtb)

filter_Baum :: (a -> Bool) -> Baum a -> [a]
filter_Baum _ Leer = []
filter_Baum wwf (Wurzel marke ltb rtb)
 | wwf marke = marke : ((filter_Baum wwf ltb)
                ++ (filter_Baum wwf rtb))
 | otherwise = (filter_Baum wwf ltb)
                ++ (filter_Baum wwf rtb)
```

...mithilfe zweier Funktionen höherer Ordnung, die parameterisiert sind in Transformationsfunktion bzw. Wahrheitswertfunktion.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.3.1
10.3.2
10.4

Kapitel 10.3.2

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.3.1
10.3.2
10.4

Zusammenfassung

Funktionen als Argument

- erhöhen die Ausdruckskraft.
- unterstützen Wiederverwendung.
- sind charakteristisch für funktionale Programmierung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.3.1
10.3.2
10.4

Kapitel 10.4

Funktionen als Resultat

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Kapitel 10.4.1

Beispiele

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat

...der Regelfall, nicht die Ausnahme in funktionalen Sprachen.

Betrachte zum Beispiel:

```
(+) :: Num a => a -> a -> a
binom :: Integer -> Integer -> Integer
rekSchema :: (Num a, Ord a) =>
                  b -> (a -> b -> b) -> a -> b
...
```

Klammerung hebt die funktionalen Resultate besonders hervor:

```
(+) :: Num a => a -> (a -> a)
binom :: Integer -> (Integer -> Integer)
rekSchema :: (Num a, Ord a) =>
                  b -> ((a -> b -> b) -> (a -> b))
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat (fgs.)

Wiederholtes Anwenden:

```
iterate :: Int -> (a -> a) -> (a -> a)
iterate n f
 | n > 0      = f . iterate (n-1) f  -- (.) Funktions-
                                     -- komposition
 | otherwise = id
 where
  id :: a -> a                 -- Typvariable und Parameter
  id a = a                     -- dürfen gleichbenannt sein.

(iterate 3 square) 2
  ->> (square . square . square . id) 2 ->> 256
```

Vertauschen von Argumenten:

```
flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
flip f x y = f y x

flip (-) 3 5  ->> (-) 5 3 ->> 2
(flip . flip) ->> id
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Kapitel 10.4.2

Methoden 1 bis 6

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat: Methode 1 (1)

...explizites Ausprogrammieren (in verschiedenen syntaktischen Varianten möglich):

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f = g where g x y = f (x,y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry f = g where g = \x y -> f x y

flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
flip f = \x y -> f y x

iterate :: Int -> (a -> a) -> (a -> a)
iterate n f = g where g x
                      | n > 0     = f . iterate (m-1) f
                      | otherwise = id

extreme :: Ord a => (a -> a -> Bool) -> (a -> a -> a)
extreme p = \x y -> if p x y then x else y
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat: Methode 1 (2)

...punktweises addieren von Funktionen, uncurryfizierte Lesart:

```
addFuns :: Num a => (a -> a) -> (a -> a) -> (a -> a)
addFuns f g = h where h x = f x + g x

addFuns2 :: Num a =>  (a -> a) -> (a -> a) -> (a -> a)
addFuns2 f g = h where h = \x -> f x + g x

addFuns3 :: Num a =>  (a -> a) -> (a -> a) -> (a -> a)
addFuns3 f g = \x -> f x + g x
```

...curryfizierte Lesart:

```
addFuns :: Num a => (a -> a) -> ((a -> a) -> (a -> a))
addFuns f = h where h g = k where k = \x -> f x + g x

addFuns2 :: Num a => (a -> a) -> ((a -> a) -> (a -> a))
addFuns2 f = h where h g = \x -> f x + g

addFuns3 :: Num a => (a -> a) -> ((a -> a) -> (a -> a))
addFuns3 f = \g x -> f x + g x
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat: Methode 1 (3)

...rechnen mit addFuns, die Funktion funny, uncurryfizierte Lesart:

```
funny :: (Ord a, Num a) => (a -> a) -> (a -> a) -> (a -> a)
funny f g = h where h = \x -> if x >= 0 then (g . f) x
                                        else addFuns f g (x+1)
```

...curryfizierte Lesart von funny:

```
funny :: (Ord a, Num a) => (a -> a) -> ((a -> a) -> (a -> a))
funny f = h where h g = k where k = \x -> if x >= 0
                                            then (g . f) x
                                            else addFuns f g (x+1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Übungsaufgabe 10.4.2.1

Geben Sie weitere syntaktische Varianten für die Definition von `funny` entsprechend der

1. curryfizierten
2. uncurryfizierten

Lesart der Signatur von `funny` an.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Übungsaufgabe 10.4.2.2

Vergleiche folgende unterschiedlich weit 'decurryfizierte' Varianten von addFuns miteinander:

```
addFuns :: Num a => (a -> a) -> ((a -> a) -> (a -> a))
addFuns f = h where h g = k where k = \x -> f x + g x

addFuns' :: Num a => (a -> a) -> (a -> a) -> (a -> a)
addFuns' f g = h where h x = f x + g x

addFuns'' :: Num a => (a -> a) -> (a -> a) -> a -> a
addFuns'' f g x = y where y = f x + g x
```

Ergänze Typinformationen in den definierenden Gleichungen der drei addFuns-Varianten und zeige so folgende Typbehauptungen:

```
addFuns f :: ((a -> a) -> (a -> a))        (fkt. v. höh. Ordn.)
addFuns' f g :: (a -> a)                          (funktional)
addFuns'' f g x :: a                  (nichtfkt., elementar)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat: Methode 2

...partielle Auswertung curryfizierter Funktionen:

```
((+) 1) :: Num a => a -> a
(binom 45) :: Integer -> Integer
(rekSchema 0) :: (Num a, Ord a, Num b) =>
                    (a -> b -> b) -> (a -> b)
(rekSchema 0 (+)) :: (Num a, Ord a) => a -> b
(extreme (<)) :: Ord a => a -> a -> a
(extreme (<) 5) :: (Num a, Ord a) => a -> a
(iterate 5) :: (a -> a) -> (a -> a)
(iterate 5 fac) :: Integer -> Integer
(flip (-)) :: Num a => a -> a -> a
addFuns fac fac :: Integer -> Integer
funny fac fac :: Integer -> Integer
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat: Methode 3

...Operatorabschnitte (als Spezialfall partieller Auswertung für binäre Operatoren und Funktionen):

```
(+1) :: Num a => a -> a                  -- Inkrementieren
(1-) :: Num a => a -> a                   -- Eins_minus
(+(-1)) :: Num a => a -> a               -- Dekrementieren
(2*) :: Num a => a -> a                   -- Verdoppeln
(<2) :: (Num a, Ord a) => a -> a         -- Kleiner 2?
(== True) :: Bool -> Bool                      -- Wahr?
(True &&) :: Bool -> Bool                      -- Wahr?
(42:) :: Num a => a -> [a] -> [a]
                              -- 42 als neuer Listenkopf
(45 `binom`) :: Integer -> Integer     -- 45 über k
(47 `(extreme (<))`) :: (Num a, Ord a) => a -> a
                                  -- Minimum aus 47 und x
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat: Methode 4

...Bildung konstanter Funktionen (engl. λ-Lifting) in 4 verschiedenen syntaktischen Varianten:

```
lifting :: a -> (b -> a)
lifting x = g where g y = x

lifting :: a -> (b -> a)
lifting x = g where g _ = x

lifting :: a -> (b -> a)
lifting x = \y -> x

lifting :: a -> (b -> a)
lifting x = \_ -> x
```

Anwendungsbeispiele:

```
lifting 42 "Aller Fragen Antwort"        ->> 42
lifting iterate flip                     ->> iterate
lifting (iterate (+) 3 (\x->x*x)) 42 2 ->> 256
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat: Methode 5

...als Abänderungen gegebener Funktionen:

```
fac :: Integer -> Integer          -- argumentbehaftet
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n-1)

fac' :: Integer -> Integer         -- argumentfrei
fac' =
 \n -> if n >= 0
          then fac n               -- Verhalten wie fac
          else (-1)          -- Abweich. Verh. zu fac

fac'' :: Integer -> Integer        -- argumentfrei
fac'' =
 \n -> if n >= 0
          then fac n               -- Verhalten wie fac
          else fac (abs n)   -- Abw. Verh. zu fac
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionen als Resultat: Methode 6

...Komposition von Funktionen:

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)
(f . g) x = f (g x)
```

Wichtige Eigenschaft von (.): Assoziativität

```
(f . (g . h)) = ((f . g) . h) = (f . g . h)
```

Beachte: Funktionskomposition und Funktionsapplikation sind grundverschieden und auseinanderzuhalten:

1. Komposition: `(f . g) x = f (g x) = f(g(x))`
2. Applikation: `(f g) x = (f g) x = (f(g))(x)`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Übungsaufgabe 10.4.2.3

Überprüfe und teste die unterschiedliche Wirkung von Komposition und Applikation:

1. Komposition: `(f . g) x = f (g x) = f(g(x))`
2. Applikation: `(f g) x = (f g) x = (f(g))(x)`

anhand geeigneter Beispiele für `f`, `g` und `x`.

Beachte, dass sich eine Funktion `f`, die sich mit einer Funktion `g` komponieren lässt, nicht notwendig auf `g` applizieren lässt und umgekehrt.

Gibt es Beispiele für `f`, `g` und `x`, so dass sowohl

```
(f . g) x
```

als auch

```
(f  g) x
```

gültige Ausdrücke sind?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionskomposition: Anwendungsbsp.

Das 4-te Element einer Liste:

```
gib_4tes_Element :: [a] -> a
gib_4tes_Element = head . dreimal_rest

dreimal_rest :: [a] -> [a]
dreimal_rest = tail . tail . tail
```

Das n-te Element einer Liste:

```
gib_ntes_Element :: Int -> [a] -> a
gib_ntes_Element n = (head . (iterate (n-1) tail))
```

...Funktionskomposition ermöglicht es, Funktionen auf dem (Abstraktions-) Niveau von Funktionen statt von (elementaren) Werten zu definieren.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Funktionskomposition: Anwendungsbsp. (fgs.)

...Definitionen auf Funktionsniveau sind kürzer und meist einfacher zu verstehen als ihre argumentbehafteten Gegenstücke.

Zum Vergleich einige argumentfreie und argumentbehaftete Implementierungen:

```
gib_4tes_Element :: [a] -> a
gib_4tes_Element = head . dreimal_rest

gib_4tes_Element ls = (head . dreimal_rest) ls
gib_4tes_Element ls = head (dreimal_rest ls)

gib_ntes_Element :: Int -> [a] -> a
gib_ntes_Element = head . (iterate tail)

gib_ntes_Element n = (head . (iterate tail)) n
gib_ntes_Element n lst
 = (head . (iterate tail) n) lst
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Kapitel 10.4.3

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2
10.4.3

Zusammenfassung

Funktionen als Resultat

- erhöhen die Ausdruckskraft.
- unterstützen Wiederverwendung.
- sind kennzeichnend für funktionale Programmierung.

Insgesamt: Funktionen gleichberechtigt zu elementaren Werten als Argument und Resultat von Funktionen zuzulassen

- ist maßgeblich für Ausdruckskraft, Eleganz und Prägnanz funktionaler Programmierung.
- zeichnet funktionale Programmierung signifikant vor anderen Programmierparadigmen/-stilen aus.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.4.1
10.4.2

Kapitel 10.5

Vordefinierte Funktionale auf Listen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Funktionale auf Listen

...ein wichtiger Spezialfall.

Vordefinierte Listenfunktionale für häufige Problemstellungen in Haskell (und anderen funktionalen Programmiersprachen):

- Transformieren aller Listenelemente mittels einer Abbildungsvorschrift:
  ```
  map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
  ```
- Herausfiltern aller Listenelemente mit einer bestimmten Eigenschaft:
  ```
  filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
  ```
- Aggregieren aller Listenelemente mittels einer Verknüpfungsoperation:
  ```
  foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
  foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
  ```
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Kapitel 10.5.1

Transformieren: Das Funktional `map`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Transformieren: Das Funktional map (1)

Signatur:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
```

Implementierung mittels (expliziter) Rekursion:

```
map f []     = []
map f (l:ls) = (f l) : map f ls
```

Implementierung mittels Listenkomprehension:

```
map f ls = [f l | l <- ls]
```

Anwendungsbeispiele:

```
map square [2,4..10] ->> [4,16,36,64,100]
map length ["abc","abcde","ab"] ->> [3,5,2]
map (>0) [4,(-3),2,(-1),0,2]
    ->> [True,False,True,False,False,True]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Transformieren: Das Funktional map (2)

Anwendungsbeispiele (fgs.):

```
map (*) [2,4..10]
 ->> [(2*),(4*),(6*),(8*),(10*)] :: [Int -> Int]
map (-) [2,4..10]
 ->> [(2-),(4-),(6-),(8-),(10-)] :: [Int -> Int]
map (>) [2,4..10]
 ->> [(2>),(4>),(6>),(8>),(10>)] :: [Int -> Bool]

[f 10 | f <- map (*) [2,4..10]]
   ->> [20,40,60,80,100]
[f 100 | f <- map (-) [2,4..10]]
   ->> [-98,-96,-94,-92,-90]
[f 5 | f <- map (>) [2,4..10]]
   ->> [False,False,True,True,True]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Transformieren: Das Funktional map (3)

Einige Eigenschaften von `map`:

- Für alle Abbildungsvorschriften `f`, `g` gilt:

```
map (\x -> x)      = \x -> x
map (f . g)        = map f . map g
map f . tail       = tail . map f
map f . reverse    = reverse . map f
map f . concat     = concat . map (map f)
map f (xs ++ ys) = map f xs ++ map f ys
```

- Für strikte (s. Def. 13.4.1) Abbildungsvorschriften `f` gilt:

```
f . head  =  head . (map f)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Kapitel 10.5.2

Filtern: Das Funktional `filter`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1
10.5.2

Filtern: Das Funktional `filter`

Signatur:

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
```

Implementierung mittels (expliziter) Rekursion:

```
filter p []       = []
filter p (l:ls)
  | p l           = l : filter p ls
  | otherwise     = filter p ls
```

Implementierung mittels Listenkomprehension:

```
filter p ls = [l | l <- ls, p l]
```

Anwendungsbeispiel:

```
filter istZweierPotenz [2,4..100] ->> [2,4,8,16,32,64]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Kapitel 10.5.3

Aggregieren: Die Funktionale `foldl`, `foldr`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Aggregieren, Falten von Listen: Motivation

Aufgabe: Berechne die Summe der Elemente einer Liste:

```
sum [1,2,3,4,5] ->> 15
```

Zwei Rechenweisen sind naheliegend zur Aufgabenlösung:

- Summieren (bzw. aggregieren, falten) von rechts:

```
(1+(2+(3+(4+5)))) ->> (1+(2+(3+9)))
                  ->> (1+(2+12))
                  ->> (1+14) ->> 15
```

- Summieren (bzw. aggregieren, falten) von links:

```
((((1+2)+3)+4)+5) ->> (((3+3)+4)+5)
                  ->> ((6+4)+5)
                  ->> (10+5) ->> 15
```

...die Funktionale `foldr` und `foldl` systematisieren diese Rechenweisen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

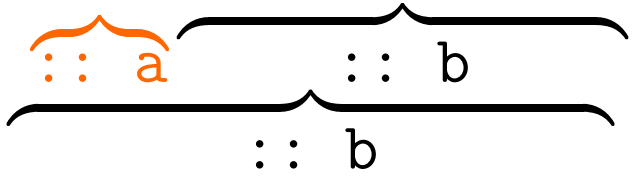
Aggregieren: Das Funktional `foldr` (1)

Signatur (`foldr`: falten, zusammenfassen von rechts):

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

Implementierung mittels (expliziter) Rekursion:

```
foldr f e []     = e
foldr f e (l:ls) = f l (foldr f e ls)
```



Es bedeuten:

- `f`: Faltungsvorschrift.
- `e`: Auffangwert, Vorgabewert für leere Argumentliste.
- `[]`, `(l:ls)`: Liste zu aggregierender Werte.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Aggregieren: Das Funktional `foldr` (2)

Anwendungsbeispiele:

```
foldr (+) 0 [] ->> 0
foldr (+) 0 [2,4..10]
 ->> ((+) 2 ((+) 4 ((+) 6 ((+) 8 ((+) 10 0)))))
 ->> (2 + (4 + (6 + (8 + (10 + 0))))) ->> 30

foldr (*) 1 [] ->> 1
foldr (*) 1 [2,4..10]
 ->> ((*) 2 ((*) 4 ((*) 6 ((*) 8 ((*) 10 1)))))
 ->> (2 * (4 * (6 * (8 * (10 * 1))))) ->> 3.840

foldr (||) False [] ->> False
foldr (||) False [True,False,False]
->> ((||) True ((||) False ((||) False False)))
->> (True || (False || (False || False))) ->> True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Aggregieren: Das Funktional `foldr` (3)

Anwendungsbeispiele (fgs.): Definition einiger Standardfunktionen in Haskell mittels `foldr`:

```
sum :: Num a => [a] -> a
sum ns = foldr (+) 0 ns

prod :: Num a => [a] -> a
prod ns = foldr (*) 1 ns

and :: [Bool] -> Bool
and bs = foldr (&&) True bs

or :: [Bool] -> Bool
or bs = foldr (||) False bs

concat :: [[a]] -> [a]
concat xss = foldr (++) [] xss
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

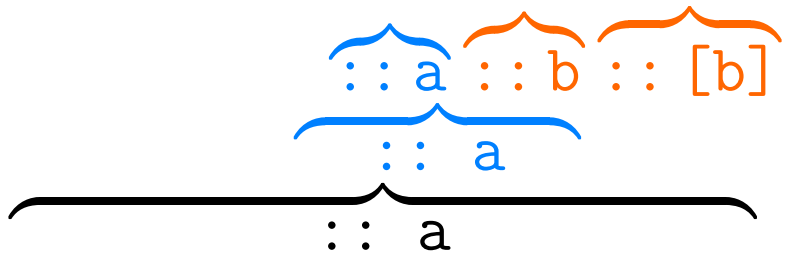
Aggregieren: Das Funktional `foldl` (1)

Signatur (`foldl`: falten, zusammenfassen von links):

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
```

Implementierung mittels (expliziter) Rekursion:

```
foldl f e []     = e
foldl f e (l:ls) = foldl f (f e   l)   ls
```



Es bedeuten:

- `f`: Faltungsvorschrift.
- `e`: Auffangwert, Vorgabewert für leere Argumentliste.
- `[]`, `(l:ls)`: Liste zu aggregierender Werte.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Aggregieren: Das Funktional `foldl` (2)

Anwendungsbeispiele:

```
foldl (+) 0 [] ->> 0
foldl (+) 0 [2,4..10]
 ->> ((+) ((+) ((+) ((+) ((+) 0 2) 4) 6) 8) 10)
 ->> (((((0 + 2) + 4) + 6) + 8) + 10) ->> 30

foldl (*) 1 [] ->> 1
foldl (*) 1 [2,4..10]
 ->> ((*) ((*) ((*) ((*) ((*) 1 2) 4) 6) 8) 10)
 ->> (((((1 * 2) * 4) * 6) * 8) * 10) ->> 3.840

foldl (||) False [] ->> False
foldl (||) False [True,False,False]
 ->> ((||) ((||) ((||) False True) False) False)
 ->> (((False || True) || False) || False) ->> True
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Aggregieren: Das Funktional `foldl` (3)

Anwendungsbeispiele (fgs.): Alternative Definitionen einiger Standardfunktionen in Haskell mittels `foldl`:

```
sum :: Num a => [a] -> a
sum ns = foldl (+) 0 ns

prod :: Num a => [a] -> a
prod ns = foldl (*) 1 ns

and :: [Bool] -> Bool
and bs = foldl (&&) True bs

or :: [Bool] -> Bool
or bs = foldl (||) False bs

concat :: [[a]] -> [a]
concat xss = foldl (++) [] xss
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

foldr, foldl im Vergleich

foldr: Falten, zusammenfassen von rechts:

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f e []     = e
foldr f e (l:ls) = f l (foldr f e ls)

foldr f e [a1,a2,...,an]
->> a1 `f` (a2 `f`...`f` (an-1 `f` (an `f` e))...)
```

foldl: Falten, zusammenfassen von links:

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl f e []     = e
foldl f e (l:ls) = foldl f (f e l) ls

foldl f e [b1,b2,...,bn]
->> (...((e `f` b1) `f` b2) `f`...`f` bn-1) `f` bn
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Warum zwei Faltungsfunktionale?

...die Funktionale `foldr` und `foldl` unterscheiden sich in

- Anwendbarkeit
- Effizienz

abhängig vom Anwendungskontext.

Zur Illustration betrachten wir die Implementierungen der Funktionen `reverse` und `concat` aus dem Präludium:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse = foldl (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x

concat :: [[a]] -> [a]
concat = foldr (++) []
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Zur Anwendbarkeit von `foldl`, `foldr`

Die Implementierung von `reverse` aus dem Präludium:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse = foldl (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x
```

...leistet die gewünschte Listenumkehrung; sie hat dieselbe Bedeutung wie folgende rekursive Implementierung:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse []     = []
reverse (l:ls) = (reverse ls) ++ [l]

reverse []      ->> []
reverse [1,2,3] ->> [3,2,1]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Zur Wirkung von `foldl`

...im Zusammenspiel mit der Funktion `reverse`:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse = foldl (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x
```

...für die Argumentlisten `[]` und `[1,2,3]`:

```
reverse [] ->> foldl (flip (:)) [] [] ->> []
```

```
reverse [1,2,3]
 ->> foldl (flip (:)) [] [1,2,3]
 ->> ((flip (:)) ((flip (:)) ((flip (:)) [] 1) 2) 3)
 ->> (((] `flip (:)` 1) `flip (:)` 2) `flip (:)` 3)
 ->> (((1 : []) `flip (:)` 2) `flip (:)` 3)
 ->> ((2 : (1 : [])) `flip (:)` 3)
 ->> (3 : (2 : (1 : [])))
 ->> [3,2,1]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Zur Wirkung von `foldr`

..im Zusammenspiel mit der Funktion `reverse`:

```
rev_untauglich :: [a] -> [a]
rev_untauglich = foldr (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x
```

...für die Argumentlisten `[]` und `[1,2,3]`:

```
rev_untauglich [] ->> foldr (flip (:)) [] [] ->> []
```

```
rev_untauglich [1,2,3]
 ->> foldr (flip (:)) [] [1,2,3]
 ->> ((flip (:)) 1 ((flip (:)) 2 ((flip (:)) 3 [])))
 ->> (1 `flip (:)` (2 `flip (:)` (3 `flip (:)` [])))
 ->> (1 `flip (:)` (2 `flip (:)` (3 `flip (:)` [])))
 ->> (1 `flip (:)` (2 `flip (:)` ([] : 3)))
 ->> Typunverträglichkeit d. Operanden im Term ([] : 3).
     Auswertungsversuch von rev_untauglich scheitert!
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Übungsaufgabe 10.5.3.1: `(:)` statt `(flip (:))`

Vollziehe ebenfalls mit Papier und Bleistift nach (z.B. für die Argumentliste `[1,2,3]`), dass sich die Faltungsfunktionale `foldl` und `foldr` auch bezüglich `(:)` als Faltungsoperation unterschiedlich verhalten. Zeige dazu, dass folgender Versuch

- untauglich ist: Auswertungsversuche für nichtleere Listen scheitern aufgrund von Operandenunverträglichkeiten:

```
rev_untauglich' :: [a] -> [a]
rev_untauglich' = foldl (:) []
```

- die Identität auf Listen liefert:

```
rev_id :: [a] -> [a]
rev_id = foldr (:) []
```

d.h. für alle Listen `xs` gilt: `rev_id xs ->> xs`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Zur Effizienz von `concat`, `slow_concat` (1)

Vergleiche die Effizienz, Performanz von:

- `concat` wie im Präludium mittels `foldr` definiert:

```
concat :: [[a]] -> [a]
concat = foldr (++) []
```

...mit derjenigen von:

- `slow_concat` mittels `foldl` definiert:

```
slow_concat :: [[a]] -> [a]
slow_concat = foldl (++) []
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Zur Effizienz von `concat`, `slow_concat` (2)

...seien (vereinfachend) alle Listen `xsi` v. gleicher Länge l.

Dann hängen die (Kopier-) Kosten der Berechnung von

- ```
  concat [xs1,xs2,...,xsn]
    ->> foldr (++) [] [xs1,xs2,...,xsn]
    ->> xs1 ++ (xs2 ++ (... (xsn ++ [])) ...)
  ```

linear von der Anzahl n der Listen `xsi` ab: $n * l$ (jedes Konkatenieren erfolgt an eine Präfixliste der Länge l); die von

- ```
  slow_concat [xs1,xs2,...,xsn]
    ->> foldl (++) [] [xs1,xs2,...,xsn]
    ->> (... (([] ++ xs1) ++ xs2) ...) ++ xsn
  ```

hingegen quadratisch: $n * (n-1) * l$ (das Konkatenieren erfolgt an sukzessive länger werdende Präfixlisten: $0, l, (l+l), (l+l+l), \ldots, (n-1) * l$.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Zur Effizienz von `concat`, `slow_concat` (3)

...wobei $n * (n-1) * l$ Abschätzung ist der Summe:

$$
\begin{aligned}
& 0 \\
& + \ l \\
& + \ (l + l) \\
& + \ (l + l +) \\
& \ldots \\
& + \underbrace{(l + l + \ldots + l)}_{(n-1)\text{-mal}} \\
& = \sum_{i=1}^{n-1} i * l \\
& = (\sum_{i=1}^{n-1} i) * l \\
& = \frac{n * (n-1)}{2} * l
\end{aligned}
$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Übungsaufgabe 10.5.3.2

Untersuche und vergleiche auch die Effizienz und Performanz der rekursiven Implementierung von `reverse`:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse []     = []
reverse (l:ls) = (reverse ls) ++ [l]
```

...mit der Effizienz und Performanz der Implementierung aus dem Präludium:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse = foldl (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Zusammenfassung

...die Beispiele zeigen, dass sich die Faltungsfunktionale `foldr` und `foldl` unterscheiden können hinsichtlich

- Anwendbarkeit (`foldr`, `foldl` mit Faltungsfunktionen `(flip (:))`, `(:)`)
- Effizienz (`foldr`, `foldl` mit Faltungsfunktion `(++)`)

...Eignung und Wahl von `foldr` und `foldl` sind deshalb problem- und kontextabhängig festzustellen und zu treffen!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.5.1

Kapitel 10.6

Applikative vs. funktionale Berechnungsweise: Ein Beispiel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Am Beispiel des Algorithmus von Euklid

...zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen veranschaulichen wir den Unterschied zwischen

- applikativer (d.h. Rechnen mit elementaren Werten)
- funktionaler (d.h. Rechnen mit Funktionen)

Berechnungsweise.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Der Algorithmus von Euklid

...zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_1$ ist wie folgt:

1. Wähle x gleich m und y gleich n.
2. Ziehe wiederholt den kleineren der Werte von x und y vom größeren ab.
3. Höre auf, wenn x und y denselben Wert haben. Dieser Wert ist der größte gemeinsame Teiler von m und n.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Applikativ: Rechnen mit elementaren Werten

```
type Nat1 = Integer

ggt_euklid_app :: Nat1 -> Nat1 -> Nat1
ggt_euklid_app x y
  | x > y  = ggt_euklid_app (x-y) y
  | x < y  = ggt_euklid_app x (y-x)
  | x == y = x
```

ggt_euklid_app: Rechnen mit elementaren Werten! Zwei Aufrufbeispiele zur Illustration:

```
m = 18; n = 12
ggt_euklid_app m n ->> ggt_euklid_app 18 12
                   ->> ggt_euklid_app 6 12 (≙ 18-12 12)
                   ->> ggt_euklid_app 6 6 (≙ 6 12-6) ->> 6

m′ = 20; n′ = 35
ggt_euklid_app m′ n′ ->> ggt_euklid_app 20 35
                     ->> ggt_euklid_app 20 15 (≙ 20 35-20)
                     ->> ggt_euklid_app 5 15 (≙ 20-15 15)
                     ->> ggt_euklid_app 5 10 (≙ 5 15-5)
                     ->> ggt_euklid_app 5 5 (≙ 5 10-5) ->> 5
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Funktional: Rechnen mit Funktionen (1)

```
type Nat1       = Integer
data Variable   = X | Y deriving (Eq,Show)
type Variablen = Variable
type Zustand    = (Variablen -> Nat1)
type Sigma      = Zustand

ggt_euklid_fkt ::        Sigma          ->        Sigma
               ≙ (Variablen -> Nat1) -> (Variablen -> Nat1)
ggt_euklid_fkt sigma
 | sigma X > sigma Y
    = ggt_euklid_fkt (\z -> if z==X then sigma X - sigma Y
                            else sigma Y)
 | sigma X < sigma Y
    = ggt_euklid_fkt (\z -> if z==X then sigma X
                            else sigma Y - sigma X)
 | sigma X == sigma Y = sigma

ggt :: Nat1 -> Nat1 -> Nat1
ggt m n = (ggt_euklid_fkt (\z -> if z==X then m else n)) X
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Funktional: Rechnen mit Funktionen (2)

ggt_euklid_fkt: Rechnen mit Funktionen! Zwei Aufrufbeispiele zur Illustation:

```
m = 18
n = 12
ggt m n
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma1) X
       where sigma1 X = 18
             sigma1 Y = 12
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma2) X
       where sigma2 X = 6  (≙ sigma1 X - sigma1 Y ->> 18-12 ->> 6)
             sigma2 Y = 12 (≙ sigma1 Y ->> 12)
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma3) X
      where sigma3 X = 6 (≙ sigma2 X ->> 6)
            sigma3 Y = 6 (≙ sigma2 Y - sigma2 X ->> 12-6 ->> 6)
 ->> sigma3 X
 ->> 6
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Funktional: Rechnen mit Funktionen (3)

```
m' = 20
n' = 35
ggt m' n'
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma1) X
       where sigma1 X = 20
             sigma1 Y = 35
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma2) X
       where sigma2 X = 20 (≙ sigma1 X ->> 20)
             sigma2 Y = 15 (≙ sigma1 Y - sigma1 X ->> 35-20 ->> 15)
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma3) X
       where sigma3 X = 5  (≙ sigma2 X - sigma2 Y ->> 20-15 ->> 5)
             sigma3 Y = 15 (≙ sigma2 Y ->> 15)
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma4) X
       where sigma4 X = 5  (≙ sigma3 X ->> 5)
             sigma4 Y = 10 (≙ sigma3 Y - sigma3 X ->> 15-5 ->> 10)
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma5) X
       where sigma5 X = 5  (≙ sigma4 X ->> 5)
             sigma5 Y = 5  (≙ sigma4 Y - sigma4 X ->> 10-5 ->> 5)
 ->> sigma5 X
 ->> 5
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Zur ‘Applikativität’ von ggt_euklid_app

...formal argumentiert ist auch die Funktion ggt_euklid_app eine Funktion, die eine Funktion als Ergebnis hat und insofern mit ‘Funktionen rechnet’ wie die explizite Klammerung der Typsignatur:

```
ggt_euklid_app :: Nat1 -> (Nat1 -> Nat1)
```

und ein Aufruf wie:

```
ggt_euklid_app 42 :: (Nat1 -> Nat1)
```

zeigen.

Die Einführung des uncurryfizierten applikativen Gegenstücks ggt_euklid_app′ zu ggt_euklid_app zeigt, dass das Argument auf der formalen Ebene bleibt und ggt_euklid_app im Kern ‘applikativ’, nicht ‘echt funktional’ ist:

```
ggt_euklid_app' :: (Nat1,Nat1) -> Nat1
ggt_euklid_app' (m,n) = ggt_euklid_app m n
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Zur ‘Funktionalität’ von ggt_euklid_fkt

...im Unterschied zu ggt_euklid_app ist ggt_euklid_fkt eine Funktion, die wahrhaft mit ‘Funktionen rechnet’, nämlich Funktionen auf Funktionen abbildet:

```
ggt_euklid_fkt :: (Variablen -> Nat1) -> (Variablen -> Nat1)
```

wie die expandierte Typsignatur von ggt_euklid_fkt deutlich macht.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Übungsaufgabe 10.6.1

Am Anfang von Teil III, unmittelbar vor Kapitel 7, ist eine Charakterisierung und Abgrenzung applikativer und funktionaler Programmierung gegeben.

Vollziehen Sie diese Charakterisierung und Abgrenzung am Beispiel der Funktionen

`ggt_euklid_app` und `ggt_euklid_fkt`

nach (so weit dies die Einfachheit des Euklidischen Beispiels erlaubt).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Kapitel 10.7

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Zusammenfassung

...Programmierung mit Funktionalen macht

- das Wesen funktionaler Programmierung aus.

...unterstützt insbesondere

- Wiederverwendung von Programmcode.
- Kürzere und meist einfacher zu verstehende Programme.
- Einfachere Herleitung, einfacherer Beweis von Programmeigenschaften (Stichwort: Programmverifikation).
- ...

...vordefinierte Funktionale auf Listen leisten einen wesentlichen Beitrag hierzu.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Kapitel 10.8

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 10 (1)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 6, Funktionen höherer Ordnung)

Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 5, Listen und Funktionen höherer Ordnung)

Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 5, Polymorphic and Higher-Order Functions; Kapitel 9, More about Higher-Order Functions)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 10 (2)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 7, Higher-order functions)

Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 5, Higher-order Functions)

Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 4, Functional Programming)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 8, Funktionen höherer Ordnung)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 10 (3)

Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 2.5, Higher-order functional programming techniques)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 9.2, Higher-order functions: functions as arguments; Kapitel 10, Functions as values; Kapitel 19.5, Folding revisited)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 11, Higher-order functions; Kapitel 12, Developing higher-order programs; Kapitel 20.5, Folding revisited)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
10.1
10.2
10.3
10.4
10.5
10.6

Kapitel 11

Polymorphie

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Polymorphie

Grundbedeutung lt. Duden:

- Vielgestaltigkeit, Verschiedengestaltigkeit

...mit verschiedenen fachspezifischen Bedeutungsausprägungen:

- Chemie: Vorkommen mancher Mineralien in unterschiedlicher Form, mit unterschiedlichen Eigenschaften, aber gleicher chemischer Zusammensetzung.
- Biologie: Vielgestaltigkeit der Blätter oder der Blüte einer Pflanze.
- Sprachwissenschaft: Vorhandensein mehrerer sprachlicher Formen für den gleichen Inhalt, die gleiche Funktion (z.B. verschiedenartige Pluralbildungen in: die Tiere, die Felder, die Wiesen, die Pontons).
- Informatik, speziell Theorie der Programmiersprachen: Vieltypigkeit.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Kapitel 11.1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Im programmiersprachlichen Kontext

...unterscheiden wir Polymorphie auf:

- Datentypen (Kap. 11.2)
  - Algebraische Datentypen, `data`
  - Neue Typen, `newtype`
  - Typsynonyme, `type`

  $\rightsquigarrow$ Sprachmittel: Typvariablen, Typklassen.
- Funktionen (Kap. 11.3, 11.4)
  - Parametrische Polymorphie (oder echte Polymorphie)

    $\rightsquigarrow$ Sprachmittel: Typvariablen.
  - *Ad hoc* Polymorphie (oder unechte Polymorphie, Überladung)

    $\rightsquigarrow$ Haskell-spezifisches Sprachmittel: Typklassen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Typvariablen, Typklassen in Haskell

Typvariablen: Freiwählbare Identifikatoren als Bezeichnungen

- beginnend mit einem Kleinbuchstaben, üblicherweise vom Anfang des Alphabets gewählt (z.B.: `a`, `b`, `fp185A03`,...)
- mit Typen als Wert.

Typklassen: Freiwählbare Identifikatoren als Bezeichnungen

- beginnend mit einem Großbuchstaben (z.B.: `Eq`, `Ord`, `Analysierbar`, `Warnung`,...)
- mit Typen als Instanzen.

Bem: Bezeichnungen für Typnamen, Typ- und Datenwertkonstruktoren sind in Haskell ebenfalls freiwählbare Identifikatoren, die wie die von Typklassen mit einem

- Großbuchstaben beginnen müssen (z.B.: `A`, `B`, `True`, `False`, `String`, `Blatt`, `Wurzel`, `FP185A03`,...).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Kapitel 11.2

Polymorphie auf Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Polymorphe Datentypen

Definition 11.2.1 (Polymorpher Datentyp)

Ein algebraischer (Daten-) Typ, neuer Typ oder Typsynonym `T` heißt polymorph, wenn einer oder mehrere Grundtypen der Werte von `T` in Form einer oder mehrerer Typvariablen als Typparameter angegeben werden.

Beispiele polymorpher Datentyp(deklaration)en:

```
data Baum a b c
 = Blatt a b
   | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

newtype Tripelpaar a b c d = Tp ((a,b,c),(b,c,d))

type Assoziationssequenz a b = [(a,b)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Kapitel 11.2.1

Polymorphe algebraische Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Bsp. polymorpher algebraischer Datentypen

...Listen, Bäume, Graphen, gewichtete Graphen:

```
type Gewicht = Int

-- Ohne Kontexteinschränkung:
data Liste a = Leer
             | Kopf a (Liste a)

data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

data Graph a = Gph (a -> [a])

data GewichteterGraph a = GGph (a -> [(a,Gewicht)])

-- Mit Kontexteinschränkung:
data Eq a => Liste' a = Leer'
                      | Kopf' a (Liste' a)

data (Eq a, Ord b, Ord c, Num c) => Baum' a b c
 = Blatt' a b
   | Wurzel' (Baum' a b c) c (Baum' a b c)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Beispiele gültiger Listen- und Baumwerte

```
-- Listenwerte:
Leer :: Liste a

Kopf 17 (Kopf 4 (Kopf (17+4) Leer)) :: Liste Int
Kopf 'a' (Kopf 'e' (Kopf 'i' (Kopf 'o' (Kopf 'u' Leer))))
                                              :: Liste Char
Kopf True (Kopf (True&&False) (Kopf ((odd . fib) 42) Leer))
                                              :: Liste Bool

-- Baumwerte:
Blatt "Fun Prog" 8 :: Baum [Char] Int c
Blatt True 3.14 :: Baum Bool Float c
Blatt 'a' 'z' :: Baum Char Char c

Wurzel (Blatt "Fun" 3) True (Blatt "Prog" 4)
                                    :: Baum [Char] Int Bool
Wurzel (Blatt "Fun" 3) (Kopf 42 Leer) (Blatt "Prog" 4)
                                 :: Baum [Char] Int (Liste Int)
Wurzel (Blatt "Fun" 3) Leer (Blatt "Prog" 4)
                                  :: Baum [Char] Int (Liste a)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Beispiele gültiger Graph- und gew. Graphwerte

```
-- Graphwerte:
data Knoten = K1 | K2 | K3 deriving (Eq,Show)

g :: Knoten -> [Knoten]
g K1 = [K1,K2,K3]
g K2 = [K2,K3]
g K3 = []

g' :: Int -> [Int]
g' = \n -> [n..2*n]          -- gleichbed.: g' n = [n..2*n]

Gph g  :: Graph Knoten
Gph g' :: Graph Int

-- Gewichtete Graphwerte:
gg :: Knoten -> [(Knoten,Gewicht)]
gg K1 = [(K1,0),(K2,17),(K3,4)]
gg K2 = [(K2,0),(K3,42)]
gg K3 = []

gg' :: Int -> [(Int,Gewicht)]
gg' = \n -> [(m,m+1) | m <- [n..2*n]]

GGph gg  :: GewichteterGraph Knoten
GGph gg' :: GewichteterGraph Int
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Kapitel 11.2.2

Polymorphe neue Typen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Beispiele polymorpher neuer Typen

...Paare, Tripel, Graphen, Relationen, Funktionen u.a.:

```
-- Ohne Kontexteinschränkung:
newtype Unverwechselbar_mit_Typ_a a = Uvb a
newtype Paar a = P (a,a)
newtype Tripelpaar a b c d = Tp ((a,b,c),(b,c,d))
newtype Graph' a = Gph' (a -> [a])
newtype Relation a b = R [(a,b)]
newtype Funktion a b = F (a->b)
-- Mit Kontexteinschränkung:
newtype Ord a => Paar' a = P' (a,a)
newtype (Ord a, Ord b) => Relation' a b = R' [(a,b)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Beispiele gültiger Paar- und Tripelpaarwerte

```
-- Unverwechselbare Werte:
Uvb 4711 :: Unverwechselbar_mit_Typ_a Int
Uvb Leer :: Unverwechselbar_mit_Typ_a (Liste a)
Uvb sqrt :: Unverwechselbar_mit_Typ_a (Float -> Float)

-- Paarwerte:
P (17,4)     :: Paar Int
P ([],[42]) :: Paar [Int]
P ([],[])    :: Paar [a]

-- Tripelpaarwerte:
Tp (("Fun",3,True),(length "Prog",odd 2,'T'))
                    :: Tripelpaar [Char] Int Bool Char
Tp ((fac,'a',"Hallo, Welt!"),('Z',"",id))
                    :: Tripelpaar (Integer -> Integer)
                                  Char [Char] (a -> a)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Beispiele gültiger Relations-, Funktionswerte

```
-- Graphwerte:
Gph' (\c -> ['a'..c]) :: Graph' Char
Gph' (\n -> [0..n])   :: Graph' Int
Gph' (\b -> [not b]) :: Graph' Bool

-- Relationswerte:
R [(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)] :: Relation Int Int
R [(Leer,42)] :: Relation (Liste a) Int
R [] :: Relation a b

-- Funktionswerte:
F fac :: Funktion Integer Integer
F id  :: Funktion a a
F (\x->(\y->(x > length y))) :: Funktion Int ([a] -> Bool)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Kapitel 11.2.3

Polymorphe Typsynonyme

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2
11.2.3

Beispiele polymorpher Typsynonyme

...Sequenzen, Assoziationssequenzen u.a.:

```
-- Ohne Kontexteinschränkung:
type Sequenz a = [a]
type AssSeq a b = [(a,b)]
type MeinTyp a = Unverwechselbar_mit_Typ_a a
type Suchbaum a b c = Baum a b c
type Fkt_Rel_Paar a b = (Funktion a b,Relation a b)
```

...Kontexteinschränkungen für Typsynonyme nicht erlaubt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2
11.2.3

Beispiele gültiger Sequenz-, Ass.Sequenzwerte

```
-- Sequenzwerte
leereSequenz = [] :: Sequenz a
intSequenz = [1,2,3,4,6,12] :: Sequenz Int
fktSequenz = [fac,fib,(+1)] :: Sequenz (Integer -> Integer)
Main>:t leereSequenz ->> [a]
Main>:t intSequenz  ->> [Int]
Main>:t fktSequenz  ->> [Integer -> Integer]
-- Assoziationssequenzenwerte
leereAssSeq = [] :: AssSeq a b
al = [("Hallo,",6),(" ",1),("Welt!",5)]
                                        :: AssSeq String Int
al' =[(fac,"fac"),(fib,"fib"),((+1),"inc")]
                        :: AssSeq (Integer -> Integer) String
Main>:t leereAssSeq ->> [(a,b)]
Main>:t al  ->> [([Char],Int)]
Main>:t al' ->> [(Integer -> Integer,[Char])]
```

Beachte: Die Typen werden zum Grund-, nicht zum Aliastyp aufgelöst (z.B. für `intSequenz` Typ `[Int]` statt Typ `Sequenz Int`).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2
11.2.3

Beispiele gültiger Werte weiterer Typen

```
-- MeinTyp-Werte
zahlwert = Uvbmta 4711 :: MeinTyp Int
lst_wert = Uvbmta Leer :: MeinTyp (Liste a)
fkt_wert = Uvbmta sqrt :: MeinTyp (Float -> Float)
Main>:t zahlwert ->> Unverwechselbar_mit_Typ_a Int
Main>:t lst_wert ->> Unverwechselbar_mit_Typ_a (Liste a)
Main>:t fkt_wert
       ->> Unverwechselbar_mit_Typ_a (Float -> Float)
-- Suchbaumwert
sb_wert = Blatt "Fun Prog" 8 :: Suchbaum [Char] Int Bool
Main>:t sb_wert ->> Baum [Char] Int c
-- Fkt_Rel_Paar-Wert
paarwert = (F (+1),R []) :: Fkt_Rel_Paar Int Int
Main>:t paarwert ->> (Funktion Int Int,Relation Int Int)
```

Beachte wieder die Auflösung zum Grund-, nicht zum Aliastyp.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2
11.2.3

Kapitel 11.2.4

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2
11.2.3

Polymorphie auf Datentypen

...erlaubt Wiederverwendung von:

1. Datenstrukturnamen (Typ- und Konstruktornamen)

   ...gute Namen sind knapp!

2. Konstruktionsweise und strukturellem Aufbau für Datenwerte

   ...ein&dieselbe Konstruktionsweise und Struktur für Werte aller Typen!

3. polymorphen Funktionen (Funktionsnamen und -implementierungen) auf diesen Datentypen.

von Typen, deren Werte sich nur die Typen ihrer Wertbenennungen unterscheiden. So sind: `Baum Int Int Int`, `Baum Int Char String`, `Baum (a->c) (b->c) (a->b)` alle Instanzen desselben polymorphen (Baum-) Typs:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Übungsaufgabe 11.2.4.1

Ergänze Beispiele gültiger Werte für folgende Typen:

1. Kapitel 11.2.1:

   ```
   Liste' a
   Baum' a b c
   ```

2. Kapitel 11.2.2:

   ```
   Paar' a
   Relation' a b
   ```

3. Kapitel 11.2.1, 11.2.2 und 11.2.3:

   ```
   MeinBaum' a b c
   MeinPaar' a b
   ```

   mit

   ```
   type MeinBaum' a b c = Baum' a b c
   type MeinPaar' a b = Paar' a b
   ```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.2.1
11.2.2

Kapitel 11.3

Parametrische Polymorphie auf Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Parametrisch polymorphe Funktionen

Definition 11.3.1 (Parametrisch polymorphe Fkt.)

Eine Funktion heißt parametrisch polymorph (oder echt polymorph), wenn die Typen eines oder mehrerer ihrer Parameter angegeben durch Typvariablen Werte beliebiger Typen als Argument zulassen.

Beispiele parametrisch polymorpher Funktionen:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)

fst :: (a,b) -> a)
fst (x,_) = x

length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (_:xs) = 1 + length xs

splitAt :: Int -> [a] -> ([a],[a])
splitAt n xs = (take n xs,drop n xs)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Parametrische Polymorphie auf Funktionen

...tritt in funktionalen Sprachen beiläufig und ubiquitär auf wie das Beispiel vieler vordefinierter Funktionen zeigt:

- Die Funktionale `curry`, `uncurry`, `flip` und `id`.
- Die Funktionale `map`, `filter`, `foldl` und `foldr`.
- Die Funktionen `fst` und `snd`.
- Die Funktionen `length`, `head` und `tail`.
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Kapitel 11.3.1

Vordefinierte parametrisch polymorphe Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Die parametrisch polymorphen Funktionale

...curry, uncurry, flip und id auf beliebigen Typen:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry g (x,y) = g x y

flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
flip f x y = f y x

id :: a -> a
id x = x
```

Anwendungsbeispiele:

```
id 3 ->> 3
id ["abc","def"] ->> ["abc","def"]
id fac 5 ->> (id fac) 5 ->> fac 5 ->> 120
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Die parametrisch polymorphen Funktionale

...`map`, `filter`, `foldl` und `foldr` auf beliebigen Listentypen:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f xs = [ f x | x <- xs ]

filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter p xs = [ x | x <- xs, p x ]

foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f e []     = e
foldr f e (x:xs) = f l (foldr f e xs)

foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl f e []     = e
foldl f e (x:xs) = foldl f (f e x) xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Die parametrisch polymorphen Funktionen

...`fst` und `snd` auf beliebigen Paartypen:

```
fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x

snd :: (a,b) -> b
snd(_,y) = y
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Die parametrisch polymorphen Funktionen

...`length`, `head` und `tail` auf beliebigen Listentypen:

```
length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (_:xs) = 1 + length xs

head :: [a] -> a
head (x:_) = x

tail :: [a] -> [a]
tail (_:xs) = xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Die parametrisch polymorphen Funktionale

...`zip` und `unzip` ('Reißverschlussfunktionen') auf beliebigen Listentypen:

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
zip _ _           = []
```

```
zip [3,4,5] ['a','b','c','d'] ->> [(3,'a'),(4,'b'),(5,'c')]
zip ["abc","def","geh"] [(3,4),(5,4)]
                          ->> [("abc",(3,4)),("def",(5,4))]
```

```
unzip :: [(a,b)] -> ([a],[b])
unzip []          = ([],[])
unzip ((x,y):ps) = (x:xs,y:ys)
                   where
                   (xs,ys) = unzip ps
```

```
unzip [(3,'a'),(4,'b'),(5,'c')] ->> ([3,4,5],['a','b','c'])
unzip [("abc",(3,4)),("def",(5,4))]
                          ->> (["abc","def"],[(3,4),(5,4)])
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Weitere vordefinierte parametrisch polymorphe

...Funktionale und Funktionen auf beliebigen Listentypen:

`(:)`	`::`	`a->[a]->[a]`	Listenkonstruktor (rechtsassoziativ)
`(!!)`	`::`	`[a]->Int->a`	Projektion auf i-te Komp., Infixop.
`length`	`::`	`[a]->Int`	Länge der Liste
`(++)`	`::`	`[a]->[a]->[a]`	Konkat. zweier Listen
`concat`	`::`	`[[a]]->[a]`	Konkat. mehrerer Listen
`head`	`::`	`[a]->a`	Listenkopf
`last`	`::`	`[a]->a`	Listenendelement
`tail`	`::`	`[a]->[a]`	Liste ohne Listenkopf
`init`	`::`	`[a]->[a]`	Liste ohne Endelement
`splitAt`	`::`	`Int->[a]->([a],[a])`	Aufspalten einer Liste an Position i
`reverse`	`::`	`[a]->[a]`	Umkehren einer Liste

...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Kapitel 11.3.2

Selbstdefinierte parametrisch polymorphe Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Parametrisch polymorphe Funktionen

...auf (selbstdefinierten) algebraischen Datentypen:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

tiefe :: (Baum a b c) -> Int
tiefe (Blatt _ _) = 0
tiefe (Wurzel ltb _ rtb) = 1 + max (tiefe ltb) (tiefe rtb)

gen_assliste :: (Baum a b c) -> Ass_Liste a b
gen_assliste (Blatt x y)         = [(x,y)]
gen_assliste (Wurzel ltb _ rtb) = (gen_assliste ltb)
                                  ++ (gen_assliste rtb)

plaetten :: (a -> b -> c) -> (Baum a b c) -> (Sequenz c)
plaetten f (Blatt x y)         = [f x y]
plaetten f (Wurzel ltb z rtb) = (plaetten f ltb)
                                ++ [z]
                                ++ (plaetten f rtb)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Einschränkung parametrischer Polymorphie

...durch Typkontexte bei der Funktionsdefinition:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

wurzelsumme :: Num c => (Baum a b c) -> c
wurzelsumme (Blatt _ _) = 0
wurzelsumme (Wurzel ltb z rtb)
 = z + wurzelsumme ltb + wurzelsumme rtb
```

...bereits bei der Datentypdeklaration:

```
data Num c => Baum' a b c = Blatt' a b
                | Wurzel' (Baum' a b c) c (Baum' a b c)

wurzelsumme' :: Num c => (Baum' a b c) -> c
wurzelsumme' (Blatt' _ _) = 0
wurzelsumme' (Wurzel' ltb z rtb)
 = z + wurzelsumme' ltb + wurzelsumme' rtb
```

wobei der Kontext (Num c) auch bei wurzelsumme' nötig ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Bemerkungen zur Typkontexteinschränkung

Die Einschränkung parametrischer Polymorphie auf numerische Typen als zulässige Instanzen der Typvariable `c` in der Signatur der Funktionen

- `wurzelsumme`, `wurzelsumme'`

ist nötig, weil sich

- beide Funktionen auf die (überladene) Funktion `(+)` abstützen, die ausschließlich für Werte numerischer Typen definiert ist, d.h. für Werte von Typen, die Element der Typklasse `Num` sind (siehe auch Kap. 11.4).

  (Bem.: Ohne Kontext wird in `wurzelsumme'` der Typ `Integer` als Typ für `c` inferiert, nicht dass `c` ein Typ in `Num` ist.)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Kapitel 11.3.3

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Zusammenfassung

Parametrische Polymorphie auf Funktionen

1. ermöglicht die Wiederverwendung von:
   1.1 Funktionsnamen (Gute Namen sind knapp!)
   1.2 Funktionsrümpfen (Implementierungen sind aufwändig!)
2. wird synonym bezeichnet als:
   - parametrische Polymorphie
3. ist erkennbar daran:
   - keine Typvariable der Funktionssignatur ist typkontext-eingeschränkt!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Veranschaulichung von Wiederverwendung (1)

...anhand der Funktion `length` auf beliebigen Listentypen:

```
length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (_:xs) = 1 + length xs
```

Dank parametrischer Polymorphie sind Aufrufe mit Listen über beliebigen Listenelementtypen unmittelbar möglich, z.B.:

```
length [2,4,23,2,53,4] ->> 6

length ["Enjoy","Functional","Programming"] ->> 3

length [(3.14,42.0),(56.1,51.3),(1.12,2.22)] ->> 3

length [[2,4,23,2,5],[3,4],[],[56,7,6,12]] ->> 4

length [(Blatt 17 4), (Blatt 21 21),
        (Wurzel (Blatt 47 11) fac (Blatt 42 0))] ->> 3

length [fac,fib,fun91,(binom 45),(+1),(*2)] ->> 6
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Veranschaulichung von Wiederverwendung (2)

Ohne parametrische Polymorphie wäre für jeden Listentyp eine eigene Implementierung unter eigenem Namen nötig, die sich einzig in Namen und Typsignatur unterschieden:

```
length_Ganzzahlliste :: [Int] -> Int
length_Ganzzahlliste []     = 0
length_Ganzzahlliste (_:xs) = 1 + length_Ganzzahlliste t xs

length_Zeichenreihenliste :: [String] -> Int
length_Zeichenreihenliste [] = 0
length_Zeichenreihenliste (_:xs)
 = 1 + length_Zeichenreihenliste xs

...

length_Baumliste :: [Baum] -> Int
length_Baumliste []     = 0
length_Baumliste (_:xs) = 1 + length_Baumliste xs

length_Funktionsliste :: [(Integer -> Integer)] -> Int
length_Funktionsliste []     = 0
length_Funktionsliste (_:xs) = 1 + length_Funktionsliste xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Veranschaulichung von Wiederverwendung (3)

...und argumenttypspezifische Funktionsaufrufe erforderten:

```
length_Ganzzahlliste [2,4,23,2,53,4] ->> 6

length_Zeichenreihenliste
 ["Enjoy","Functional","Programming"] ->> 3

length_Gleitkommazahlpaarliste
  [(3.14,42.0),(56.1,51.3),(1.12,2.22)] ->> 3

length_Ganzzahllistenliste
  [[2,4,23,2,5],[3,4],[],[56,7,6,12]] ->> 4

length_Baumliste
 [(Blatt 17 4), (Blatt 21 21),
  (Wurzel (Blatt 47 11) fac (Blatt 42 0))] ->> 3

length_Funktionsliste
 [fac,fib,fun91,(binom 45),(+1),(*2)] ->> 6
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Sprechweisen: Monomorphie vs. Polymorphie

Rechenvorschriften

- der Form:
  - `length_Ganzzahlliste :: [Int] -> Int`
  - `length_Zeichenreihenliste :: [String] -> Int`
  - `length_Gleitkommazahlpaarliste :: [(Float,Float)] -> Int`
  - `length_Ganzzahllistenliste :: [[Int]] -> Int`
  - `length_Baumliste :: [Baum] -> Int`
  - `length_Funktionsliste :: [(Integer -> Integer)] -> Int`

  heißen monomorph (definiert für genau einen Typ).
- der Form:
  - `length :: [a] -> Int`

  heißen parametisch polymorph (oder echt polymorph) (definiert für alle Typen).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1

Sprechweisen: Typinstanz, allgemeinster Typ

...illustriert anhand der Typsignatur der Funktion `length`:

```
length :: [a] -> Int
```

Sprechweisen:

- Typen wie

  ```
  [Int] -> Int
  [String] -> Int
  [(Float,Float)] -> Int
  [(Integer -> Integer)] -> Int
  ...
  ```

  heißen Instanzen des Typs `([a] -> Int)`
- Der Typ `([a] -> Int)` heißt allgemeinster Typ der Typen `[Int] -> Int`, `[String] -> Int`, `[(Float,Float)] -> Int`, etc. (s. Kap. 14).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Das Hugs-Kommando :t

...liefert stets den (eindeutig bestimmten) allgemeinsten Typ eines wohlgeformten Haskell-Ausdrucks, wobei Typsynonyme zum Grundtyp hin aufgelöst werden (z.B. `[(a,b)]` und `[c]` statt `(Ass_Liste a b)` und `(Sequenz c)`):

Beispiele:

```
Main>:t length
length :: [a] -> Int

Main>:t curry
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)

Main>:t flip
flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)

Main>:t gen_assliste
gen_assliste :: (Baum a b c) -> [(a,b)]

Main>:t plaetten
plaetten :: (a -> b -> c) -> (Baum a b c) -> [c]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.3.1
11.3.2

Kapitel 11.4

Ad hoc Polymorphie auf Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Ad hoc Polymorphie

...eine schwächere, weniger generelle Form von Polymorphie mit folgenden Synonymen:

- Unechte Polymorphie.
- Überladen, Überladung (engl. Overloading).

Definition 11.4.1 (*Ad hoc* polym. Fkt. in Haskell)

Eine Funktion in Haskell heißt *ad hoc* polymorph (oder unecht polymorph oder überladen), wenn die Typen eines oder mehrerer ihrer Parameter angegeben durch Typvariablen durch Typkontexte eingeschränkt Werte aller durch den Typkontext zugelassenen Typen als Argument zulassen.

Beispiele *ad hoc* polymorpher Funktionen:

```
(+)  :: Num a => a -> a -> a
(==) :: Eq a  => a -> a -> Bool
(>)  :: Ord a => a -> a -> Bool
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Ad hoc Polymorphie auf Funktionen

...tritt in funktionalen wie nichtfunktionalen Sprachen ebenso beiläufig und ubiquitär auf wie parametrische Polymorphie in funktionalen Sprachen wie das Beispiel vieler vordefinierter überladener Funktionen zeigt:

- Die arithmetischen Funktionale `(+)`, `(*)`, `(-)`, etc.
- Die Booleschen Relatoren `(==)`, `(/=)`, `(>)`, `(>=)`, etc.
- Die Zeige-Funktion `show` (Haskell-spezifisch)
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Wir unterscheiden genauer

...zwischen direkt und indirekt überladenen Funktionen:

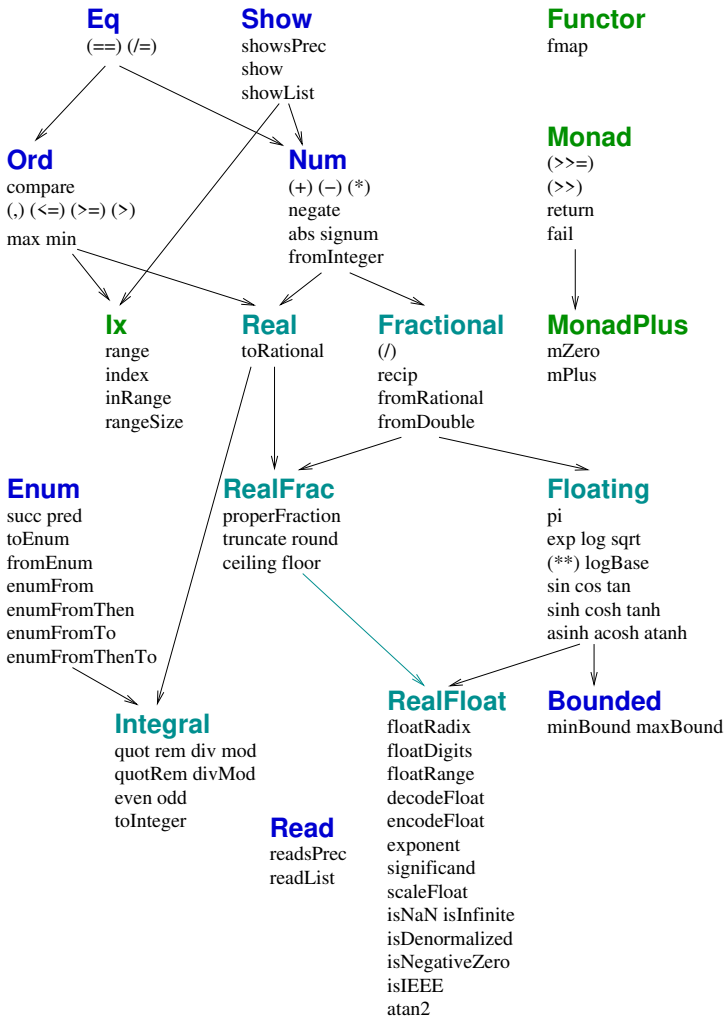
- (Direkt) überladene Funktionen
  - vordefinierter Typklassen: Alle in einer vordefinierten Typklasse angegebenen Funktionen (z.B. `(==)`, `(/=)` aus `Eq`, `(<)`, `(>)` aus `Ord`, `(+)`, `(*)` aus `Num`, etc.)
  - selbstdefinierter Typklassen: Alle in einer selbstdefinierten Typklasse angegebenen Funktionen (z.B. `auswertung`, `reihenausw`, `geglaettet` aus `Analysierbar`; `warnung`, `warnreihe` aus `Warnung` (vgl. Kap. 4.3.5))
- Indirekt überladene Funktionen: Alle Funktionen, die sich auf eine überladene Funktion abstützen, ohne selbst in einer Typklasse eingeführt zu sein, z.B.:

```
sum :: Num a => [a] -> a
sum []     = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Auswahl vor- und selbstdefinierter Typklassen

...zusammen mit den Namen der in ihnen eingeführten überladenen Funktionen:



Quelle: Fethi Rabhi, Guy Lapalme. Algorithms - A Functional Approach. Addison-Wesley, 1999, Abb. 2.4.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Kapitel 11.4.1

Überladene Funktionen vordefinierter Typklassen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Überladene Funktionen vordef. Typklassen

...am Beispiel der Typklassen `(Eq a)` und `(Num a)`:

```
class Eq a where
 (==), (/=) :: a -> a -> Bool     -- Signaturen über-
                                  -- ladener Funktionen
                                  -- in Typklasse Eq
 x /= y = not (x==y)               -- Protoimplemen-
 x == y = not (x/=y)               -- tierungen

class (Eq a,Show a) => Num a where
 (+), (-), (*) :: a -> a -> a     -- Signaturen über-
 negate :: a -> a                 -- ladener Funktionen
 abs, signum :: a -> a            -- in Typklasse Num
 fromInteger :: Integer -> a
 x - y     = x + negate y         -- Protoimplemen-
 negate x = 0 - x                 -- tierungen
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Weitere Bsp. überlad. Fkt. vordef. Typklassen

...die arithmetischen Funktionale und Funktionen:

```
(+) :: Num a          => a -> a -> a
(*) :: Num a          => a -> a -> a
(/) :: Fractional a => a -> a -> a
div :: Integral a    => a -> a
```

...die Booleschen Relatoren:

```
(==) :: Eq a  => a -> a -> Bool
(/=) :: Eq a  => a -> a -> Bool
(>)  :: Ord a => a -> a -> Bool
(>=) :: Ord a => a -> a -> Bool
(<)  :: Ord a => a -> a -> Bool
(<=) :: Ord a => a -> a -> Bool
```

...die Operatoren und Relatoren:

```
min     :: Ord a => a -> a -> a
max     :: Ord a => a -> a -> a
compare :: Ord a => a -> a -> Ordering
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Kapitel 11.4.2

Überladene Funktionen selbstdefinierter Typklassen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Allgemeines Muster

...einer Typklassendefinition (vereinfacht):

```
class Name' tv => Name tv where
 f_1 :: ...              -- Signaturen der Typklassen-
 f_2 :: ...              -- funktionen f_1,...,f_k
 ...                     -- über tv und anderen Typen.
 f_k :: ...

 f_i = ...                 -- Protoimplementierungen
 ...                       -- für null oder mehr der
 f_j = ...                 -- Funktionen f_1,...,f_k.
```

Dabei:

- `Name'`: Name einer existierenden Typklasse als Kontext.
- `Name`: Freigewählter Name als Identifikator der Klasse.
- `tv`: Typvariable.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Überladene Funktionen in selbstdef. Typklassen

...am Beispiel der Typklassen `Info` und `Groesse`:

```
class Info a where
 wert_beispiele  :: [a]          -- Signaturen überla-
 zu_zeichenreihe :: a -> String  -- dener Funktionen
                                 -- in Typklasse Info
 wert_beispiele    = []          -- Protoimplemen-
 zu_zeichenreihe _ = ""          -- tierungen
           -- entspricht: zu_zeichenreihe = \_ -> ""

class Info a => Groesse a where
 groesse :: a -> Int             -- Signatur über-
                                 -- ladener Funktion
                                 -- in Typklasse Groesse
 groesse = (length . zu_zeichenreihe)  -- Protoimple-
                                       -- mentierung
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Instanzbildungen für die Typen Char und Bool

...für die Typklassen Info und Groesse:

```
instance Info Char where
 wert_beispiele  = [‘a‘,‘A‘,‘z‘,‘Z‘,‘0‘,‘9‘]
 zu_zeichenreihe = \c -> [c] (entspr.: zu_z. c = [c])

instance Groesse Char where
-- Die Protoimplementierung passte; nichts wäre zu
-- tun Aus Effizienzgründen geben wir dennoch an:
groesse = \_ -> 1          (entspr.: groesse _ = 1)

instance Info Bool where
 wert_beispiele          = [True,False]
 zu_zeichenreihe True    = "Wahr"
 zu_zeichenreihe False = "Falsch"

instance Groesse Bool where
 groesse True  = 4    -- length (zu_zeichenreihe True)
 groesse False = 6    -- length (zu_zeichenreihe False)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Instanzbildung für Typ Int

...für die Typklassen Info und Groesse:

```
instance Info Int where
 wert_beispiele     = [-42..42]
 zu_zeichenreihe n = < Code, der einen Int-Wert
                       durch seine Ziffernfolge in
                       Binärdarstellung als Zei-
                       chenreihe darstellt, z.B.
                       123 ↦ "1111011" >

instance Groesse Int
-- Die Protoimplementierung passt; nichts zu tun.
-- (Das Schlüsselwort where kann hier entfallen.)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Instanzbildung für Typ [a]

...für die Typklassen Info und Groesse:

```
instance Info a => Info [a] where
 wert_beispiele
   = [ [] ]
     ++ [ [x] | x <- wert_beispiele ]
     ++ [ [x,y] | x <- wert_beispiele,
                  y <- wert_beispiele ]
 zu_zeichenreihe = concat . (map zu_zeichenreihe)

instance Groesse a => Groesse [a] where
 groesse = ((foldr (+) 1) . (map groesse))
```

Beachte die überladene Verwendung der Funktionen:

- wert_beispiele, zu_zeichenreihe, groesse operieren auf Instanzen vom Typ [a].
- wert_beispiele, zu_zeichenreihe, groesse operieren auf Instanzen vom Typ a.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Instanzbildung für Typ (Baum a b c) (1)

...für die Typklassen Info und Groesse:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

instance (Info a,Info b,Info c) =>
                                Info (Baum a b c) where
 wert_beispiele
  = [Blatt (head wert_beispiele) (last wert_beispiele),
     Wurzel
      (Blatt (wert_beispiele!!0) (wert_beispiele!!1))
      (wert_beispiele!!2)
      (Blatt (wert_beispiele!!1) (wert_beispiele!!0))]
 zu_zeichenreihe baum
  = < Code, der einen Baum-Wert als eine (i.a. mehrzei-
     lige) Zeichenreihe darstellt, die die Baumstruktur
     durch Einrückungen und Zeilenumbrüche deutlich
     macht. >
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Instanzbildung für Typ (Baum a b c) (2)

'Größe' kann vieles für einen Baum bedeuten, z.B.:

```
instance (Groesse a,Groesse b,Groesse c)
                              => Groesse (Baum a b c) where
 groesse = (length . zu_zeichenreihe)
 -- d.h. Übernahme der Protoimplementierung.
```

...oder zweitens Größe als Tiefe des Baums:

```
instance (Groesse a,Groesse b,Groesse c)
                              => Groesse (Baum a b c) where
 groesse = tiefe
```

...oder drittens Größe als Produkt bestimmter Baumparameter:

```
instance (Groesse a,Groesse b,Groesse c)
                              => Groesse (Baum a b c) where
 groesse = ((2*) . length . gen_assliste)
```

...oder viertens Größe als Summe von Blättern und Wurzeln, oder sechstens als Anzahl der {a,b,c}-Marken oder siebentes...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Das Hugs-Kommandos :t

...hilft, auf einfache Art den allgemeinsten Typ eines gültigen Haskell-Ausdrucks zu bestimmen, z.B.:

```
Main> :t wert_beispiele
wert_beispiele :: Info a => [a]
Main> :t zu_zeichenreihe
zu_zeichenreihe :: Info a => a -> [Char]
Main> :t groesse
groesse :: Groesse a => a -> Int
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Anwendungsbeispiele (1)

...der überladenen Funktionen der Typklassen `Info` und `Groesse`:

```
wert_beispiele :: Bool ->> [True,False]
wert_beispiele :: Char ->> [‘a‘,‘A‘,‘z‘,‘Z‘,‘0‘,‘9‘]
[first (wert_beispiele :: Int)]
 ++ [last (wert_beispiele :: Int)]   ->> [-42,42]
([first wert_beispiele] :: [Int])
 ++ ([last wert_beispiele] :: [Int]) ->> [-42,42]
zu_zeichenreihe True ->> "Wahr"
zu_zeichenreihe ‘5‘   ->> "5"
zu_zeichenreihe 123  ->> "1111011"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Anwendungsbeispiele (2)

Abkürzungen: cc für concat, zz für zu_zeichenreihe.

```
zu_zeichenreihe [1,2,3]
 ->> zz [1,2,3]
 ->> (cc . (map zz)) [1,2,3]
 ->> cc (map zz [1,2,3])
 ->> cc [zz 1,zz 2,zz 3]
 ->> cc ["1","10","11"]
 ->> cc [['1'],['1','0'],['1','1']]
 ->> ['1','1','0','1','1']
 ->> "11011"
zu_zeichenreihe [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> zz [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> (cc . (map zz)) [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> cc (map zz [[1,2,3],[4,5],[6]])
 ->> cc [zz [1,2,3],zz [4,5],zz [6]]
 ->> ...
 ->> cc ["11011","100101","110"]
 ->> ...
 ->> "110111001011110"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Anwendungsbeispiele (3)

...mit ergänzten Zwischenschritten.

```
zu_zeichenreihe [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> zz [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> (cc . (map zz)) [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> cc (map zz [[1,2,3],[4,5],[6]])
 ->> cc [zz [1,2,3],zz [4,5],zz [6]]
 ->> cc [(cc . (map zz)) [1,2,3],(cc . (map zz)) [4,5],
         (cc . (map zz)) [6]]
 ->> cc [cc (map zz [1,2,3]),cc (map zz [4,5]),
         cc (map zz [6])]
 ->> cc [cc [zz 1,zz 2,zz 3],cc [zz 4,zz 5],cc [zz 6]]
 ->> cc [cc ["1","10","11"],cc ["100","101"],cc ["110"]]
 ->> cc [cc [[‘1‘],[‘1‘,‘0‘],[‘1‘,‘1‘]],cc [[‘1‘,‘0‘,‘0‘],[‘1‘,‘0‘,‘1‘]],
         cc [[‘1,‘1‘,‘0‘]]]
 ->> cc [[‘1‘,‘1‘,‘0‘,‘1‘,‘1‘],[‘1‘,‘0‘,‘0‘,‘1‘,‘0‘,‘1‘],[‘1‘,‘1‘,‘0‘]]
 ->> [‘1‘,‘1‘,‘0‘,‘1‘,‘1‘,‘1‘,‘0‘,‘0‘,‘1‘,‘0‘,‘1‘,‘1‘,‘1‘,‘0‘]
 ->> "110111001011110"
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Anwendungsbeispiele (4)

```
groesse False ->> 6
groesse 'z'   ->> 1
groesse 123
 ->> (length . zz) 123
 ->> length (zz 123)
 ->> length "1111011"
 ->> 7
groesse [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> foldr (+) 1 (map (length . zz)) [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> foldr (+) 1 [(length . zz) [1,2,3],(length . zz) [4,5],
                  (length . zz) [6]]
 ->> foldr (+) 1 [length (zz [1,2,3]),length (zz [4,5]),
                  length (zz [6])]
 ->> foldr (+) 1 [length "11011",length "100101",length "110"]
 ->> foldr (+) 1 [5,6,3]
 ->>             1 + foldr (+) 0 [5,6,3]
 ->>             1 + 14
 ->>             15
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Übungsaufgabe 11.4.2.1

Ergänze fehlende Codestücke in den Beispielen:

1. Instanzbildung (`Info Int`): Vervollständige die Implementierung der Funktion `zu_zeichenreihe`.
2. Instanzbildung (`Info (Baum a b c)`): Vervollständige die Implementierung der Funktion `zu_zeichenreihe`.
3. Instanzbildung (`Groesse (Baum a b c)`): Vervollständige die Implementierung d. Funktion `groesse` mit 'Größe' als
   3.1 Summe von Blättern und Wurzeln,
   3.2 Anzahl der {a,b,c}-Marken.

   Überlege mindestens eine weitere Variante, die als 'Größe' von Bäumen verstanden werden kann und nimm die zugehörige(n) Instanzbildung(en) für diese Variante(n) vor.

Teste die Implementierungen anhand geeigneter Beispiele, ob sie das gewünschte Verhalten zeigen; ebenso die in diesem Kapitel angegebenen Instanzbildungsimplementierungen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Übungsaufgabe 11.4.2.2

Führe die Schritt- für Schrittauswertung der überladenen Funktionen `wert_beispiele`, `zu_zeichenreihe` und `groesse` der Typklassen `Info` und `Groesse` für weitere Werte aus, z.B. für Werte der Typen:

- `String`, z.B. für die Werte `""` und `"abcd"`.
- `[Bool]`, z.B. für die Werte `[]` und `[True,False,True]`.
- `[[[Int]]]`, z.B. für die Werte `[]`, `[[]]`, `[[[]]]` und `[[[1,2,3],[4,5]],[[6],[7,8]]]`.
- `(Baum Int Int Int)`, z.B. für die Werte `(Blatt 17 4)` und `(Wurzel (Blatt 1 2) 3 (Blatt 4 5))`.
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Übungsaufgabe 11.4.2.3

Mache weitere Typen zu Instanzen der Typklassen `Info` und `Groesse`, z.B. die Typen:

- `Float` (s. Kap. 2.1.3)
- `Pegelstand` (s. Kap. 4.2.2)
- `Mensch` (s. Kap. 5.1)
- ...

Teste die Implementierungen auf gewünschtes Verhalten und führe auch hier für jeweils einige Datenbeispiele Schritt-für-Schritt-Auswertungen der überladenen Funktionen `wert_beispiele`, `zu_zeichenreihe` und `groesse` durch.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Kapitel 11.4.3

Vererben, erben, überschreiben

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Vererben, erben, überschreiben

Typklassen können

- Spezifikationen mehr als einer Funktion bereitstellen.
- Protoimplementierungen (engl. default implementations) für (alle oder einige) dieser Funktionen bereitstellen.
- von anderen Typklassen erben.
- geerbte Implementierungen überschreiben.

In der Folge betrachten wir dies anhand einiger Beispiele in Haskell vordefinierter Typklassen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Vererben, erben und überschreiben

...auf Typklassenebene:

```
class Eq a where
 (==), (/=) :: a -> a -> Bool
 x /= y = not (x==y)  -- Protoimplementierung f. (/=)
 x == y = not (x/=y)  -- Protoimplementierung f. (==)

class Eq a => Ord a where
 (<), (<=), (>), (>=) :: a -> a -> Bool
 max, min             :: a -> a -> a
 compare              :: a -> a -> Ordering
 x <= y = (x < y) || (x == y)    -- Protoimpl. f. (<=)
 x > y  = y < x                  -- Protoimpl. f. (<)
 ...
 compare x y       -- Protoimplementierung f. compare
   | x == y    = EQ
   | x <= y    = LT
   | otherwise = GT
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Anmerkungen

- Die Typklasse `Ord` erweitert die Klasse `Eq`; jeder Typ, der zu einer Instanz der Typklasse `Ord` gemacht werden soll, muss bereits Instanz der Typklasse `Eq` sein.
- Jede Typinstanz von `Ord` erbt die Implementierungen ihrer Instanz aus `Eq`; umgekehrt vererbt jede Typinstanz aus `Eq` ihre Implementierungen an ihre Instanzen aus `Ord`.
- Für jede Typinstanz `T` der Typklasse `Ord` darf man sich darauf verlassen, dass es für `T`-Werte Implementierungen für alle Funktionen der Typklassen `Eq` und `Ord` gibt.
- Die Typklassen `Eq` und `Ord` stellen für einige Funktionen bereits Protoimplementierungen bereit.
- Für eine vollständige Instanzbildung reicht es deshalb, Implementierungen der Relatoren `(==)` und `(<)` anzugeben.
- Leisten die Protoimplementierungen nicht das Gewünschte, können sie durch instanzspezifische Implementierungen überschrieben werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Überschreiben automatisch generierter Impl.

...am Beispiel der Eq-Instanzbildung für den Typ (Paar a):

```
newtype Paar a = P (a,a)
instance (Eq a) => Eq (Paar a) where
 P (u,v) == P (x,y) = (u == x) && (v == y)
```

- Automatisch generiert: Die Eq-Instanz (Paar a) erhält für (/=) folgende sich aus den Protoimplementierungen der Klasse automatisch ergebende Implementierung:
  `P x /= P y = not (P x == P y)`
- Überschreiben: Die sich automatisch ergebende Implementierung von (/=) kann bei der Instanzbildung für (Paar a) überschrieben werden, z.B. durch folgende (geringfügig) effizientere Fassung:

```
instance (Eq a) => Eq (Paar a) where
 P (u,v) == P (x,y) = (u == x) && (v == y)
 P (u,v) /= P (x,y) = if u /= x then True else v /= y
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Mehrfachvererben, -erben und -überschreiben

...auf Typklassenebene ist ebenfalls möglich; Haskells vordefinierte Typklasse `Num` ist ein Beispiel dafür:

```
class (Eq a, Show a) => Num a where
 (+), (-), (*) :: a -> a -> a
 negate        :: a -> a
 abs, signum   :: a -> a
 fromInteger   :: Integer -> a  -- Zwei Typkonver-
 fromInt       :: Int -> a      -- sionsfunktionen!

 x - y         = x + negate y      -- Protoimpl.
 fromInt       = ...
```

...jede Instanz der Typklasse `Num` muss bereits zum Zeitpunkt der Instanzbildung Instanz der Typklassen `Eq` und `Show` sein.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Übungsaufgabe 11.4.3.1

Vergleiche das Vererbungskonzept von Haskell mit dem Vererbungskonzept objektorientierter Sprachen, z.B. von Java.

Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede gibt es?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Kapitel 11.4.4

Automatische Typklasseninstanzbildung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Automatische Typklasseninstanzbildung

...möglich für bestimmte vordefinierte Typklassen mithilfe der deriving-Klausel:

```
data Spielfarbe = Kreuz | Pik | Herz | Karo
                  deriving (Eq,Ord,Enum,Bounded,
                            Show,Read)

data Suchbaum = Leer | Knoten Suchbaum Integer Suchbaum
                deriving (Eq,Ord,Show,Read)

newtype GanzeZahlen = GZ Int deriving (Eq,Ord,Bounded,
                                       Show,Read)

data (Ord a, Ord b, Ord c) => Baum a b c
 = Blatt a b
   | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)
                                  deriving (Eq,Ord,Show)

newtype (Ord a, Ord b, Show a, Show b) =>
 Relation a b = R [(a,b)] deriving (Eq,Ord,Show)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Algebraische und neue Typen

...können mithilfe einer

- `deriving`-Klausel automatisch als Instanzen (einer festen Auswahl) vordefinierter Typklassen angelegt werden (keine Typsynonyme!).

Für die Funktionen der in der `deriving`-Klausel angeführten Typklassen wird dabei das

- 'Offensichtliche' als Standardimplementierung generiert.

Intuitiv ersetzt die Angabe einer `deriving`-Klausel mit einer oder mehreren Typklassen

- die Angabe der entsprechenden `instance`-Deklaration.
- Elementare Typen (`Int`, `Float`, `Bool`, `Char`, etc.), Zeichenreihen (`String`) und Tupel und Listen solcher Typen sind vordefinierte Instanzen der infrage kommenden Typklassen (`Integer` z.B. nicht für die Typklasse `Bounded`).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Autom. vs. manuelle Typklasseninstanzbildung

Beispiel: Die Deklaration mit `deriving`-Klausel:

```
data (Eq a, Eq b, Eq c) => Baum a b c
 = Blatt a b
   | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c) deriving Eq
```

ist gleichbedeutend zum Deklarationspaar:

```
data (Eq a, Eq b, Eq c) => Baum a b c
 = Blatt a b
   | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

instance (Eq a, Eq b, Eq c) => Eq (Baum a b c) where
 (Blatt u v) == (Blatt x y) = (u == x) && (v == y)
 (Wurzel ltb z rtb) == (Wurzel ltb' z' rtb')
   = (ltb == ltb') && (z == z') && (rtb == rtb')
 _ == _ = False
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Autom. vs. manuelle Typklasseninstanzbildung

...bzw. zum Deklarationspaar:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

instance (Eq a, Eq b, Eq c) => Eq (Baum a b c) where
 (Blatt u v) == (Blatt x y) = (u == x) && (v == y)
 (Wurzel ltb z rtb) == (Wurzel ltb' z' rtb')
   = (ltb == ltb') && (z == z') && (rtb == rtb')
 _ == _ = False
```

...mit 'offensichtlicher' Gleichheit interpretiert als Gleichheit in Struktur und Benennung.

Beachte: Der Kontext '`(Eq a, Eq b, Eq c) =>`' in den Instanzdeklarationen ist nötig für die Instanzbildungen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Flexibilität durch manuelle Instanzbildung (1)

Manuelle Typklasseninstanzbildung erlaubt Gleichheit abweichend von 'offensichtlicher' Gleichheit in (nahezu) jeder gewünschten Weise aufzufassen und entsprechend zu implementieren:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)
```

Z.B. als Gleichheit in Struktur und {a,c}-Benennungen, mit unbeachtet bleibenden (und möglicherweise unterschiedlichen) b-Benennungen:

```
instance (Eq a, Eq c) => Eq (Baum a b c) where
 (Blatt u _) == (Blatt x _) = (u == x)
 (Wurzel ltb z rtb) == (Wurzel ltb' z' rtb')
   = (ltb == ltb') && (z == z') && (rtb == rtb')
 _ == _ = False
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Flexibilität durch manuelle Instanzbildung (2)

...oder als Gleichheit der Benennungen in mengenartigem Sinn:

```
instance (Ord a, Ord b, Ord c) => Eq (Baum a b c) where
 b == b' = (kollabiere b) == (kollabiere b')
```

wobei

```
kollabiere :: (Ord a, Ord b, Ord c) =>
                              (Baum a b c) -> ([a],[b],[c])
kollabiere = (entferne_duplikate . sortiere . aufsammeln)

aufsammeln :: (Baum a b c) -> ([a],[b],[c])
aufsammeln (Blatt x y) = ([x],[y],[])
aufsammeln (Wurzel ltb z rtb)
 = (aufsammeln ltb) +++ ([],[],[z]) +++ (aufsammeln rtb)

(+++) :: ([a],[b],[c]) -> ([a],[b],[c]) -> ([a],[b],[c])
(xs,ys,zs) +++ (xs',ys',zs') = (xs++xs',ys++ys',zs++zs')
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Flexibilität durch manuelle Instanzbildung (3)

...und:

```
sortiere :: (Ord a,Ord b,Ord c)
                    => ([a],[b],[c]) -> ([a],[b],[c])
sortiere (xs,ys,zs)
 = (quickSort xs,quickSort ys,quickSort zs)

entferne_duplikate :: (Eq a,Eq b,Eq c)
                    => ([a],[b],[c]) -> ([a],[b],[c])
entferne_duplikate (xs,ys,zs)
 = < Code zum Entfernen von Duplikaten von Elementen >
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Automatische Typklasseninstanzbildung

...ist möglich (ausschließlich!) für folgende 6 vordefinierte Typklassen in Haskell:

1. `Eq`
2. `Ord`
3. `Enum`
4. `Bounded`
5. `Show`
6. `Read`

Für andere Typklassen, gleich ob vor- oder selbstdefiniert, sind zur Instanzbildung stets `instance`-Deklarationen erforderlich; das gilt ebenso, falls von 'offensichtlicher' abweichende Bedeutungen einer oder mehrerer Typklassenfunktionen gewünscht sind.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Übungsaufgabe 11.4.4.1

Ergänze den Code für die Funktion `entferne_duplikate` und teste die verschiedenen `Eq`-Instantiierungsvarianten für den Datentyp (`Baum a b c`).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Kapitel 11.4.5

Grenzen des Überladens

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Ist es möglich

...jeden Typ zu einer Instanz der Typklasse `Eq` zu machen?

De facto hieße das, den Typ des Gleichheitsrelators `(==)` von

```
(==) :: Eq a => a -> a -> Bool
```

über das Mittel des Überladens auf

```
(==) :: a -> a -> Bool
```

zu verallgemeinern; genauer, so nahe wie immer gewünscht daran anzunähern?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Im Sinne von

...Funktionen als erstrangigen Sprachelementen (engl. first class citizens) wäre ein Gleichheitstest auf Funktionen höchst wünschenswert, z.B.

```
(==) fac fib                          ->> False
(==) (\x -> x+x) (\x -> 2*x)          ->> True
(==) (+2) (2+)                        ->> True
```

Anders als z.B. für die Parametervertauschung durch das Funktional

```
flip :: (a -> b -> c) -> b -> a -> c
flip f x y = f y x
```

...ist Gleichheit eine typabhängige Eigenschaft, die eine typspezifische Implementierung erfordert.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

In Haskell

...erforderte dies Eq-Instanzbildungen auch für funktionale Typen vorzunehmen, etwa für die Typen `(Int -> Int)` und `(Int -> Int -> Int)` für die Abdeckung der Beispiele:

```
instance Eq (Int -> Int) where
(==) f g = ...

instance Eq (Int -> Int -> Int) where
(==) f g = ...
```

Preisfrage: Können wir die 'Punkte' so ersetzen, dass wir eine valide Gleichheitsprüfung für alle Paare von Funktionen der Typen `(Int -> Int)` und `(Int -> Int -> Int)` erhalten?

Antwort: **Nein!**

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Gleichheit von Funktionen: Unentscheidbar

Theorem 11.4.5.1 (Theoretische Informatik)

Gleichheit von Funktionen ist nicht entscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der für zwei beliebig vorgelegte Funktionen stets nach endlich vielen Schritten entscheidet, ob diese Funktionen gleich sind oder nicht.

Wichtig: Theorem 11.4.5.1 schließt nicht aus, dass für konkret vorgelegte Funktionen oder bestimmte Klassen von Funktionen deren Gleichheit (algorithmisch) entschieden werden kann.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Abwesenheit universeller, allumfassender Lsg.

...ein typisches Problem.

Siehe Moshe Vardis Kolumne

- Moshe Vardi. Self-Reference and Section 230. Communications of the ACM 61(11):7, 2018.

zu

- Konsistenz (Widerspruchsfreiheit, Freiheit von Paradoxien)
- Vollständigkeit (Alles ist beantwortbar)
- Entscheidbarkeit (Berechenbarkeit, Automatisierbarkeit)

formaler und nichtformaler Systeme von Mathematik und Logik über Informatik zu Gesellschaftstheorie, von Eubulides (Paradoxon des Lügners) über Frege (Axiomatisierung der Mengentheorie) und Hilbert (Hilberts Programm) zu Russel (Mengenparadoxon), Gödel (Unvollständigkeit der Arithmetik, Konsistenz der Arithmetik nicht innerhalb der Arithmetik beweisbar), Church und Turing (Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik) zu Popper (Freiheits- und Toleranzparadoxon).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Zusammenfassend

...anhand der Beobachtungen am Gleichheitsrelator:

- Funktionen bestimmter (auch scheinbar universeller Natur) Funktionalität lassen sich i.a. nicht für jeden Typ angeben, sondern nur für eine Teilmenge aller Typen.
- Die Funktionalität des Gleichheitsrelators ist ein konkretes Beispiel einer solchen Funktion.
- Auch wenn es verlockend wäre, für alle Typen den
  - Gleichheitsrelator echt oder zumindest parametrisch polymorph implementieren zu können, in Haskell mit der Signatur: `(==) :: Eq a => a -> a -> Bool`

  ist dies in dieser Form und Allgemeinheit in keiner (!) Sprache möglich!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

In Haskell

...sind die Typen, auf deren Werten der

- Gleichheitsrelator `(==)` definiert ist

genau die Elemente (oder Instanzen) der Typklasse `Eq`.

Bei der `Eq`-Instanzbildung für einen Typ `T` (gleich ob manuell oder automatisch) wird die

- typspezifische Bedeutung des Gleichheitsrelators für `T`-Werte

durch explizite Ausprogrammierung von Gleichheits- und Ungleichheitsrelator `(==)` und `(/=)` definiert und exakt festgelegt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Kapitel 11.4.6

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.4.1

Zusammenfassung

Ad hoc Polymorphie auf Funktionen

1. ermöglicht die Wiederverwendung von:
   - Funktionsnamen (Gute Namen sind knapp!)
2. nicht aber von Funktionsimplementierungen!

   ...für jeden Typ ist eine eigene typspezifische Implementierung erforderlich!
3. wird synonym bezeichnet als:
   3.1 Unechte Polymorphie
   3.2 Überladung
4. ist erkennbar daran:
   - eine oder mehrere Typvariablen der Funktionssignatur sind typkontexteingeschränkt!
5. gibt es in den Spielarten
   5.1 direkt (Funktion ist Element einer Typklasse)
   5.2 indirekt (Funktion ist kein Element einer Typklasse, stützt sich aber auf eine solche ab)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Kapitel 11.5

Parametrische Polymorhpie vs. *ad hoc* Polymorphie

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Ad hoc Polymorphie über Typklassen

Typklassen sind

- Sammlungen von Typen, auf deren Werten die in der Typklasse angegebenen Funktionen definiert sind.

Durch Instanzbildungen der Typklasse für verschiedene Typen wird die Bedeutung

- dieser Funktionen überladen und typspezifisch.

Zweckmäßiger- (wie auch üblicherweise) Weise sind

- die typspezifischen Bedeutungen der überladenen Funktionen einander 'entsprechend', ihre Funktionalität einander 'vergleichbar', jeweils typspezifisch zugeschnitten.
- Instanzbildung mit 'vergleichbarer' Funktionalität kann nicht syntaktisch erzwungen werden; sie liegt in der Verantwortung des Programmierers und richtet einen Appell an die Programmierdisziplin.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Wiederverwendung durch *ad hoc* Polymorphie

Ad hoc Polymorphie (oder unechte Polymorphie oder Überladung) unterstützt Wiederverwendung des

- Funktionsnamens, nicht jedoch der Funktionsimplementierung (diese wird typspezifisch bei der Typklasseninstanzbildung ausprogrammiert, ggf. unter Ausnutzung der Prototimplementierungen der jeweiligen Typklasse):

```
(+)             :: Num a      => a -> a -> a
(>)             :: Ord a      => a -> a -> Bool
zu_zeichenreihe :: Info a     => a -> String
groesse         :: Groesse a => a -> Int
```

  d.h. es gilt das Prinzip:

  - ein Name, eine T-spezifische Implementierung pro Instanz T von a.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Wiederverw. durch parametrische Polymorphie

Parametrische (oder echte) Polymorphie unterstützt Wiederverwendung von

- Funktionsname und -implementierung:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> a -> b -> c
curry f x y = f (x,y)

length :: [a] -> Int
length [] = 0
length (x:xs) = 1 + length xs

fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x
```

d.h. es gilt das Prinzip:

- ein Name, eine Implementierung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Ad hoc Polymorphie vs. Polymorphie (1)

Polymorphie: Ein polymorpher Typ wie `(a -> a)` steht informell für:

$$\forall \texttt{a} \in \texttt{"Menge gültiger Typen"}.\ \texttt{(a -> a)}$$

- Funktionen wie `id :: a -> a` besitzen genau eine Implementierung und sind für jeden gültigen Haskell-Typ eine Funktion vom Typ `(a -> a)`.

Ad hoc Polymorphie: Ein *ad hoc* polymorpher Typ wie `(Num a => a -> a -> a)` steht informell für:

$$\forall \texttt{a} \in \texttt{Num}.\ \texttt{(a -> a -> a)}$$

- Funktionen wie `(+) :: Num a => a -> a -> a` besitzen für jede Instanz der Typklasse `Num` eine instanzspezifische Implementierung und sind für jeden dieser Instanztypen eine Funktion vom Typ `(a -> a -> a)`; für sonst keinen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Ad hoc Polymorphie vs. Polymorphie (2)

Parametrische Polymorphie ist unter dem Aspekt Wiederverwendung echt stärker als *ad hoc* Polymorphie.

Dennoch: Bereits die von *ad hoc* Polymorphie unterstützte Wiederverwendung von Funktionsnamen ist äußerst nützlich.

Ohne *ad hoc* Polymorphie wären typspezifische Namen erforderlich nicht nur für

- eigendefinierte Funktionen ($\texttt{groesse}_{Int}$, $\texttt{groesse}_{Bool}$, $\texttt{groesse}_{Char}$, etc.)

sondern auch für bekannte Standardoperatoren wie

- Boolesche Relatoren ($=_{Bool}$, $>_{Float}$, $<_{String}$, etc.) und arithmetische Operatoren ($+_{Int}$, $-_{Float}$, $*_{Double}$, etc.)

Deren zwingender Gebrauch wäre nicht nur ungewohnt und unschön, sondern auch äußerst lästig im täglichen Gebrauch.

Anmerkung: Andere Sprachen wie ML und Opal gehen hier einen anderen Umsetzungsweg als Haskell und bieten andere Konzepte als Typklassen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Kapitel 11.6

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Polymorphie

...auf Funktionen und Datentypen unterstützt

- Wiederverwendung durch Parametrisierung

und damit die

- Ökonomie der Programmierung (flapsig: *Schreibfaulheit*).

durch Ausnutzung der Beobachtung, dass tragende Eigenschaften eines Datentyps wie von darauf arbeitenden Funktionen oft unabhängig von typspezifischen Details sind.

Insgesamt: Ein typisches Vorgehen in der Informatik:

- 'Gleiche' Teile werden 'ausgeklammert' und dadurch einer Wiederverwendung zugänglich gemacht.
- Im Fall von Polymorphie bedeutet das, dass ansonsten i.w. gleiche Codeteile nicht mehrfach geschrieben werden müssen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Als Gratis-Nebeneffekt

...trägt Polymorphie bei zu höherer

- Transparenz und Lesbarkeit
  ...durch Betonung von Gemeinsamkeiten, nicht von Unterschieden.
- Verlässlichkeit und Wartbarkeit
  ...hinsichtlich Fehlersuche, Weiterentwicklung, etc.
- Programmiereffizienz
  ...hinsichtlich höherer Produktivität, früherer Markteintrittsmöglichkeit (engl. time-to-market).
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Nichtzuletzt: Polymorphie

...ein aktuelles Forschungs- und Entwicklungsgebiet auch in anderen Paradigmen, speziell dem

- objektorientierter Programmierung.

Nutzen und Vorteile polymorpher Konzepte für Datentypen und Funktionen werden zunehmend auch für Datentypen und Methoden zu schätzen gewusst (Stich- und Schlagwort: Generic Java).

Res amicos invenit.
Die Sache findet Freunde.

Persius (34 - 62 n.Chr.)
röm. Dichter

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Abschliessend

...über Teil IV 'Funktionale Programmierung' der Vorlesung:

Die Stärken des funktionalen Programmierstils resultieren aus insgesamt wenigen Konzepten für

- Funktionen
- Datentypen

Tragend sind dabei die Konzepte von

- Funktionen als erstrangige Sprachelemente (engl. first class citizens)
  - Stichwort: Funktionen höherer Ordnung (Kap. 10)
- Polymorphie als durchgängiges Prinzip auf
  - Datentypen (Kap. 11.2)
  - Funktionen (Kap. 11.3, Kap. 11.4)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Wenige Faktoren, mächtiges Zusammenspiel

Kombination und nahtloses Zusammenspiel der tragenden (wenigen) Einzelkonzepte führen in Summe zur hohen

- Ausdruckskraft und Flexibilität

des funktionalen Programmierstils.

Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Paradigmen- u. sprachspez. Automatismen

Speziell in Haskell tragen zu Ausdruckskraft und Flexibilität weitere paradigmen- und sprachspezifische Automatismen bei, etwa zur automatischen Generierung von:

- Listen: `[2,4..42]`, `[odd n | n <- [1..], n < 1000]`.
- Selektorfunktionen: Verbundtyp-Syntax für algebraische Datentypen.
- Typklasseninstanzen: `deriving`-Klausel.

Siehe

- Peter Pepper. Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer. Springer-V., 2. Auflage, 2003.

für eine weiterführende und vertiefende Diskussion.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Kapitel 11.7

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 11 (1)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 7, Eigene Typen und Typklassen definieren)

Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 5, Polymorphic and Higher-Order Functions; Kapitel 9, More about Higher-Order Functions; Kapitel 12, Qualified Types; Kapitel 24, A Tour of Haskell's Standard Type Classes)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 3, Types and classes; Kapitel 8, Declaring types and classes)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 11 (2)

Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 2, Believe the Type; Kapitel 7, Making our own Types and Type Classes)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 19, Formalismen 4: Parametrisierung und Polymorphie)

Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 2.8, Type classes and class methods)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 11 (3)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 12, Overloading and type classes; Kapitel 14.3, Polymorphic algebraic types; Kapitel 14.6, Algebraic types and type classes)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 13, Overloading, type classes and type checking; Kapitel 14.3, Polymorphic algebraic types; Kapitel 14.6, Algebraic types and type classes)

Moshe Vardi. *Self-Reference and Section 230*. Communications of the ACM 61(11):7, 2018.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
11.1
11.2
11.3
11.4

Teil V

Fundierung funktionaler Programmierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 12

λ-Kalkül

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Kapitel 12.1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

"...much of our attention is focused on functional programming, which is the most successful programming paradigm founded on a rigorous mathematical discipline. Its foundation, the lambda calculus, has an elegant computational theory and is arguably the smallest universal programming language. As such, the lambda calculus is also crucial to understand the properties of language paradigms other [than] functional programming..."

Exzerpt von der Startseite der
'Programming Languages and Systems (PLS)'
Forschungsgruppe an der University of New South Wales, Sydney, geleitet von Manuel Chakravarty und Gabriele Keller.
(http://www.cse.unsw.edu.au/~pls/PLS/PLS.html)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Der λ-Kalkül: Eines verschiedener

...universeller formaler Berechenbarkeitsmodelle:

- Turing-Maschinen
- Markov-Algorithmen
- Allgemein rekursive Funktionen
- ...

...fundamental in der Berechenbarkeitstheorie:

- Was heißt berechenbar?
- Was ist berechenbar? Welche Probleme sind berechenb.?
- Wie aufwändig ist etwas zu berechnen? Was ist effizient berechenbar? In Theorie? In Praxis?
- Gibt es Grenzen der Berechenbarkeit, des Berechenbaren?
- ...

...darüberhinaus: Formale Grundlage und Basis

- funktionaler Programmierung
- funktionaler Programmiersprachen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Berechenbar, B.keit. Was kann das sein?

...eine umfassende, aber vollkommen informelle Vorstellung:

'Etwas' ist intuitiv berechenbar, wenn es eine 'irgendwie machbare' effektive mechanische Methode gibt, die für

- gültige Argumentwerte in endlich vielen Schritten den Funktionswert konstruiert
- nicht gültige Argumentwerte mit einem besonderen Fehlerwert oder nie abbricht.

Ist mit diesem Begriff etwas für die Beantwortung der Fragen der Berechenbarkeitstheorie gewonnen?

$\rightsquigarrow$ Auf den ersten Blick nichts: Die Bedeutungen von

- 'etwas' und 'irgendwie machbar'

und damit von intuitiv berechenbar sind vollkommen vage und nicht greifbar, nichts als ein nebulöses Bauchgefühl!

Aber...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

...es wird ein 1) Ziel & ein 2) Weg aufgezeigt!

1) Das Ziel: Das 'Wesen' von 'etwas', von 'irgendwie machbar' und damit von intuitiv berechenbar

- formal fassbar u. (damit) präzise behandelbar zu machen.

2) Der Weg zum Ziel: Ersinne/erfinde effektive mechanische Methoden M, die für

- gültige Argumentwerte in endlich vielen Schritten den Funktionswert konstruieren
- nicht gültige Argumentwerte mit einem besonderen Fehlerwert oder nie abbrechen.

$\Longrightarrow$ Die 'Belohnung': Jede solche Methode M definiert ein

- formales Berechenbarkeitsmodell mit einem formalen Berechenbarkeitsbegriff: Berechenbar mit M, M-berechenbar

...M, M-berechenbar können beide mathematisch rigoros untersucht werden!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Damit eröffnet sich ein Weg zur Überprüfung

...ob das Ziel erreicht ist!

Behaupte:

Theorem (bitte nach mir als Erfinder v. M benennen)

'Etwas' ist intuitiv berechenbar gdw es ist M-berechenbar!

Solch kühne Behauptung gehört bewiesen:

$\Leftarrow$: Trivial! Nichts zu tun!

$\Rightarrow$: Unmöglich! Was heißen 'etwas' und intuitiv berechenbar?

Was bleibt? Enttäuschung, Demut, Bescheidenheit:

These (bitte trotzdem nach mir benennen!)

'Etwas' ist intuitiv berechenbar gdw es ist M-berechenbar.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Was bleibt noch? Vergleichbarkeit!

...rigorose Vergleichbarkeit von Methoden M, M' bzgl. ihrer

- (Berechnungs-) Stärke, Ausdruckskraft.

Dadurch möglich: **Falsifizierbarkeit!**

Falsifizierbarkeit der M-These für jedes M:

Die M-These, dass intuitiv berechenbar und M-berechenbar ident seien, ist widerlegt, wenn eine berechnungsstärkere, ausdruckskräftigere Methode M' als M gefunden wird, wenn also etwas M'-berechenbar ist, aber nicht M-berechenbar.

Einfacher sogar: ...wenn ein konkretes Problem, eine konkrete Aufgabe oder Fragestellung gefunden wird, die *ad hoc*, auf der Stelle als berechenbar eingesehen werden kann, aber nicht M-berechenbar ist.

...hingegen ist Verifizierbarkeit der M-These für jedes M unmöglich!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bsp. wichtiger formaler Berechnungsmethoden

...als Kern zugehöriger formaler Berechnungsmodelle und ihre zeitliche Einordnung:

- Allgemein rekursive Funktionen (Herbrand 1931, Gödel 1934, Kleene 1936) (s. Anh. B.3, B.4)
- μ-rekursive Funktionen (Kleene 1936) (s. Anh. B.4)
- Turing-Maschinen (Turing 1936) (s. Anh. B.1)
- Endliche kombinatorische Prozesse (Post 1936)
- Markov-Algorithmen (Markov 1951) (s. Anh. B.2)
- Registermaschinen (Random Access Machines (RAMs)) (Shepherdson, Sturgis 1963)
- ...
- λ-definierbare Funktionen des λ-Kalküls (Church 1936)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zentrales Resultat der Berechenbarkeitstheorie

Theorem 12.1.1 (Gleichmächtigkeit)

Alle der vorher genannten formalen Berechnungsmodelle und ihre zugehörigen (effektiven mechanischen Berechnungs-) Methoden sind gleich mächtig:

- Was in einem dieser Modelle berechenbar ist, ist in jedem der anderen Modelle berechenbar und umgekehrt!

Korollar 12.1.2 (Universalität des λ-Kalküls)

Alles, was in einem der vorher genannten Modelle berechenbar ist, ist im λ-Kalkül berechenbar (und umgekehrt!).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Holzschnittartige Charakterisierung, Einteilung

...dieser formalen Berechnungsmodelle und ihrer Methoden:

- Maschinenbasierte/-orientierte Konkretisierungen von 'berechenbar':
  - Turing-Maschinen
  - Registermaschinen
  - ...
- Programmierbasierte/-orientierte Konkretisierungen von 'berechenbar':
  - Markov-Algorithmen
  - Theorie rekursiver Funktionen
    - allgemein rekursiv
    - μ-rekursiv
  - ...
  - λ-definierbare Funktionen des λ-Kalküls.

...jede dieser Methoden M induziert eine These, die M-These.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zu den häufigst angeführten zählt...

...die Formulierung als sog.:

Churchsche These ('λ-Kalkülthese')

'Etwas' ist intuitiv berechenbar gdw es ist im λ-Kalkül berechenbar.

Zur Churchschen oder Church/Turingschen These siehe z.B.:

B. Jack Copeland. The Church-Turing Thesis. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2002.
`http://plato.stanford.edu/entries/church-turing`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Die konzeptuelle Verschiedenheit der Modelle

...legt nahe, Theorem 12.1.1 als starken Hinweis (keinesfalls als Beweis!) darauf zu interpretieren und zu verstehen, dass alle diese Modelle den Begriff

- 'etwas' ist intuitiv berechenbar wahrscheinlich 'gut'

charakterisieren; gut im Sinne von vollständig und umfassend.

Jedoch: Theorem 12.1.1 schließt nicht aus, dass vielleicht noch heute eine

- mächtigere (Berechnungs-) Methode

gefunden wird, die 'etwas' und intuitiv berechenbar umfassender, vollständiger und damit besser charakterisierte; oder auch nur

- ein (!) Problem

dass offensichtlich berechenbar ist, aber nicht im λ-Kalkül.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Präzedenzfall

...das Berechenbarkeitsmodell

- primitiv rekursiver Funktionen

galt bis 1928 als adäquate Charakterisierung für 'etwas' und intuitiv berechenbar. Jedoch:

- Primitiv-rekursiv-berechenbar ist echt schwächer als im λ-Kalkül berechenbar, Turing-berechenbar, Markov-berechenbar, ,...

Falsifizierung der Primitiv-rekursiv-These durch Wilhelm Ackermann (1928) durch Angabe der später nach ihm benannten

- Ackermann-Funktion

die berechenbar ist, aber nicht primitiv-rekursiv-berechenbar.

(Zur Definition des Schemas primitiv rekursiver Funktionen siehe z.B.: Wolfram-Manfred Lippe. Funktionale und Applikative Programmierung. eXamen.press, 2009, Kapitel 2.1.2.)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Die Ackermann-Funktion

...hier in einer Formulierung von Rózsa Péter aus dem Jahr 1935 in Haskell-Notation:

```
ack :: (Integer,Integer) -> Integer
ack (m,n)
  | m == 0                  = n+1
  | (m > 0) && (n == 0) = ack (m-1,1)
  | (m > 0) && (n /= 0) = ack (m-1,ack(m,n-1))
```

...'berühmtberüchtigtes' Beispiel einer offensichtlich

- effektiv berechenbaren, damit auch intuitiv berechenbaren, aber nicht primitiv-rekursiv-berechenbaren Funktion.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Andere Frage: ‘Etwas’ “gut genug” erfasst?

...durch die Festlegung “‘etwas’ ist intuitiv berechenbar, wenn es eine ‘irgendwie machbare’ effektive mechanische Methode gibt, die für

- gültige Argumentwerte in endlich vielen Schritten den Funktionswert konstruiert
- ...”

wird eine

- funktionsorientierte Vorstellung von ‘etwas’

induziert, die Berechnungsmodellen wie dem λ-Kalkül offensichtlich zugrundeliegt und implizit die Problemtypen festlegen könnte, die überhaupt als

- Berechnungsproblem

aufgefasst werden (können).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Konkret: Ist Interaktion von ‘etwas’ umfasst?

...sind Leistungen, Aktivitäten, Tätigkeiten, die

- Betriebssysteme
- Eingebettete Systeme (Steuerung, Überwachung)
- Internet (dynamisch hinzutretende, ausscheidende Dienste)
- Cyberphysikalische Systeme (Roboter, Drohnen,...)
- ...

erbringen,

- Fahrzeuge autonom ihren Weg im realen Straßenverkehr zu vorgegebenen Zielen finden lassen
- ...

durch eine funktionsorientierte Vorstellung von ‘etwas’ umfasst, d.h. vorstellbar, darstellbar mit einmaliger Eingabedatenbereitstellung ohne irgendeine weitere Interaktion?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Naheliegende Fragen im Fall von

...Betriebs- und Steuerungssystemen:

- Ist die Berechnung, Verarbeitung endlich? Terminiert sie?
- Welche Funktion wird berechnet?

...dem Internet:

- Können Systeme mit flexibel hinzutretenden und ebenso wieder wegfallenden Komponenten als statisch angesehen werden? Wenn ja, in welchem Sinn?
- Welche Funktion wird berechnet?

...autonomen Fahrzeugen:

- Wie sehen Ein- und Ausgabe aus?
- Welche Funktion wird berechnet?

Ist Interaktion für Aufgaben dieser Art nicht unverzichtbar?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Anders ausgedrückt

...ändert Hinzunahme von Interaktion das Verständnis von Berechnung, berechenbar, Berechenbarkeit möglicherweise ähnlich grundlegend wie die Findung der Ackermann-Funktion?

Angestoßen wurden Fragen und Forschung hierzu besonders durch:

- Peter Wegner. Why Interaction is More Powerful Than Algorithms. Communications of the ACM 40(5):81-91, 1997.

Darunter liegen erneut die Fragen:

- Was ist Berechnung, was ist das Wesen von Berechnung?
- Was heißt berechenbar?
- Was ist berechenbar?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Sind Antworten wie z.B. in:

- Martin Davis. What is a Computation? Kapitel in Lynn A. Steen (Hrsg.), Mathematics Today – Twelve Informal Essays. Springer-V., 241-268, 1978.

...ausreichend? Oder müssen sie angepasst u. weiterentwickelt werden angesichts der Realität massiv parallelen, verteilten, interaktiven, asynchronen, analogen, Echtzeit-, hybriden Rechnens, des Rechnens mit neuronalen Netzen, chemischen Reaktionen, biologischen Systemen (Bakterien), des Quanten-, Nano-, DNS-Rechnens, des Rechnens mit Molekülen, Enzymen,...?

- Luca Cardelli. Programming with Chemical Reactions. VCLA-Kolloquiumsvortrag an der TU Wien, 22.11.2018.

"Chemical reactions have been widely used to describe natural phenomena, but increasingly we are capable to use them to prescribe physical interaction, e.g. in DNA computing. Thus, chemical reaction networks can be used as programs that can be physically realized to produce and control molecular arrangements. Because of their relative simplicity and familiarity, and more subtly because of their computational power, they are quickly becoming a paradigmatic "programming language" for bioengineering. We discuss what can be programmed with chemical reactions, and how these programs can be physically realized."

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Die zentrale Frage von Peter Wegner

...auf den Punkt gebracht :

Gilt die Church/Turing-These im schwachen Sinn:

- Was immer durch eine Funktion im math. Sinn intuitiv berechenbar ist, d.h. wann immer es eine effektive mechanische Methode für ihre Berechnung gibt, kann von einer Turing-Maschine, im λ-Kalkül, etc. berechnet werden.

...oder im starken Sinn:

- Was immer eine 'Berechnungsmaschine' ('Computer'), ggf. mithilfe von Interaktion, berechnen kann, kann von einer Turing-Maschine, im λ-Kalkül berechnet werden, d.h. wann immer – auch über Funktionen im math. Sinn hinaus – eine Aufgabe als Berechnung ausgedrückt und verstanden werden kann, kann sie von einer Turing-Maschine, im λ-Kalkül, etc. berechnet werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schwache vs. starke Church/Turing-These (1)

...eine 'für' und 'wider' untersuchte Frage:

- Michael Prasse, Peter Rittgen. Why Church's Thesis Still Holds. Some Notes on Peter Wegner's Tracts on Interaction and Computability. The Computer Journal 41(6):357-362, 1998.
  - Peter Wegner, Eugene Eberbach. New Models of Computation. The Computer Journal 47(1):4-9, 2004.
  - Paul Cockshott, Greg Michaelson. Are There New Models of Computation? Reply to Wegner and Eberbach. The Computer Journal 50(2):232-247, 2007.
- Dina Q. Goldin, Peter Wegner. The Interactive Nature of Computing: Refuting the Strong Church-Rosser Thesis. Minds and Machines 18(1):17-38, 2008.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schwache vs. starke Church/Turing-These (2)

- Peter Wegner, Dina Q. Goldin. The Church-Turing Thesis: Breaking the Myth. In Proceedings of the 1st Conference on Computability in Europe – New Computational Paradigms (CiE 2005), Springer-V., LNCS 3526, 152-168, 2005.
- Martin Davis. The Church-Turing Thesis: Consensus and Opposition. In Proceedings of the 2nd Conference on Computability in Europe – Logical Approaches to Computational Barriers (CiE 2006), Springer-V., LNCS 3988, 125-132, 2006.
- ...

Wer richtig erkennen will, muss zuvor
in richtiger Weise gezweifelt haben.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Interaktion und Berechenbarkeit

...hat Interaktion das Potential zu einer neuen Ackermannfunktion-vergleichbaren Weltsichtänderung, was berechenbar heißt, was berechenbar ist? Eine offene Frage...

Ich weiß, das klingt alles sehr kompliziert.

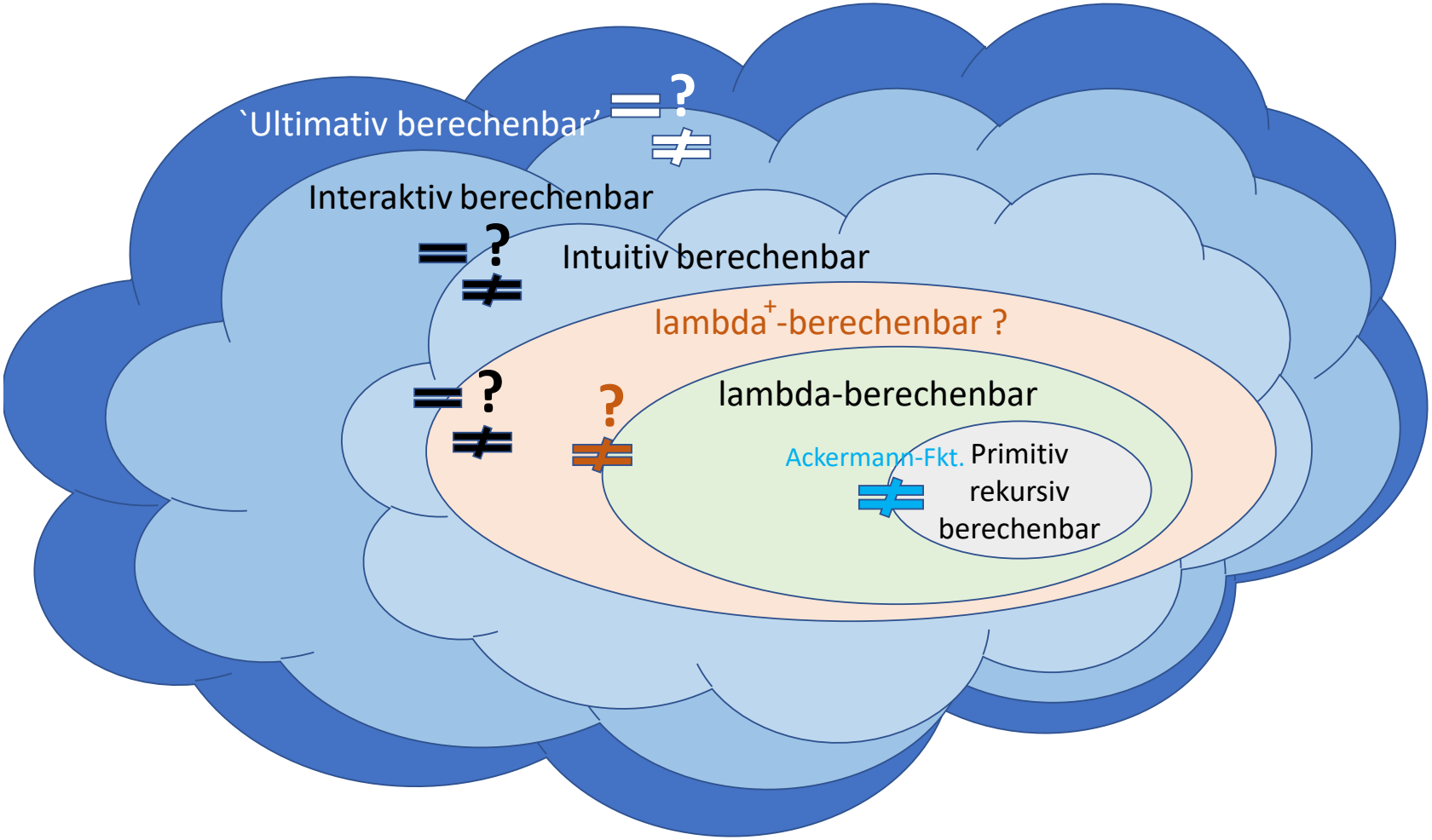
Fred Sinowatz (1929-2008)
österr. Politiker und Staatsmann, Bundeskanzler

Es ist nicht leicht zu begreifen,
dass man nicht begreift.

Marie von Ebner-Eschenbach (1830-1916)
österr. Schriftstellerin

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Die Welt d. Berechenbaren: Wie sieht sie aus?



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen

...als Klassiker:

- John McCarthy. A Basis for a Mathematical Theory of Computation. In *Computer Programming and Formal Systems*, Paul Braffort, David Hirschberg (Hrsg.), North-Holland, 33-70, 1963.

...für neue Sichten:

- S. Barry Cooper, Benedikt Löwe, Andrea Sorbi (Hrsg). New Computational Paradigms: Changing Conceptions of What is Computable. Springer-V., 2008.

...als gute und knappe Einführung:

- Ian Horswill. What is Computation? Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):8-14, 2012.

...weitere Literaturhinweise in Anhang B.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Forschung, Diskurs

...gehen weiter; für einen kompakten Einstieg in das Themenfeld zusammen mit Verweisen auf wichtige Arbeiten siehe:

- B. Jack Copeland, Eli Dresner, Diane Proudfoot, Oron Shagrir. Viewpoint: Time to Reinspect the Foundations? Questioning if Computer Science is Outgrowing its Traditional Foundations.
  Communications of the ACM 59(11):34-36, 2016.
- B. Jack Copeland, Oron Shagrir. The Church-Turing Thesis: Logical Limit or Breachable Barrier?
  Communications of the ACM 62(1):66-74, 2019.

Nur Beharrung führt zum Ziel.

Friedrich von Schiller (1759-1805)
dt. Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zu schwer?

Man kann viel, wenn man sich nur recht viel zutraut.

Wilhelm von Humboldt (1767-1835)
dt. Philosoph und Politiker

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zurück zum λ-Kalkül

Der λ-Kalkül

- geht zurück auf Alonzo Church (1936).
- ist erdacht als formales Berechnungsmodell (neben anderen), um Fragen der Natur von Berechnung und dessen, was berechnet werden kann, zu fassen u. zu untersuchen.
- formalisiert einen Berechnungsbegriff über Paaren, Listen, Bäumen, auch potentiell unendlichen, über Funktionen höherer Ordnung, etc.
- ist in diesem Sinne durch größere Praxisnähe als (einige) andere formale Berechnungsmodelle ausgezeichnet.
- wurde mit der Erfindung von Rechenanlagen und Programmiersprachen zur/zum
  - Grundlage aller funktionalen Programmiersprachen.
  - Bindeglied funktionaler Hochsprachen und maschinennaher Implementierungen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Eigenschaften des λ-Kalküls

Der λ-Kalkül zeichnet sich aus durch

- Einfachheit
  ...wenige syntaktische Konstrukte, einfache Semantik.
- Ausdruckskraft
  ...Turing-mächtig, alle 'intuitiv berechenbaren' Funktionen sind im λ-Kalkül berechenbar.

In diesem Sinn ist der λ-Kalkül ein

- universelles Berechnungsmodell

und Grundlage aller

- funktionalen Programmiersprachen, quasi die 'Assembler-Sprache' funktionaler Programmierung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Wichtige Anwendungsfelder des λ-Kalküls

Ursprünglich:

- Berechenbarkeitstheorie: Berechenbarkeitsbegriff, Grenzen der Berechenbarkeit.

Später hinzugekommen:

- Entwurf von Programmiersprachen und Programmiersprachkonzepten: Funktionale Programmiersprachen, Typsysteme, Polymorphie,...
- Semantik von Programmiersprachen: Denotationelle Semantik, Bereichstheorie (engl. domain theory),...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Reiner λ-Kalkül, angewandte λ-Kalküle

Reiner λ-Kalkül

- Reduziert auf das 'absolut Notwendige', angemessen und bedeutsam besonders für grundlegende Untersuchungen zu Fragen der Berechenbarkeit, Berechenbarkeitstheorie.

Angewandte λ-Kalküle

- Syntaktisch angereicherte Varianten des reinen λ-Kalküls, praxis- und programmiersprachennäher.

Extrem angereicherte angewandte λ-Kalküle nennen wir

- Funktionale Programmiersprachen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 12.2

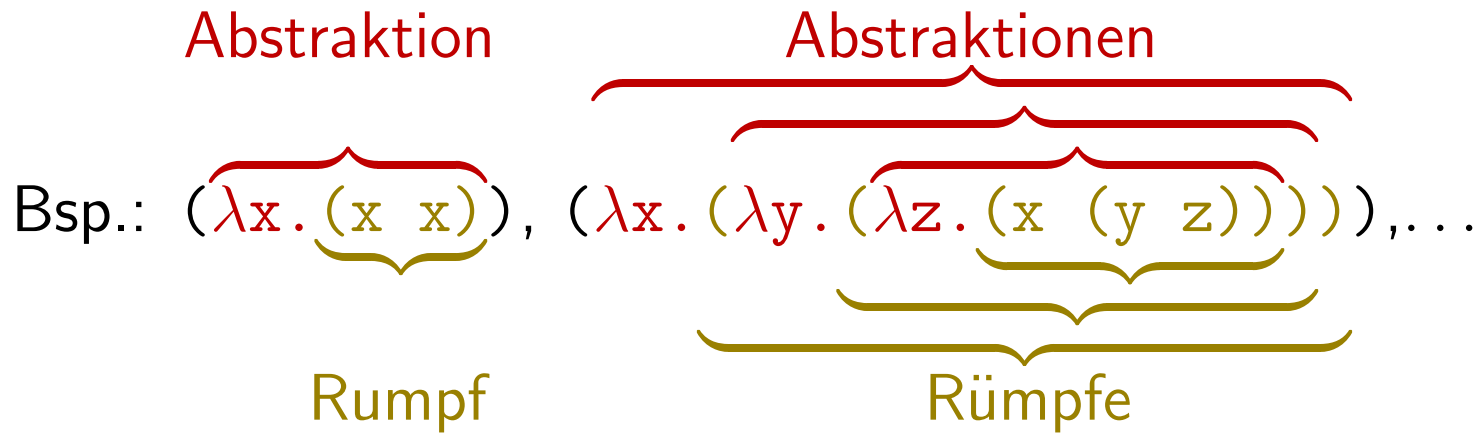
Syntax des reinen λ-Kalküls

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Syntax von λ-Ausdrücken (1)

Die Menge E (von engl. Expression) der wohlgeformten Ausdrücke des reinen λ-Kalküls über einer Menge N von Namen, kurz λ-Ausdrücke, ist induktiv wie folgt definiert:

1. Namen: Jeder Name aus N ist in E.
   Bsp.: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$
2. Abstraktionen: Ist x aus N, e aus E, so ist $(\lambda x.\, e)$ in E.
   Sprechweise: (Funktions-) Abstraktion mit Parameter x und Rumpf e.



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Syntax von λ-Ausdrücken (2)

3. Applikationen: Sind f und e aus E, so istauch (f e) in E.

   Sprechweise: Applikation oder Anwendung von f auf e; f heißt auch Rator, e auch Rand.

   Bsp.: $(\underbrace{(\,\lambda\mathtt{x.(x\ x)})}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\mathtt{y}}_{\text{Rand}}\,), \ldots$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Syntax von λ-Ausdrücken in BNF-Notation

...Ausdruckssyntax kompakt in Backus-Naur-Form (BNF):

$$
\begin{array}{rcll}
e & ::= & x & \text{(Namen)} \\
 & ::= & \lambda x.e & \text{((Funktions-) Abstraktion)} \\
 & ::= & e\ e & \text{((Funktions-) Applikation)} \\
 & ::= & (e) & \text{(Klammerung)}
\end{array}
$$

Informell: Der λ-Kalkül bietet Namen, (anonyme) Funktionen (auch höherer Ordnung!) und Funktionsanwendungen, durch Klammerung auch in geschachtelter Form.

Anmerkung: Statt Name aus N sagt man oft auch Variable aus V und identifiziert N und V miteinander.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Vereinbarungen, Konventionen

Überflüssige Klammern können weggelassen werden. Es gilt:

- Rechtsassoziativität für λ-Sequenzen in Abstraktionen.

  Beispiele:
  - $\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\,(y\,z))$ steht kurz für $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(x\,(y\,z)))))$
  - $\lambda x.\,e$ steht kurz für $(\lambda x.\,e)$
- Linksassoziativität für Applikationssequenzen.

  Beispiele:
  - $e_1\ e_2\ e_3 \ldots e_n$ steht kurz für $(\ldots((e_1\ e_2)\ e_3)\ldots e_n)$
  - $e_1\ e_2$ steht kurz für $(e_1\ e_2)$

Der Rumpf einer λ-Abstraktion ist der längstmögliche dem Punkt folgende λ-Ausdruck.

Beispiel: $\lambda x.e\ f$ steht kurz für $\lambda x.(e\ f)$, nicht $(\lambda x.e)\ f$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bindungsbereich, Gültigkeitsbereich v. Namen

...in λ-Ausdrücken.

- Der Bindungsbereich der gebundenen Variablen einer λ-Abstraktion ist der Rumpf der λ-Abstraktion.

$$(\underbrace{\lambda f.\ \lambda g.\ \lambda h.\ f\ (g\ h)}_{\text{Bindungsbereich von } f})\ \overbrace{\lambda g.\ ((\underbrace{\lambda g.\ g}_{\text{Bindungsbereich von } g})\ g)}^{\text{Bindungsbereich von } g}$$

- Der Gültigkeitsbereich der gebundenen Variablen einer λ-Abstraktion ist ihr Bindungsbereich abzüglich aller echt inneren Bindungsbereiche mit gleichnamiger gebundener Variable.

$$(\underbrace{\lambda f.\ \lambda g.\ \lambda h.\ f\ (g\ h)}_{\text{Gültigkeitsbereich von } f})\ \overbrace{\lambda g}^{\text{Gültigkeitsbereich von } g}.\ ((\underbrace{\lambda g.\ g}_{\text{Gültigkeitsbereich von } g})\ \overbrace{g}^{\text{Gültigkeitsbereich von } g})$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Freie, gebundene Variablen (1)

...in λ-Ausdrücken. Sei a aus E:

Freie Variablen von a:

$$
\begin{array}{lcll}
\text{frei}(x) & = & \{x\} & \text{wenn } a \equiv x \text{ aus } N \\
\text{frei}(\lambda x.e) & = & \text{frei}(e) \setminus \{x\} & \text{wenn } a \equiv \lambda\ x.e \\
\text{frei}(f\ e) & = & \text{frei}(f) \cup \text{frei}(e) & \text{wenn } a \equiv f\ e
\end{array}
$$

Gebundene Variablen von a:

$$
\begin{array}{lcll}
\text{gebunden}(x) & = & \emptyset & \text{wenn } a \equiv x \text{ aus } N \\
\text{gebunden}(\lambda x.e) & = & \text{gebunden}(e) \cup \{x\} & \text{wenn } a \equiv \lambda\ x.e \\
\text{gebunden}(f\ e) & = & \text{gebunden}(f) & \\
 & & \cup\ \text{gebunden}(e) & \text{wenn } a \equiv f\ e
\end{array}
$$

Anm.: $\equiv$ steht für lexikalisch gleich.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Freie, gebundene Variablen (2)

Beispiel: Betrachte den λ-Ausdruck $((\lambda x.\ (x\ y))\ x)$.

Gesamtausdruck:

- x kommt in $((\lambda x.\ (x\ y))\ x)$ frei und gebunden vor.
- y kommt in $((\lambda x.\ (x\ y))\ x)$ frei vor, aber nicht gebunden.

Teilausdrücke:

- x kommt in $(\lambda x.\ (x\ y))$ gebunden vor, aber nicht frei.
- x kommt in $(x\ y)$ und x frei vor, aber nicht gebunden.
- y kommt in $(\lambda x.\ (x\ y))$, $(x\ y)$ und y frei vor, aber nicht gebunden.

Beachte: 'Gebunden' und 'frei' sind nicht Negationen voneinander (anderenfalls gälte z.B. 'x kommt gebunden in y vor' oder 'y kommt frei in $\lambda x.\, x$ vor', was beides nicht der Fall ist).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Freie, gebundene Variablenvorkommen

...in λ-Ausdrücken:

- Definierende Vorkommen: Jedes Variablenvorkommen unmittelbar nach einem λ.
- Angewandte Vorkommen: Jedes nicht definierende Variablenvorkommen.
- Gebunden an: Relation zwischen Variablenvorkommen und definierenden Variablenvorkommen. Jedes Variablenvorkommen (gleich ob angewandt oder definierend) ist an höchstens ein definierendes Variablenvorkommen gebunden; definierende Vorkommen sind an ihr Vorkommen selbst gebunden.
- Freies Variablenvorkommen: Angewandtes Vorkommen, das an kein definierendes Vorkommen gebunden ist.
- Gebundenes Variablenvorkommen: Vorkommen (gleich ob angewandt oder definierend), das an ein definierendes Vorkommen gebunden ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 12.3

Semantik des reinen λ-Kalküls

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Grundlegend

...für die Definition der Semantik von λ-Ausdrücken sind:

- Syntaktische Substitution
- Konversionsregeln/Reduktionsregeln
- Reduktionsfolgen/Reduktionsstrategien
- Normalformen (Existenz/Eindeutigkeit)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 12.3.1

Syntaktische Substitution

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Syntaktische Substitution

...eine dreistellige Abbildung

$$\cdot[\cdot/\cdot] : E \to E \to V \to E$$

zur bindungsfehlerfreien Ersetzung der freien Vorkommen einer Variablen x durch einen Ausdruck e in einem Ausdruck e′.

Vereinfachend, informell: Angewendet auf zwei Ausdrücke e′ und e und eine Variable x bezeichnet

$$e'\,[e/x]$$

denjenigen Ausdruck, der aus e′ entsteht, indem jedes freie Vorkommen von x in e′ durch e substituiert, ersetzt wird.

Beachte: Die vereinfachende informelle Beschreibung nimmt keinen Bedacht auf mögliche Bindungsfehler. Freiheit von Bindungsfehlern stellt die formale Definition syntaktischer Substitution sicher.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Syntaktische Substitution

Definition 12.3.1.1 (Syntaktische Substitution)

Die syntaktische Substitution ist die 3-stellige Abbildung $\cdot[\cdot/\cdot] : E \to E \to V \to E$ definiert bei Anwendung auf

...Namensterme durch:

$$y\,[e/x] =_{df} \begin{cases} y & \text{falls y aus N mit } y \neq x \\ e & \text{falls y aus N mit } y = x \end{cases}$$

...applikative Terme durch:

$$(\mathrm{f}\ \mathrm{g})\,[\mathrm{e}/\mathrm{x}] \;=_{df}\; (\mathrm{f}\,[\mathrm{e}/\mathrm{x}])\ (\mathrm{g}\,[\mathrm{e}/\mathrm{x}])$$

...Abstraktionsterme durch:

$$(\lambda y.f)\,[e/x] =_{df} \begin{cases} \lambda\, y.f & \text{falls y} = x \\ \lambda\, y.(f\,[e/x]) & \text{falls y} \neq x \wedge y \notin \mathit{frei}(e) \\ \lambda\, z.((f\,[z/y])\,[e/x]) & \text{falls y} \neq x \wedge y \in \mathit{frei}(e), \\ & \quad \text{wobei z frisch aus N: } z \notin \mathit{frei}(e) \cup \mathit{frei}(f) \\ & \quad (\text{Vermeidung von Bindungsfehlern!}) \end{cases}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiel: Einfache Anwendungen

...syntaktischer Substitution:

- $((x\ y)\ (y\ z))\ [(a\ b)/y] = ((x\ (a\ b))\ ((a\ b)\ z))$
- $\lambda x.\ (x\ y)\ [(a\ b)/y] = \lambda x.\ (x\ (a\ b))$
- $\lambda x.\ (x\ y)\ [(a\ b)/x] = \lambda x.\ (x\ y)$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiel: Bindungsfehler

Ein Bindungsfehler entsteht bei naiver Anwendung syntaktischer Substitution, wenn ein Ausdruck mit einer freien Variable in den Gültigkeitsbereich einer gebundenen Variable gleichen Namens eingesetzt wird:

- $\lambda x.\ (x\ y)\ [(x\ b)/y] \overset{naiv}{\rightsquigarrow} \lambda x.\ (x\ (x\ b))$: Bindungsfehler!
  ...naiv ohne Umbenennung angewendet ist x eingefangen!

Korrekt mit Umbenennung angewendet gibt es keinen Bindungsfehler:

- $\lambda x.\ (x\ y)\ \underbrace{[(x\ b)}/y] = \underbrace{\lambda z.\ ((x\ y)[z/x])}\ [(x\ b)/y]$

  x frei in (x b) Umbenennung von x in z

  $= \underbrace{\lambda z.\ (z\ y)}\ [(x\ b)/y]$

  Umbenannt

  $= \lambda z.\ (z\ (\underbrace{\ x\ }\ b))$

  Kein Bindungsfehler: x in (x b) bleibt frei!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 12.3.2

Konversionsregeln

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

λ-Konversionsregeln, λ-Konversionen

...die λ-Konversionsregeln führen abgestützt auf syntaktische Substitution zu einer operationellen Semantik für λ-Ausdrücke in Form maximaler Ausdrucksvereinfachung:

Definition 12.3.2.1 (λ-Konversionsregeln)

1. α-Konversion (Umbenennung von Parametern)

   $$\lambda\,x.\,e \longleftrightarrow \lambda y\,.\,e\,[y/x], \text{ wobei } y \notin \mathit{frei}(e)$$

2. β-Konversion (Funktionsanwendung)

   $$(\,\lambda\,x.\,f\,)\;e \longleftrightarrow f\,[e/x]$$

3. η-Konversion (Elimination redundanter Funktion)

   $$\lambda\,x\,.(e\;x) \longleftrightarrow e, \text{ wobei } x \notin \mathit{frei}(e)$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zur Anwendung der Konversionsregeln

α-Konversion zur

- konsistenten Umbenennung von Parametern von λ-Abstraktionen (zur Vermeidung von Bindungsfehlern (s.u.)!).

β-Konversion zur

- Anwendung einer λ-Abstraktion auf ein Argument.

η-Konversion zur

- Elimination unnötiger λ-Abstraktionen.

Erinnerung: Naiv ohne α-Konversion angewendet, kann die Substitution der β-Konversion Bindungsfehler verursachen, wie im nachstehenden Beispiel illustriert:

Bsp.: $(\lambda x.(\lambda y.x\ y))\ (y\ z) \longrightarrow (\lambda y.x\ y)[(y\ z)/x] \longrightarrow (\lambda y.(y\ z)\ y)$

(ohne α-Konversion ist y eingefangen: Bindungsfehler!)

...korrekt angewendet: Keine Bindungsfehler dank α-Konversion!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Konversionsregeln, Reduktionsregeln

...Sprechweisen im Zusammenhang mit Konversionsregeln:

- Von links nach rechts angewendet: Reduktion.
- Von rechts nach links angewendet: Abstraktion.

Genauer:

- Von links nach rechts gerichtete Anwendungen der β- und η-Konversion heißen β-Reduktion und η-Reduktion.
- Von rechts nach links gerichtete Anwendungen der β-Konversion heißen β-Abstraktion.

Entsprechend spricht man von β- und η-Reduktionsregeln, um auszudrücken, dass die entsprechenden Konversionsregeln nur von links nach rechts angewendet werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 12.3.3

Reduktionsfolgen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Reduktionsfolgen, -ordnungen, Normalform

Eine Reduktionsfolge für einen λ-Ausdruck

- ist eine endliche oder nicht endliche Folge von β-, η-Reduktionen und α-Konversionen.
- heißt maximal, wenn höchstens noch α-Konversionen anwendbar sind.

(Grund-) Reduktionsordnungen, -strategien sind

- Normale Reduktion(sordnung) (äußerst)
- Applikative Reduktion(sordnung) (innerst)

Praktisch relevante Reduktionsordnungen, -strategien sind

- Linksnormale Reduktions(sordnung) (linkest-äußerst)
- Linksapplikative Reduktions(sordnung) (linkest-innerst)

Ein λ-Ausdruck ist in Normalform, wenn er

- durch β-, η-Reduktionen nicht weiter reduzierbar ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiele zu Reduktionsfolgen, -ordnungen (1)

Beispiel 1: Applikative Ordnung

$$\underbrace{(\lambda z.\lambda y.(z\ y))}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{\text{Rand}})\ (\lambda s.(s\ s))$$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $\underbrace{(\lambda y.((\lambda x.x)\ y))}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(\lambda s.(s\ s))}_{\text{Rand}}$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $\underbrace{(\lambda x.x)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(\lambda s.(s\ s))}_{\text{Rand}}$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $\lambda s.(s\ s)$

...fertig, Normalform erreicht: Keine β-, η-Reduktion mehr anwendbar.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiele zu Reduktionsfolgen, -ordnungen (2)

Beispiel 2: Applikative Ordnung

$((\lambda x.\lambda y.x\ y)\ (\underbrace{\underbrace{(\lambda x.\lambda y.x\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{a}_{\text{Rand}}}\ b))\ c$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $(\lambda x.\lambda y.x\ y)\ (\underbrace{\underbrace{(\lambda y.a\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{b}_{\text{Rand}}})\ c$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $(\underbrace{\underbrace{(\lambda x.\lambda y.x\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(a\ b)}_{\text{Rand}}})\ c$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $\underbrace{\underbrace{(\lambda y.(a\ b)\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{c}_{\text{Rand}}}$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $(a\ b)\ c$

...fertig, Normalform erreicht: Keine β-, η-Reduktion mehr anwendbar.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Beispiele zu Reduktionsfolgen, -ordnungen (3)

Beispiel 2′: Normale Ordnung

$$\underbrace{(\lambda x.\lambda y.x\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(((\lambda x.\lambda y.x\ y)\ a)\ b)}_{\text{Rand}})\ c$$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $\underbrace{(\lambda y.(((\lambda x.\lambda y.x\ y)\ a)\ b)\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{c}_{\text{Rand}}$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $(((\underbrace{(\lambda x.\lambda y.x\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{a}_{\text{Rand}})\ b)\ c$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $((\underbrace{(\lambda y.a\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{b}_{\text{Rand}})\ c$

(β-Reduktion) $\longrightarrow$ $(a\ b)\ c$

...fertig, Normalform erreicht: Keine β-, η-Reduktion mehr anwendbar.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Kapitel 12.3.4

Normalformen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Normalformen

...existieren nicht notwendig; nicht jeder λ-Ausdruck

- besitzt eine Normalform, ist in Normalform konvertierbar.

Beispiel: Der Ausdruck

- $\underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rand}} \longrightarrow \lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x) \longrightarrow \ldots$

  ...reproduziert sich durch fortgesetzte β-Reduktionen endlos: Eine Normalform existiert nicht!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Reduktionsfolgen

...terminieren nicht notwendig mit einem

- λ-Ausdruck in Normalform, auch wenn eine existiert.

Beispiel:

- $\underbrace{(\lambda x.y)}_{\text{Rator}} \underbrace{(\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x))}_{\text{Rand}} \longrightarrow y$

  Normale Reduktion terminiert in einem Schritt mit Normalform!

- $(\lambda x.y)\ (\underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rand}}) \longrightarrow (\lambda x.y)\ (\underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rand}})$

  $\longrightarrow$ ...

  Applikative Reduktion terminiert nicht, obwohl Normalform existiert!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Hauptresultate: Die Church/Rosser-Theoreme

Seien e_1, e_2 zwei λ-Ausdrücke.

Theorem 12.3.4.1 (Konfluenz-, Diamant-, Rauteneig.)

Wenn e_1, e_2 ineinander konvertierbar sind, d.h. $e_1 \longleftrightarrow e_2$, dann gibt es einen gemeinsamen λ-Ausdruck e, zu dem e_1, e_2 reduziert werden können, d.h. $e_1 \longrightarrow^* e$ und $e_2 \longrightarrow^* e$.

Informell: Wenn eine Normalform existiert, dann ist sie (bis auf α-Konversion) eindeutig bestimmt!

Theorem 12.3.4.2 (Standardisierung)

Wenn e_1 zu e_2 mit einer endlichen Reduktionsfolge reduzierbar ist, d.h. $e_1 \longrightarrow^* e_2$, und e_2 in Normalform ist, dann führt auch die normale Reduktionsfolge von e_1 nach e_2.

Informell: Normale Reduktion terminiert am häufigsten, so oft wie überhaupt nur möglich!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Folgerungen

...aus den Church/Rosser-Theoremen (Alonzo Church, John Barkley Rosser (1936)):

- Theorem 12.3.4.1 garantiert, dass die Normalform eines λ-Ausdrucks (bis auf α-Konversionen) eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert; λ-Ausdrücke in Normalform lassen sich (abgesehen von α-Konversionen) nicht mehr weiter reduzieren, vereinfachen.
- Theorem 12.3.4.2 garantiert, dass die normale Reduktionsordnung mit der Normalform terminiert, wenn es irgendeine Reduktionsfolge mit dieser Eigenschaft gibt, d.h. die normale Reduktionsordnung terminiert mindestens so häufig wie jede andere Reduktionsstrategie, mithin am häufigsten.

Omnia viae Romam ducunt.
Alle Wege führen zum Ergebnis
(wenn sie denn zum Ergebnis führen).

lat., sprichwörtl., abgewandelt

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 12.3.5

Semantik von λ-Ausdrücken

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Semantik von λ-Ausdrücken

...die Church/Rosser-Theoreme und ihre Garantien legen nahe, die Semantik (oder Bedeutung) der Ausdrücke des reinen λ-Kalküls in folgender Weise festzulegen:

Definition 12.3.5.1 (Semantik von λ-Ausdrücken)

Sei e ein λ-Ausdruck. Die Semantik von e ist

- seine (bis auf α-Konversionen) eindeutig bestimmte Normalform, wenn sie existiert; die Normalform ist die Bedeutung und der Wert von e.
- undefiniert, wenn die Normalform nicht existiert.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Determiniertheit, Turingmächtigkeit

Lemma 12.3.5.2 (Determiniertheit)

Wenn ein λ-Ausdruck in einen λ-Ausdruck in Normalform konvertierbar ist, dann führt jede terminierende Reduktionsfolge des λ-Ausdrucks (bis auf α-Konversion) zu dieser Normalform, d.h. das Resultat jeder terminierenden Reduktionsfolge ist (bis auf α-Konversion) determiniert.

Theorem 12.3.5.3 (Turingmächtigkeit)

Eine Funktion ist im λ-Kalkül genau dann berechenbar, wenn sie Turing-berechenbar, Markov-berechenbar, etc., ist, d.h. im λ-Kalkül sind alle Funktionen berechenbar, die Turing-berechenbar, Markov-berechenbar, etc., sind und umgekehrt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Kapitel 12.3.6

Rekursion vs. Y-Kombinator

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Rekursion

...ist im reinen λ-Kalkül nicht vorgesehen!

Betrachte die argumentfrei definierte rekursive Haskell-Rechenvorschrift `fac`:

```
fac = \n -> if n == 0 then 1 else n * fac (n - 1)
```

Im λ-Kalkül (wie in Haskell) stellt sich folgendes Problem:

- λ-Abstraktionen sind anonym und können deshalb nicht (rekursiv) aufgerufen werden:
  $\lambda n.$ if $n = 0$ then 1 else $n *$ ...???...

  ...es gibt keinen Namen, den wir für '???' einsetzen können.

Rekursive Aufrufe wie im Rumpf von `fac` lassen sich deshalb im reinen λ-Kalkül nicht ausdrücken.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Abhilfe: Kombinatoren, der Y-Kombinator

...λ-Terme ohne freie Variablen heißen Kombinatoren.

Der Y-Kombinator, ein spezieller Kombinator:

$$\texttt{Y = } \lambda\texttt{f.(}\lambda\texttt{x.(f (x x)) }\lambda\texttt{x.(f (x x)))}$$

...ein Kombinator mit Selbstanwendung:

$$\texttt{Y = } \lambda\texttt{f.(}\underbrace{\lambda\texttt{x.(f (x x))}}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\lambda\texttt{x.(f (x x))}}_{\text{Rand}}\texttt{)}$$

...Rator ident mit Rand: Selbstanwendung!

und der Fähigkeit, sich zu reproduzieren, zu kopieren!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schlüsselfähigkeit des Y-Kombinators

...Selbstreproduktion plus Argumentkopie!

Für e λ-Ausdruck ist (Y e) zu (e (Y e)) konvertierbar:

$$\begin{aligned}
\texttt{Y e} &\longleftrightarrow \underbrace{(\lambda\texttt{f.}(\lambda\texttt{x.}(\texttt{f (x x)})\ \lambda\texttt{x.}(\texttt{f (x x)})))}_{=\texttt{Y}}\ \texttt{e} \\
&\longrightarrow \underbrace{\lambda\texttt{x.}(\texttt{e (x x)})\ \lambda\texttt{x.}(\texttt{e (x x)})}_{=\texttt{Y e}} \\
&\longrightarrow \underbrace{\texttt{e}\ (\lambda\texttt{x.}(\texttt{e (x x)})\ \lambda\texttt{x.}(\texttt{e (x x)}))}_{=\texttt{e (Y e)}} \\
&\longleftrightarrow \underbrace{\texttt{e}}_{\text{Kopie}}\ (\underbrace{\texttt{Y e}}_{\text{Selbstreproduktion}}\ )
\end{aligned}$$

...Selbstreproduktion plusKopie des Arguments e!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Der Y-Kombinator

...ermöglicht es, Rekursion durch

- Kopieren

zu ersetzen und zu realisieren.

Idee: Überführe eine rekursive Darstellung von f in eine nicht-rekursive Darstellung, die den Y-Kombinator verwendet:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{f} = \cdots \mathsf{f} \cdots && \text{(Rekursive Darstellung von f)} \\
\rightsquigarrow\ & \mathsf{f} = \lambda \mathsf{f}.\,(\cdots \mathsf{f} \cdots)\ \mathsf{f} && (\lambda\text{-Abstraktion}) \\
\rightsquigarrow\ & \mathsf{f} = \underbrace{\mathsf{Y}\ \lambda \mathsf{f}.\,(\cdots \mathsf{f} \cdots)}_{\text{`Y e'}} && \text{(Nichtrekursive Darstellung von f)}
\end{aligned}
$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Übungsaufgabe 12.3.6.1

1. Analogie: Vergleiche den Effekt des Y-Kombinators mit der Kopierregelsemantik prozeduraler Programmiersprachen.
2. Anwendung des Y-Kombinators: Gegeben ist die rekursionsfreie Darstellung von `fac` mit Y-Kombinator:

$$\text{fac} = \text{Y}\ \lambda\text{f}.\,(\lambda\text{n}.\,\text{if n} == 0\ \text{then 1 else n} * \text{f}\ (\text{n - 1}))$$

   2.1 Rechne nach, dass sich der Term `(fac 1)` auf den Normalformterm `1` reduzieren lässt:

$$\text{fac } 1 \longrightarrow \ \ldots\ \longrightarrow 1$$

   2.2 Überprüfe dabei, dass durch den Y-Kombinator Rekursion durch wiederholtes Kopieren ersetzt ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 12.4

Angewandte λ-Kalküle

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Angewandte λ-Kalküle

...sind syntaktisch angereicherte Varianten des reinen λ-Kalküls.

In Ausdrücken angewandter λ-Kalküle können

- Konstanten, Funktionsnamen, 'übliche' Operatoren ähnlich wie Namen auftreten und an die Seite von λ-Abstraktionen treten:

  42, 3.14, true, false, $+$, $*$, $-$, fac, binom, ...
- neue Ausdrücke als Abkürzungen eingeführt und verwendet werden:

  cond e e_1 e_2 , if e then e_1 else e_2, ...
- Typen auftreten, Ausdrücke getypt sein:

  $42 : \mathbb{N}$, $3.14 : \mathbb{R}$, true : IBool, ...
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Wohlgeformte Ausdrücke

...angewandter λ-Kalküle können also auch

- Applikative Terme wie
  2+3, fac 3, fib (2+3), binom x y, ((binom x) y), ...
- Abstraktionsterme wie
  $\lambda x.\,(x + x)$, $\lambda x.\lambda y.\lambda z.\,(x * (y - z))$,
  $(\lambda x.$ if odd x then $x * 2$ else x div 2), ...

sein, für deren Auswertung zusätzliche Reduktionsregeln eingeführt werden, sog.:

- δ-Reduktionen

...für die Auswertung, Reduktion arithmetischer Ausdrücke, bedingter Ausdrücke, Operationen auf Listen, etc.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiel

...δ-Reduktionsfolge: Unecht 'applikative' Ordnung
(unecht, da ohne Verzahnung von β-, η- und δ-Reduktionen)

$(\lambda x.\lambda.\, x{*}y)\ ((\lambda x.\lambda y.\, x{+}y)\ 9\ 5)\ 3$

(β-Reduktion, li)	$\longrightarrow$	$(\lambda x.\lambda y.\, x{*}y)\ ((\lambda y.\, 9+y)\ 5)\ 3$
(β-Reduktion, li)	$\longrightarrow$	$(\lambda x.\lambda y.\, x{*}y)\ (9+5)\ 3$
(β-Reduktion, li)	$\longrightarrow$	$(\lambda y.\, (9+5)*y)\ 3$
(β-Reduktion, li)	$\longrightarrow$	$(9+5)*3$

...keine β-, η-Reduktion mehr anwendbar; weiter mit δ-Reduktionen:

	...	$(9+5)*3$
(δ-Reduktion, li)	$\longrightarrow$	$14*3$
(δ-Reduktion, li)	$\longrightarrow$	42

Anm.: Ratoren in rot, Randen in gold; li für linkest-innerst.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiel′

...δ-Reduktionsfolge: Applikative Ordnung

$$
\begin{array}{lcl}
(\lambda x.\lambda.\, x{*}y)\ ((\lambda x.\lambda y.\, x{+}y)\ 9\ 5)\ 3 & & \\
\quad (\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda x.\lambda y.\, x{*}y)\ ((\lambda y.\, 9+y)\ 5)\ 3 \\
\quad (\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda x.\lambda y.\, x{*}y)\ (9+5)\ 3 \\
\quad (\delta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda x.\lambda y.\, x{*}y)\ 14\ 3 \\
\quad (\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda y.\, 14*y)\ 3 \\
\quad (\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & 14*3 \\
\quad (\delta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & 42
\end{array}
$$

Anm.: Ratoren in rot, Randen in gold; li für linkest-innerst.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe 12.4.1

δ-Reduktionsfolgen

Gegeben ist der λ-Ausdruck e:

$$(\lambda x.\lambda.\, x{*}y)\ ((\lambda x.\lambda y.\, x{+}y)\ 9\ 5)\ 3$$

Ergänze die applikative δ-Reduktionsfolge für diesen Ausdruck aus dem vorhergehenden Beispiel um

1. die normale δ-Reduktionsfolge.
2. zwei weitere zur Normalform führende δ-Reduktionsfolgen verschieden von der applikativen und normalen Folge.

Gibt es darüberhinaus weitere verschiedene zur Normalform führende Reduktionsfolgen für e?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typisierte λ-Kalküle

...ordnen jedem wohlgeformten Ausdruck einen Typ zu, z.B.:

$$\begin{aligned} 3 &: \mathsf{Int} \\ (*) &: \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \\ (\lambda x.2 * x) &: \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \\ (\lambda x.2 * x)\ 3 &: \mathsf{Int} \end{aligned}$$

Dabei treten 2 Schwierigkeiten auf:

1. Ausdrücke mit Selbstanwendung (wie z.B. der Y-Kombinator) haben
   - keinen endlichen Typ, ihr Typ ist nicht durch einen gewöhnlichen endlichen Typausdruck beschreibbar.
2. Kombinatoren wie der Y-Kombinator können
   - nicht zur Modellierung von Rekursion verwendet werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Überwindung

...der Typisierungsschwierigkeit:

- Rigoros: Übergang zu mächtigeren Typsprachen (Bereichstheorie, reflexive Bereiche (engl. domain theory, reflexive domains)).

...der Rekursionsschwierigkeit:

- Pragmatisch: Explizite Hinzunahme der Reduktionsregel

  $Y\ e \longrightarrow e\ (Y\ e)$

  zum Kalkül.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Rechtfertigung, formale Fundierung

...des Umgangs mit angereicherten angewandten λ-Kalkülen u. des pragmatischen Hinzunehmens einer Reduktionsregel für Rekursion:

Resultate aus der theoretischen Informatik, insbesondere:

- Alonzo Church. The Calculi of Lambda-Conversion. Annals of Mathematical Studies, Vol. 6, Princeton University Press, 1941.

  ...u.a. zur Modellierung ganzer Zahlen, Wahrheitswerten, etc. durch Ausdrücke des reinen λ-Kalküls.

Anmerkung: Aus praktischer Sicht ist

- der Übergang zu angewandten λ-Kalkülen sinnvoll und nützlich (für theoretische Untersuchungen zur Berechenbarkeit (Berechenbarkeitstheorie) ist er kaum relevant).
- die Hinzunahme einer Rekursionsregel aus Effizienzgründen ebenfalls zweckmäßig.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 12.5

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zusammenfassung aus Haskell-Perspektive

- Haskell beruht auf angewandten typisierten λ-Kalkülen.
- Übersetzer, Interpretierer prüfen, ob die Typisierung von Haskell-Programmen wohlgetypt, konsistent ist.
- Programmierer können Typdeklarationen angeben (aussagekräftigere Fehlermeldungen, Sicherheit), müssen aber nicht (bequem, doch u.U. mit unerwarteten Folgen, etwa bei "zufällig" korrekter, aber "ungemeinter" Typisierung: "gemeinte" Typisierung wäre bei Angabe bei der Typprüfung als inkonsistent aufgefallen).
- Typinformation (gleich ob angegeben oder nicht) wird vom Übersetzer, Interpretierer inferiert, berechnet.
- Rekursion kann unmittelbar ausgedrückt werden (Y-Kombinator nicht erforderlich).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schlussanekdote

...zur Entwicklung der λ-Notation anhand der mit einer anonymen λ-Abstraktion definierten Fakultätsfunktion:

```
fac :: Integer -> Integer
fac = \n -> (if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1)))
```

In Haskell abweichend vom λ-Kalkül also Verwendung von

- "\" und "->" anstelle von "λ" und "."

...der Weg dorthin war kurvenreich:

	$(\overset{\frown}{n.\ n+1})$	(Churchs handschriftliche Schreibweise)
$\rightsquigarrow$	$(\wedge n.\ n+1)$	(Churchs notat. Zugeständnis an Schriftsetzer)
$\rightsquigarrow$	$(\lambda n.\ n+1)$	(Pragmatische Umsetzung durch Schriftsetzer)
$\rightsquigarrow$	`(\n -> n+1)`	(Approximative ASCII-Umsetzung in Haskell)

(siehe: Peter Pepper. Funktionale Programmierung in Opal, ML, Haskell und Gofer. Springer-V., 2. Auflage, 2003, S. 22.)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 12.6

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (1)


Wilhelm Ackermann. *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*. Mathematische Annalen 99:118-133, 1928.


Zena M. Ariola, Matthias Felleisen, John Maraist, Martin Odersky, Philip Wadler. *The Call-by-Need Lambda Calculus*. In Conference Record of the 22nd Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'95), 233-246, 1995.


Hendrik Pieter Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Revised Edn., North-Holland, 1984. (Kapitel 1, Introduction; Kapitel 2, Conversion; Kapitel 3, Reduction; Kapitel 6, Classical Lambda Calculus; Kapitel 11, Fundamental Theorems)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (2)


Hendrik P. Barendregt, Erik Barendsen. *Introduction to the Lambda Calculus*. Revised Edn., Technical Report, University of Nijmegen, March 2000.
`ftp://ftp.cs.kun.nl/pub/CompMath.Found/lambda.pdf`


Henrik P. Barendregt, Wil Dekkers, Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Cambridge University Press, 2012.


Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 19, Berechenbarkeit und Lambda-Kalkül)


Alonzo Church. *A Set of Postulates for the Foundation of Logic*. Annals of Mathematics 2(33):346-366, 1932.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (3)


Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Annals of Mathematical Studies, Vol. 6, Princeton University Press, 1941.


Antonie J.T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 5, Lambda Calculus)


Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 4, Der Lambda-Kalkül)


Anthony J. Field, Peter G. Robinson. *Functional Programming*. Addison-Wesley, 1988. (Kapitel 6, Mathematical foundations: the lambda calculus)


Robert M. French. *Moving Beyond the Turing Test*. Communications of the ACM 55(12):74-77, 2012.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (4)

- Robin Gandy. *The Confluence of Ideas in 1936*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 51-102, 1995.
- Chris Hankin. *An Introduction to Lambda Calculi for Computer Scientists*. King's College London Publications, 2004. (Kapitel 1, Introduction; Kapitel 2, Notation and the Basic Theory; Kapitel 3, Reduction; Kapitel 10, Further Reading)
- David Harel. *Algorithmics: The Spirit of Computing*. Addison-Wesley, 2. Auflage, 1992.
- Ian Horswill. *What is Computation?* Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):8-14, 2012.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (5)


Achim Jung. *Berechnungsmodelle*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 73-88, 2006. (Kapitel 2.1, Speicherorientierte Modelle: Turing-Maschinen, Registermaschinen; Kapitel 2.2, Funktionale Modelle: Algebraische Kombinationen, Primitive Rekursion, μ-Rekursion, λ-Kalkül)


Stephen C. Kleene. *General Recursive Functions of Natural Numbers*. Mathematische Annalen 112:727-742, 1936.


Stephen C. Kleene. *λ-Definability and Recursiveness*. Duke Mathematical Journal 2:340-352, 1936.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (6)

- Stephen C. Kleene. *Origins of Recursive Function Theory*. Annals of the History of Computing 3:52-67, 1981.
- Wolfram-Manfred Lippe. *Funktionale und Applikative Programmierung*. eXamen.press, 2009. (Kapitel 2.1, Berechenbare Funktionen; Kapitel 2.2, Der λ-Kalkül)
- John Maraist, Martin Odersky, David N. Turner, Philip Wadler. *Call-by-name, Call-by-value, call-by-need, and the Linear Lambda Calculus*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science 1:370-392, 1995.
- John Maraist, Martin Odersky, Philip Wadler. *The Call-by-Need Lambda Calculus*. Journal of Functional Programming 8(3):275-317, 1998.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (7)


John Maraist, Martin Odersky, David N. Turner, Philip Wadler. *Call-by-name, Call-by-value, call-by-need, and the Linear Lambda Calculus*. Theoretical Computer Science 228(1-2):175-210, 1999.


John McCarthy. *A Basis for a Mathematical Theory of Computation*. In *Computer Programming and Formal Systems*, P. Braffort, D. Hirschberg (Hrsg.), North-Holland, 33-70, 1963.


Greg Michaelson. *An Introduction to Functional Programming through Lambda Calculus*. Dover Publications, 2. Auflage, 2011. (Kapitel 2, Lambda calculus; Kapitel 4.1, Repetition, iteration and recursion; Kapitel 4.3, Passing a function to itself; Kapitel 4.6, Recursion notation; Kapitel 8, Evaluation)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (8)


William Newman. *Alan Turing Remembered – A Unique Firsthand Account of Formative Experiences with Alan Turing*. Communications of the ACM 55(12):39-41, 2012.


Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 9, Formalismen 1: Zur Semantik von Funktionen)


Rózsa Péter. *Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktionen*. Mathematische Annalen 110:612-632, 1934.


Rózsa Péter. *Konstruktion nichtrekursiver Funktionen*. Mathematische Annalen 111:42-60, 1935.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (9)

- Gordon Plotkin. *Call-by-name, Call-by-value, and the λ-Calculus*. Theoretical Computer Science 1:125-159, 1975.
- Omer Reingold. *Through the Lens of a Passionate Theoretician*. Communications of the ACM 63(3):25-27, 2020.
- Uwe Schöning, Wolfgang Thomas. *Turings Arbeiten über Berechenbarkeit – eine Einführung und Lesehilfe*. Informatik Spektrum 35(4):253-260, 2012. (Abschnitt Äquivalenz zwischen Turingmaschinen und Lambda-Kalkül)
- Boris A. Trakhtenbrot *Comparing the Church and Turing Approaches: Two Prophetical Messages*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 557-582, 1995.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (10)

Allen B. Tucker (Editor-in-Chief). *Computer Science. Handbook*. Chapman & Hall/CRC, 2004. (Kapitel 92.3, The Lambda Calculus: Foundation of All Functional Languages)

Ingo Wegener. *Grenzen der Berechenbarkeit*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 111-118, 2006. (Kapitel 4.1, Rechnermodelle und die Churchsche These)

Avi Wigderson. *Mathematics and Computation: A Theory Revolutionizing Technology and Science*. Princeton University Press, 2019.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 13

Auswertungsordnungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.1

Überblick, Orientierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Auswertungsordnungen

...legen fest:

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
 ->> ... ->> 'große Zahl'
```

1. Wo wird in einem komplexen Ausdruck 'gerechnet'?

   Mögliche Antworten:
   - Links
   - Rechts
   - Halblinks
   - Mittig
   - ...

2. Wann werden Funktionstermargumente ausgewertet?

   Mögliche Antworten:
   - Vor
   - Nach
   - Mal so, mal so

   der Expansion des Funktionsterms.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die Antwort

...auf:

- Frage 1 ist pragmatisch:
  - So weit links wie möglich!

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+...
 ->> 8+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+...
```

- Frage 2 ist spannender und geteilt:
  - Applikativ: Argumentauswertung vor Expansion
  - Normal: Argumentauswertung nach Expansion

Applikativ:

```
                Simpl.          Exp.          Simpl.
squ (2+2)  ->>  squ 4  ->>  4 * 4  ->>  16
```

Normal:

```
                Exp.                  Simpl.          Simpl.          Simpl.
squ (2+2)  ->>  (2+2) * (2+2)  ->>  4 * (2+2)  ->>  4 * 4  ->>  16
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Somit: Wir unterscheiden

...zwei Auswertungsordnungen als Antwort auf Frage 2:

1. Applikativ
   - Kennzeichen: Arg.Auswertung vor Expansion, d.h. sofortige, frühe Arg.Auswertung in Funktionstermen.
2. Normal
   - Kennzeichen: Arg.Auswertung nach Expansion, d.h. aufgeschobene, späte Arg.Auswertung in Funktionstermen.

mit drei Operationalisierungen als Antwort auf Frage 1:

1. Linksapplikativ: Frühe, fleißige Auswertung (engl. eager evaluation).
2. Linksnormal (ohne implementierungspraktische Bedeutung).
3. Linksnormal mit Ausdrucksteilung (engl. expression sharing) als Implementierungskniff: Späte, faule Auswertung (engl. lazy evaluation).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

In einem Satz

...Auswertungsordnungen geben eine konkrete Antwort auf Frage 1 und Frage 2 und organisieren damit das Zusammenspiel des

- Expandierens (E) (von Funktionstermen)
- Simplifizierens (S) (von Ausdrücken verschieden von Funktionstermen)

von Ausdrücken mit dem Ziel, sie so weit zu vereinfachen wie irgend möglich, also ihren Wert zu berechnen:

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
 ->> ... ->> 'große Zahl'
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.2

Applikative, normale Funktionstermauswertung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.2.1

Applikative Funktionstermauswertung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Applikative Funktionstermauswertung

...heißt Argumentauswertung vor Expansion:

Ein Funktionsterm `(f ausd`$_1$ `...` `ausd`$_n$`)` wird ausgewertet, indem:

1. die Argumentausdrücke `ausd`$_1$`,...,ausd`$_n$ werden vollständig zu ihren Werten `w`$_1$`,...,w`$_n$ ausgewertet.
2. `w`$_1$`,...,w`$_n$ werden im Rumpf von `f` für die Parameter von `f` eingesetzt.
3. der entstandene expandierte Ausdruck wird ausgewertet.

Das Vorgehen bei applikativer Argumentauswertung motiviert zusätzliche Sprechweisen (s. auch Kap. 13.5):

- Wertparameter-, innerste, strikte Auswertung (engl. call-by-value, innermost, strict evaluation).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.2.2

Normale Funktionstermauswertung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Normale Funktionstermauswertung

...heißt Argumentauswertung nach Expansion:

Ein Funktionsterm `(f ausd`$_1$ `...` `ausd`$_n$`)` wird ausgewertet, indem:

1. die Argumentausdrücke `ausd`$_1$`,...,ausd`$_n$ werden unausgewertet im Rumpf von `f` für die Parameter von `f` eingesetzt.
2. der entstandene expandierte Ausdruck wird ausgewertet.

Das Vorgehen normaler Argumentauswertung motiviert gleichfalls zusätzlich Sprechweisen (s. auch Kap. 13.5):

- Namensparameter-, äußerste Auswertung (engl. call-by-name, outermost evaluation).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.2.3

Beispiele

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die Funktion binom3

```
binom3 x y :: Int -> Int -> Int
binom3 x y = (x + y) * (x - y)

binom3 16 ((5-3)*7) ->> ... ->> 60
```

Applikative Funktionstermauswertung:

```
          binom3 16 ((5-3)*7) (erst Arg. vereinfachen...)
(S) ->> binom3 16 (2*7)
(S) ->> binom3 16 14              (...dann expandieren!)
(E) ->> (16 + 14) * (16 - 14)
(S) ->> ...
(S) ->> 60
```

Normale Funktionstermauswertung:

```
          binom3 16 ((5-3)*7)     (sofort expandieren!)
(E) ->> (16 + ((5-3)*7)) * (16 - ((5-3)*7))
(S) ->> ...
(S) ->> 60
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Die Fakultätsfunktion `fac`

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))
```

```
fac 2 ->> ... ->> 2
```

```
        fac 2
(E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2 - 1))
(S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2 - 1))
(S) ->> 2 * (fac (2 - 1))
(?) ...expandierend oder simplifizierend fortfahren?
```

Mit dem Funktionsterm `(fac (2 - 1))` kann jetzt:

- applikativ (mit Rechnen auf Argumentposition)
- normal (mit Expandieren des Aufrufs)

auswertend fortgefahren werden.

...beide Möglichkeiten führen wir im Detail aus.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Applikative, normale Auswertungsweise

Applikativ: `2 * fac (2-1)` (Arg.vereinf. zuerst)

(S) ->> `2 * fac 1`

(E) ->> `2 * (if 1 == 0 then 1 else (1 * fac (1-1)))`

(S) ->> `2 * (if False then 1 else (1 * fac (1-1)))`

(S) ->> `2 * (1 * fac (1-1))`

(S) ->> ...in diesem Stil fortfahren.

Normal: `2 * fac (2-1)` (Expansion zuerst)

(E) ->>
```
2 * (if (2-1) == 0 then 1
        else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
```

(S) ->>
```
2 * (if 1 == 0 then 1
        else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
```

(S) ->>
```
2 * (if False then 1
        else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
```

(S) ->> `2 * ((2-1) * fac ((2-1)-1))`

(S) ->> `2 * (1 * fac ((2-1)-1))`

(E) ->> ...in diesem Stil fortfahren.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die vollständige applikative Auswertung (1)

```
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))
```

...für den Aufruf `fac (1+1)` (statt `fac 2`):

```
          fac (1+1)          (Argument wird sofort ausgewertet)
(S) ->>   fac 2              (Expansion nach max. Argumentvereinf.)
(E) ->>   if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->>   if False then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->>   2 * fac (2-1)          (Arg. wird sofort ausgewertet)
(S) ->>   2 * fac 1              (Exp. nach max. Argumentvereinf.)
(E) ->>   2 * (if 1 == 0 then 1
                  else (1 * fac (1-1)))
(S) ->>   2 * (if False then 1
                  else (1 * fac (1-1)))
(S) ->>   2 * (1 * fac (1-1)) (Arg. wird sofort ausgewertet)
(S) ->>   2 * (1 * fac 0)        (Exp. nach max. Arg.vereinf.)
(E) ->>   2 * (1 * (if 0 == 0 then 1
                       else (0 * fac (0-1))))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die vollständige applikative Auswertung (2)

```
(S) ->> 2 * (1 * (if False then 1
                       else (0 * fac (0-1))))
(S) ->> 2 * (1 * 1)
(S) ->> 2 * 1
(S) ->> 2
```

$\rightsquigarrow$ Applikative, fleißige, frühe Argumentauswertung
(engl. applicative, eager order evaluation)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die vollständige normale Auswertung (1)

```
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))
```

...für den Aufruf `fac (1+1)` (statt `fac 2`):

```
          fac (1+1)      (Sofortige Exp., keine vorh. Arg.vereinf.)
  (E) ->> if (1+1) == 0 then 1
             else ((1+1) * fac ((1+1)-1))
  (S) ->> if 2 == 0 then 1
             else ((1+1) * fac ((1+1)-1))
  (S) ->> if False then 1
             else ((1+1) * fac ((1+1)-1))
  (S) ->> ((1+1) * fac ((1+1)-1))
  (S) ->> (2 * fac ((1+1)-1))                    (Sofortige Exp.)
  (E) ->> 2 * (if ((1+1)-1) == 0 then 1
             else (((1+1)-1) * fac (((1+1)-1)-1)))
 (3S) ->> 2 * (if False then 1
             else (((1+1)-1) * fac (((1+1)-1)-1)))
  (S) ->> 2 * (((1+1)-1) * fac (((1+1)-1)-1))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Die vollständige normale Auswertung (2)

```
(S) ->> 2 * ((2-1) * fac (((1+1)-1)-1))
(S) ->> 2 * (1 * fac (((1+1)-1)-1))   – Sofortige Exp.
(E) ->> 2 * (1 * (if (((1+1)-1)-1) == 0 then 1
    else (((1+1)-1)-1) * fac ((((1+1)-1)-1)-1)))
(4S) ->> 2 * (1 * (if True then 1
    else (((1+1)-1)-1) * fac ((((1+1)-1)-1)-1)))
(S) ->> 2 * (1 * 1)
(S) ->> 2 * 1
(S) ->> 2
```

$\rightsquigarrow$ Normale Argumentauswertung
(engl. normal order evaluation)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.3

Linksapplikative, linksnormale Auswertung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Linksapplikative, linksnormale Auswertung

...wichtige praktische Operationalisierungen

- applikativer
- normaler

Auswertung, die neben der Art der

- Argumentauswertung von Funktionstermen (vor/nach Expansion)

auch festlegen

- an welcher Stelle in einem Ausdruck gerechnet wird (linkestmöglich)

und damit eine eindeutige Auswertungsreihenfolge für komplexe Ausdrücke wie:

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
```

festlegen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Im Detail: Applikativ, normal auszuwerten

...sind Antwort auf die erste operationell wichtige Frage für die Auswertung komplexer Ausdrücke:

1. Wie ist mit (Funktions-) Argumenten umzugehen?
   $\rightsquigarrow$ Ausgewertet oder unausgewertet übergeben?
   - Applikativ (innerst): Ausgewertet übergeben.
   - Normal (äußerst): Unausgewertet übergeben.

Linksapplikativ, linksnormal auszuwerten sind Antwort auf die zweite operationell wichtige Frage:

2. Wo ist im Ausdruck auszuwerten?
   $\rightsquigarrow$ Links, rechts, halblinks, in der Mitte?
   - Linksapplikativ (linksinnerst): Linkestinnerste Stelle.
   - Linksnormal (linksäußerst): Linkestäußerste Stelle.

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel: Linksapplikative Auswertung

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib(squ 4))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib((4*4)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib 16)+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib (16-2)+fib(16-1)) + 3*5 +...
->> 8+fac(fib 14+fib(16-1)) + 3*5 +...
->> ...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel: Linksnormale Auswertung

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+(if fib(squ(2+2))==0 then 1 else n*fac(fib(squ(2+2))-1))
                          +3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+( if (if squ(2+2)==0 then 0
          else if squ(2+2)==1 then 1
              else fib(squ(2+2)-2)+fib(squ(2+2)-1))==0
     then 1 else n*fac(fib(squ(2+2))-1)) + 3*5 +...
->> 8+( if (if (2+2)*(2+2)==0 then 0
          else if squ(2+2)==1 then 1
              else fib(squ(2+2)-2)+fib(squ(2+2)-1))==0
     then 1 else n*fac(fib(squ(2+2))-1)) + 3*5 +...
->> 8+( if (if 4*(2+2)==0 then 0
          else if squ(2+2)==1 then 1
              else fib(squ(2+2)-2)+fib(squ(2+2)-1))==0
     then 1 else n*fac(fib(squ(2+2))-1)) + 3*5 +...
->> ...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beachte

...dass bei der Expansion von `fib` bei linksnormaler Auswertung statt der musterbasierten Definition von `fib`:

```
fib :: Int-> Int      -- Musterbasierte Definition
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = fib (n-2) + fib (n-1)
```

für dieses Beispiel notationell einfacher die Version mit geschachteltem Fallunterscheidungsausdruck verwendet worden ist:

```
fib :: Int -> Int  -- Geschachtelte Falluntersch.
fib n = if n==0 then 0
        else if n==1 then 1
             else fib (n-2) + fib (n-1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Naheliegende Fragen

Welche Auswirkungen hat die Wahl von (links-) applikativer oder (links-) normaler Auswertungsordnung?

...auf:

1. Terminierungsverh., -häufigk.? (Th. 13.3.2, Th. 13.3.3)
2. Terminierungsgeschwindigkeit? (Th. 13.3.3, Kap. 13.5)
3. berechneten Ausdruckswert im Term.fall? (Th. 13.3.1)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die in Kapitel 12 bereits gegebenen Antworten

Die Church/Rosser-Theoreme 12.3.4.1, 12.3.4.2 garantieren:

Theorem 13.3.1 (Wertdeterminiertheit)

Jede terminierende Auswertungsfolge für einen Ausdruck endet mit demselben Ergebnis.

Informell: Terminierende Auswertungsfolgen widersprechen sich nicht.

Theorem 13.3.2 (Terminierungshäufigkeit)

Terminiert irgendeine Auswertungsfolge für einen Ausdruck, so terminiert auch seine (links-) normale Auswertung.

Informell: (Links-) normale Auswertung terminiert am häufigsten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die in Kap. 12 bereits gegeb. Antworten (fgs.)

Theorem 13.3.3 (Abweichendes Terminierungsverh.)

Die (links-) normale Auswertung eines Ausdrucks kann terminieren, während seine (links-) applikative nicht terminiert.

Summa summarum: (Links-) applikative und (links-) normale Auswertungsordnung können sich für einen Ausdruck unterscheiden in:

- Terminierungsverhalten (d.h. Terminierungshäufigkeit)
- Terminierungsgeschwindigkeit (d.h. Performanz)

nicht aber im:

- Ergebnis (wenn beide terminieren)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiele für den Beleg unterschiedlicher

...Terminierungsgeschwindigkeit, -häufigkeit:

- Die Quadratfunktion `squ` auf ganzen Zahlen:

```
squ :: Integer -> Integer
squ n = n * n
```

- Die nichtterminierende Inkrementfunktion `infinite`:

```
infinite :: Integer
infinite = 1 + infinite
```

- Die Projektionsfunktion `fst` für Paare:

```
fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x
```

- Drei Ausdrücke a1, a2, a3:

```
a1 = (17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)
a2 = fst (2*21,squ (squ (squ (1+1))))
a3 = fst (2*21,infinite)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Linksapplikative, linkestinnerste (LI) Auswert.

...von `a1 = (17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)`:

```
                ((17+4) + squ (squ (squ (1+1)))) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + squ (squ (squ (1+1)))) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + squ (squ (squ 2))) + (2*11)
(LI-E) ->> (21 + squ (squ (2*2))) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + squ (squ 4)) + (2*11)
(LI-E) ->> (21 + squ (4*4)) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + squ 16) + (2*11)
(LI-E) ->> (21 + 16*16) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + 256) + (2*11)
(LI-S) ->> 277 + (2*11)
(LI-S) ->> 277 + 22
(LI-S) ->> 299
```

Insgesamt: $1 + 7 + 3 = 11$ Schritte

...davon 7 Schritte für `squ (squ (squ (1+1)))`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Linksnormale, linkestäußerste (LÄ) Auswert.

...von `a1 = (17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)`:

```
            ((17+4) + squ (squ (squ (1+1)))) + (2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + squ (squ (squ (1+1)))) + (2*11)
(LÄ-E) ->> (21 + squ (squ (1+1)) * squ (squ(1+1))) + (2*11)
(LÄ-E) ->> (21+((squ(1+1))*(squ(1+1)))*squ(squ(1+1)))+(2*11)
(LÄ-E) ->> (21+((1+1)*(1+1)*sq(1+1))*squ(squ(1+1)))+(2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + (2*(1+1)*squ (1+1)) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + (2*2*squ (1+1)) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + (4 * squ (1+1)) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-E) ->> (21 + (4*((1+1)*(1+1))) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + (4*(2*(1+1))) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + (4*(2*2)) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + (4*4) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + 16 * squ (squ (1+1))) + (2*11)
       ->> ...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Linksnormale, linkestäußerste (LÄ) Ausw. (fgs.)

```
        ->> ...
(LÄ-S) ->> (21 + (16 * 16)) + (2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + 256) + (2*11)
(LÄ-S) ->> 277 + (2*11)
(LÄ-S) ->> 277 + 22
(LÄ-S) ->> 299
```

Insgesamt: $1 + ((1+10)+(1+10)+1) + 3 = 27$ Schritte

...davon 23 Schritte für `squ (squ (squ (1+1)))`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Linksapplikativ effizienter als linksnormal?

Nicht immer! Betrachte den zweiten Ausdruck:

```
a2 = first (2*21, squ (squ (squ (1+1))))
```

- Linksapplikative Auswertung:

```
                first (2*21, squ (squ (squ (1+1))))
(LI-S) ->>      first (42, squ (squ (squ (1+1))))
       ->>      ...
(LI-S) ->>      first (42, 256)
(LI-E) ->>      42
```

  Insgesamt: 1+7+1=9 Schritte (davon 7 für den Wert des unbenötigten zweiten Arguments!)

- Linksnormale Auswertung:

```
                first (2*21, squ (squ (squ (1+1))))
(LÄ-E) ->>      2*21
(LÄ-S) ->>      42
```

  Insgesamt: 2 Schritte (das unbenötigte zweite Argument wird überhaupt nicht ausgewertet!)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Linksapplikativ, linksnormal ‘termin.-gleich’?

Nicht immer! Betrachte den dritten Ausdruck:

```
a3 = first (2*21,infinite)
```

- Linksapplikative Auswertung:

```
                first (2*21,infinite)
(LI-S) ->> first (42,infinite)
(LI-E) ->> first (42,1+infinite)
(LI-E) ->> first (42,1+(1+infinite))
(LI-E) ->> ...
(LI-E) ->> first (42,1+(1+(1+(...+(1+infinite)...))))
(LI-E) ->> ...
```

  Insgesamt: Nichtterminierung, kein Resultat: undefiniert!

- Linksnormale Auswertung:

```
                first (2*21,infinite)
(LÄ-E) ->> 2*21
(LÄ-S) ->> 42
```

  Insgesamt: Terminierung, Res. 42 nach 2 Schritten: def.!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Unterschiedliche Terminierungshäufigkeit

..von linksapplikativer und linksnormaler Auswertung.

Das Beispiel des zweiten Ausdrucks

```
a2 = first (2*21,squ (squ (squ (1+1))))
```

zeigt:

- Linksapplikative und linksnormale Auswertung können sich im Terminierungsverhalten unterscheiden:
  - Applikativ: Nichttermination, kein Resultat: undefiniert.
  - Normal: Termination, sehr wohl ein Resultat: definiert.

Wichtig: Die umgekehrte Situation ist nicht möglich (siehe Theorem 13.3.1)!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Unterschiedliche Terminierungsgeschwindigkeit

...von linksapplikativer und linksnormaler Auswertung.

Das Beispiel des ersten Ausdrucks

```
a1 = (17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)
```

zeigt:

- Ergebnisgleichheit: Terminieren linksapplikative und linksnormale Auswertungsordnung für einen Ausdruck beide, so terminieren sie mit demselben Resultat (s. Theorem 13.3.1).
- Schrittzahlungleichheit: Linksapplikative und linksnormale Auswertung können bis zur Terminierung (mit gleichem Endresultat) unterschiedlich viele Expansions- und Simplifikationsschritte benötigen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Unordenbare Performanz

..von linksapplikativer und linksnormaler Auswertung.

Die Beispiele aller drei Ausdrücke zusammen zeigen:

```
a1 = (17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)
a2 = fst (2*21,squ (squ (squ (1+1))))
a3 = fst (2*21,infinite)
```

dass weder linksapplikative noch linksnormale Auswertung der jeweils anderen Auswertungsordnung stets überlegen ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.4

Späte, faule Auswertung: Eine Frage der Implementierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Linksnormale Auswertung

...hat ein Effizienzproblem:

- Funktionstermargumente werden (im schlimmsten Fall) so oft ausgewertet wie sie im Rumpf vorkommen.

Zum Vergleich linksapplikative Auswertung:

- Funktionstermargumente werden genau einmal ausgewertet, unabhängig davon, wie oft sie im Rumpf vorkommen.

Ziel:

- Linksnormale Auswertung so zu implementieren, dass Mehrfachauswertungen von Ausdrücken vermieden werden

und die Effizienzlücke im Vergleich zu linksapplikativer Auswertung geschlossen wird.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Dafür gebraucht: Ein Implementierungskniff!

...damit Mehrfachauswertungen von Ausdrücken vermieden werden.

Implementierungskniff:

- Ausdrucksdarstellung in Form von Graphen, wodurch gemeinsame (Teil-) Ausdrücke geteilt werden können (engl. expression sharing).

Damit:

- Ausdrucksauswertungen werden zu Transformationen auf Graphen.
- Wird ein Ausdruck ausgewertet, steht sein Wert an allen Verwendungsstellen zur Verfügung.

Name der resultierenden Auswertungsordnung:

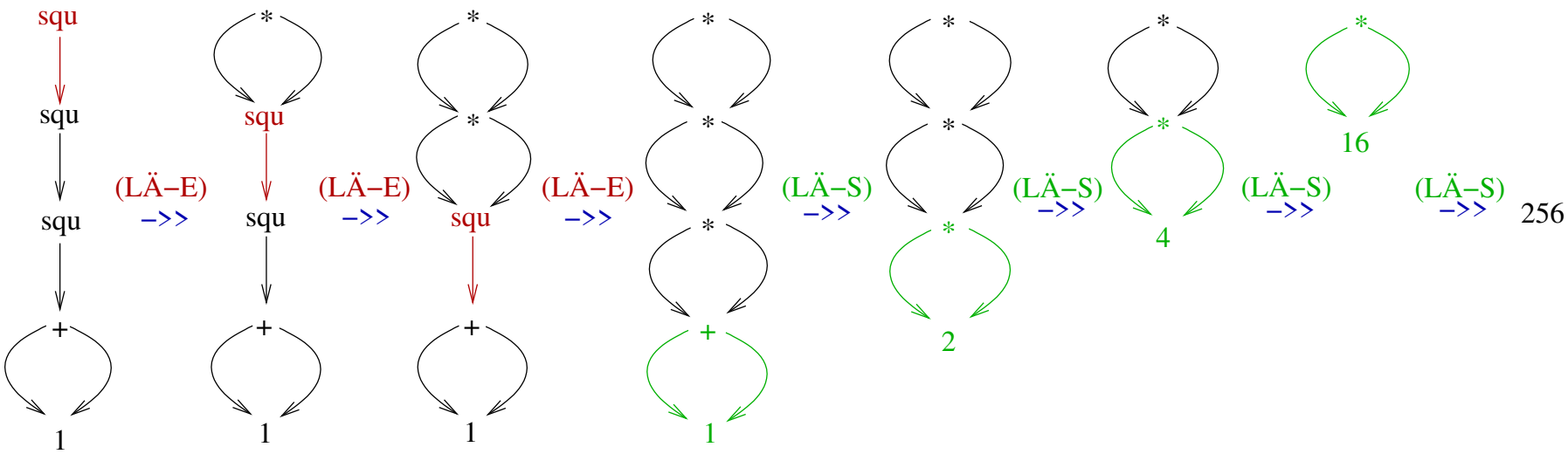
- Späte, faule Auswertung (engl. lazy evaluation)!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Späte, faule Auswertung

...garantiert, dass Argumente höchstens einmal ausgewertet werden (möglicherweise also gar nicht!).

Veranschaulichung: Ausdrucksrepräsentation, Ausdrucksauswertung auf Graphen:



Insgesamt: 7 Schritte.

(Statt 22 Schritte bei (naiver) linksnormaler Auswertung.)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zusammengefasst

Späte, faule Auswertung (engl. lazy evaluation)

- ist eine effiziente Implementierungsumsetzung linksnormaler Auswertung.
- erfordert implementierungstechnisch eine Darstellung von Ausdrücken in Form von Graphen und Graphtransformationen zu ihrer Auswertung.
- ist 'vergleichbar' performant wie frühe, fleißige Auswertung (engl. eager evaluation), wenn alle Argumente benötigt werden.

Insgesamt: Späte, faule Auswertung

- erreicht annähernd den Vorteil applikativer Auswertung (Effizienz!), ohne dafür Abstriche am Vorteil normaler Auswertung (Terminierungshäufigkeit!) vornehmen zu müssen.
- vereint damit möglichst gut die Vorteile beider.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.5

Zusätzliche Charakterisierungen der Auswertungsordnungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zusätzliche Charakterisierungen

...der Auswertungsordnungen über Analogien bzw. Betrachtungen zu:

1. Parameterübergabemechanismen
2. Auswertungspositionen
3. Argumentauswertungshäufigkeiten
4. Definiertheitszusammenhang von Argument und Funktion

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.4.1

Über Parameterübergabemechanismen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Parameterübergabemechanismenanalogien

Applikative Auswertungsordnung entspricht

- Call-by-value

Normale Auswertungsordnung entspricht

- Call-by-name

Späte Auswertungsordnung entspricht

- Call-by-need

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 13.5.2

Über Auswertungspositionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Auswertungspositionen

Applikative Auswertungsordnung

- Innerste Auswertungsordnung: Reduziere nur Redexe, die keine Redexe enthalten.
- Linksapplikative, linkestinnerste Auswertungsordnung: Reduziere stets den linkesten innersten Redex, der keine Redexe enthält.

  Frühe, fleißige Auswertungsordn. (engl. eager evaluation).

Normale Auswertungsordnung

- Äußerste Auswertungsordnung: Reduziere nur Redexe, die nicht in anderen Redexen enthalten sind.
- Linksnormale, linkestäußerste Auswertungsordnung: Reduziere stets den linkesten äußersten Redex, der nicht in anderen Redexen enthalten ist.

  Späte, faule Auswertungsordnung (engl. lazy evaluation) bei effizienter Implementierung (s. Kap. 13.4).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.5.3

Über Argumentauswertungshäufigkeit

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Argumentauswertungshäufigkeit

Applikative Auswertungsordnung

- Jedes Argument wird genau einmal ausgewertet.

Normale Auswertungsordnung

- Jedes Argument wird so oft ausgewertet, wie es benutzt wird.

Späte, faule Auswertungsordnung

- Jedes Argument wird höchstens einmal ausgewertet.

...späte, faule Auswertung ist damit am effizientesten, benötigt i.a. aber mehr Speicher und hat Zusatzaufwand für die Verwaltung geteilter Datenstrukturen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel

Betrachte die Funktion:

```
f :: Int -> Int -> Int -> Int
f x y z = if x>42 then y+y else z^z
```

und den Aufruf:

```
f 45 (squ (5*(2+3))) (squ ((2{+3)*7))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Applikative Auswertung von f

```
f x y z = if x>42 then y+y else z^z
```

Applikative Auswertung:

```
          f 45 (squ (5*(2+3))) (squ ((2+3)*7))
(2S) ->> f 45 (squ (5*5)) (squ (5*7))
(2S) ->> f 45 (squ 25) (squ 35)
(2E) ->> f 45 (25*25) (35*35)
(2S) ->> f 45 625 1225
 (E) ->> if 45>42 then 625+625 else 1125^1125
 (S) ->> if True then 625+625 else 1125^1125
 (S) ->> 625+625
 (S) ->> 1250
```

...die Argumente `(squ (5*(2+3)))` und `(squ ((2+3)*7))` werden beide genau einmal ausgewertet (ohne dass der Wert von `(squ ((2+3)*7))` benötigt wird).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Normale Auswertung von f

```
f x y z = if x>42 then y+y else z^z
```

Normale Auswertung:

```
          f 45 (squ (5*(2+3))) (squ ((2+3)*7)))
 (E) ->> if 45>42 then (squ (5*(2+3))) + (squ (5*(2+3)))
         else (squ ((2+3)*7)) * (squ ((2+3)*7))
 (S) ->> if True then (squ (5*(2+3))) + (squ (5*(2+3)))
         else (squ ((2+3)*7))^(squ ((2+3)*7))
 (S) ->> (squ (5*(2+3))) + (squ (5*(2+3)))
(2E) ->> (((5*(2+3))) * ((5*(2+3)))) +
         (((5*(2+3))) * ((5*(2+3))))
(2S) ->> (25 * ((5*(2+3)))) + (((5*(2+3))) * ((5*(2+3))))
(3S) ->> 625 + (((5*(2+3))) * ((5*(2+3))))
(5S) ->> 625 + 625
 (S) ->> 1250
```

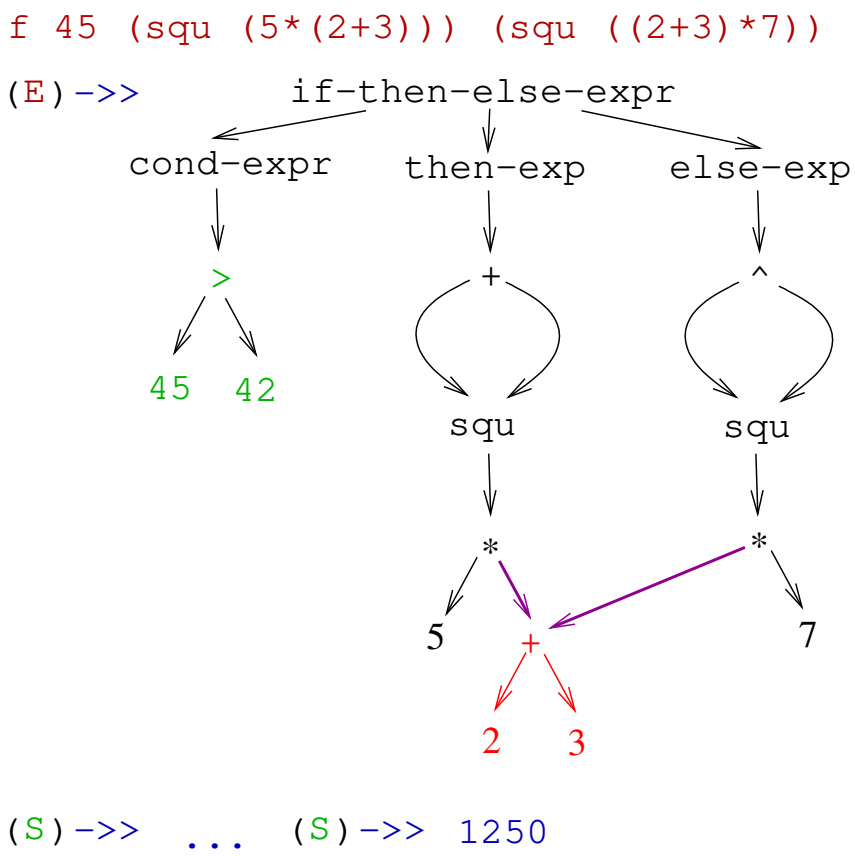
...das Argument `(squ (5*(2+3)))` wird zweimal ausgewertet;
das nicht benötigte Argument `(squ ((2+3)*7))` gar nicht.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Späte, faule Auswertung von f

```
f x y z = if 42>x then y+y else z^z
```

Späte, faule Auswertung:



...das Argument `(squ (5*(2+3)))` wird genau einmal ausgewertet; vom nicht benötigten Argument `(squ ((2+3)*7))` der Teilterm `(2+3)` (wg. Ausdrucksteilung ohne Extrakosten!).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 13.5.4

Über Definiertheitszusammenhänge

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Definiertheitszusammenhang

...von Argument und Funktion.

Schüsselbegriff: Striktheit von Funktionen.

Definition 13.5.4.1 (Strikt im n-ten Parameter)

Eine Funktion `f` heißt strikt in ihrem n-ten Parameter (oder Argument), wenn gilt: Ist der Wert des Arguments des n-ten Parameters nicht definiert, so ist auch der Wert von `f` nicht definiert (unabhängig von den Werten möglicher weiterer Argumente).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bsp.: Striktheit bei einstelligen Funktionen

Die Fakultäts- und Fibonacci-Funktion sind strikt in ihrem ersten (und einzigen) Parameter. Undefiniertheit des Argumentwerts impliziert Undefiniertheit der Funktion.

```
fac (1 `div` 0) -(LI-S)>> undef

fac (1 `div` 0) -(LÄ-E)>>
  if ((1 `div` 0) == 0) then 1
   else n * fac ((1 `div` 0) - 1) -(LÄ-S)>> undef

fib (1 `div` 0) -(LI-S)>> undef

fib (1 `div` 0) -(LÄ-E)>>
 if (1 `div` 0) == 0 then 0
  else (1 `div` 0) == 1 then 1
   else fib ((1 `div` 0) - 2) + fib ((1 `div` 0) - 1)
    -(LÄ-S)>> undef
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bsp.: Striktheit bei mehrstelligen Funktionen

Mehrstellige Funktionen können strikt in einigen Parametern, nicht strikt in anderen sein:

Der Fallunterscheidungsausdruck (-funktion)

(if . then . else .)

ist strikt im 1-ten Argument (Bedingung), nicht strikt im 2-ten und 3-ten Argument (then- und else-Ausdruck).

```
if ((1 `div` 0) == 0) then 4 else 2 ->> undef     (strikt in
                                                   Bedingung)

if ((0 `div` 1) == 0) then 42 else 1 `div` 0
->> if (0 == 0) then 42 else 1 `div` 0
->> if True then 42 else 1 `div` 0                 (nicht strikt
->> 42                                            im 3-ten Arg.)

if ((0 `div` 1) /= 0) then 1 `div` 0 else 42
->> if (0 /= 0) then 1 `div` 0 else 42
->> if False then 1 `div` 0 else 42                (nicht strikt
->> 42                                            im 2-ten Arg.)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Striktheit, Terminierung, Ergebnisneutralität

Theorem 13.5.4.2 (Striktheit, Terminierung)

Für strikte Funktionen stimmen die Terminierungsverhalten von früher und später Auswertungsordnung für die strikten Argumente überein.

Korollar 13.5.4.3 (Striktheit, Ergebnisneutralität)

Durch den Übergang von später auf frühe Auswertung für strikte Argumente einer Funktion gehen keine Ergebnisse verloren (und stimmen gemäß Theorem 13.3.1 überein).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Optimierung: Ausnutzen von Striktheit

Für strikte Argumente von Funktionen darf deshalb stets

- späte durch frühe Auswertung ersetzt werden

da sich Terminierungsverhalten und Resultat nicht ändern.

Da bei früher Auswertung Zusatzaufwand für die Verwaltung geteilter Datenstrukturen fehlt, ist die Ersetzung später durch frühe Auswertung für strikte Funktionsargumente eine der wichtigsten

- Optimierungen

bei der Übersetzung funktionaler Sprachen mit später Auswertungssemantik.

Beispiel: Übersetzer für Sprachen wie Haskell und Miranda dürfen also für die in ihrem jeweiligen Argument strikten Fakultäts- und Fibonacci-Funktionen späte durch frühe Argumentauswertung ersetzen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Optimierungsvoraussetzung: Striktheitsanalyse

Übersetzer spät auswertender Sprachen führen dazu eine sog.

- Striktheitsanalyse

durch, um dort, wo es sicher ist, d.h. wo ein Ausdruck zum Ergebnis beiträgt und sein Wert deshalb in jeder Auswertungsordnung benötigt wird,

- späte, faule (engl. lazy)

durch

- frühe, fleißige (engl. eager)

Argumentauswertung zu ersetzen.

Statt von früher Auswertung spricht man deshalb auch von

- strikter Auswertung (engl. strict evaluation).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 13.5.5

Aliase applikativer, normaler Auswertung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Aliase applikativer, normaler Auswertung

Applikative Auswertungsordnung (engl. applicative order eval.)

- Verwandte Bezeichnungen: Wertparameter-, innerste, strikte Auswertung (engl. call-by-value, innermost or strict evaluation).
- Operationalisierung: Linksapplikative, linkestinnerste, frühe, fleißige Auswertung (engl. leftmost- innermost or eager evaluation).

Normale Auswertungsordnung (engl. normal order evaluation)

- Verwandte Bezeichnungen: Namensparameter-, äußerste Auswertung (engl. call-by-name, outermost evaluation).
- Operationalisierung: Linksnormale, linkestäußerste Auswertung (engl. leftmost-outermost evaluation).
- Effiziente Operationalisierung mit Ausdrucksteilung: Späte, faule Auswertung (engl. lazy evaluation).
  - Verwandte Bezeichnung: Bedarfsparameter-Auswertung (engl. call-by-need evaluation).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.6

Frühe oder späte Auswertung? Eine Standpunktfrage

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

To be, or not to be,
that is the question.

Hamlet, Prinz von Dänemark
William Shakespeare (um 1564-1616)
engl. Dramatiker und Lyriker

To be lazy, or not to be lazy,
that is the question.
...Hamlet, zeitgerecht interpretiert

- Frühe, fleißige Argumentauswertung (engl. eager evaluation), wie in ML, Hope, Scheme (ohne Makros),...
- Späte, faule Argumentauswertung (engl. lazy evaluation), wie in Haskell, Miranda, KRC,...

Quot capita, tot sententiae.
Wie viele Köpfe, so viele Ansichten.

Terenz (190 v.Chr. - 159 v.Chr.)
röm. Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 13.6.1

Frühe oder späte Auswertung: Vor- und Nachteile

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Frühe oder späte Argumentauswertung (1)

...die Vorteile des einen sind die Nachteile des anderen und umgekehrt. Im einzelnen:

Vorteile später Argumentauswertung (mit Ausdrucksteilung):

+ Terminiert mit Normalform, wenn es (irgend-) eine terminierende Auswertungsreihenfolge gibt.

  Informell: Späte (wie normale und linksnormale) Auswertungsordnung terminieren häufigst möglich!
+ Wertet Argumente nur aus, wenn deren Werte wirklich b enötigt werden; und dann nur einmal.
+ Ermöglicht eleganten und flexiblen Umgang mit potentiell unendlichen Werten von Datenstrukturen (z.B. unendliche Listen, Ströme (s. Kap. 18.2), unendliche Bäume, etc.).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Frühe oder späte Argumentauswertung (2)

Nachteile später Argumentauswertung:

- Konzeptuell u. implementierungstechnisch anspruchsvoller:
  - Repräsentation von Ausdrücken in Form von Graphen statt linearer Sequenzen; Ausdrucksauswertung und -manipulation als Graph- statt Sequenzmanipulation.
  - Partielle Auswertung von Ausdrücken kann Seiteneffekte bewirken! (Beachte: Einwand gilt nicht für Haskell; in Haskell keine Seiteneffekte! In Scheme: Seiteneffektvermeidung obliegt dem Programmierer.)
  - Ein-/Ausgabe nicht in trivialer Weise transparent für den Programmierer zu integrieren.

...volle Ursacheneinsicht erfordert tiefergehendes Verständnis von λ-Kalkül und Bereichstheorie (engl. domain theory).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Frühe oder späte Argumentauswertung (3)

Vorteile früher Argumentauswertung:

- \+ Konzeptuell und implementierungstechnisch einfacher.
- \+ Einfache(re) Integration imperativer Konzepte.
- \+ Vom mathematischen Standpunkt oft 'natürlicher'.

  Beispiel: Soll der Wert von Ausdrücken wie `(first (2*21,infinite))` definiert gleich `42` sein wie bei später Auswertung oder undefiniert wg. Nichtterminierung wie bei früher Auswertung?

```
first (2*21,infinite)) ->> 2*21 ->> 42
```

späte Argumentauswertung

```
first (2*21,infinite))
 ->> first(42,1+infinite)
frühe ->> first(42,1+(1+infinite)) ->> ...
```


Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 13.6.2

Frühe oder späte Auswertung: Welche soll ich nehmen?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Welche Auswertungsordnung soll ich nehmen?

...stets unter dem Aspekt d. Zahl der Argumentauswertungen.

Normale Auswertungsordnung

- Argumente werden so oft ausgewertet, wie sie verwendet werden.
  - \+ Kein Argument wird ausgewertet, dessen Wert nicht benötigt wird.
  - \+ Terminiert, wenn immer es eine terminierende Auswertungsfolge gibt; terminiert somit am häufigsten, insbesondere häufiger als applikative Auswertung.
  - – Argumente, die mehrfach verwendet werden, werden auch mehrfach ausgewertet; so oft, wie sie verwendet werden $\leadsto$ implementierungspraktisch deshalb irrelevant; implementierungspraktisch relevant: faule Auswertung.

Insgesamt: Normale Auswertung ist theorie-relevant, nicht jedoch implementierungspraktisch (sehr relevant allerdings in Form fauler Auswertung!).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Welche Auswertungsordnung soll ich nehmen?

Frühe, fleißige, applikative Auswertungsordnung

- Argumente werden genau einmal ausgewertet.
  - \+ Jedes Argument wird exakt einmal ausgewertet; kein zusätzlicher Aufwand über die Auswertung hinaus.
  - – Auch Argumente, deren Wert nicht benötigt wird, werden ausgewertet; das ist kritisch für Argumente, deren Auswertung teuer ist, gar nicht terminiert (unendlich teuer!) oder auf einen Laufzeitfehler führt.

Späte, faule Auswertungsordnung (mit Ausdrucksteilung)

- Argumente werden höchstens einmal ausgewertet.
  - \+ Ein Argument wird nur ausgewertet, wenn sein Wert benötigt wird; und dann exakt einmal.
  - \+ Kombiniert die Vorteile von applikativer Auswertung (Effizienz!) und normaler Auswertung (Terminierung!).
  - – Erfordert zusätzlichen Aufwand zur Laufzeit für die Verwaltung der Auswertung von (Teil-) Ausdrücken.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Welche Auswertungsordnung soll ich nehmen?

...von einem pragmatischem Standpunkt aus:

- Frühe, fleißige, applikative Auswertung vorteilhaft gegenüber normaler und später, fauler Auswertung, da
  - \+ geringere Laufzeitzusatzkosten (engl. overhead).
  - \+ größeres Parallelisierungspotential (für Funktionsargumente).
- Späte, faule Auswertung vorteilhaft gegenüber früher, fleißiger, applikativer Auswertung, wenn
  - \+ Terminierungshäufigkeit (Definiertheit des Programms!) von überragender Bedeutung.
  - \+ Argumente nicht benötigt (und deshalb gar nicht ausgewertet) werden

    Bsp.: $(\lambda x.\lambda y.y)\,((\lambda x.x\,x)(\lambda x.x\,x))\,z \to (\lambda y.y)\,z \to z$
- Ideal: Das Beste beider Welten:
  - \+ Früh, fleißig, applikativ, wo möglich; spät, faul, wo nicht.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zusammengefasst

...frühe, fleißige applikative Auswertung (engl. eager evaluation) oder späte, faule Auswertung(engl. lazy evaluation):

- Für beide Strategien sprechen gewichtige Gründe – und Fürsprecher:

  – pro früh: Iucundi acti labores.
  Angenehm sind die erledigten Arbeiten.
  Cicero (106 - 43 v.Chr.)
  röm. Staatsmann und Schriftsteller

  – pro spät: Jetzt schaun ma amoi, nacha sehn ma scho!
  Franz Beckenbauer (* 1945)
  bayer. Fußballspieler und Kaiser

- Die Wahl ist letztlich eine Frage von Angemessenheit und Zweckmäßigkeit im Anwendungskontext.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Randnotiz: ‘Lazy’ – Maßeinheit

...für den Abstand von Hochkultur und Dekadenz!

To be, or not to be?

...eine Frage der Hochkultur.

To be lazy, or not to be lazy?

...eine Frage der Dekadenz.

O tempora! O mores!
Oh Zeiten! Oh Sitten!
Cato der Ältere (234 - 149 v.Chr.)
röm. Staatsmann
durch Ciceros Reden gegen Verres
berühmt gewordener Ausruf

Jedoch:

Quae fuerant vitia, mores sunt.
Was früher Fehler waren, sind jetzt die Sitten.
Seneca d. Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 13.5.2.1

Rechtsnormale und rechtsapplikative Auswertung sind die dualen Gegenstücke linksnormaler und linksapplikativer Auswertung.

1. Beschreiben Sie das Vorgehen
   1.1 rechtsnormaler
   1.2 rechtsapplikativer

   Auswertung.
2. Werten Sie den Term:

   ```
   2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
   ```

   2.1 rechtsnormal
   2.2 rechtsapplikativ

   aus.
3. Warum (vermutlich) sind rechtsnormale und rechtsapplikative Auswertung in (vermutlich) keinem Übersetzer und Interpretierer für eine funktionale Sprache implementiert zu finden?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 13.5.2.2

Einige der folgenden Auswertungsstrategien bedeuten dasselbe. Welche?

1. Normal
2. Applikativ
3. Linksnormal
4. Linksapplikativ
5. Rechtsnormal
6. Rechtsapplikativ
7. Linkestinnerst
8. Linkestäußerst
9. Rechtestinnerst
10. Rechtestäußerst
11. Faul
12. Fleißig

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe 13.5.2.3

Was legen folgende Auswertungsstrategien fest? Welche Freiheitsgrade lassen sie für die Auswertung?

1. Normal
2. Applikativ
3. Linksnormal
4. Linksapplikativ
5. Rechtsnormal
6. Rechtsapplikativ
7. Linkestinnerst
8. Linkestäußerst
9. Rechtestinnerst
10. Rechtestäußerst
11. Faul
12. Fleißig

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 13.7

Früh(artig)e und späte Auswertung in Haskell

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Steuerung der Auswertung in Haskell

Haskell erlaubt, die Auswertungsordnung (zu einem gewissen Grad) zu steuern.

Späte, faule Auswertung:

- Standardverfahren (vom Programmierer nichts zu tun):

```
          fac (2*(3+5))
(E) ->> if (2*(3+5)) == 0 then 1
          else ((2*(3+5)) * fac ((2*(3+5))-1))
...
```

Früh(artig)e Auswertung:

- Erzwingbar mithilfe des zweistelligen Operators ($!):

```
          fac $! (2*(3+5))
(S) ->> fac $! (2*8)
(S) ->> fac $! 16
(E) ->> if 16 == 0 then 1 else (16 * fac $! (16-1))
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Früh(artig)e Auswertung in Haskell (1)

Wirkung des Operators ($!):

- Die Auswertung des Ausdrucks `(f $! ausd)` erfolgt in gleicher Weise wie die des Ausdrucks `(f ausd)` mit dem Unterschied, dass die Auswertung von `ausd` erzwungen wird, bevor `f` angewendet und expandiert wird.

Im Detail: Ist der Wert von `ausd` von einem

- elementaren Typ wie `Int`, `Bool`, `Double`, etc., so wird `ausd` vollständig ausgewertet.
- Tupeltyp wie `(Int,Bool)`, `(Int,Bool,Double)`, etc., so wird `ausd` bis zu einem Tupel von Ausdrücken ausgewertet, aber nicht weiter.
- Listentyp, so wird `ausd` so weit ausgewertet, bis als Ausdruck die leere Liste erscheint oder die Konstruktion zweier Ausdrücke zu einer Liste.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Früh(artig)e Auswertung in Haskell (2)

Für curryfizierte Funktionen kann

- strikte Auswertung

für jede Argumentkombination erreicht werden.

Beispiel: Für die zweistellige curryfizierte Funktion

```
f :: a -> b -> c
```

erzwingt

- `(f $! x) y` : Auswertung von `x`
- `(f x) $! y` : Auswertung von `y`
- `(f $! x) $! y` : Auswertung von `x` und `y`

vor der Anwendung und Expansion von `f`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Hauptanwendung von ($!) in Haskell

...zur Minderung des Speicherverbrauchs.

Beispiel: Vergleiche Funktion

```
sumwith_lz :: Int -> [Int] -> Int
sumwith_lz v []     = v
sumwith_lz v (x:xs) = sumwith_lz (v+x) xs
```

mit

```
sumwith_ea :: Int -> [Int] -> Int
sumwith_ea v []     = v
sumwith_ea v (x:xs) = (sumwith_ea $! (v+x)) xs
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Anwendungsbsp.: Späte, faule Auswertung

...liefert:

```
              sumwith_lz 36 [1,2,3]
(LÄ-E) ->> sumwith_lz (36+1) [2,3,]
(LÄ-E) ->> sumwith_lz ((36+1)+2) [3]
(LÄ-E) ->> sumwith_lz (((36+1)+2)+3) []
(LÄ-E) ->> (((36+1)+2)+3)
(LÄ-S) ->> ((37+2)+3)
(LÄ-S) ->> (39+3)
(LÄ-S) ->> 42
```

...7 Schritte; die max. Länge des summativen Terms auf erster Argumentposition hängt von der Länge der Liste auf zweiter Argumentposition ab.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Anwendungsbsp.: Früh(artig)e Auswertung

...mittels ($!) liefert:

```
                sumwith_ea 36 [1,2,3]
(LÄ-E) ->> (sumwith_ea $! (36+1)) [2,3]
(LI-S) ->> (sumwith_ea $! 37) [2,3]
(LI-S) ->> sumwith_ea 37 [2,3]
(LÄ-E) ->> (sumwith_ea $! (37+2)) [3]
(LI-S) ->> (sumwith_ea $! 39) [3]
(LI-S) ->> sumwith_ea 39 [3]
(LÄ-E) ->> (sumwith_ea $! (39+3)) []
(LI-S) ->> (sumwith_ea $! 42) []
(LI-S) ->> sumwith_ea 42 []
(LÄ-E) ->> 42
```

...10 Schritte, aber die Länge des summativen Terms auf erster Argumentposition ist unabhängig von der Länge der Liste auf zweiter Argumentposition und bleibt konstant kurz.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Anwendungsbsp.: Auswertungsstile

...im Vergleich:

- Späte, faule Auswertung von `sumwith_lz 36 [1..3]`
  - baut den Ausdruck `(((36+1)+2)+3)` vollständig auf, bevor die erste Simplifikation ausgeführt wird.
  - Allgemein: `sumwith_lz` baut einen Ausdruck auf, dessen Größe proportional zur Länge der Argumentliste ist.
  - Problem: Programmabbrüche durch Speicherüberläufe schon für vergleichsweise kleine Argumente möglich: `sumwith_lz 36 [1..10000]`
- Früh(artig)e Auswertung von `sumwith_ea 36 [1..3]`
  - Simplifikationen werden frühestmöglich ausgeführt.
  - Exzessiver Speicherverbrauch (engl. memory leak) wird dadurch (in diesem Beispiel) vollständig vermieden.
  - Aber: Die Zahl der Rechenschritte steigt; besseres Speicherverhalten wird gegen schlechtere Schrittzahl eingetauscht (engl. trade-off).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zusammengefasst

Haskells ($!)-Operator ist

- hilfreich und nützlich

das Speicherverhalten von Programmen zu verbessern, stellt allerdings keinen Königsweg dar: Auch kleine Beispiele erfordern bereits eine

- sorgfältige Untersuchung

des Verhaltens später und früh(artig)er Auswertung.

Es gibt keinen Königsweg [zur Geometrie].

Euklid (ungef. 3./4. Jhdt. v.Chr)
griech. Mathematiker

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 13.8

Betrachtungen zu Namen und Bezeichnungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Namen, Bezeichnungen: Englisch vs. Deutsch

Englisch	Deutsch	Konnotation
Eager evaluation	Fleißige Auswertung	Positiv
	Eifrige Auswertung	Positiv
	Sofortige Auswertung	Positiv
	Unverzügliche Auswertung	Positiv
	Vorrats-Auswertung	Negativ
	Streber-Auswertung	Negativ
	Frühe Auswertung	Neutral
Lazy evaluation	Faule Auswertung	Negativ
	Lässige Auswertung	Positiv
	Entspannte Auswertung	Positiv
	Verzögerte Auswertung	Positiv
	Aufgeschobene Auswertung	Negativ
	Prokastinator-Auswertung	Negativ
	Auf-den-Punkt-Auswertung	Positiv
	Späte Auswertung	Neutral

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Englische vs. deutsche Begriffspaare

Englisch	Deutsch	Motivation, Bewertung
Eager/lazy	Fleißig/faul	Bestmögl. wörtl.
	Sofortig/aufgeschoben	Neutral, unverfängl.
	Unverzüglich/verzögert	Neutral, unverfängl.
	Sofortig/lässig	Unzusammenpassend,
	Unverzüglich/lässig	keine Gegensatzpaare
	Hektisch/entspannt	Fig. passend, Gegensatzp.
	Angespannt/entspannt	Fig. passend, Gegensatzp.
	Streber/Prokastinator	Mutig, kombiniert Althergebrachtes u. Modewort
	Früh/spät	Neutral, unverfängl.

...jede Wahl vermittelt sprachabhängig 'zwischen den Zeilen' ein bestimmtes Bild, eine bestimmte Vorstellung; das sollte sich eine gute Übersetzung zunutze machen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Vergleiche und bewerte z.B.:

Deutsch	Englisch	Verunglückt
Betriebssystem	Operating System	Operationssystem
Schnittstelle	Interface	Zwischengesicht
s. Übung 13.7.3(1)	Social Media	Soziale Medien
Taste	Key	Schlüssel
Keller	Stack	Stapel
Bildschirm	Screen	Screen
Feldtyp, -variable	Array type, variable	Arraytyp, -variable
Aktualisierung	Update	updaten, upgedatet
Anwender, Nutzer	User	User, Userin
Am/vom Netz	Online/offline	Online/offline
Informatik	Computer Science	Comp.wissenschaft(en)
Körper	Field	Feld, Acker
Steuerung	Controlling	Kontrolle, kontrollieren
Nachrichtendienst	Intelligence Service	Intelligenzdienst
Urknall	Big Bang	Großer Knall
Einarmiger Bandit	Slot Machine	Schlitzmaschine

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bild- und wirkmächtige Übersetzungen

...erfordern Kreativität und Sprachgefühl!

...nur Mut dazu!

Der Unterschied zwischen dem richtigen Wort
und dem beinahe richtigen Wort ist derselbe wie
zwischen dem Blitz und dem Glühwürmchen.

Mark Twain (1835-1910)
amerikan. Schriftsteller

Siehe auch:

- Anglizismen-Index, Ausgabe 2019. IFB Verlag Deutsche Sprache GmbH, Paderborn, 2019. `http://www.ifb-verlag.de/`

  ...mit deutschen Entsprechungen für etwa 7.500 Anglizismen.
- Anglizismenübersetzung online

  `https://vds-ev.de/denglisch-und-anglizismen/anglizismenindex/ag-anglizismenindex/`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 13.8.1

...Hardware, Software.

1. Warum vermutlich ist im Englischen das Begriffspaar

   Hardware/Software

   geprägt worden?
2. Was könnten passende deutsche Begriffspaare sein, die diesem Ursprung gemäß nachgebildet sind?
3. Was möglicherweise könnten bildmächtigere deutsche Begriffspaare sein, die losgelöst vom englischen Sprachbild von einer für die deutsche Begriffsbildung passenderen bildlichen Vorstellung, Metapher abgeleitet sind? Blitze im Sinn von Mark Twain, nicht nur Glühwürmchen? (s.a. Alvaro Videla. *Metaphors We Compute By*. Communications of the ACM 60(10):42-45, 2017)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 13.8.2

...Computer, Laptop, Notebook, Workstation.

1. Worauf geht im Englischen die Bezeichnung Computer zurück? Was ist entsprechend ein passender dt. Begriff?
2. Für Laptop wird gelegentlich Klapprechner vorgeschlagen. Gefällt Ihnen der Vorschlag? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?
3. Gelten Ihre Gründe für oder wider Klapprechner auch für oder wider Klapptisch, Klappbett, Klappsitz, Klappliege, Klappsessel, Klappstuhl, Klapptür, Klapproller, Klapprad, Klappbrücke, Klappverdeck, Klappmesser u.ä.?
4. Ist Notizbuch ein angemessener Begriff für Notebook? Transportiert Notizbuch ein 'richtiges' Bild, eine 'richtige' Vorstellung vom gemeinten Gegenstand? Gilt dies für Notebook im Englischen?
5. Was ist mit Workstation? Was transportiert dieser Begriff? Was wäre eine passende dt. Entsprechung?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe 13.8.3

...social media, social event, artificial intelligence — soziale Medien, soziale Veranstaltung, artifizielle Intelligenz.

1. Vergleiche:
   - Sozialhilfe, Sozialwohnung, Sozialgesetzgebung, Sozialministerium Sozialladen, Sozialarbeit, Sozialarbeiter, soziale Sicherheit, soziale Verantwortung, soziales Gewissen, soziale Medien, soziale Veranstaltung,...

   Welche Begriffe fallen aus der Reihe? Warum? Was könnten treffendere Begriffe dafür sein?
2. Vergleiche:
   - Künstliche Intelligenz, artifizielle Intelligenz.

   Könnte artifizielle Intelligenz sogar als geglücktere Entsprechung von artificial intelligence gelten als künstliche Intelligenz? Wenn ja, warum? In welchem Sinn?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Plan D, für mehr Prägnanz in der Wissenschaft

Für mehr Prägnanz in der Wissenschaft.

English:	**science**
Latina:	**scientia**
Français:	**science**
Español:	**ciencia**
Italiano:	**scienza**
Deutsch:	**Wissenschaft**

Deutsch macht einen entscheidenden Unterschied.

Deutsch schafft Wissen. DAAD

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 13.9

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (1)

Hendrik Pieter Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Revised Edn., North Holland, 1984. (Kapitel 13, Reduction Strategies)

Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Prentice Hall, 2. Auflage, 1998. (Kapitel 7.1, Lazy Evaluation)

Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 7.1, Lazy evaluation)

Richard Bird, Phil Wadler. *An Introduction to Functional Programming*. Prentice Hall, 1988. (Kapitel 6.2, Models of Reduction; Kapitel 6.3, Reduction Order and Space)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (2)

Gilles Dowek, Jean-Jacques Lévy. *Introduction to the Theory of Programming Languages*. Springer-V., 2011. (Kapitel 2.3, Reduction Strategies)

Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 2.1, Parameterübergabe und Auswertungsstrategien)

Chris Hankin. *An Introduction to Lambda Calculi for Computer Scientists*. King's College London Publications, 2004. (Kapitel 3, Reduction; Kapitel 8.1, Reduction Machines)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 15, Lazy evaluation; Kapitel 15.2, Evaluation strategies; Kapitel 15.7, Strict application)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (3)

Greg Michaelson. *An Introduction to Functional Programming through Lambda Calculus*. Dover Publications, 2. Auflage, 2011. (Kapitel 4.4, Applicative Order Reduction; Kapitel 8, Evaluation; Kapitel 8.2, Normal Order; Kapitel 8.3, Applicative Order; Kapitel 8.8, Lazy Evaluation)

Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 3.1, Reduction Order)

Simon Thompson. *Haskell – The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 17.1, Lazy evaluation; Kapitel 17.2, Calculation rules and lazy evaluation)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (4)

Simon Thompson. *Haskell – The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 17.1, Lazy evaluation; Kapitel 17.2, Calculation rules and lazy evaluation)

Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008. (Kapitel 7, Naming; Kapitel 7.1, Parameter Passing)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (5)

Allen B. Tucker (Editor-in-Chief). *Computer Science. Handbook*. Chapman & Hall/CRC, 2004. (Kapitel 92, Functional Programming Languages (History of Functional Languages, Pure vs. Impure Functional Languages, Non-strict Functional Languages, Scheme, Standard ML, and Haskell, Research Issues in Functional Programming, etc.))

Alvaro Videla. *Metaphors We Compute By*. Communications of the ACM 60(10):42-45, 2017.

Reinhard Wilhelm, Helmut Seidl. *Compiler Design – Virtual Machines*. Springer-V., 2010. (Kapitel 3.2, A Simple Functional Programming Language – Evaluation Strategies)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kap. 13.7 (6)

Anglizismen-Index, Ausgabe 2019. IFB Verlag Deutsche Sprache GmbH, Paderborn, 2019. Suchfunktion im Netz zugänglich unter: `https://vds-ev.de/denglisch-und-anglizismen/anglizismenindex`

Verein Deutsche Sprache – Deutsch in der Wissenschaft. `https://vds-ev.de`

ADAWiS – Arbeitskreis Deutsch als Wissenschaftssprache e.V. `http://adawis.de/start`

Deutsch in den Wissenschaften – Deutsch als Wissenschaftssprache. Gemeinsame Erklärung der Präsidenten der Alexander von Humboldt-Stiftung (AvH), des Deutschen Akademischen Austauschdienstes (DAAD), des Goethe-Instituts (GI) und der Hochschulrektorenkonferenz (HRK), 18.02.2009. `https://www.goethe.de/lhr/prj/diw/dos/de7753902.htm`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 14

Typprüfung, Typinferenz

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 14.1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typisierte Programmiersprachen

...teilen sich in

- schwach (Typprüfung zur Laufzeit)
- stark (Typprüfung/-inferenz zur Übersetzungszeit)

getypte Sprachen.

Typfehler werden deshalb in

- schwach getypten Sprachen erst zur Laufzeit
- stark getypten Sprachen bereits zur Übersetzungszeit

erkannt.

Haskell ist eine stark getypte Programmiersprache!

Anm.: Lisp, SASL sind Bsp. ungetypter funktionaler Sprachen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Vorteile stark typisierter Programmiersprachen

...gegenüber schwach oder ungetypten Sprachen:

+ Verlässlicherer Code: Der Nachweis der Typkorrektheit ist ein Korrektheitsbeweis für ein Programm auf dem Abstraktionsniveau von Typen. Viele Programmier- und Tippfehler werden dadurch schon zur Übersetzungszeit entdeckt.
+ Effizienterer Code: Keine Typprüfungen zur Laufzeit nötig.
+ Effektivere Programmentwicklung: Typinformation ist Programmdokumentation und vereinfacht Verstehen, Wartung und Weiterentwicklung eines Programms, z.B. auch bei der Suche nach vordefinierten Bibliotheksfunktionen: "Gibt es eine Funktion, die alle Duplikate aus einer Liste entfernt?" In Haskell kann so die Suche eingeschränkt werden auf Funktionen mit Typ `(Eq a => [a] -> [a])`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Für Haskell gilt

- Gültige Ausdrücke haben wohldefinierte Typen und heißen wohlgetypt.
- Typen wohlgetypter Ausdrücke können sein:
  - Monomorph
    `fac :: Int -> Int`
    Erkennungszeichen: Keine Typvariablen, nur konkrete Typen in der Signatur.
  - Parametrisch polymorph (uneingeschränkt polymorph)
    `length :: [a] -> Int`
    Erkennungszeichen: Typvariablen, keine Typkontexte.
  - *Ad hoc* polymorph (eingeschränkt polymorph)
    `elem :: Eq a => a -> [a] -> Bool`
    Erkennungszeichen: Typvariablen und Typkontexte.
- Typen können angegeben sein:
  - explizit: Typprüfung (grundsätzlich) ausreichend.
  - implizit: Typinferenz erforderlich.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung, Typinferenz

...sind Schlüsselfähigkeiten von Übersetzern, Interpretierern.

Der Typ des Ausdrucks:

```
magicType = let
              pair x y z = z x y
              f y = pair y y
              g y = f (f y)
              h y = g (g y)
            in h (\x -> x)
```

...kann automatisch inferiert werden und zeigt, wie mächtig automatische Typinferenz ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Automatische Typinferenz mit Hugs

...für `magicType`.

Das Hugs-Kommando `:type` (oder kürzer `:t`):

```
Main>:t magicType
```

liefert:

```
magicType ::
(((((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) ->
(((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) ->
(((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) ->
(((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> d) -> d) ->
(((((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> (((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> (((((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> (((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> d) -> d) -> e) -> e
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Klammerebenen farblich hervorgehoben

```
magicType ::
((((((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) ->
((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) ->
((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) ->
((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> d) -> d) ->
((((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> (((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> ((((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> ((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> d) -> d) -> e) -> e
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Klammerebenen farblich durchgezählt

...lässt grobe ‘Strukturen’ erkennen:

```
magicType ::
(1
 (1(1(1(1(1(1(a -> a) -> (a -> a) -> b1) -> b   1) ->
  (2(2(a -> a) -> (a -> a) -> b2) -> b2) -> c1) -> c1) ->
  (2(2(3(3(a -> a) -> (a -> a) -> b3) -> b3) ->
  (4(4(a -> a) -> (a -> a) -> b4) -> b4) -> c2) -> c2) ->
  d1) -> d
 1)
 -> (2(2(3(3(5(5(a -> a) -> (a -> a) -> b5) -> b5) ->
      (6(6(a -> a) -> (a -> a) -> b6) -> b6) -> c3) -> c3) ->
      (4(4(7(7(a -> a) ->
      (a -> a) -> b7) -> b7) -> (8(8(a -> a) ->
      (a -> a) -> b8) -> b8) -> c4) -> c4) -> d2) -> d
    2) -> e1) -> e
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

...wobei es auch bleibt:

```
(1
  (1
   (1
    (1
     (1
      (1
       (1(a -> a) -> (a -> a) -> b
       1) -> b
      1) -> (2
             (2(a -> a) -> (a -> a) -> b
             2) -> b
            2) -> c
     1) -> c
    1) -> (2
           (2
            (3
             (3(a -> a) -> (a -> a) -> b
             3) -> b
            3) -> (4
                   (4(a -> a) -> (a -> a) -> b
                   4) -> b
                  4) -> c
           2) -> c
          2) -> d
   1) -> d
  1)
  -> (2(2(3(3(5(5(a -> a) -> (a -> a) -> b5) -> b5) ->
        (6(6(a -> a) -> (a -> a) -> b6) -> b6) -> c3) -> c3) ->
         (4(4(7(7(a -> a) -> (a -> a) -> b7) -> b7) ->
          (8(8(a -> a) -> (a -> a) -> b8) -> b8) -> c4) -> c4) -> d2) -> d2) -> e
1) -> e
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Wie gelingt es

...Übersetzern, Interpretierern, komplexe Typen wie den von `magicType` automatisch zu inferieren?

Informell: Durch Auswertung jeder Art von

- Kontextinformation in Ausdrücken, Funktionsdefinitionen und Typklassen, z.B. verwendete Operatoren (`(+)`, `(/)`, `(&&)`, `(++)`), Konstanten (`2`, `3.57`, `True`, `(2,3)`, `[]`, `[2,3,4]`,...), Muster (`('c':cs)`, `(x,False)`,...), etc.

Anhand von Beispielen betrachten wir Methoden und Vorgehensweisen für:

- Typanalyse, Typprüfung
- Unifikation
- Typsysteme, Typinferenz

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 14.2

Monomorphe Typprüfung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Am Ende monomorpher Typprüfung

...steht als Ergebnis:

Ein Ausdruck ist

- wohlgetypt u. hat einen eindeutig bestimmten konkreten Typ.
- nicht wohlgetypt und hat überhaupt keinen Typ.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Vereinbarung für die folgenden Beispiele

Polymorphie parametrisch oder *ad hoc* polymorpher vordefinierter Funktionen in Haskell wird durch geeignete Typindizierung syntaktisch aufgelöst; wie nachstehend angedeutet:

- $+_{Int}$, $+_{Integer}$, $*_{Double}$, $\texttt{length}_{[Char]}$,...

sind wie folgt typisiert gedacht:

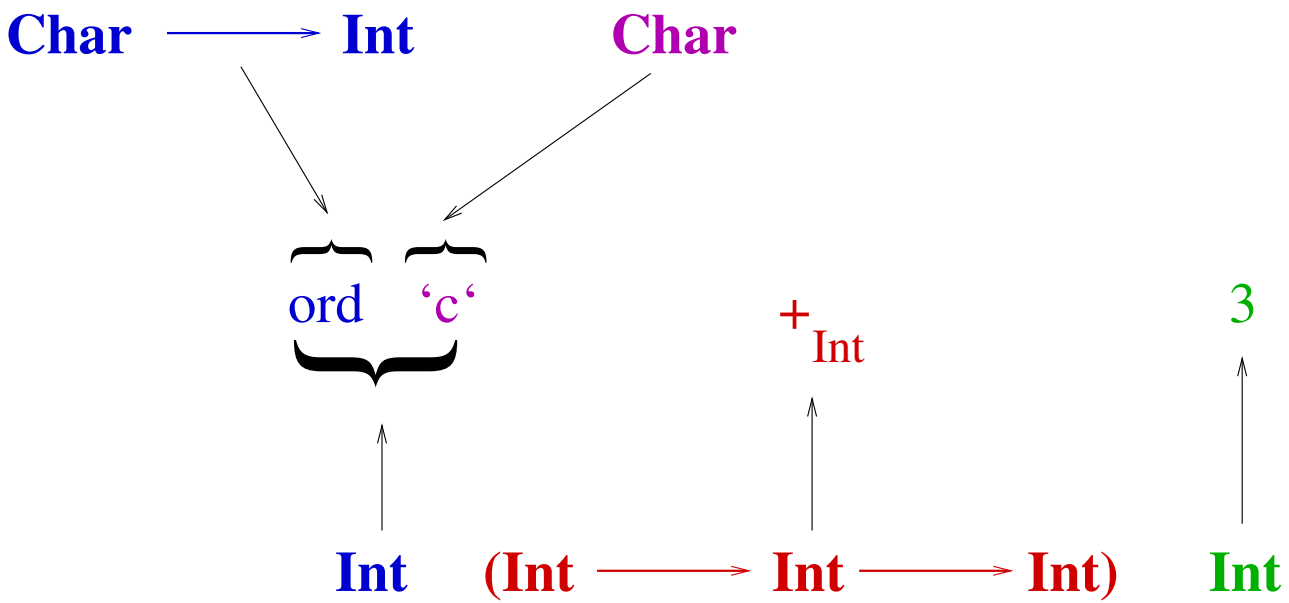
- $+_{Int}$ `:: Int -> Int -> Int`
- $+_{Integer}$ `:: Integer -> Integer -> Integer`
- $*_{Double}$ `:: Double -> Double -> Double`
- $\texttt{length}_{[Char]}$ `:: [Char] -> Int`
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung für Ausdrücke, monomorpher Fall

Bsp. 1: Ausdruck `(ord 'c' +`$_{Int}$ `3)`

Durch Kontextauswertung des Ausdrucks kann Typprüfung:



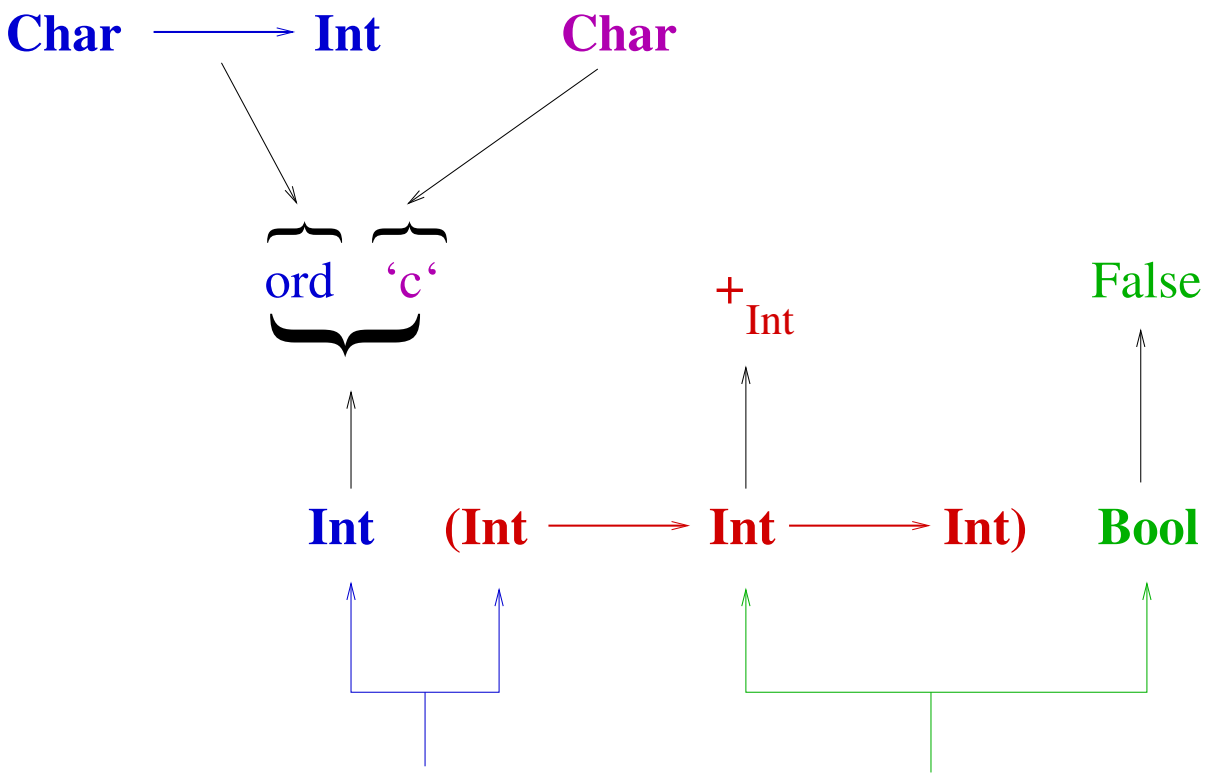
...korrekte Typung nachweisen!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung für Ausdrücke, monomorpher Fall

Bsp. 2: Ausdruck `(ord 'c' +`$_{Int}$ `False)`

Durch Kontextauswertung des Ausdrucks kann Typprüfung:



Erwarteter und tatsächlicher Typ, **Int**, stimmen überein: **Typkorrekt!**

Erwarteter Typ, **Int**, und tatsächlicher Typ, **Bool**, stimmen nicht überein: **Typinkorrekt!**

...inkorrekte Typung aufdecken!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung für Fkt.-Def., monomorpher Fall

Bsp. 3: `f` monomorphe Fkt.-Def., d.h. t_i, `t` konkrete Typen:

```
f :: t1 -> t2 -> ... -> tk -> t
f m1 m2 ... mk
  | w1 = a1
  | w2 = a2
  ...
  | wn = an
```

...für die Typprüfung von `f` sind 3 Kontexteigenschaften auszunutzen:

1. Jeder Wächter w_i muss vom Typ `Bool` sein.
2. Jeder Ausdruck a_i muss vom Resultattyp `t` sein.
3. Das Muster jedes Parameters m_i muss mit dem zugehörigen Parametertyp t_i konsistent sein.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Musterkonsistenz, Musterpassung

Informell:

Ein Muster μ ist konsistent mit einem Typ τ, wenn die Werte vom Typ τ auf μ passen.

Detaillierter (vgl. Kap. 6):

- Eine Variable als Muster ist mit jedem Typ konsistent.
- Ein Literal oder Konstante als Muster ist mit ihrem Typ konsistent.
- Eine Liste `(p:q)` als Muster ist konsistent mit dem Typ `[t]`, wenn `p` als Muster mit dem Typ `t` und `q` als Muster mit dem Typ `[t]` konsistent ist.
- ...

Beispiele:

- Das Muster `(42:xs)` ist konsistent mit dem Typ `[Int]`.
- Das Muster `(x:xs)` ist konsistent mit jedem Listentyp.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 14.3

Polymorphe Typprüfung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Am Ende polymorpher Typprüfung

...steht als Ergebnis:

Ein Ausdruck ist

- wohlgetypt und hat einen, mehrere, möglicherweise unendlich viele konkrete Typen.
- nicht wohlgetypt und hat überhaupt keinen Typ.

Algorithmischer Schlüssel zu polymorpher Typprüfung ist das

- Lösen von Typkontextsystemen (engl. constraint satisfaction)

unter Unifikation von Typausdrücken.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typprüfung, polymorpher Fall (1)

Bsp. 1: Die polymorphe Funktionssignatur :

```
length :: [a] -> Int
```

...informell steht der Typausdruck `([a] -> Int)` für die unendliche Menge konkreter Typen `([`τ`] -> Int)` mit τ beliebiger monomorpher Typ, z.B.:

```
[Int] -> Int
[(Bool,Char)] -> Int
[String -> String] -> Int
[Bool -> Bool -> Bool] -> Int
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung, polymorpher Fall (2)

...in Aufrufkontexten wie:

1. `length [length [1,2,3], length [True,False,True], length [], length [(+),(*),(-)]]`
2. `length [(True,'a'), (False,'q'), (True,'o')]`
3. `length [reverse, ("Felix" ++), tail, init]`
4. `length [(&&), (||), xor, nand, nor]`

...lässt sich ein monomorphe Typ eindeutig erschließen:

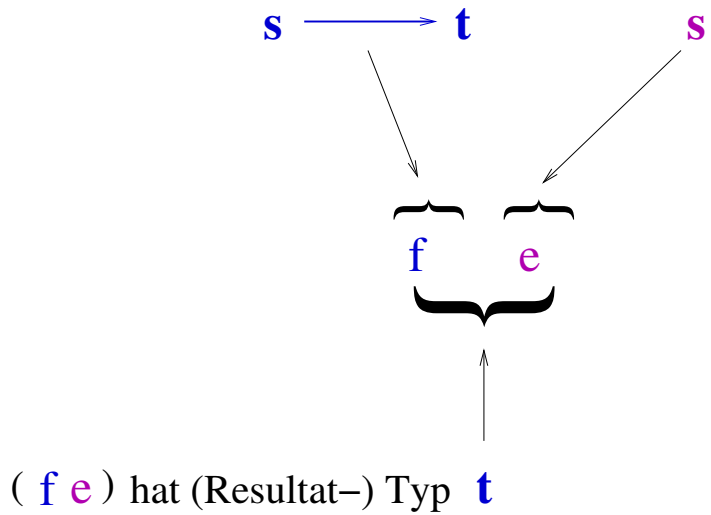
1. `length :: [Int] -> Int`
2. `length :: [(Bool,Char)] -> Int`
3. `length :: [(String -> String)] -> Int`
4. `length :: [(Bool -> Bool -> Bool)] -> Int`

Beachte: Der Kontext `length []` erlaubt nur auf `[a] -> Int` für den Typ zu schließen (Übungsaufgabe: Warum?).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typprüfung, polymorpher Fall (3)

Bsp. 2: Der applikative Ausdruck `(f e)`:



Ist weitere Kontextinformation für `f` und `e` nicht vorhanden, liefert die Kontextauswertung von `(f e)` für die allgemeinst möglichen Typen von `e`, `f` und `(f e)`:

1. `f` wird auf ein Argument appliziert; `f` muss deshalb von fkt. Typ sein: `f :: s -> t`
2. Der Typ von Ausdruck `e` muss deshalb sein: `e :: s`
3. Und folglich der Typ von Ausdruck `f e`: `f e :: t`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung, polymorpher Fall (4)

Bsp. 3: Die Funktionsgleichung:

```
f (x,y) = (x,['a' .. y])
```

Die Kontextauswertung liefert: `f` bezeichnet eine Funktion, die als Argument Paare erwartet, an deren

- 1-te Komponente keine Bedingung gestellt ist, die also von einem beliebigen Typ sein darf.
- 2-te Komponente eine Bedingung gestellt ist: `y` muss vom Typ `Char` sein, da `y` als Schranke des Zeichenreihenwerts `['a'..y]` benutzt wird.

Beides zusammen erlaubt den allgemeinsten Typ von `f` zu erschließen:

```
f :: (a,Char) -> (a,[Char])
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung, polymorpher Fall (5)

Bsp. 4: Die Funktionsgleichung:

```
g (m,zs) = m + length zs
```

Die Kontextauswertung ergibt: `g` bezeichnet eine Funktion, die als Argument Paare erwartet, an deren Komponenten folgende Bedingungen gestellt sind:

- 1-te Komponente: `m` muss von einem numerischen Typ sein, da `m` als Operand von `(+)` verwendet wird.
- 2-te Komponente: `zs` muss vom Typ `[b]` sein, da `zs` als Argument der Funktion `length` verwendet wird, die den Typ `([b] -> Int)` hat.

Beides zusammen erlaubt den allgemeinsten Typ von `g` zu erschließen:

```
g :: (Int, [b]) -> Int
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung, polymorpher Fall (6)

Bsp. 5: Die Fkt.-Komposition `(g . f)`, `f`, `g` aus Bsp. 3 u. 4.

Die Kontextauswertung ergibt:

- Für eine Funktionskomposition `(h' . h)` ist das Resultat von `h` das Argument von `h'`.
- Für `(g . f)` ergibt die Kontextauswertung der Gleichungen in Bsp. 3 und 4 zusätzlich:
  - Das Resultat von `f` ist vom Typ `(a,[Char])`.
  - Das Argument von `g` ist vom Typ `(Int,[b])`.

Damit sind noch zu bestimmen: Die allgemeinst möglichen Typen für die

- Typvariablen `a` und `b`

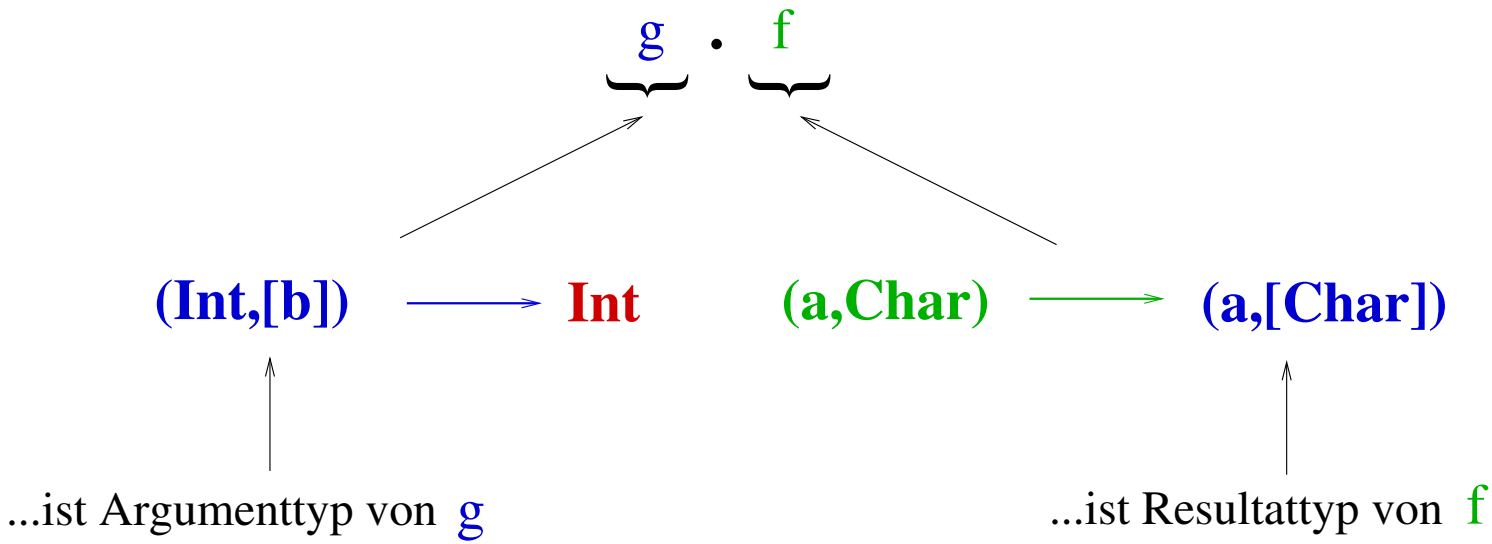
die die obigen Bedingungen erfüllen.

Der Schlüssel dafür: Unifikation.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typprüfung, polymorpher Fall (7)

Das Unifikationsvorgehen im Überblick:



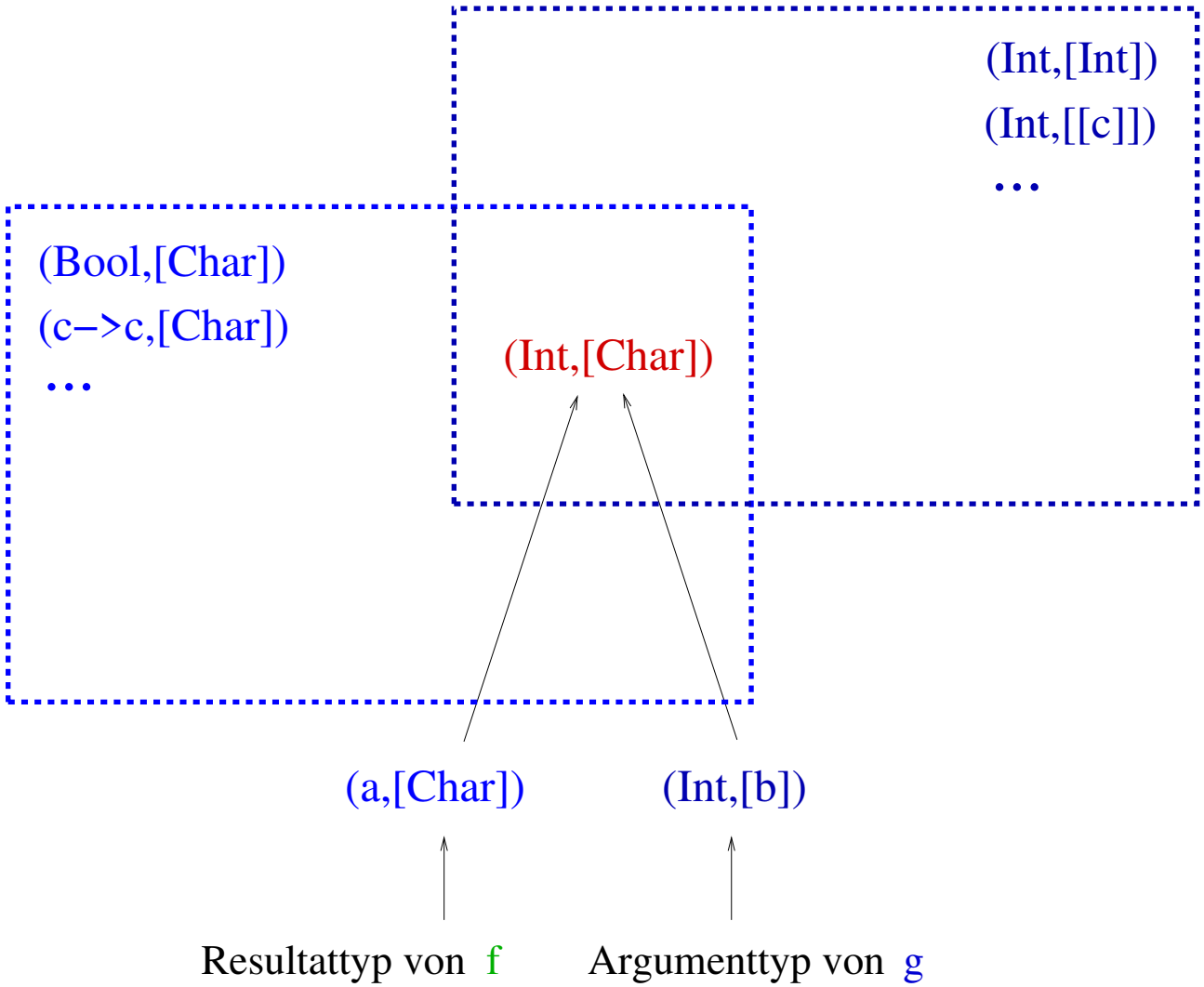
...Unifikation löst die 3 Bedingungen in Kombination auf und liefert `Int` als allgemeinst möglichen Typ für `a`, `Char` für `b` und somit `((Int,Char) -> Int)` für `(g . f)`, d.h.:

```
(g . f) :: (Int,Char) -> Int
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung, polymorpher Fall (8)

Veranschaulichung des Unifikationsvorgehens:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Instanz, gem. Instanz, Unifikat, Unifikator (1)

Ein Typausdruck a ist (Typ-)

- Instanz eines Typausdrucks a', wenn a aus a' durch konsistentes Ersetzen (oder Substitution) von Typvariablen mit Typausdrücken entsteht.
- gemeinsame Instanz einer Menge M von Typausdrücken, wenn a Instanz von allen Typausdrücken aus M ist.
- allgemeinste gemeinsame Instanz einer Menge M von Typausdrücken, wenn a gemeinsame Instanz von M ist und für alle anderen gemeinsamen Instanzen b von M gilt, dass b Instanz von a ist; a heißt dann (allgemeinstes) Unifikat von M, die zugehörige Substitution (allgemeinster) Unifikator von M.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Instanz, gem. Instanz, Unifikat, Unifikator (2)

...gleichwertig: Ein Typausdruck a ist

- Instanz eines Typausdrucks a', wenn a' sich zu a spezialisieren lässt; wenn a eine Teilmenge von Typen von a' beschreibt.
- gemeinsame Instanz einer Menge M von Typausdrücken, wenn jeder Typausdruck a' aus M sich zu a spezialisieren lässt; wenn a eine Teilmenge von Typen jedes Typausdrucks aus M beschreibt; wenn a eine Teilmenge des Durchschnitts der von den Typausdrücken aus M beschriebenen Typmengen beschreibt.
- allgemeinste gemeinsame Instanz einer Menge M von Typausdrücken, wenn a gemeinsame Instanz von M ist und für alle anderen gemeinsamen Instanzen b von M gilt, dass sich a zu b spezialisieren lässt; dass jede andere gemeinsame Instanz b von M eine Teilmenge der Typen von a beschreibt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Gemeinsame Instanz v. M $\not\Rightarrow$ Unifikat v. M (1)

Dazu folgendes Beispiel:

Die Typausdrücke

- `([Bool],[[Bool]])`, `([[e]],[[[e]]])`, `([d],[[d]])`

sind gemeinsame Instanzen (oder Spezialisierungen) der Typausdrücke

- `(a,[a])` und `([b],c)`

unter den Substitutionen

- `[Bool]`, `[[e]]`, `[d]` für `a`
- `Bool`, `[e]`, `d` für `b`
- `[[Bool]]`, `[[[e]]]`, `[[d]]` für `c`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Gemeinsame Instanz v. M $\not\Rightarrow$ Unifikat v. M (2)

In Substitutionsschreibweise (vgl. Kap. 12.3.1):

- `(a,[a])[[Bool]/a]` = `([Bool],[[Bool]])`
  `(a,[a])[[[e]]/a]` = `([[e]]],[[[e]]])`
  `(a,[a])[[d]/a]` = `([d],[[d]])`

- `(([b],c)[Bool/b,[[Bool]]/c]` = `([Bool],[[Bool]])`
  `(([b],c)[[e]/b,[[[e]]]/c]` = `([[e]]],[[[e]]])`
  `(([b],c)[d/b,[[d]]/c]` = `([d],[[d]])`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Gemeinsame Instanz v. M $\not\Rightarrow$ Unifikat v. M (3)

Weiters sind beide Typausdrücke

- `([Bool],[[Bool]])`, `([[e]],[[[e]]])`

Instanzen (oder Spezialisierungen) des Typausdrucks

- `([d],[[d]])`

unter den Substitutionen `Bool`, `[e]` für `d`:

- `([d],[[d]])[[Bool]/d]` = `([Bool],[[Bool]])`
  `([d],[[d]])[[e]/d]` = `([[e]],[[[e]]])`

Umgekehrt ist der Typausdruck

- `([d],[[d]])`

keine Instanz (oder Spezialisierung) von einem der Ausdrücke

- `([Bool],[[Bool]])`, `([[e]],[[[e]]])`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Gemeinsame Instanz v. M $\not\Rightarrow$ Unifikat v. M (4)

Zusammengefasst:

Die Typausdrücke `([Bool],[[Bool]])`, `([[e]],[[[e]]])`

- sind gemeinsame Instanzen der Typausdrucksmenge

  $M =_{df} \{$`(a,[a])`,`([b],c)`,`([d],[[d]])`$\}$
- jedoch keine allgemeinsten Instanzen von M, d.h. keiner der beiden Ausdrücke ist Unifikat von M.

Der Typausdruck `([d],[[d]])` ist

- die allgemeinste gemeinsame Instanz und damit das Unifikat von M.

Insgesamt ist damit gezeigt:

- Die Eigenschaft 'gemeinsame Instanz' einer Menge von Typausdrücken impliziert nicht die Eigenschaft 'Unifikat' dieser Menge.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Unifikation, Unifikationsaufgabe

...ist die Bestimmung der

- allgemeinsten gemeinsamen (Typ-) Instanz (engl. most general common (type) instance) einer Menge von Typausdrücken und der zugehörigen Substitution.

Informell: Unifikation

- bestimmt allgemeinstmögliche mehrere Typbedingungen zugleich erfüllende Typausdrücke, die allgemeinste gemeinsame Instanz einer Menge von Typausdrücken sind.
- wertet dafür Kontextbedingungen in Kombination aus.
- führt i.a. zu polymorphen Typausdrücken.
- kann fehlschlagen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Unifikation bestimmt allgemeinste Instanzen

...unter ausdrucksübergreifender Auswertung von Kontext-bedingungen.

Illustriert an Bsp. 5: Die Kontextbedingungen

1. `(g . f)`
2. `f (x,y) = (x,['a'.. y])`
3. `g (m,zs) = m + length zs`

ausdrucksübergreifend auswertend, bestimmt Unifikation den Typausdruck:

- `(Int,[Char])`

als allgemeinste gemeinsame Instanz der Menge M von Typ-ausdrücken

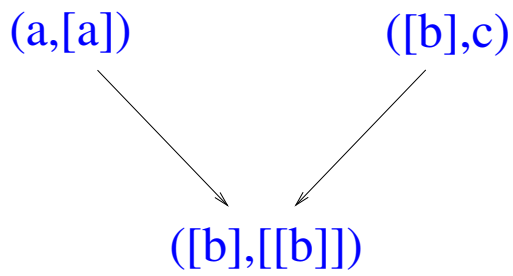
- $M =_{df} \{$`(a,[Char])`,`(Int,[b])`$\}$

unter der Substitution `Int` für `a` und `Char` für `b`:

- `(a,[Char])`[`Int`/`a`] = `(Int,[b])`[`Char`/`b`] = `(Int,[Char])`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bsp.: Eine erfolgreiche Unifikation



([b],[[b]]), die allgemeinste gemeinsame Instanz von (a,[a]) und ([b],c).

Für die Unifikation von `(a,[a])` und `([b],c)` verlangt die Kontextbedingung

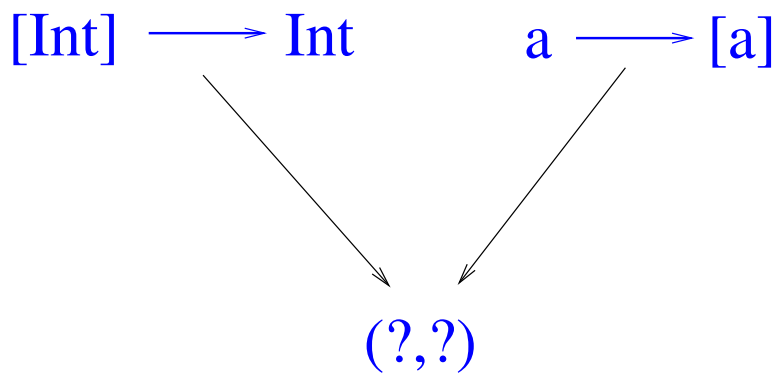
- `(a,[a])`: Die 2-te Komponente ist eine Liste von Elementen des Typs der 1-ten Komponente.
- `([b],c)`: Die 1-te Komponente ist von einem Listentyp.

Zusammen impliziert das: Die allgemeinste gemeinsame Instanz von `(a,[a])` und `([b],c)` ist der (nichtmonomorphe) polymorphe Typausdruck `([b],[[b]])`.

Somit: Unifikation ist erfolgreich und liefert polymorphen Typ.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bsp.: Eine fehlschlagende Unifikation



Für die Unifikation von `([Int] -> [Int])` und `(a -> [a])` verlangt die Kontextbedingung zur Unifikation

- Argumenttypen: `a` ist vom Typ `[Int]`.
- Resultattypen: `a` ist vom Typ `Int`.

Das schließt sich aus und ist nicht zugleich erfüllbar; eine gemeinsame Typinstanz existiert nicht.

Somit: Unifikation schlägt fehl, Typisierung ist nicht möglich.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typprüfung für Fkt.-Def., polymorpher Fall

Bsp. 6: `f` echt polymorphe Fkt.-Def., d.h. b_i, `b` Typvariablen:

```
f :: b1 -> b2 -> ... -> bk -> b
f m1 m2 ... mk
  | w1 = a1
  | w2 = a2
  ...
  | wn = an
```

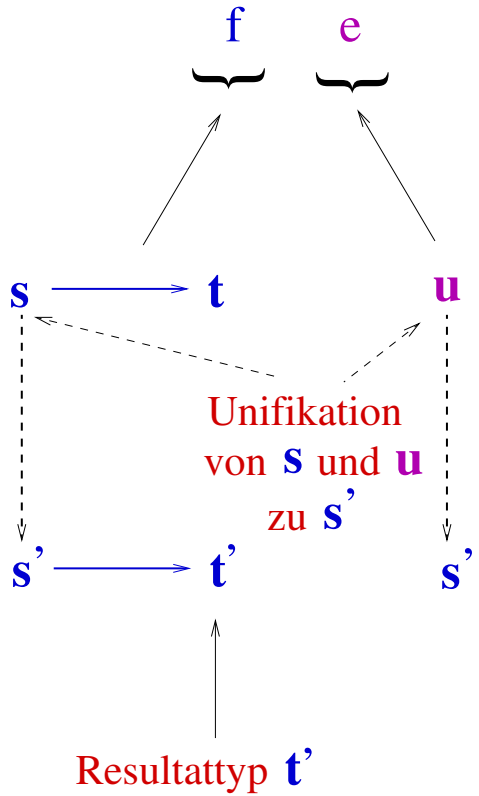
...für die Typprüfung von `f` sind 3 Kontexteigenschaften auszunutzen:

1. Jeder Wächter w_i muss vom Typ `Bool` sein.
2. Jeder Ausdruck a_i muss von einem Typ t_i sein, der mindestens (! – umgekehrt im Aufruffall) so allgemein ist wie der Typ `b`, d.h. `b` muss eine Instanz von t_i sein.
3. Das Muster jedes Parameters m_i muss mit dem zugehörigen Parametertyp b_i konsistent sein.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Unifikation bei Typprüfung v. Fkt.-Termen (1)

Bsp. 7: Der Funktionsterm `(f e)`:



Es gilt: Typkorrektheit von `(f e)` erfordert nicht Gleichheit von `s` und `u`; es reicht, wenn sie unifizierbar sind: Unifizierter Typ von `f` ist `(s' -> t')`, von `(f e)` somit `t'`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Unifikation bei Typprüfung v. Fkt.-Termen (2)

Bsp. 8: Der Funktionsterm `(map ord)` unter den Kontext-bedingungen:

1. `map :: (a -> b) -> [a] -> [b]`
2. `ord :: Char -> Int`

Unifikation der Typausdrücke `(a -> b)` und `(Char -> Int)` liefert dann als allgemeinst mögliche Typen für `(map ord)` und `map`:

- `(map ord) :: [Char] -> [Int]`
- `map :: (Char -> Int) -> [Char] -> [Int]`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Unifikation bei Typprüfung v. Fkt.-Termen (3)

Bsp. 9: Der applikative Term `(foldr (+) 0 [3,5,34])` unter den Kontextbedingungen:

1. `(foldr (+) 0 [1,2,3,5,7,11,13]) :: Int` ($\widehat{=}$ 42)
2. `foldr f s [] = s`
3. `foldr f s (x:xs) = f x (foldr f s xs)`

Für die Typen von `(foldr (+) 0 [3,5,34])` und `foldr` liefert das:

- `(foldr (+) 0 [1,2,3,5,7,11,13]) :: Int`
- `foldr :: (Int -> Int -> Int) -> Int -> [Int] -> Int`

Naiv legt das nahe, der 'allgemeinsten' Typ von `foldr` sei:

- `foldr :: (a -> a -> a) -> a -> [a] -> a`

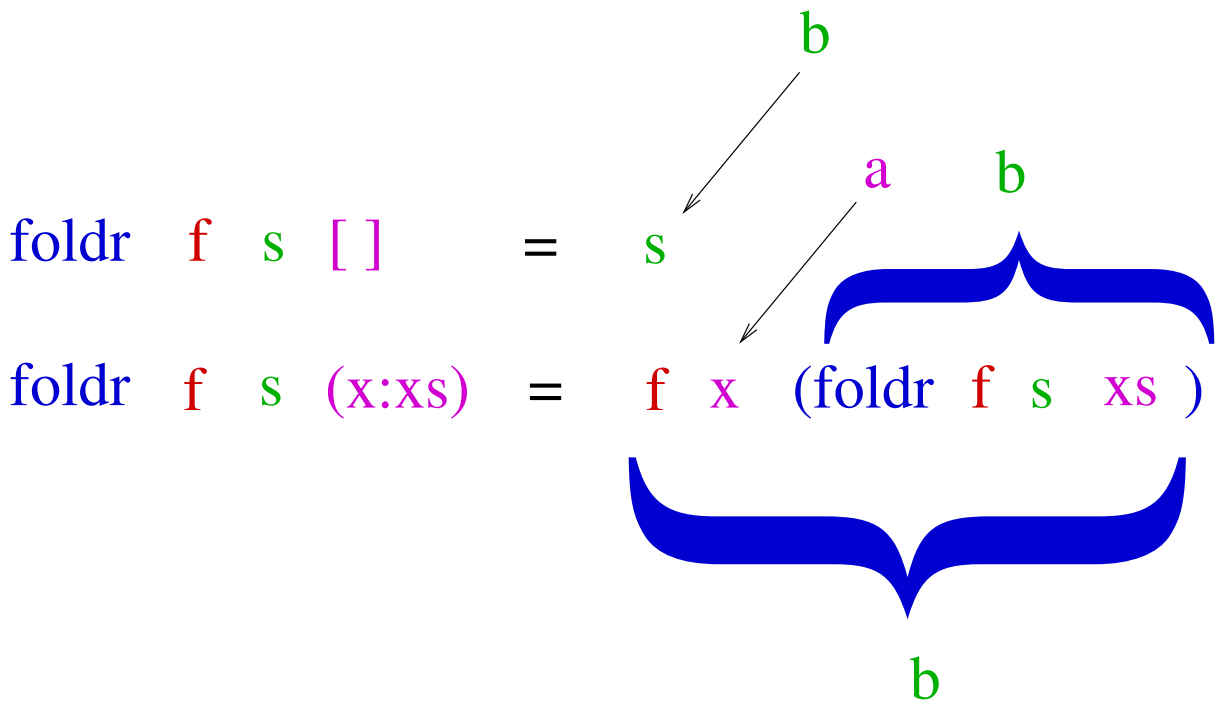
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Unifikation bei Typprüfung v. Fkt.-Termen (4)

...eine genauere Überlegung liefert jedoch als allgemeinst möglichen Typ:

- `foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b`

Siehe dazu:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zusammenfassend: Typprüfung, polym. Fall

...die Beispiele zeigen, dass wie im monomorphen Fall die Anwendungskontexte von Ausdrücken und Funktionsdefinitionen implizit ein

- System von Typbedingungen festlegen.

Das Typprüfungsproblem reduziert sich so auf die Bestimmung der

- allgemeinst möglichen Typausdrücke, so dass keine Bedingung verletzt ist.

Dafür ist i.a. die Unifikation von Typausdrücken nötig.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bem.: Konstanten, Variablen b. Unifikation (1)

...Konstanten und Variablen werden in Haskell bei Unifikation unterschiedlich behandelt.

Dazu folgendes Beispiel:

Der Ausdruck a kann erfolgreich getypt werden, die davon abgeleitete Funktionsabstraktion f hingegen nicht:

```
a     = length ([]++[True])
        + length ([]++[1,2,3]) :: Int

f xs = length (xs++[True])
        + length (xs++[1,2,3])  ⇝ Nicht typbar!
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bem.: Konstanten, Variablen b. Unifikation (2)

Der Grund dafür:

- Konstanten wie `[]` können unterschiedlich getypt in Ausdrücken verwendet werden: In `a` verlangt
  - 1-te Verwendung von `[]` als Typ: `[] :: [Bool]`
  - 2-te Verwendung von `[]` als Typ: `[] :: [Int]`

  Unifikation analysiert für Konstanten wie `[]` beide Vorkommen getrennt und ist erfolgreich.
- Variablen wie `xs` dürfen das nicht: In `f` verlangt die
  - 1-te Verwendung von `xs` als Typ: `xs :: [Bool]`
  - 2-te Verwendung von `xs` als Typ: `xs :: [Int]`

  Beides zusammen ist unvereinbar. Die verschiedenen Verwendungen von `xs` werden (anders als bei Konstanten) von Unifikation für Variablen nicht getrennt; Unifikation für `f` schlägt deshalb fehl.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe 14.3.1

Zeige, dass die unterschiedliche Behandlung von Konstanten und Variablen durch Unifikation sinnvoll ist.

Zu welchen Widersprüchen würde die vermeintlich naheliegende Typisierung

```
f :: [a] -> Int
```

führen? Würde die starke Typisierung von Haskell erhalten bleiben, die zusichert, dass Laufzeitfehler aufgrund von Typfehlern ausgeschlossen sind?

Überlege dazu, Listen welcher Argumenttypen `f` verkraften müsste und ob ihre Implementierung durch die definierende Gleichung

```
f xs = length (xs++[True]) + length (xs++[1,2,3])
```

das hergäbe und was daraus für starke Typisierung und die daraus folgenden Zusicherungen folgte.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 14.4

Polymorphe Typprüfung mit Typklassen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Polymorphe Typprüfung mit Typklassen (1)

Bsp. 1: Die Funktionsdefinition:

```
member []     y = False
member (x:xs) y = (x == y) || member xs y
```

Aus der Auswertung des Kontexts, hier

1. dem Listenmuster `(x:xs)` für das erste Argument
2. dem Funktionsresultat `False` in der 1-ten Gleichung
3. der Benutzung von `(==)` in der 2-ten Gleichung

können wir für den allgemeinsten Typ von `member` schließen:

```
member :: Eq a => [a] -> a -> Bool
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Polymorphe Typprüfung mit Typklassen (2)

Bsp. 2: Bespiel 1 erweitert um Ausdruck `e` mit Kontextinformation: `e :: Ord b => [[b]]`

Gesucht: Der allgemeinste Typ des Fkt.-Terms `(member e)`.

Naiv, ohne Berücksichtigung der Typklassenkontexte von `e` und `member`, lieferte dies für die Typen von `(member e)`, `member` und `e`:

- `e :: [[b]]`
- `member :: [[b]] -> [b] -> Bool`
- `(member e) :: [b] -> Bool`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Polymorphe Typprüfung mit Typklassen (3)

Korrekt, mit Berücksichtigung aller Typklassenkontexte von `member` und `e`:

- `(Eq [b],Ord b)`

erhalten wir jedoch für den Typ von `(member e)`:

- `(member e) :: (Eq [b],Ord b) => [b] -> Bool`

...und weiters nach einer Typklassenkontextanalyse zur Typklassenkontextvereinfachung schließlich abschließend einfacher:

- `(member e) :: Ord b => [b] -> Bool`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typklassenkontextanalyse (1)

...Analyse und Typklassenkontextvereinfachung erfolgt mehrschrittig, im Bsp. vom Kontext `(Eq [b],Ord b)` zum Kontext `(Ord b)`:

1. Herunterbrechen von Typklassenkontextbedingungen wie `(Eq [b])` auf Bedingungen an Typvariablen wie `b` durch Analyse der involvierten Typklasseninstanzdeklaration wie
   ```
   instance Eq a => Eq [a] where...
   ```
2. Wiederholen von Schritt 1) bis keine Instanzdeklaration mehr anwendbar ist.
3. Weiteres Vereinfachen des Kontexts aus Schritt 2) durch Auswertung der involvierten Typklassendefinitionen wie
   ```
   class Eq a => Ord a where...
   ```.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typklassenkontextanalyse (2)

Für unser Beispiel erhalten wir auf diese Weise:

1. Ausgehend vom Kontext `(Eq [b],Ord b)`, liefert die Analyse der Instanzdeklaration `(instance Eq a => Eq [a] where...)` die Implikation `Eq b`, wenn `Eq [b]`. Das erlaubt `(Eq [b],Ord b)` zu `(Eq b,Ord b)` zu vereinfachen.
2. Keine Instanzdeklaration mehr anwendbar; weiter mit 3).
3. Ausgehend von `(Eq b,Ord b)` aus Schritt 2), liefert die Analyse der Typklassendefinition `(class Eq a => Ord a where...)` die Implikation `Ord b`, wenn `Eq b`. Das erlaubt `(Eq b,Ord b)` zu `(Ord b)` zu vereinfachen; keine weitere Vereinfachung mehr möglich.

Somit erhalten wir ingesamt für den allgemeinsten Typ des applikativen Ausdrucks `(member e)`:

- `(member e) :: Ord b => [b] -> Bool`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zusammenfassend

...der dreistufige Prozess aus:

1. Unifikation
2. Analyse (einschl. Instanz- und Typklassendeklarationen)
3. Simplifikation

ist das allgemeine Muster für polymorphe Typprüfung mit Typklassen in Haskell.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 14.5

Typsysteme, Typinferenz

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typsysteme, Typinferenz

Typsysteme sind

- logische Systeme, die uns erlauben, Aussagen der Form 'exp ist Ausdruck vom Typ t' zu formalisieren und sie mithilfe von Axiomen und Regeln des Typsystems zu beweisen.

Typinferenz bezeichnet

- den Prozess, den Typ eines Ausdrucks automatisch mithilfe der Axiome und Regeln des Typsystems abzuleiten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typgrammatik (typischer Ausschnitt)

...erzeugt eine Typsprache:

$$
\begin{array}{lcll}
\tau & ::= & \mathit{Int} \mid \mathit{Float} \mid \mathit{Char} \mid \mathit{Bool} & \text{(Einfacher Typ)} \\
 & \mid & \alpha & \text{(Typvariable)} \\
 & \mid & \tau \to \tau & \text{(Funktionstyp)} \\
 & & & \\
\sigma & ::= & \tau & \text{(Typ)} \\
 & \mid & \forall\, \alpha.\ \sigma & \text{(Typbindung)}
\end{array}
$$

Sprechweisen: τ ist ein Typ, σ ein Typschema.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typumgebung, substituierte Typumgebung

Typumgebungen sind

- partielle Abbildungen, die Typvariablen auf Typschemata abbilden.

Ist Γ eine Typumgebung, so ist $\Gamma[\tau_1/var_1, \ldots, \tau_n/var_n]$

- eine substituierte Typumgebung, die jede Typvariable var_i auf den Typ τ_i abbildet; jede andere Typvariable auf ihren Typ in der Typumgebung Γ.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typsystem (typischer Ausschnitt)

...assoziiert mit jedem (typisierbaren) Ausdruck der Sprache einen Typ der Typsprache, wobei Γ eine sogenannte Typannahme (oder Typumgebung) ist:

Axiome:

$$\text{VAR}\quad \frac{}{\Gamma \vdash var : \Gamma(var)}$$

$$\text{CON}\quad \frac{}{\Gamma \vdash con : \Gamma(con)}$$

Regeln:

$$\text{COND}\quad \frac{\Gamma \vdash exp : Bool \quad \Gamma \vdash exp_1 : \tau \quad \Gamma \vdash exp_2 : \tau}{\Gamma \vdash \text{ if } exp \text{ then } exp1 \text{ else } exp2 : \tau}$$

$$\text{APP}\quad \frac{\Gamma \vdash exp : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash exp' : \tau'}{\Gamma \vdash exp\ exp' : \tau}$$

$$\text{ABS}\quad \frac{\Gamma[var \mapsto \tau'] \vdash exp : \tau}{\Gamma \vdash \backslash x\text{->}exp : \tau' \to \tau}$$

...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Pragmatisch wichtig

...ist es Typsysteme so anzugeben, dass stets nur

- ein Axiom oder eine Regel anwendbar ist.

Man spricht dann von syntaxgerichteter Anwendbarkeit der Inferenzregeln, was zu

- effizienteren Typinferenzalgorithmen

führt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Unifikationsalgorithmus (schematisch)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}(\alpha, \alpha) &= [\,] \\
\mathcal{U}(\alpha, \tau) &= \begin{cases} [\tau/\alpha] & \text{falls } \alpha \notin \tau \\ \textit{Fehlschlag} & \text{sonst} \end{cases} \\
\mathcal{U}(\tau, \alpha) &= \mathcal{U}(\alpha, \tau) \\
\mathcal{U}(\tau_1 \to \tau_2, \tau_3 \to \tau_4) &= \mathcal{U}(U\tau_2, U\tau_4)U \text{ mit } U = \mathcal{U}(\tau_1, \tau_3) \\
\mathcal{U}(\tau, \tau') &= \begin{cases} [\,] & \text{falls } \tau = \tau' \\ \textit{Fehlschlag} & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Anmerkung:

- Die Anwendung der Gleichungen erfolgt sequentiell von oben nach unten.
- U für (allgemeinster) Unifikator (i.w. eine Substitution).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel: Anwendung 'Scharfen Hinsehens'

...auf die Typausdrücke `(a -> (Bool,c))` und `(Int -> b)`.

Durch scharfes Hinsehen erkennnt man: Die Substitution

- `[Int/a,Float/c,(Bool,Float)/b]`
  - ist ein Unifikator von `(a -> (Bool,c))`, `(Int -> b)`.
- `[Int/a,(Bool,c)/b]`
  - ist der (allgemeinste) Unifikator von `(a -> (Bool,c))`, `(Int -> b)`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel: Anwendung des Unifikationsalg.

...auf die Typausdrücke `(a -> c)` und `(b -> Int -> a)`.

Rechnen liefert:

$$
\begin{aligned}
 & \mathcal{U}(\texttt{a -> c},\texttt{b -> Int -> a}) \\
(\text{mit } U = \mathcal{U}(\texttt{a},\texttt{b}) = [\texttt{b}/\texttt{a}]) \quad &= \mathcal{U}(U\texttt{c}, U(\texttt{Int -> a}))U \\
 &= \mathcal{U}(\texttt{c},\ \texttt{Int -> b})[b/a] \\
 &= [\texttt{Int -> b}/\texttt{c}][\texttt{b}/\texttt{a}] \\
 &= [\texttt{Int -> b}/\texttt{c},\texttt{b}/\texttt{a}]
\end{aligned}
$$

Allgemeinster Unifikator der beiden Typausdrücke ist damit die Substitution `[(Int -> b)/c,b/a)]` und ihr (allgemeinstes) Unifikat der Typausdruck:

```
(b -> Int -> b) =
(a -> c)[(Int -> b)/c,b/a)] =
(b -> Int -> a)[(Int -> b)/c,b/a)]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 14.6

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zusammenfassung

Haskell ist stark typisiert:

- Wohltypisierung von Haskell-Programmen ist deshalb zur Übersetzungszeit entscheidbar. Fehler zur Laufzeit aufgrund von Typfehlern sind deshalb ausgeschlossen.
- Typen können, müssen aber vom Programmierer nicht angegeben werden.
- Übersetzer und Interpretierer inferieren die Typen von Ausdrücken und Funktionsdefinitionen (in jedem Fall) automatisch.

Lohnt sich dann die Mühe, Typen explizit zu spezifizieren?
Ja, im Programm angegebene Typen sind nützlich für

- Programmierer als Programmkommentierung.
- Interpretierer und Übersetzer als Hilfe, aussagekräftigere Fehlermeldungen zu erzeugen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Wichtige Arbeiten und Leseempfehlungen

...zu Typprüfung, Typinferenz.

Funktionale Sprachen allgemein:

- Anthony J. Field, Peter G. Robinson. Functional Programming. Addison-Wesley, 1988. (Kapitel 7, Type inference systems and type checking)

Haskell-spezifisch:

- Simon Peyton Jones, John Hughes. Report on the Programming Language Haskell 98.
  `http://www.haskell.org/report/`

Vertiefend:

- Luca Cardelli. Basic Polymorphic Type Checking. Science of Computer Programming 8:147-172, 1987.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Wichtige Arbeiten und Leseempfehlungen

...zu Typsystemen.

Überblick:

- John C. Mitchell. Type Systems for Programming Languages. In Jan van Leeuwen (Hrsg.). *Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. B: Formal Methods and Semantics*. Elsevier Science Publishers, 367-458, 1990.

Grundlagen polymorpher Typsysteme:

- Robin Milner. A Theory of Type Polymorphism in Programming. Journal of Computer and System Sciences 17:248-375, 1978.
- Luís Damas, Robin Milner. Principal Type Schemes for Functional Programming Languages. In Conference Record of the 9th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'82), 207-218, 1982.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Wichtige Arbeiten und Leseempfehlungen

...zu Unifikation:

- J. A. Robinson. A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle. Journal of the ACM 12(1):23-42, 1965.
- Alberto Martinelli, Umberto Montanari. An Efficient Unification Algorithm. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 4(2):258-282, 1982.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 14.6

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 14 (1)


Luca Cardelli. *Basic Polymorphic Type Checking*. Science of Computer Programming 8:147-172, 1987.


Luca Cardelli, Peter Wegner. *On Understanding Types, Data Abstraction, and Polymorphism*. ACM Computing Surveys 17(4):471-522, 1985.


Luís Damas, Robin Milner. *Principal Type Schemes for Functional Programming Languages*. In Conference Record of the 9th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'82), 207-218, 1982.


Antonie J.T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 4.7, Type Inference)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 14 (2)

Gilles Dowek, Jean-Jacques Lévy. *Introduction to the Theory of Programming Languages*. Springer-V., 2011. (Kapitel 6, Type Inference; Kapitel 6.1, Inferring Monomorphic Types; Kapitel 6.2, Polymorphism)

Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 5, Typisierung und Typinferenz)

Anthony J. Field, Peter G. Robinson. *Functional Programming*. Addison-Wesley, 1988. (Kapitel 7, Type inference systems and type checking)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 14 (3)


Alberto Martinelli, Umberto Montanari. *An Efficient Unification Algorithm.* ACM Transactions on Programming Languages and Systems 4(2):258-282, 1982.


Robin Milner. *A Theory of Type Polymorphism in Programming*. Journal of Computer and System Sciences 17:248-375, 1978.


John C. Mitchell. *Type Systems for Programming Languages*. In *Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. B: Formal Methods and Semantics*, Jan van Leeuwen (Hrsg.). Elsevier Science Publishers, 367-458, 1990.


Simon Peyton Jones (Hrsg.). *Haskell 98: Language and Libraries. The Revised Report*. Cambridge University Press, 2003. `www.haskell.org/definitions`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 14 (4)


Benjamin C. Pierce. *Types and Programming Languages*. MIT Press, 2002.


J. A. Robinson. *A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle*. Journal of the ACM 12(1):23-42, 1965.


Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 5, Writing a Library: Working with JSON Data – Type Inference is a Double-Edged Sword)


Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 13, Checking types)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 14 (5)


Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011.
(Kapitel 13, Overloading, type classes and type checking)


Philip Wadler, Robert B. Findler. *Well-typed Programs can't be Blamed*. In Proceedings of the 18th European Symposium on Programming (ESOP 2009), Springer-V. LNCS 5502, 1–16. 2009.
doi: 10.1007/978-3-642-00590-9_1.


Mitchell Wand. *A Simple Algorithm and Proof for Type Inference*. Fundamenta Informaticae 10, 115–122, 1987.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Teil VI

Weiterführende Konzepte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15

Interaktive Programme: Ein-/Ausgabe

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.1

Motivation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.1.1

Problem und Ziel

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Das Problem: Dialog findet nicht statt!

...unsere Programme sind bislang stapelverarbeitungsorientiert:

- Eingabedaten müssen zu Programmbeginn vollständig zur Verfügung gestellt werden.
- Einmal gestartet, besteht keine Möglichkeit mehr, mit weiteren Eingaben auf das Verhalten oder Ergebnisse des Programms zu reagieren und es zu beeinflussen.

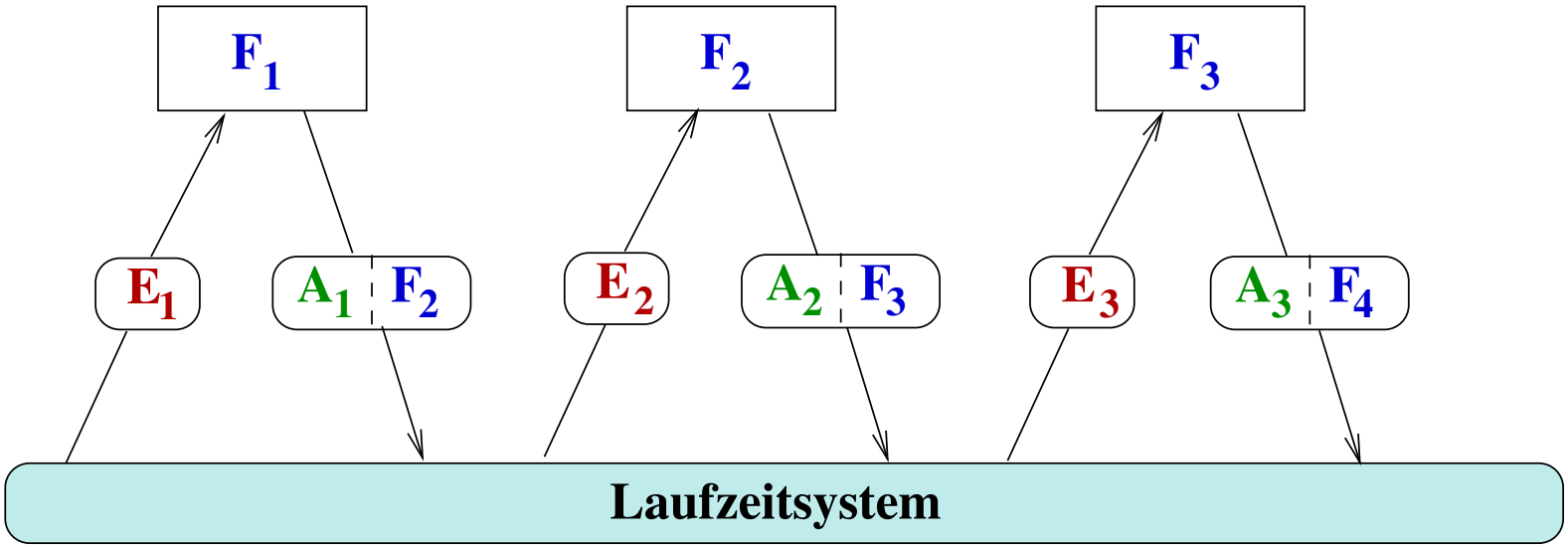
Peter Pepper. *Funktionale Programmierung.*
Springer–Verlag, 2003, S. 245.

...Dialog, Interaktion zwischen Benutzer und Programm findet nicht statt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Das Ziel: Wir hätten gerne auch

...dialog- und interaktionsorientierte Haskell-Programme:



Peter Pepper. *Funktionale Programmierung.*
Springer–Verlag, 2003, S. 253.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.1.2

Herausforderung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Herausforderung

...Auflösung eines scheinbar unauflöslichen Widerspruchs: Der

- Umgang m. Seiteneffekten in einer seiteneffektlosen Welt!

Konstituierendes Kennzeichen

- rein funktionaler Programmierung:
  - Vollkommene Abwesenheit von Seiteneffekten!
- Ein-/Ausgabe:
  - Unvermeidbare Anwesenheit von Seiteneffekten!

    Ein- und Ausgabe, lesen und schreiben verändern den Zustand der äußeren Welt notwendig und irreversibel.

Wichtig: Das gilt paradigmenunabhängig! Ein- und Ausgabe erzeugen Seiteneffekte notwendig, unvermeidbar, sind ohne Seiteneffekte nicht vorstellbar!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Verzicht auf Ein-/Ausgabe ist keine Option!

"Der Benutzer lebt in der Zeit
und kann nicht anders als zeitabhängig
sein Programm beobachten."

Peter Pepper. Funktionale Programmierung.
Springer-V., 2. Auflage, 2003.

...wir können abstrahieren von der Arbeitsweise

- des Rechners
- nicht aber von der des Benutzers.

Die Ermöglichung dialog-, interaktionsorientierter Ein-/Ausgabe ist deshalb unverzichtbar, bringt uns an die Nahtstelle

- von reiner funktionaler und imperativer Programmierung

und erfordert sie zu überschreiten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.1.3

Warum (naive) Einfachheit versagt

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ein-/Ausgabeoperationen

...in funktionaler Programmierung müssen (wie alle Operationen und Funktionen)

- von funktionalem Typ sein,
- ein Resultat liefern.

Damit zu klären:

- Was sollen deren Typ und Resultat sein?
- Wie lassen sie sich komponieren und zeitlich (an)ordnen?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseoperationen

...liefern stets einen Wert.

- Naheliegend: Den Wert der gelesenen Eingabe.

Am Beispiel einer Leseoperation für ganze Zahlen:

```
-- Zur Illustration: Kein gültiges Haskell!
READ_INT :: INT
READ_INT = << Lies "ganze Zahl"
              {- Der unvermeidbare Seiteneffekt, durch
                 den der Zustand der Welt irreversibel
                 verändert wird! -}
               und liefere deren Wert als Resultat.
              {- Das formal erforderliche und inhalt-
                 lich auch gewollte Ergebnis der Lese-
                 operation! -}
           >>
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schreiboperationen

...liefern stets einen Wert.

- Naheliegend: Nichts.
- Hilfsweise: (i) Den geschriebenen Wert, oder (ii) einen Wahrheitswert in Abhängigkeit des Erfolgs der Operation; oder (iii) irgendeinen Wert (beliebig; beliebig, aber fest).

Am Bsp. einer Schreibop. für Zeichen nach Vorschlag (i):

```
-- Zur Illustration: Kein gültiges Haskell!
Print_String :: String -> String
Print_String s =
 << Gib am Bildschirm den Wert von s aus
  {- Der unvermeidbare Seiteneffekt, durch den der
     Zustand der Welt irreversibel verändert wird! -}
   und liefere s als Resultat.
  {- Das formal erforderliche Ergebnis der Schreib-
     operation! -}
 >>
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Erstes Problem: Komponierbarkeit

Betrachte folgende einfache interaktive Programmieraufgabe:

- Schreibe ein Programm, dass (1) eine ganze Zahl liest und anschließend (2) einen frei wählbaren Text schreibt.

Naheliegend: Komponiere die beiden Funktionen READ_INT und PRINT_STRING sequentiell mittels Funktionskomposition:

```
(.) :: (B -> C) -> (A -> B) -> (A -> C)
(F . G) x = F (G x)
```

Das ergibt: (PRINT_STRING . READ_INT)

- Jedoch: Die Komposition scheitert.

  ```
  READ_INT   :: INT
  PRINT_STRING :: STRING -> STRING
  ```

  ...sind nicht typkompatibel für Komposition mittels (.).

⇝ (.) zur Komposition von Fkt. reicht nicht länger aus!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zweites Problem: Fkt.-Eigenschaftsverlust

Betrachte folgendes Beispiel:

```
konstante = 42 :: Int

Fun :: Int -> Int          Fun' :: Int -> Int
Fun n = n + konstante      Fun' n = n + Read_Int
```

- Anders als der Wert von Fun, hängt der Wert von Fun′ nicht allein vom Argumentwert, sondern auch vom Wert der Eingabeoperation ab.
- Das gilt auch für Funktionen, die sich direkt/indirekt auf Fun′ abstützen: Die Programmbedeutung wird schwer durchschaubar.
- Jeder Aufruf von Fun′ (u. sich darauf abstützender Funktionen) kann trotz gleichen Argumentwerts einen anderen Wert liefern. Fun′ 42 == Fun′ 42 gilt nicht länger.

⇝ Fun′ und sich darauf abstützende ‘Funktionen’ werden Relationen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Drittes Problem: Zeitliche Anordenbarkeit

Betrachte folgende Wertveinbarungen:

```
WERT                = (17+4)*2 :: INT
DIFF                = WERT - WERT
DIFF'               = READ_INT - READ_INT
WAHR_ODER_FALSCH    = (DIFF + DIFF' == 0) :: BOOL
```

Ausdruck

- DIFF hat stets den Wert 0; gleich, ob WERT zunächst als linker oder rechter Operand d. Differenz ausgewertet wird.
- DIFF′ hat unterschiedliche Werte, wenn die Auswertung von linker und rechter Leseoperation vertauscht wird bei insgesamt gleichen (aber voneinander verschiedenen) eingelesenen Zahlen.
- WAHR_ODER_FALSCH hat abhängig von DIFF′ den Wert TRUE oder FALSE, ist also nicht konstant.

$\rightsquigarrow$ Datenabhängigkeit allein reicht nicht länger aus zur Steuerung der Auswertungsreihenfolge von Ausdrücken!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Insgesamt: Verlust referentieller Transparenz

Die Beispiele zeigen: Ein-/Ausgabe lösen das tragende Grundprinzip reiner funktionaler Programmierung auf:

- Referentielle Transparenz

...und führen damit zum Verlust einer Reihe von Gewissheiten:

- Die Unveränderbarkeit des Zustands der äußeren Welt (Seiteneffektfreiheit).
- Der Wert eines Ausdrucks hängt nur vom Wert seiner Teilausdrücke ab (Kompositionalität), nicht von der Reihenfolge ihrer Auswertung (Reihenfolgenunabhängigkeit).
- Der Wert eines Ausdrucks ist unveränderlich über die Zeit (Zeitunabhängigkeit); er verändert sich nicht durch die Anzahl seiner Auswertungen (Auswertungshäufigkeitsunabhängigkeit).
- Ein Ausdruck darf stets durch seinen Wert ersetzt werden und umgekehrt (Austauschbarkeit).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die Hinzunahme von Ein-/Ausgabeoperationen

...in fkt. Sprachen stellt damit auch ein weiteres leitendes Prinzip reiner funktionaler (und allgemeiner deklarativer) Programmierung infrage:

- Die Betonung des 'was' (Ergebnisse) statt des 'wie' (die Art ihrer Berechnung)

und rüttelt damit an den Grundfesten, auf die sich

- reine funktionale Programmierung

gründet und von denen sich ihre Stärke und Eleganz ableitet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 15.2

Haskells Lösung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.2.1

Konzeption und Umsetzung

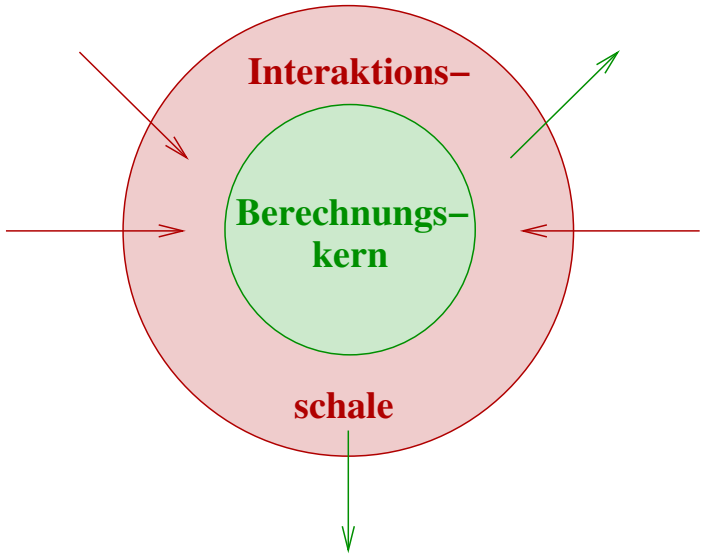
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Konzeptuelle E/A-Lösung Haskells

Konzeptuell wird in Haskell ein Programm geteilt in

- einen rein funktionalen Berechnungskern
- eine imperativähnliche Dialog- und Interaktionsschale.

zwischen denen mittels vordefinierter besonderer Ein-/Ausgabefunktionen Daten geschützt ausgetauscht werden können:



Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell.* Pearson, 2004, S. 89.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Haskells Umsetzung d. E/A-Lsg. im Überblick

A) Ein (vordef.) polymorpher Datentyp für Ein-/Ausgabe:

- data IO a = ... (Details implementierungsintern versteckt)

B) Vordefinierte primitive E/A-Operationen:

- ```
  getChar :: IO Char
  getInt  :: IO Int
  ...
  ```
- ```
  putChar :: Char -> IO ()
  putInt  :: Int -> IO ()
  ...
  ```

C) Ein Operator zur Komposition von E/A-Operationen:

- `(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b`
- 'Syntaktischer Zucker' für `(>>=)`: `do`-Notation.

D) Zwei Vermittlungs'operatoren' zwischen Schale und Kern:

- `return :: a -> IO a`
- `'<-     :: IO a -> a'` ($\rightsquigarrow$ informell!)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (1)

A) Trennung in rein funktionalen Berechnungskern und imperativartige Dialog- und Interaktionsschale:

Der Datentyp `(IO a)` erlaubt die Unterscheidung von Typen

- des rein funktionalen Berechnungskerns (`Char`, `Int`, `Bool`, etc.)
- der imperativartigen Dialog- und Interaktionsschale (`(IO Char))`, `(IO Int)`, `(IO Bool)`, etc.)

...`IO`-Werte bleiben in der Schale u. können nicht den rein fkt. Kern 'kontaminieren'.Vereinbarungen wie für `wahr_oder_falsch`, `fun'` sind in Haskell typinkorrekt u. nicht möglich; sie werden vom Typsystem ausgeschlossen und abgewiesen:

```
fun' :: Int -> Int
fun' n = n   + getInt
         ::Int ::IO Int
  ((+)-inkompatibel)

wert = (17+4)*2 :: Int
wahr_oder_falsch = (wert - wert) + (getInt - getInt)
                   ::Int          ::IO Int ::IO Int
((-)-inkompatibel)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (2)

B) Vordefinierte primitive E/A-Operationen
...als Bausteine, aus denen komplexe(re) Ein-/Ausgabeoperationen gebaut werden können.

C) Festlegung der zeitlichen Abfolge von E/A-Operationen
("Der Benutzer lebt in der Zeit...und kann nicht anders..."):

Der Kompositionsoperator (>>=) (oder gleichwertig die do-Notation, s. Kap. 15.4) erlauben die präzise Festlegung der

- zeitlichen Abfolge von E/A-Operationen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (3)

D) Verbindung von funktionalem Kern und E/A-Schale

- `return`: Von Kern in Schale (in äußere Welt).
- `<-`: Von Schale (von äußerer Welt) in Kern.

Informell:

- `return` erlaubt rein funktionale Werte (engl. pure values) aus dem funktionalen Kern über die Schale als seiten-effektverursachende Werte (engl. impure values) in die äußere Welt zu transferieren.

  ...'kontaminieren' reiner Werte.
- `<-` erlaubt den 'reinen' Anteil (`a`-Wert) seiteneffektverur-sachender Werte (`(IO a)`-Wert) aus der äußeren Welt in den funktionalen Kern zu transferieren.

  ...'dekontaminieren' E/A-verschmutzter Werte.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (4)

Kontaminierung, Dekontaminierung noch bildhafter:

- `<-`: Dekontaminierung E/A-verschmutzter Werte $\rightsquigarrow$ aus einem `(IO a)`-Wert wird ein `a`-Wert:

  `<- :: IO a -> a`

  `IO a` = Schale, `a` = Kern

  `<-` nimmt einen E/A-verschmutzten `(IO a)`-Wert und extrahiert daraus den rein funktionalen sauberen `a`-Wert, der dadurch für den rein funktionalen Berechnungskern nutzbar wird.
- `return`: Kontaminierung rein funktionaler Werte $\rightsquigarrow$ aus einem `a`-Wert wird ein `(IO a)`-Wert:

  `return :: a -> IO a`

  `a` = Kern, `IO a` = Schale

  `return` nimmt einen rein funktionalen sauberen `a`-Wert und verschmutzt ihn zu einem `(IO a)`-Wert, der dadurch für und in der äußeren Welt nutzbar wird.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (5)

Bemerkung: `return` und `<-` verhalten sich in diesem Sinne dual oder invers zueinander, wobei allerdings

- `return` eine (gewöhnliche) Funktion
- `<-` einen Wertvereinbarungsoperator (ähnlich ':=' oder '=') aus imperativen, objektorientierten Sprachen bezeichnet, einen Wertvereinbarungsoperator mit integrierter Dekontaminationsfunktionalität: Dekontamination durch Auspacken, durch Extraktion des `a`-Werts aus einem `(IO a)`-Wert.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 15.2.2

Aktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Aktionen sind Ausdrücke vom Typ `(IO a)`

Ausdrücke vom Typ `(IO a)`

- sind wertliefernde ('funktionaler' Anteil) E/A-Operationen ('prozeduraler' Anteil).
- bewirken einen Lese- oder Schreibseiteneffekt (prozedurales Verhalten) und liefern einen a-Wert als Ergebnis (funktionales Verhalten), der eingepackt als `(IO a)`-Wert zur Verfügung gestellt wird.
- heißen Aktionen (oder Kommandos) (engl. actions oder commands).

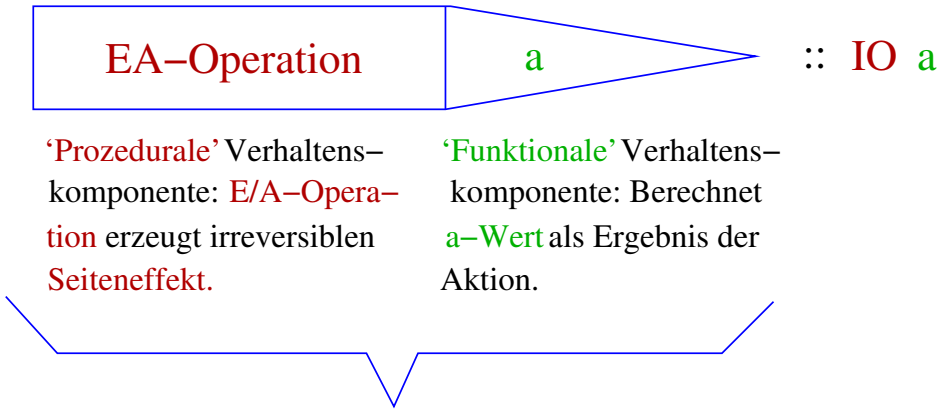
Informell:

$$\begin{aligned} \text{Aktion} &= (1)\ \text{E/A-Operation ('prozedural')} \\ &\quad + (2)\ \text{Wertlieferung ('funktional')} \\ &= \text{wertliefernde E/A-Operation} \end{aligned}$$

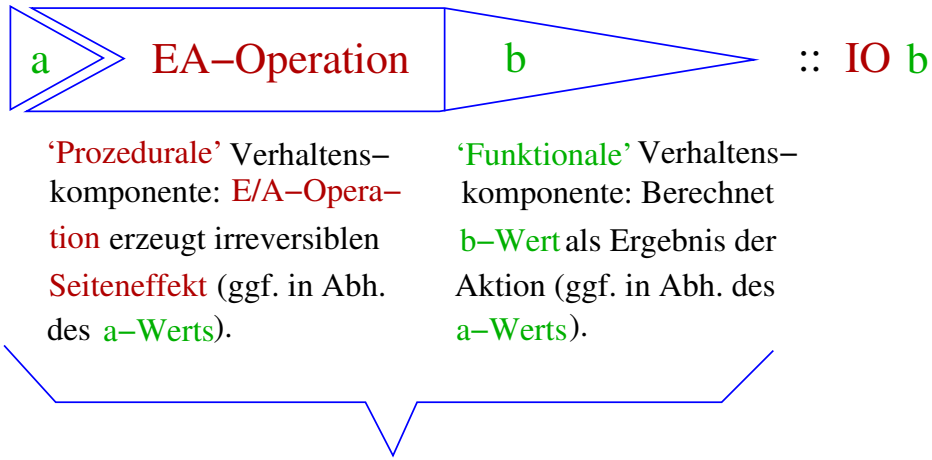
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Veranschaulichung des Effekts von Aktionen

Aktion `akt :: IO a`



Aktion liefernde Funktion `f_akt :: a -> IO b`



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typ

...aller Leseaktionen ist

- `(IO a)` (für 'lesegeeignete' Typinstanzen von `a`).

  Der in einen `a`-Wert transformierte gelesene Wert wird als (formal erforderliches und inhaltlich gewolltes) Ergebnis von Leseoperationen verwendet.

...aller Schreibaktionen ist

- `(IO ())` mit `()` der einelementige Nulltupeltyp mit gleichbenanntem einzigen Datenwert `()`.

  `()` als (einziger) Wert des Nulltupeltyps `()` wird als formal erforderliches Ergebnis von Schreiboperationen verwendet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Auswertung, Ausführung von Aktionen

Wegen des kombinierten

1. prozeduralen (seiteneffekterzeugende Lese-/Schreiboperation) und
2. funktionalen (Wert als Ergebnis liefernden)

Effekts der Auswertung von Aktionen (oder E/A-Ausdrücken), spricht man statt von Auswertung meist von Ausführung von Aktionen (oder E/A-Ausdrücken).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Interpretation der Signatur von (>>=)

...des Kompositionsoperators (>>=):

- `(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b`

Die Signatur liefert:

- (>>=) ist eine Abbildung, die eine (Argument-) Aktion mit einem a-Wert als Ergebnis (d.h. einen (IO a)-Wert) auf eine (Bild-) Aktion mit einem b-Wert als Ergebnis abbildet (d.h. auf einen (IO b)-Wert) mithilfe einer Funktion, deren Ergebnis angewendet auf den a-Ergebniswert der Argumentaktion die gesuchte Bildaktion ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Interpretation der Signatur von (>>)

...des Kompositionsoperators (>>):

- `(>>) :: IO a -> IO b -> IO b`

Die Signatur liefert:

- (>>) ist eine Abbildung, die eine (Argument-) Aktion mit einem a-Wert als Ergebnis (d.h. einen (IO a)-Wert) und eine zweite (Argument-) Aktion mit einem b-Wert als Ergebnis (d.h. einen (IO b)-Wert) auf diese zweite Aktion als Bildaktion abbildet.

  (Scheinbar hat das erste Argument keine Bedeutung und verschwindet; dies gilt für sein funktionales Ergebnis, den a-Wert, nicht aber für seinen prozeduralen Lese-/Schreibseiteneffekt!)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Interpretation der Signatur von `return`

...der aktionsliefernden Funktion `return`:

- `return :: a -> IO a`

Die Signatur liefert:

- `return` ist eine Abbildung, die einen `a`-Wert auf eine Aktion mit einem `a`-Wert als Ergebnis abbildet (d.h. auf einen `(IO a)`-Wert).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Operationelle Bedeutung

...des Kompositionsoperators `(>>=)`:

- `(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b`

Sei `(akt :: IO a)` eine Aktion, `(f_akt :: a -> IO b)` eine eine Aktion liefernde Abbildung.

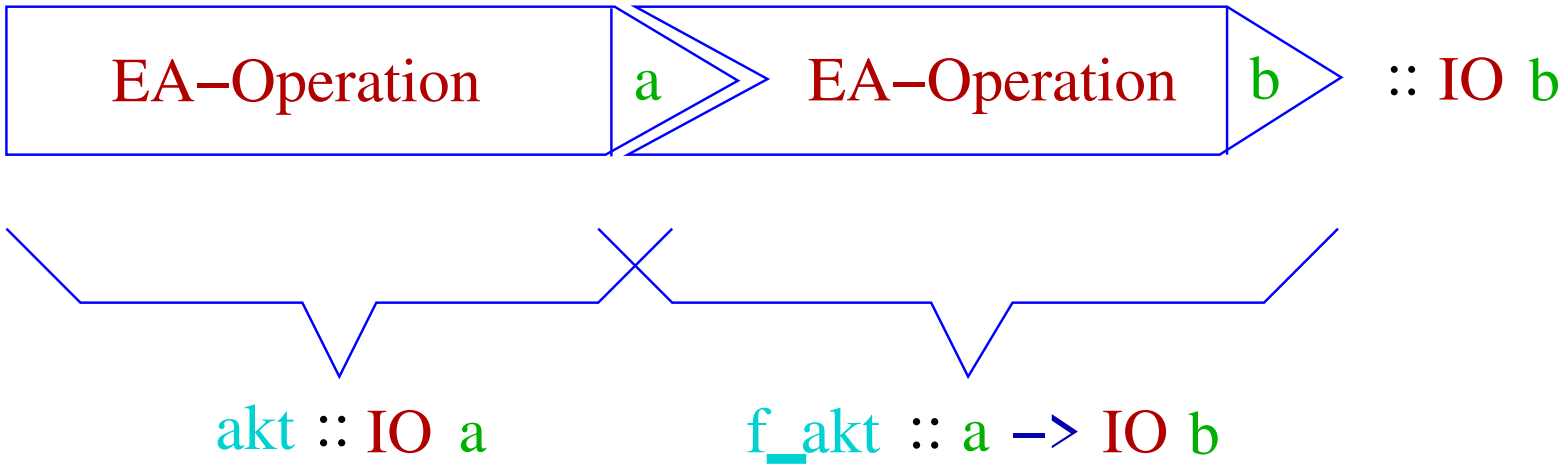
Operationelle Bedeutung der Komposition `(akt >>= f_akt)`:

- `akt` wird ausgeführt, bewirkt dabei einen Lese- oder Schreibseiteneffekt und liefert als Ergebnis einen `a`-Wert; dieser `a`-Wert wird zum Argument von `f_akt`, deren Bildwert vom Typ `(IO b)` eine Aktion ist, die ausgeführt wird, dabei einen weiteren Lese- oder Schreibseiteneffekt bewirkt und als Ergebnis einen `b`-Wert liefert; dieser ist zugleich das (funktionale) Ergebnis der Komposition `(akt >>= f_akt)`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Veranschaulichung der operat. Bedeutung

...der komponierten Aktion (`akt >>= f_akt`):




```
akt >>= f_akt   ≙   akt >>= \x -> f_akt x
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Operationelle Bedeutung

...des Kompositionsoperators (>>):

- `(>>) :: IO a -> IO b -> IO b`

Seien (`akt :: IO a`), (`akt′ :: IO b`) zwei Aktionen.

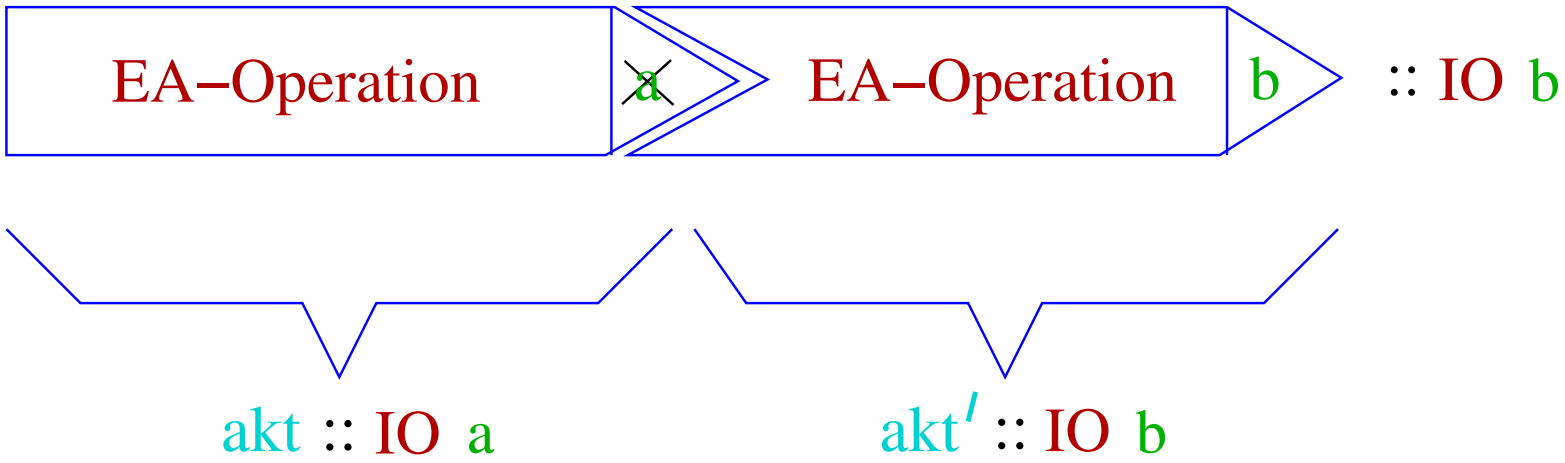
Operationelle Bedeutung der Komposition: (`akt >> akt′`):

- `akt` wird ausgeführt, bewirkt dabei einen Lese- oder Schreibseiteneffekt und liefert als Ergebnis einen `a`-Wert. Dieser `a`-Wert wird ignoriert und unmittelbar die Aktion `akt′` ausgeführt, die dabei einen weiteren Lese- oder Schreibseiteneffekt bewirkt und als Ergebnis einen `b`-Wert liefert; dieser ist zugleich das (funktionale) Ergebnis der Komposition (`akt >> akt′`).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Veranschaulichung der operat. Bedeutung

...der komponierten Aktion (`akt >> akt'`):




```
akt >> akt'  ≙  akt >>= \_ -> akt'
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Komposition: 'binde-dann'-, 'dann'-Operator

Die Kompositionsoperatoren

- `(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b`
- `(>>)  :: IO a -> IO b -> IO b`
  `akt >> akt' = akt >>= \_ -> akt'` (vordefiniert)

...gelesen als

- binde-dann-Operator (engl. bind oder then)
- dann-Operator (engl. sequence).

Bem.: Die Definition von `(>>)` macht deutlich, dass `(>>)` kein eigenständiger Operator, sondern von `(>>=)` abgeleitet und eine spezielle Anwendung von `(>>=)` ist, die das Ergebnis von `akt` (`a`-Wert) als Argument für `akt'` (`\_ -> akt'`) ignoriert: Der `a`-Wert von `akt` wird anders als bei `(>>=)` nicht für weitere Verwendung an einen Namen gebunden, er wird 'vergessen'.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Operationelle Bedeutung

...der Funktion `return`:

- `return :: a -> IO a`

Sei `(w :: a)` ein `a`-Wert.

Operationelle Bedeutung des aktionsliefernden Ausdrucks `(return w)`:

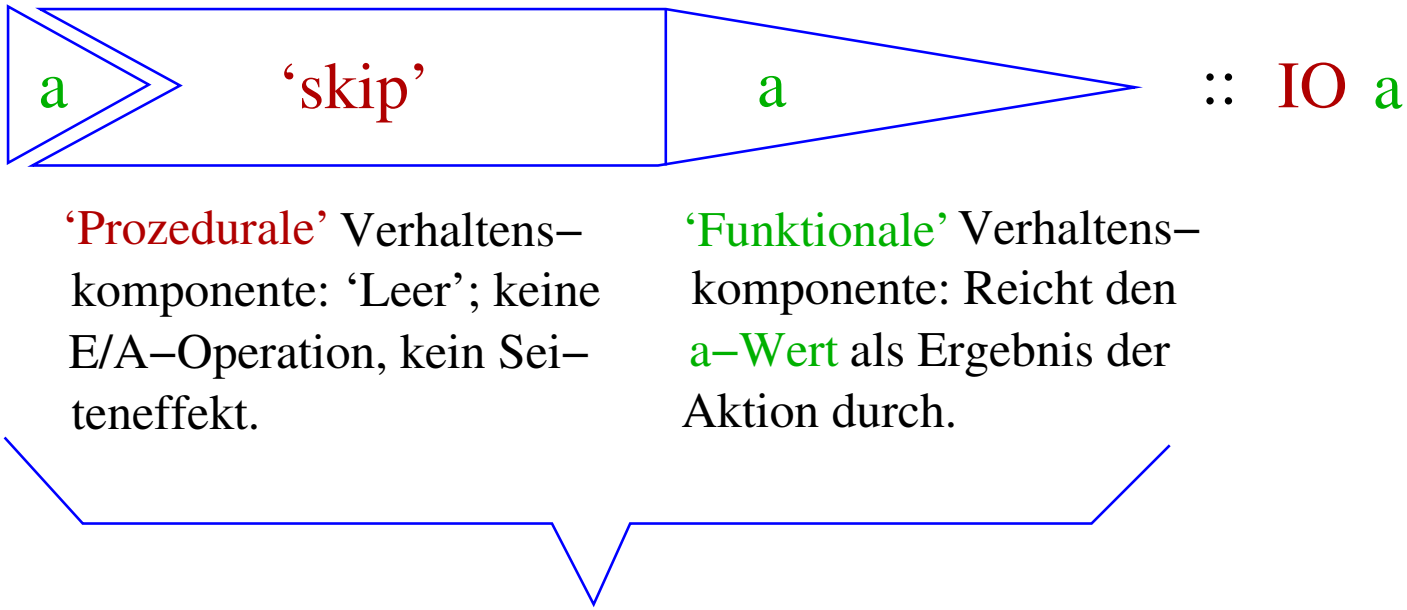
- `return` bildet den `a`-Wert `w` in 'offensichtlicher' Weise auf den 'entsprechenden' `(IO a)`-Wert ab, ohne einen Lese- oder Schreibseiteneffekt zu bewirken.

  (Das prozedurale Verhalten von `return` entspricht der leeren Anweisung '*skip*'; `return` hat (deshalb) abweichend von anderen Aktionen nur ein funktionales beobachtbares Verhalten, kein prozedurales).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Veranschaulichung

...der operationellen Bedeutung von `return`:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Wichtig zu beachten

Die E/A-Aktion `return` in Haskell

- hat eine gänzlich andere Aufgabe und Bedeutung als das aus imperativen oder objektorientierten Sprachen bekannte *return*; außer der Namensgleichheit besteht weder konzeptuell noch funktionell eine Ähnlichkeit.
- Haskells `return` kann in einer Aktionssequenz auftreten und ausgewertet werden, ohne dass dadurch die Auswertung der restlichen Aktionssequenz beendet würde; `return` kann deshalb auch mehrfach in sinnvoller Weise in einer Aktionssequenz auftreten.
- Zum Verständnis von Haskells `return` ist eine Orientierung am imperativen, objektorientierten *return* deshalb nicht sinnvoll und allenfalls irreführend.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.2.3

Komposition von Aktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die Kompositionsoperatoren (>>=) und (>>)

...erlauben die Bildung (assoziativer) Aktionssequenzen:

```
akt1 >>= f_akt2 >> akt3 >> akt4 >>= f_akt5 >>= return f
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Allgemeines Muster von Aktionssequenzen

...mit (>>=) vom Typ (IO b):

```
akt1 >>= \p1 ->                    -- p für Parameter
akt2 >>= \p2 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p2 ... pn)
```

mit Verknüpfungsoperation vom Typ:

```
f :: a1 -> a2 -> ... -> an -> b
```

und Aktionen der Typen:

```
akt1 :: IO a1
akt2 :: IO a2
...
aktn :: IO an
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Aktionssequenzen mit (>>=) und (>>)

...mit und ohne Rückführung von (>>) auf (>>=):

```
akt1 >>= \p1 ->
akt2 >>= \_  ->
akt3 >>= \_  ->
akt4 >>= \p4 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p4 ... pn)
```

```
akt1 >>= \p1 ->
akt2 >>
akt3 >>
akt4 >>= \p4 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p4 ... pn)
```

...der Typ einer Aktionssequenz ist durch den Typ der letzten Aktion bestimmt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Schrittweise Aktionssequenzauswertung (1)

```
akt1 >>= \p1 ->
akt2 >>= \p2 ->
akt3 >>= \p3 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p2 p3 ... pn)
```

```
->> (Aktion akt1 erzeugt E/A-Effekt und liefert Wert w1)
```

```
(\p1 ->
  akt2 >>= \p2 ->
  akt3 >>= \p3 ->
  ...
  aktn >>= \pn ->
  return (f p1 p2 p3 ... pn)) w1
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schrittweise Auswertung Aktionssequenz (2)

```
->>(Aktion akt2 erzeugt E/A-Effekt und liefert Wert w2)

 (\p1 ->
    (\p2 ->
      akt3 >>= \p3 ->
      ...
      aktn >>= \pn ->
      return (f p1 p2 p3 ... pn)) w1) w2

->> (Aktion akt3 erzeugt E/A-Effekt und liefert Wert w3)
(...
->> (Aktion aktn erzeugt E/A-Effekt und liefert Wert wn)

 (\p1 ->
    (\p2 ->
       (\p3 ->
          (...
            (\pn ->
              return (f p1 p2 p3 ... pn)) w1) w2) w3)...) wn
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schrittweise Aktionssequenzauswertung (3)

```
->> (Applikation der 1-ten Funktion auf w1)

    (\p2 ->
       (\p3 ->
          (...
            (\pn ->
               return (f w1 p2 p3 ... pn)) w2) w3)...) wn

->> (Applikation der 2-ten Funktion auf w2)

       (\p3 ->
          (...
            (\pn ->
               return (f w1 w2 p3 ... pn)) w3)...) wn

->> (Applikation der 3-ten Funktion auf w3)
...
->> (Applikation der n-ten Funktion auf wn)

               return (f w1 w2 w3 ... wn)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schrittweise Aktionssequenzauswertung (4)

```
->> (Linksassoziative Klammerung von (f w1 w2 w3 ...wn))
                return ((...((((f w1) w2) w3) ...) wn))
->> (Anwendung von f auf w1 w2 w3 ... wn liefert b-Wert w,
     d.h.: (...((((f w1) w2) w3) ...) wn) ->> w :: b)
                return w
->> (Anwendung von return auf w liefert (ohne E/A-Effekt)
     das Ergebnis erg vom Typ IO b der Aktionssequenz,
     d.h. erg = IO w :: IO b)
                erg = IO w     ::     IO b
```

Datenkonstruktor *Typkonstruktor*

...in Kapitel 15.4 werden wir Haskells do-Notation als suggestivere und bequemere Schreibweise für Aktionssequenzen kennenlernen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 15.2.4

Zur Sonderstellung des Typs `(IO a)`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zum Unterschied von (IO a) und (MT a) (1)

Vergleiche die ‘gewöhnliche’ Typdeklaration und Wertvereinbarung von:

```
data MT a = MT a deriving Show  -- MT für ‘MeinTyp’
z = MT ‘u‘ :: MT Char           -- z für ‘zeichen’
```

mit denjenigen der folgenden E/A-Aktionen:

```
data IO a = IO ...              -- Details impl.-intern
akt   = getChar :: IO Char
akt'  = putChar ‘v‘ :: IO ()
akt'' = putChar :: Char -> IO ()
akt''' = return ‘w‘ :: IO Char
akt'''' = return :: a -> IO a
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zum Unterschied von `(IO a)` und `(MT a)` (2)

Die Auswertung von Ausdruck `z` bewirkt:

- Das Zeichen ‘`u`‘ (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `MT`) wird geliefert (funktionales Verhalten); darüberhinaus passiert nichts, kein zusätzliches, insbesondere kein prozedurales Verhalten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zum Unterschied von `(IO a)` und `(MT a)` (3)

Die Auswertung von Aktion

- `akt` bewirkt:
  (1) Ein Zeichen wird vom Bildschirm gelesen (prozedurale E-Operation) und
  (2) der Wert des gelesenen Zeichens wird als Ergebnis (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) geliefert (funktionales Verhalten).
- `akt'` bewirkt:
  (1) Das Zeichen `'v'` wird auf den Bildschirm geschrieben (prozedurale A-Operation) und
  (2) der Wert `()` des Nulltupeltyps `()` wird als Ergebnis von `akt'` (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) geliefert (funktionales Verhalten).
- (`akt''` `'v'`) bewirkt: Ident zur Auswertung von `akt'`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zum Unterschied von `(IO a)` und `(MT a)` (4)

Die Auswertung von Aktion

- `akt'''` bewirkt:
  (1) Ohne dass eine E/A-Operation stattfindet (das prozedurale Verhalten ist 'leer', entsprechend '*skip*') wird
  (2) das Zeichen `'w'` als Ergebnis von `akt'''` (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) geliefert (funktionales Verhalten).
- `akt''''` bewirkt: Fehlschlag; `akt''''` = `return` vereinbart einen Aliasnamen für die Funktion (genauer: Aktion) `return`; ohne Argument lassen sich Funktionen nicht auswerten (vgl. auch `akt''`).
- (`akt''''` `'w'`) bewirkt: Ident zur Auswertung von `akt'''`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zusammenfassung (1)

Die äußere Ähnlichkeit der Deklarationen

```
data MT a = MT a                        -- rein fkt. Typ
z =  MT 'u' :: MT Char          -- rein fkt. Ausdruck

data IO a = IO ...                              -- E/A-Typ
akt  = getChar :: IO Char       -- E/A-Ausd./Aktion
akt' = putChar 'v' :: IO ()     -- E/A-Ausd./Aktion
```

ist oberflächlich: Die Auswertung

- rein funktionaler Ausdrücke wie `z`

ist wesentlich anders als die von

- E/A-Ausdrücken (oder Aktionen) wie `akt`, `akt'`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zusammenfassung (2)

Auswertung eines

- rein funktionalen Ausdrucks (engl. pure expression): Der Wert des Ausdrucks wird geliefert ('funktionaler' Effekt), sonst (passiert) nichts.
- E/A-Ausdrucks (engl. impure expression):
  (1) Eine E/A- Operation wird ausgeführt (Lese-/Schreibseiteneffekt wird generiert, 'prozeduraler' Effekt).
  (2) ein a-Wert (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) wird als Wert des E/A-Ausdrucks geliefert ('funktionaler' Effekt).

Ausnahme: Der E/A-Ausdruck `(return ausd :: IO T)` für `(ausd :: T)` und `T` konkreter Typ liefert den Wert des Ausdrucks `ausd` (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) als Ergebnis ohne eine E/A-Operation auszuführen (und somit ohne einen Lese-/Schreibseiteneffekt zu bewirken).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.3

E/A-Primitive für Bildschirm- und Datei-Ein-/Ausgabe

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bildschirmein-/ausgabe: Vordef. E/A-Primitive

...Lesen und Schreiben vom bzw. auf den Bildschirm.

Leseoperationen:

```
getChar :: IO Char
getInt  :: IO Int
getLine :: IO String
readIO  :: Read a => String -> IO a
readLn  :: Read a => IO a
...
```

Schreiboperationen:

```
putChar  :: Char   -> IO ()
putStr   :: String -> IO ()
putStrLn :: String -> IO ()
print    :: Show a => a -> IO ()
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Dateiein-/ausgabe: Vordef. E/A-Primitive

...Lesen und Schreiben aus bzw. in Dateien.

Leseoperationen:

```
readFile :: FilePath -> IO String
```

Schreiboperationen:

```
writeFile  :: FilePath -> String -> IO ()
appendFile :: FilePath -> String -> IO ()
```

Dateiende-Prädikat:

```
isEOF :: FilePath -> Bool
```

Pfad-/Dateinamen:

```
type FilePath = String
```

...mit betriebssystemabhängigen Werten für `FilePath`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

E/A-Operationen und die Fkt. show, read

Mithilfe der Fkt. show der Typklasse Show und der globalen Fkt. read (Achtung: read keine Fkt. der Typklasse Read!):

```
show :: Show a => a -> String
```

...lassen sich Werte von Instanztypen der Typklasse Show ausgeben und von Instanztypen der Typklasse Read einlesen:

```
putLine :: Show a => a -> IO ()
putLine = putStrLn . show

print :: Show a => a -> IO ()
print = putLine

read :: Read a => String -> a
read s = ...                    -- definiert im Präludium
```

Bem.: Vordefinierte Instanzen von Show und Read: Alle im Präludium definierten Typen mit Ausnahme v. Funktions- u. IO-Typen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Konstruktion von E/A-Sequenzen

...mit

1. Funktionskomposition `(.)`.

   Schreiben mit Zeilenvorschub (vordefinierte Sequenz):

   ```
   putStrLn :: String -> IO ()
   putStrLn = putStr . (++ "\n")
   ```

2. IO-Komposition `(>>=)`.

   Lesen einer Zeile und anschließendes Schreiben der gelesenen Zeile (selbstdefinierte Sequenz):

   ```
   echo :: IO ()
   echo = getLine >>= (\zeile -> putLine zeile)
   ```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel: Hallo, Welt!

```
halloWelt :: IO ()
halloWelt = putStrLn "Hallo, Welt!"
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 15.4

Syntaktischer Zucker: Die do-Notation

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Syntaktischer Zucker: Die do-Notation

...als Ersatz für die IO-Kompositionsoperatoren (>>=) und (>>) zur gefälligeren, imperativähnlicheren

- Bildung von Ein-/Ausgabesequenzen.

Zwei Beispiele:

```
(i) do zeile <- getLine          (ii) do putStr "fun"
       putStrLn zeile                    putStr "\n"
```

```
statt (i): getLine >>= (\zeile -> putStrLn zeile)
      (ii): putStr "fun" >> putStr "\n"
            putStr "fun" >>= (\_ -> putStr "\n")
```

Bemerkung:

- Ein do-Ausdruck entspricht semantisch einer Sequenz von E/A-Operationen und kann (deshalb) auf eine beliebige Anzahl von Aktionen als Argumente angewendet werden (in den obigen beiden Beispielen jeweils zwei).
- Die Abseitsregel gilt auch in do-Ausdrücken.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Allgemeines Muster von do-Ausdrücken

```
do w1 <- akt1      -- Sprechweise: akti Generator
   w2 <- akt2      -- für Wert wi vom Typ ai
   ...
   wn <- aktn
   return (f w1 w2 ... wn)
```

mit Verknüpfungsfunktion vom Typ:

```
f :: a1 -> a2 -> ... -> an -> b
```

und Aktionen der Typen:

```
akt1 :: IO a1
akt2 :: IO a2
...
aktn :: IO an
```

Bedeutungsgleich auch in einer Zeile mittels ';' möglich:

```
do w1 <- akt1; ... ; wn <- aktn; return (f w1 w2 ... wn)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Die Bedeutung

...des `do`-Ausdrucks:

```
do w1 <- akt1
   w2 <- akt2
   ...
   wn <- aktn
   return (f w1 w2 ... wn)
```

ist definiert durch den `(>>=)`-Ausdruck:

```
akt1 >>= \p1 ->
akt2 >>= \p2 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p2 ... pn)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Der Typ eines do-Ausdrucks

...ist durch den Typ seiner letzten Aktion bestimmt:

```
( do w1 <- akt1
     w2 <- akt2
     ...
     wn <- aktn
     return (f w1 w2 ... wn) )
          :: IO b
```

für Verknüpfungsfunktion vom Typ:

```
f :: a1 -> a2 -> ... -> an -> b
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Nicht verwendete Aktionsergebnisse

...in do-Ausdrücken.

Aktionen liefern stets ein Ergebnis. Bleibt es unverwendet (entspricht Aktionskomposition mit (>>) statt mit (>>=)), kann die Nichtverwendung syntaktisch dadurch ausgedrückt werden, dass ein Aktionsergebnis nicht an einen Wertnamen wi, sondern an _ 'gebunden' wird, quasi 'unbenannt' gebunden wird:

```
do w1 <- akt1
   _  <- akt2
   _  <- akt3
   w4 <- akt4
   ...
   wn <- aktn
   return (f w1 w4 ... wn)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Unbenannte Bindungen

...können ganz einfach auch völlig entfallen:

```
do w1 <- akt1
   akt2
   akt3
   w4 <- akt4
   ...
   wn <- aktn
   return (f w1 w4 ... wn)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bsp.: Ausgabe-Sequenzen mittels do-Notation

Einmaliges Schreiben einer Zeichenreihe mit Zeilenvorschub:

```
putStrLn :: String -> IO ()          -- Definition aus
putStrLn str = do putStr str           -- Präludium
                  putStr "\n"
```

Zweimaliges Schreiben einer Zeichenreihe (mit Z-Vorschüben):

```
putStrLn_2mal :: String -> IO ()
putStrLn_2mal str = do putStrLn str
                       putStrLn str
```

Viermaliges Schreiben einer Zeichenreihe (mit Z-Vorschüben):

```
putStrLn_4mal :: String -> IO ()
putStrLn_4mal str = do putStrLn str
                       putStrLn str
                       putStrLn str
                       putStrLn str
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bsp.: Ein-/Ausg.-Sequenzen mittels do-Notat.

Zwei Lese-, eine Schreibaktion:

```
read2lines_and_report :: IO ()
read2lines_and_report
 = do getLine       -- Z. wird gelesen u. vergessen
      getLine       -- Z. wird gelesen u. vergessen
      putStrLn "Zwei Zeilen gelesen."
```

Eine Lese-, zwei Schreibaktionen:

```
read1line_and_echo2times :: IO ()
read1line_and_echo2times
 = do line <- getLine  -- Z. w. gelesen u. gemerkt
      putStrLn line    -- Gemerkte Z. w. geschrieben
      putStrLn line    -- Gemerkte Z. w. geschrieben
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bsp.: Ausg.-Sequenzen parametrisierter Länge

n-maliges Schreiben einer Zeichenreihe (mit Z-Vorschüben):

```
putStrLn_nmal :: Int -> String -> IO ()
putStrLn_nmal n str
 = if n <= 1
      then putStrLn str
      else do putStrLn str
              putStrLn_nmal (n-1) str   -- Rekursion!
```

Das erlaubt auch folgende (alternative) Definitionen:

```
putStrLn_2mal :: String -> IO ()
putStrLn_2mal = putStrLn_nmal 2

putStrLn_4mal :: String -> IO ()
putStrLn_4mal = putStrLn_nmal 4
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bsp.: do-Ausdrücke mit return (1)

Lesen einer Zeichenreihe vom Bildschirm und Konversion in eine ganze Zahl:

```
getInt :: IO Int
getInt = do line <- getLine
            return (read line :: Int)
```

Im Detail:

```
getInt :: IO Int
getInt = do line   <-   getLine
         :: String    :: IO String
            return (read line :: Int)
                   Konvertierung 'String' (der
                   Typ von line) zu 'Int' (der
                   Argumenttyp von return)
                :: IO Int
             :: IO Int
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bsp.: do-Ausdrücke mit return (2)

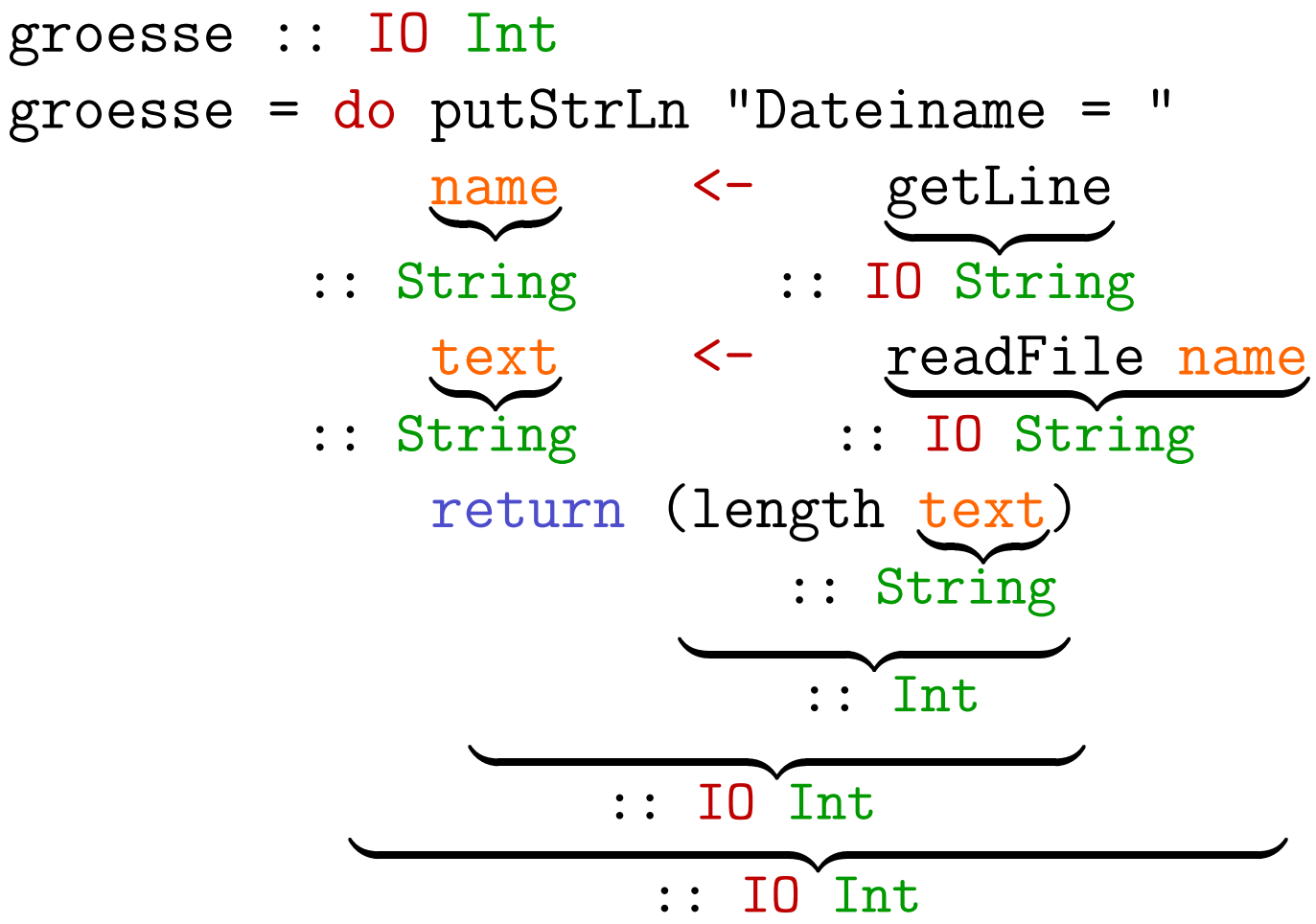
Bestimmung der Länge, der Zeichenzahl einer Datei:

```
groesse :: IO Int
groesse = do putStrLn "Dateiname = "
             name <- getLine
             text <- readFile name
             return (length text)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bsp.: do-Ausdrücke mit return (3)

Mit detaillierter Typinformation:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bsp.: Bedeutungsgleiche E/A-Sequenzen

...mit (>>) und do.

Die Ausgabe-Sequenz mit (>>):

```
writeFile "meineDatei.txt" "Hallo, Dateisystem!"
 >> putStr "Hallo, Welt!"
```

...entspricht der Ausgabe-Sequenz mit do:

```
do writeFile "meineDatei.txt" "Hallo, Dateisystem!"
   putStr "Hallo, Welt!"
```

und definiert deren Bedeutung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bsp.: Bedeutungsgleiche E/A-Sequenzen

...mit (>>=) und do.

Die E/A-Sequenz mit (>>=):

```
incrementInt :: IO ()
incrementInt
 = getLine >>=
     \zeile -> putStrLn (show (1+read zeile::Int))
```

...entspricht der E/A-Sequenz mit do:

```
incrementInt' :: IO ()
incrementInt'
 = do zeile <- getLine
      putStrLn (show (1 + read zeile :: Int))
```

und definiert deren Bedeutung.

Informell: 'do' entspricht '(>>=) plus anonyme λ-Abstraktion'.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bsp.: Bedeutungsgleiche E/A-Sequenzen

...mit `(>>=)` und `do`, `return`.

Die Eingabe-Sequenz mittels `(>>=)` und `return`:

```
readStringPair :: IO (String,String)
readStringPair
 = getLine >>=
    (\zeile -> (getLine >>=
                  (\zeile' -> (return (zeile,zeile')))))
```

...entspricht der Eingabe-Sequenz mit `do` und `return`:

```
readStringPair' :: IO (String,String)
readStringPair'
 = do zeile <- getLine
      zeile' <- getLine
      return (zeile,zeile')
```

und definiert deren Bedeutung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 15.5

E/A-Programmbeispiele

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.5.1

Dialog- und Interaktionsprogramme

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Dialog- und Interaktionsprogramme

Zwei Frage/Antwort-Interaktionen mit dem Benutzer:

```
ask :: String -> IO String
ask frage = do putStrLn frage
               getLine

interAct :: IO ()        -- Bildschirm-Interaktion
interAct
 = do name <- ask "Wie heißen Sie?"
      putStrLn ("Willkommen " ++ name ++ "!")

interAct' :: IO ()              -- Datei-Interaktion
interAct'
 = do putStr "Bitte Dateinamen angeben: "
      dateiname <- getLine
      inhalt    <- readFile dateiname
      putStr inhalt
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Lokale Deklarationen in do-Ausdrücken

Die E/A-Sequenz (ohne lokale Deklarationen):

```
reverse2lines :: IO ()
reverse2lines
 = do line1 <- getLine
      line2 <- getLine
      putStrLn (reverse line2)
      putStrLn (reverse line1)
```

...ist bedeutungsgleich zur Sequenz mit lokalen Deklarationen:

```
reverse2lines :: IO ()
reverse2lines
 = do line1 <- getLine
      line2 <- getLine
      let rev1 = reverse line1
      let rev2 = reverse line2
      putStrLn rev2
      putStrLn rev1
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Unterschiedliche Bindung von `<-` und `let`

Benannte Wertvereinbarungen mittels

- `<-`: für den `a`-Wert von Aktionen vom Typ `(IO a)` (für 'unreine' Werte aus der äußeren Welt!).
- `let`: für den Wert rein funktionaler Ausdrücke (für 'reine' Werte aus dem rein funktionalen Programmkern).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 15.5.2

Rekursive E/A-Programme

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Rekursive E/A-Programme (1)

...lesen und schreiben gelesener Eingaben: Kopieren.

Nichtterminierendes Kopieren (Notabbruch mit `Ctrl-c`):

```
kopiere :: IO ()
kopiere
 = do zeile <- getLine
      putStrLn zeile
      kopiere                          -- Rekursion!
```

n-maliges Kopieren:

```
kopiere_n_mal :: Int -> IO ()
kopiere_n_mal n
 = if n <= 0
    then return ()
    else do zeile <- getLine
            putStrLn zeile
            kopiere_n_mal (n-1)        -- Rekursion!
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Rekursive E/A-Programme (2)

Kopieren bis zur Eingabe der leeren Zeile:

```
kopiere_bis_leer :: IO ()
kopiere_bis_leer
 = do zeile <- getLine
      if zeile == ""
       then return ()
       else do putStrLn zeile
               kopiere_bis_leer          -- Rekursion!
```

Kopieren bis zur Eingabe der leeren Zeile unter Mitzählen:

```
kopiere_bis_leer_und_zaehle_mit :: Int -> IO ()
kopiere_bis_leer_und_zaehle_mit n
 = do zeile <- getLine
      if zeile == ""
       then putStrLn
              (show n ++ " Zeilen gelesen u. kopiert.")
       else do putStrLn zeile
               kopiere_bis_leer_und_zaehle_mit (n+1)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Rekursive E/A-Programme (3)

Summieren einer Folge ganzer Zahlen bis 0 eingegeben wird:

```
summiere :: IO Int
summiere
 = do n <- getInt
      if n == 0
       then return 0
       else (do m <- summiere
                return (n + m))
```

Vergleiche d. strukturelle Ähnlichkeit von summiere, sum, sum′:

```
sum :: [Int] -> Int
sum [] = 0
sum (n:ns)
 = let m = sum ns
   in (n + m)
```

```
sum' :: [Int] -> Int
sum' [] = 0
sum' (n:ns)
 = n + sum' ns
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Rekursive E/A-Programme (4)

Interaktives Summieren einer Folge ganzer Zahlen bis 0 eingegeben wird, abgestützt auf summiere:

```
summiere_interaktiv :: IO ()
summiere_interaktiv
 = do putStrLn "Gib ganze Zahl ein, je eine pro"
      putStrLn "Zeile. Diese werden summiert bis"
      putStrLn "Null eingegeben wird."
      summe <- summiere
      putStr "Der Summenwert ist "
      putLine summe
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 15.5.3

Iterativartige E/A-Programme

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Iterativartige E/A-Programme

Iterativartiger Ausdruck/Programm, genauer die iterativartige Funktion `while`:

```
while :: IO Bool -> IO () -> IO ()
while bedingung aktion
  = do b <- bedingung
       if b
        then
         do aktion
            while bedingung aktion  -- Rekursion!
        else
         return ()
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zur operationellen Bedeutung der Fkt. `while`

Intuitiv:

- Ist die Bedingung (`bedingung :: IO Bool`) erfüllt (und hat `b` somit den Wert `True`), so wird die Aktion (`aktion :: IO ()`) ausgeführt (`do`-Ausdruck im `then`-Ausdruck); anderenfalls endet die Ausführung/-wertung von `while` ohne weiteren E/A-Seiteneffekt mit dem Resultatwert `() :: ()`.
- Nach abgeschlossener Ausführung/-wertung von `aktion` (im Fall der erfüllten Bedingung) wird `while` rekursiv aufgerufen, wodurch insgesamt die 'iterativartige' Anmutung entsteht, dass eine Aktion so lange ausgeführt wird, wie eine Bedingung erfüllt ist.
- Mögliches Argument für die Bedingung: Der Ausdruck

  ```
  isEOF :: IO Bool
  ```

  zum Test auf das Eingabeende.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Anwendung der Funktion `while`

...um eine Datei zeilenweise zu lesen und gelesene Zeilen wieder auszugeben, bis das Dateiende erreicht ist.

```
kopiere_eingabe_nach_ausgabe :: IO ()
kopiere_eingabe_nach_ausgabe
 = while (do wert <- isEOF          -- Arg. f. Param.
             return (not wert))       -- bedingung
         (do zeile <- getLine       -- Arg. f. Param.
             putStrLn zeile)              -- aktion
```

Bem.: Die Klammerung der Argumente von `while` ist nötig.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 15.5.4

‘Iteration’ vs. Rekursion

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Wertvereinbarung vs. Wertzuweisung

...funktionale Wertvereinbarung vs. imperative Wertzuweisung.

Zur Natur des

- Wertvereinbarungsoperators '<-' in do-Ausdrücken

im Vergleich zum

- destruktiven Wertzuweisungsoperator ':=' in destruktiven Zuweisung(sanweisung)en (engl. destructive assignments) imperativer Sprachen.

Tatsächlich besitzt

- '<-' Ähnlichkeit mit einer Wertzuweisung, ist aber gänzlich verschieden der destruktiven Wertzuweisung imperativer Sprachen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Einmal-Wertvereinbarungsoperator ‘<-’

‘<-’ leistet eine Einmal-Wertvereinbarung für einen Namen:

- `zeile <- getLine` bindet das Resultat von `getLine` (allgemeiner: einer Eingabeoperation), an einen Namen, hier `zeile`.
- Diese Verbindung zwischen dem Namen, hier `zeile`, und dem von einer Eingabeoperation gelieferten Wert, hier `getLine`, bleibt für den gesamten Programmlauf erhalten und ist nicht mehr veränderbar.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Mehrfach-Wertzuweisungsoperator ‘:=’

‘:=’ leistet eine temporäre Wertzuweisung an eine durch einen Namen bezeichnete Speicherzelle:

- x := READ_STRING: Der von READ_STRING gelesene Wert wird in die von x bezeichnete Speicherzelle geschrieben; der vorher dort gespeicherte Wert wird dabei überschrieben und zerstört (destruktiv!).
- Die durch die Zuweisung geschaffene Verbindung zwischen Name (d.h. der mit ihm bezeichneten Speicherzelle) und Wert (d.h. dem Inhalt der Speicherzelle) bleibt so lange erhalten (temporär!), bis sie durch eine erneute Zuweisung an diese Zelle überschrieben und zerstört wird (destruktive Zuweisung!).
- Der Inhalt einer Speicherzelle kann jederzeit und beliebig oft überschrieben werden und so die Verbindung von Name und Wert geändert werden (s. a. Anhang A.6).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zur Wirkung von Einmal-Wertvereinbarungen

...anhand eines Beispiels:

Aufgabe: Schreibe ein Programm, das so lange eine Zeile vom Bildschirm einliest und wieder ausgibt, bis schließlich die leere Zeile eingelesen wird und die Ausführung abgebrochen wird.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Der Effekt von Einmal-Wertvereinbarungen

'Iterativer' Lösungsversuch mittels `while`-Funktion/Ausdrucks:

```
goUntilEmpty :: IO ()
goUntilEmpty
 = do zeile <- getLine
      while                    -- while mit Argumenten:
       (return (zeile /= []))   -- Bedingungsarg.
       (do putStrLn zeile       -- Aktionsarg.
           zeile <- getLine
           return ())
```

- Die Auswertung von `goUntilEmpty` terminiert nicht (es sei denn, `[]` wird als erste Eingabe gewählt).
- `zeile` und `zeile` sind unterschiedliche Einmal-Wertvereinbarungen gleichen Namens.
- Test und Ausgabe erfolgen bei jedem Aufruf von `while` (in jeder 'Schleife') für den Wert von `zeile`, nie v. `zeile`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Lösung: Direkte Rekursion statt 'Iteration'

Direkt-rekursive Lösung (ohne den iterativartigen Ausdruck `while`):

```
goUntilEmpty' :: IO ()
goUntilEmpty'
 = do zeile <- getLine
      if (zeile == [])
         then return ()
         else (do putStrLn zeile
                  goUntilEmpty')     -- Rekursion!
```

(siehe Simon Thompson. The Craft of Functional Programming. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999, S. 393.)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.5.5

Subtiles, Randbemerkung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

(Subtile) Unterschiede

...in Wertdarstellung und Resultattyp zwischen Ausgabe- und Nichtausgabeoperationen:

```
Main>putStr ('a':('b':('c':[])))
      ->> abc :: IO ()

Main>putChar (head ['a','b','c'])
  ->> a :: IO ()

Main>print "abc"
      ->> "abc" :: IO ()
Main>print 'a'
->> 'a' :: IO ()
```

```
Main>('a':('b':('c':[])))
 ->> "abc" :: [Char]

Main>head ['a','b','c']
 ->> 'a' :: Char

Main>"abc"
 ->> 'a':('b':'c') :: [Char]
Main>'a'
 ->> 'a' :: Char
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 15.6

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Haskell-Programme als E/A-Aktionen

Einstiegspunkt für die Auswertung (übersetzter) interaktiver Haskell-Programme ist (per Konvention) eine eindeutig bestimmte

- Definition mit Namen `main` vom Typ `(IO T)`, `T` Typ.
- Intuitiv: 'Haskell-Programm = E/A-Aktion'.

Beispiel:

```
main :: IO ()                                  -- E/A-Schale
main
 = do n <- getInt                              -- E/A-Schale
      let ergebnis = meine_funktion n           -- Fkt. Kern
      putStr ergebnis                           -- E/A-Schale

meine_funktion :: Int -> String                 -- Fkt. Kern
meine_funktion n = ... meine_funktion' ...
meine_funktion' :: ...                          -- Fkt. Kern
meine_funktion' ... = ...
...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Ein-/Ausgabebehandlung

...in funktionaler und imperativer Programmierung grundsätzlich unterschiedlich. Am augenfälligsten:

- Imperativ: Ein-/Ausgabe prinzipiell an jeder Programmstelle möglich.
- Funktional, hier in Haskell: Ein-/Ausgabe an bestimmten Programmstellen konzentriert (in meist wenigen global definierten Funktionen der 'E/A-Schale').

Häufige Beobachtung: Die vermeintliche Einschränkung erweist sich

- als Stärke bei der Programmierung im Großen!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ein-/Ausgabebehandlung in Haskell

Haskells Konzept zur Behandlung von Ein-/Ausgabe erlaubt Funktionen

- des Berechnungskerns (rein funktionales Verhalten, keine Seiteneffekte)
- der Dialog- und Interaktionsschale (nicht rein funktionales, sondern seiteneffektbehaftetes Verhalten)

zu unterscheiden (und konzeptuell zu trennen), kenntlich an den unterschiedlichen Typen, auf deren Werten sie operieren:

`Int`, `Real`, `Char`,... vs. `IO Int`, `IO Real`, `IO Char`,...

mit `IO` vordefinierter Typkonstruktor (wie z.B. `[]`, `(,)`, `(->)`).

Mithilfe der Kompositionsoperationen `(>>=)` und `(>>)` und der davon abgeleiteten gleichwertigen `do`-Notation ('syntaktischer Zucker') läßt sich die Abfolge von

- Ein-/Ausgabeoperationen präzise festlegen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Strombasierte Ein-/Ausgabebehandlung (1)

Frühe Haskell-Versionen haben eine strombasierte Behandlung von Ein-/Ausgabe vorgesehen:

- Programme werden dabei als Funktionen auf Strömen angesehen: EA_Prog :: String → String

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung.* Springer–Verlag, 2003, S. 271.

...mit Ein-/Ausgabeströmen für Terminals, Dateisysteme, Drucker, etc.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Strombasierte Ein-/Ausgabebehandlung (2)

...Vor- und Nachteile für Sprachen mit:

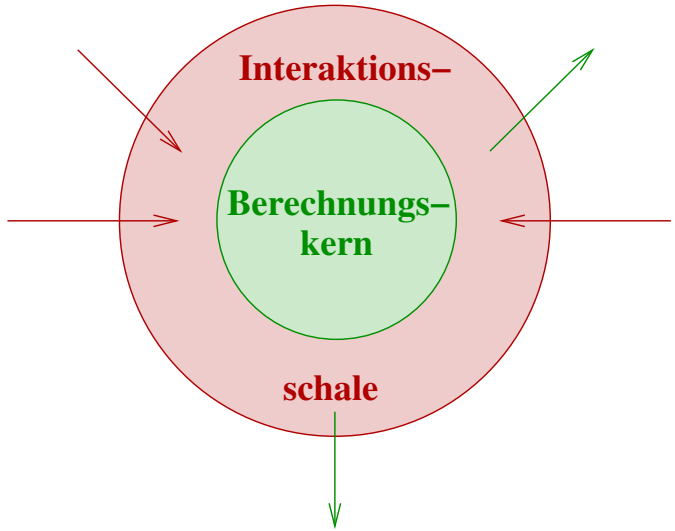
- sofortiger (engl. eager) Auswertung:
  - ein 'echtes' Strommodell fehlt (die Eingabe muss zum Programmstart vollständig vorliegen und konsumiert werden und deshalb endlich sein); Ein-/Ausgabe ist deshalb auf stapelartige (engl. batch-like) Verarbeitung beschränkt.
- verzögerter (engl. lazy) Auswertung:
  - Interaktion ist möglich; verzögerte Auswertung stellt sicher, dass Ein-/Ausgaben in 'richtiger' Abfolge erfolgen.
  - Aber: Ursächlicher und zeitlicher Zusammenhang zwischen Ein-/Ausgaben erscheint oft 'obskur'; besondere Synchronisationen sind nötig, dies zu beheben.
  - Insgesamt: Strombasierte Ein-/Ausgabe kommt an ihre Grenzen beim Übergang zu graphischen Benutzerschnittstellen und wahlfreiem Zugriff auf Dateien.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Haskells heutige Lösung

...der konzeptuellen Trennung eines Haskell-Programms in

- einen rein funktionalen Berechnungskern
- eine imperativähnliche Dialog- und Interaktionsschale



Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell.* Pearson, 2004, S. 89.

...wahrt das funktionale Paradigma und ist frei von den Problemen strombasierter Ein-/Ausgabebehandlung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ausblick

...IO ist 1-stelliger Typkonstruktor und vordefinierte Instanz der Typ(konstruktor)klasse Monad:

```
class Monad m where
  (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
  (>>)   :: m a -> m b -> m b
  return :: a -> m a
  fail   :: String -> m a
  m >> k = m >>= \_ -> k      -- Protoimpl. von (>>)
  fail   = error              -- Protoimpl. von fail
```

Mit IO für m erhalten wir für die Typsignaturen der Klassenfkt.:

```
  (>>=)  :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b
  (>>)   :: IO a -> IO b -> IO b
  return :: a -> IO a
  fail   :: a -> IO a    -- fail bislang unbenutzt
                         -- von uns.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Ausblick (fgs.)

Die Eigenschaften bzw. Anforderungen von Ein-/Ausgabe an funktionale Programmierung und ihre monadische Behandlung in Haskell sind nicht E/A-spezifisch, sondern ein Beispiel von vielen, darunter:

- Seiteneffektbehaftete Programmierung (spez. Ein-/Ausg.)
- Nichtdeterminismus
- Fehlerbehandlung
- Programmierung mit großen Datenstrukturen
- ...

Mehr dazu: LVA 185.A05 Fortgeschritte funktionale Programmierung, jeweils im Sommersemester eines Studienjahrs.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 15.7

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 15 (1)

Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 10.1, The IO monad)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 17.5, Ein- und Ausgaben)

Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 7, Eingabe und Ausgabe)

Ernst-Erich Doberkat. *Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte*. Oldenbourg Verlag, 2012. (Kapitel 5, Ein-/Ausgabe; Kapitel 5.1, IO-Aktionen)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 15 (2)


Antonie J. T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 7.5, Input/Output in Functional Programming)


Andrew J. Gordon. *Functional Programming and Input/Output*. British Computer Society Distinguished Dissertations in Computer Science. Cambridge University Press, 1994.


Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 16, Communicating with the Outside World)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 15 (3)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 10, Interactive programming)

Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 8, Input and output; Kapitel 9, More input and more output)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 21, Ein-/Ausgabe: Konzeptuelle Sicht; Kapitel 22, Ein-/Ausgabe: Die Programmierung)

Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung: Sprachdesign und Programmiertechnik*. Springer-V., 2006. (Kapitel 18, Objekte und Ein-/Ausgabe)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 15 (4)

Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 7, I/O; Kapitel 9, I/O Case Study: A Library for Searching the Filesystem)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 18, Programming with actions)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 8, Playing the game: I/O in Haskell; Kapitel 18, Programming with monads)

Philip Wadler. *Comprehending Monads*. Mathematical Structures in Computer Science 2:461-493, 1992.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ein Genie macht keine Fehler. Seine Irrtümer sind Tore zu neuen Entdeckungen.

James Joyce (1882-1941)
irisch. Schriftsteller

...für alle anderen:

Kapitel 16

Robuste Programme: Fehlerbehandlung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ein Mensch würde nie dazu kommen,
etwas zu tun, wenn er stets warten würde,
bis er es so gut kann, dass niemand mehr
einen Fehler entdecken könnte.

John Henry Newman (1801-1890)
engl. Kardinal

Kapitel 16.1

Überblick, Orientierung

Kleine Fehler in einem großen Werk sind die
Brosamen, die man dem Neid hinwirft.

Claude Adrien Helvétius (1715-1771)
franz. Philosoph

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typische Fehlersituationen und Sonderfälle

Typische Fehlersituationen:

- Division durch null: `div 1 0`.
- Zugriff auf das erste Element einer leeren Liste: `head []`.
- ...

Typische Sonderfälle:

- Auseinanderfallen von intendiertem und implementiertem Definitionsbereich einer Funktion, z.B.
  - ! : IN -> IN: Intendierter Definitionsbereich ist IN.
  - `fac :: Integer -> Integer`: Implementierter Definitionsbereich ist $\mathbb{Z}$ (abgesehen von Ressourcenbeschränkungen der Maschine).
- Umgang mit Argumentwerten außerhalb des intendierten Definitionsbereichs.
- ...

Um andrer Leute Fehler zu sehen, verwandeln manche Menschen ihre Augen in Mikroskope.

Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799)
dt. Physiker und Naturforscher

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Fehlersituationen und Sonderfälle

...bislang von uns unsystematisch, naiv behandelt:

Typische Formulierungen aus den Aufgabenstellungen:

...liefert die Funktion den vorher beschriebenen Wert als Resultat; anderenfalls...

- *ist das Ergebnis*
  - *die Zeichenreihe* `"Ungültige Eingabe"`.
  - *die leere Liste* `[]`.
  - *der Wert* `0`.
  - ...
- *endet die Berechnung mit dem Aufruf*
  `error "Ungültige Eingabe"`.
- ...

Jeder Fehler erscheint unheimlich dumm,
wenn andre ihn begehen.

Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799)
dt. Physiker und Naturforscher

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

In diesem Kapitel

...beschreiben wir drei Möglichkeiten eines sukzessive systematisch(er)en Umgangs mit unerwarteten Programmsituationen und Fehlern:

1. Panikmodus (Kap. 16.2)
2. Auffangwerte (engl. default values) (Kap. 16.3)
   - 2.1 Funktionsspezifisch
   - 2.2 Aufrufspezifisch
3. Fehlertypen, Fehlerwerte, Fehlerfunktionen (Kap. 16.4)

Fremde Fehler haben wir vor Augen,
unsere liegen uns im Rücken.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 16.2

Panikmodus

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Panikmodus

Ziel:

1. Fehler und Fehlerursache melden
2. Fehlerhafte Programmauswertung stoppen.

Werkzeug:

- Die polymorphe Funktion `error :: String -> a`.

Wirkung:

Der Aufruf

- `error "Funktion f: Ungültige Eingabe."`

liefert die Meldung

- `Programmfehler: Funktion f: Ungültige Eingabe.`

und stoppt danach die Programmauswertung unwiderruflich.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
  | n == 0     = 1
  | n > 0      = n * fac (n-1)
  | otherwise = error "Ungültige Eingabe."
```

Verhalten in Aufrufsituationen:

```
fac 5     ->> 120
fac 0     ->> 1
fac (-5) ->> Programmfehler: Ungültige Eingabe.
fac (-7) ->> Programmfehler: Ungültige Eingabe.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bewertung des Panikmodus

Positiv: Generell, einfach, schnell; im Detail:

+ Generalität: Stets anwendbar
+ Einfachheit: Sowohl konzeptuell wie umsetzungstechnisch

einfach durch die param. Polymorphie u. daraus folgende einf. Anwendung der vordef. Abbruchfkt. `error :: a -> String`.

Negativ: Radikalität; im Detail:

– Die Berechnung stoppt unwiderruflich.
– Jegliche Information über den Programmlauf ist verloren, auch sinnvolle.
– Für sicherheitskritische Systeme können die Folgen eines unbedingten Programmabbruchs fatal sein.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 16.3

Auffangwerte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Auffangwerte

Ziel:

1. Panikmodus vermeiden.
2. Programmlauf nicht zur Gänze abbrechen, sondern Berechnung möglichst sinnvoll fortführen.

Werkzeug:

1. Funktionsspezifische (Variante 1)
2. Aufrufspezifische (Variante 2)

Auffangwerte (engl. default values) zur Weiterrechnung im Fehlerfall.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Variante 1: Funktionsspezifischer Auffangwert

...im Fehlerfall wird ein

- funktionsspezifischer Wert

als Resultat geliefert.

Beispiel:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
  | n == 0     = 1
  | n > 0      = n * fac (n-1)
  | otherwise = -1
```

Verhalten in Aufrufsituationen:

```
fac 5    ->> 120
fac 0    ->> 1
fac (-5) ->> -1              (Verschiedene Argumente,
fac (-7) ->> -1                  gleicher Fehlerwert)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Analyse des Beispiels

Im Beispiel von `fac` gilt:

- Negative Werte treten nie als reguläres Resultat einer Berechnung auf.
- Der funktionsspezifische Auffangwert -1 erlaubt deshalb, negative Eingaben als fehlerhaft zu erkennen und zu melden, ohne den Programmlauf unwiderruflich abzubrechen.

Insgesamt:

- Die Fehlersituation ist für den Programmierer transparent.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bewertung von Auffangwertvariante 1

Positiv

+ Panikmodus vermieden, Programmlauf nicht abgebrochen.

Negativ

– Oft gibt es einen zwar naheliegenden und plausiblen funktionsspezifischen Auffangwert; jedoch kann dieser das Eintreten der Fehlersituation verschleiern und intransparent machen, wenn der Auffangwert auch als Resultat einer regulären Berechnung auftreten kann.
– Oft fehlt ein naheliegender und plausibler Wert als Auffangwert; die Wahl eines Auffangwerts ist in diesen Fällen willkürlich und unintuitiv.
– Oft fehlt ein funktionsspezifischer Auffangwert gänzlich; Auffangwertvariante 1 ist in diesen Fällen nicht anwendbar.

...dazu zwei Beispiele.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

1) Auffangwert vorhanden, aber verschleiernd

```
rest :: [a] -> [a]
rest (_:xs) = xs
rest []     = []
```

Die Verwendung von `[]` als funktionsspezifischem Auffangwert

- liegt nahe und ist plausibel.

Allerdings:

- Das Auftreten der Fehlersituation wird verschleiert und bleibt für den Programmierer intransparent, da `[]` auch als reguläres Resultat einer Berechnung auftreten kann:

```
rest [42] ->> []      ([] als reguläres Resultat:
                           Keine Fehlersituation!)
rest []   ->> []    ([] als irreguläres Resultat:
                   Fehlersituation eingetreten!)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

2) (Naheliegender) Auffangwert fehlt

```
kopf :: [a] -> a
kopf (u:_) = u
kopf []    = ???
```

Ohne Kenntnis der Instanz von `a` ist

- ein `a`-Wert überhaupt nicht angebbar: Völliges Fehlen eines Auffangwerts.

Mit Kenntnis der Instanz von `a`, z.B.:
`kopf :: [Int] -> Int`, bietet sich

- kein `Int`-Wert als Auffangwert an: Fehlen eines naheliegenden, plausiblen Auffangwerts.

...in solchen Fällen Übergang zu Auffangwertvariante 2 mit aufrufspezifischen Auffangwerten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Variante 2: Aufrufspezifische Auffangwerte

...Im Fehlerfall wird ein

- aufrufspezifischer Auffangwert

als Resultat geliefert.

Beispiel:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
  | n == 0     = 1
  | n > 0      = n * fac (n-1)
  | otherwise = n
```

Verhalten in Aufrufsituationen:

```
fac 5     ->> 120
fac 0     ->> 1
fac (-5) ->> -5          (Verschiedene Argumente,
fac (-7) ->> -7          verschiedene Fehlerwerte)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Analyse des Beispiels

Im Beispiel von `fac` gilt:

- Das Argument als aufrufspezifischer Auffangwert erlaubt wieder, negative Eingaben als fehlerhaft zu erkennen und zu melden, ohne den Programmlauf unwiderruflich abzubrechen.
- Zusätzlich liefert das Argument als Auffangwert aufrufspezifisch die Rückmeldung, welcher Argumentwert zum Fehler geführt hat, was die Fehlersuche begünstigt.

Insgesamt:

- Die Fehlersituation ist für den Programmierer transparent.

Allerdings:

- Nicht immer taugt das Argument selbst als Auffangwert.

In solchen Fällen ist folgender allgemeinere Ansatz nötig.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Variante 2: Allgemeiner Ansatz

Grundlegende Idee: Erweitere die Signatur und übergib bei jedem Aufruf den gewünschten Auffangwert als Argument.

Beispiel: Ersetze `kopf` durch `kopf'` mit Signatur:

```
kopf' :: a -> [a] -> a
kopf' _ (u:_) = u
kopf' x []    = x
```

...und aufrufspezifischem Auffangargument `x`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Variante 2: Allgemeiner Ansatz (schematisch)

...anhand einer hier einstellig angenommenen fehlerbehandlungsfreien Implementierung einer Funktion `f`:

- Ergänze `f`:

  ```
  f :: a -> b
  f u = ...
  ```

  um die fehlerbehandelnde Hüllfunktion `f'`:

  ```
  f' :: b -> a -> b
  f' x u
     | fehlerFall = x
     | otherwise  = f u
  ```

  wobei `fehlerFall` die Fehlersituation charakterisiert.

Bemerkung: Im sehr einfachen Beispiel von `kopf'` war die Abstützung auf `kopf` nach obigem Schema nicht nötig; der Effekt konnte implementierungstechnisch einfacher erreicht werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bewertung von Auffangwertvariante 2

Positiv:

+ Panikmodus vermieden, Programmlauf nicht abgebrochen.
+ Generalität, stets anwendbar.
+ Flexibilität, aufrufspezifische Auffangwerte ermöglichen variierende Fehlerwerte und Fehlerbehandlung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Bewertung von Auffangwertvariante 2 (fgs.)

Negativ:

- Transparente Fehlerbehandlung ist nicht gewährleistet, wenn aufrufspezifische Auffangwerte auch reguläres Resultat einer Berechnung sein können, z.B.:

```
kopf' 'F' "Fehler" ->> 'F'      ('F' als reg. Ergebnis)
kopf' 'F' ""       ->> 'F'    ('F' als irreg. Ergebnis)
```

- In diesen Fällen Gefahr ausbleibender Fehlerwahrnehmung mit (möglicherweise fatalen) Folgen durch
  - Vortäuschen eines regulären und korrekten Berechnungsablaufs und eines regulären und korrekten Ergebnisses!

    (Typischer Fall eines "sich ein 'x' für ein 'u' vormachen zu lassen!")

Der schlimmste aller Fehler ist,
sich keines solchen bewusst zu sein.

Thomas Carlyle (1795-1881)
schott. Essayist und Historiker

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 16.4

Fehlertypen, Fehlerwerte, Fehlerfunktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Fehlertypen, Fehlerwerte, Fehlerfunktionen

Ziel: Systematisches

1. Erkennen
2. Anzeigen
3. Behandeln

von Fehlersituationen.

Werkzeug: Dezidierte

1. Fehlertypen
2. Fehlerwerte
3. Fehlerfunktionen

statt schlichter Auffangwerte.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zentral: Anzeigbarkeit von Fehlern

...wird erreicht durch Übergang von Typ `a` zum (Fehler-) Datentyp `Maybe a`:

```
data Maybe a = Just a
             | Nothing
             deriving (Eq, Ord, Read, Show)
```

...umfasst die Werte des Typs `a` in der Form `Just a` mit dem Zusatzwert `Nothing` als explizitem Fehlerwert.

Beispiel:

```
div' :: Int -> Int -> Maybe Int
div' n m
  | m /= 0 = Just (div n m)
  | m == 0 = Nothing

div' 13 5 ->> Just 2          (Division geklappt)
div' 13 0 ->> Nothing         (Division gescheitert)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Systematisierung d. Beispielsidee (schematisch)

...anhand einer hier einstellig angenommenen fehlerbehandlungsfreien Implementierung einer Funktion `f`:

- Ergänze `f`:

  ```
  f :: a -> b
  f u = ...
  ```

  um die fehlererkennende und -anzeigende Hüllfunktion `f'`:

  ```
  f' :: a -> Maybe b
  f' u
    | fehlerFall = Nothing
    | otherwise  = Just (f u)
  ```

  wobei `fehlerFall` die Fehlersituation charakterisiert.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Angewendet auf das Beispiel

...ergänze die (vordef.) nichtfehlerbehandelnde Funktion `div`:

```
div :: Int -> Int -> Int
div n m = ...                    (Details Haskell-intern)

div 13 5 ->> 2
div 13 0 ->> Programmabbruch mit Laufzeitfehler
```

um die fehlererkennende und -meldende Hüllfunktion `div'`:

```
div' :: Int -> Int -> Maybe Int
div' n m
  | m == 0     = Nothing
  | otherwise = Just (div n m)

div' 13 5 ->> Just 2                (Division geklappt)
div' 13 0 ->> Nothing             (Division gescheitert)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Analyse, Diskussion des Beispiels

...anders als `div`, deren Auswertung im Fehlerfall (d.h. Division durch null) gemäß des

- Panikmodus

vom Laufzeitsystem abgebrochen wird, kann `div'` einen Fehler ohne Auswertungsabbruch

1. erkennen: `m == 0`
2. anzeigen: `Nothing`

Noch offen:

- Was machen wir im Fehlerfall mit dem Resultat `Nothing`?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Generalisierung der bisherigen Idee

Ziel:

Erkennen, weiterreichen, fangen und behandeln von Fehlern mithilfe der Funktionen:

- `map_Maybe`: Erkennen und weiterreichen von Fehlern.
- `maybe`: Fangen und behandeln von Fehlern.

...die im Zusammenspiel das Erkennen, Weiterreichen, Fangen u. schließliche Behandeln von Fehlern zu organisieren erlauben.

Beachte: `map_Maybe` ist verschieden von der im Standard-Präludium definierten namensähnlichen Funktion `mapMaybe` mit Signatur: `mapMaybe :: (a -> Maybe b) -> [a] -> [b]`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die Funktion map_Maybe

```
map_Maybe :: (a -> b) -> Maybe a -> Maybe b
map_Maybe f Nothing  = Nothing          (Durchreichen
                                         von Fehlern)
map_Maybe f (Just u) = Just (f u)       (Rechnen mit f
                                        im Normalfall)
```

Curryfizierte und uncurryfizierte Lesart von `map_Maybe`:

- Curryfiziert: `map_Maybe` bildet eine (nicht fehlerbehandelnde) Funktion vom Typ `(a -> b)` auf eine Funktion vom Typ `(Maybe a -> Maybe b)` ab (entspricht einem 'Typ-Lifting').
- Uncurryfiziert: `map_Maybe` bildet einen (Maybe a)-Wert auf einen (Maybe b)-Wert ab mithilfe einer (nicht fehlerbehandelnden) Funktion vom Typ `(a -> b)`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die Funktion maybe

```
maybe :: b -> (a -> b) -> Maybe a -> b
maybe x f Nothing  = x          (Aufrufspez. Fehlerwert)
maybe x f (Just u) = f u    (Rechnen mit f im Normalfall)
```

Curryfizierte und uncurryfizierte Lesart von `map_Maybe`:

- Curryfiziert: Gegeben einen `b`-Wert bildet `maybe` eine Funktion vom Typ `(a -> b)` auf eine Funktion vom Typ `(Maybe a -> b)` ab (entspricht einem 'Typ-Lifting').
- Uncurryfiziert: `maybe` bildet einen `(Maybe a)`-Wert auf einen `b`-Wert ab mithilfe einer (nicht fehlerbehandelnden) Funktion vom Typ `(a -> b)` und eines aufrufspezifischen Fehlerarguments vom Typ `b` (entspricht Auffangwertvariante 2).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Im Zusammenspiel

...erlauben `map_Maybe` und `maybe` Fehlerwerte

- weiterzureichen, die Fähigkeit von `map_Maybe`:

  ```
  map_Maybe f Nothing = Nothing
  ```

  ...der Fehlerwert Nothing wird von map_Maybe durchgereicht.

- zu fangen und (im Sinn von Auffangwertvariante 2) zu behandeln, die Fähigkeit von `maybe`:

  ```
  maybe x f Nothing = x
  ```

  ...der aufrufspezifische Auffangwert `x` wird als Resultat geliefert (Auffangwertvariante 2).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiel

...zum Zusammenspiel von `map_Maybe` und `maybe`:

- Fehlerfall: Der Fehler wird von div′ erkannt und angezeigt, von `map_Maybe` weitergereicht und schließlich von `maybe` gefangen und behandelt.

```
maybe 9999 (+1) (map_Maybe (*3) (div' 9 0))
->> maybe 9999 (+1) (map_Maybe (*3) Nothing)
->> maybe 9999 (+1) Nothing
->> 9999
```

- Fehlerfreier Fall: Alles läuft 'normal' ab.

```
maybe 9999 (+15) (map_Maybe (*3) (div' 9 1))
->> maybe 9999 (+15) (map_Maybe (*3) (Just 9))
->> maybe 9999 (+15) (Just 27)
->> (+15) 27
->> 27 + 15
->> 42
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bewertung d. Fehlerbehandlung mittels `Maybe`

Positiv:

+ Fehler können erkannt, angezeigt, weitergereicht und schließlich gefangen und (im Sinn von Auffangwert-variante 2) behandelt werden.

Negativ:

– Geänderte Funktionalität: `Maybe b` statt `b`.

Pragmatische Zusatzvorteile:

+ Systementwicklung ist ohne explizite Fehlerbehandlung möglich (z.B. mit nichtfehlerbehandelnden Funktionen wie `div`).
+ Fehlerbehandlung kann nach Abschluss durch Ergänzung der fehlerbehandelnden Funktionsvarianten (wie z.B. der Funktion `div'`) zusammen mit den Funktionen `map_Maybe` und `maybe` umgesetzt werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Der schöpferische Irrtum

Irrtümer haben ihren Wert;
jedoch nur hie und da.
Nicht jeder, der nach Indien fährt,
entdeckt Amerika.

Erich Kästner (1899-1974)
dt. Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 16.5

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 16

Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 19, Error Handling)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 14.4, Case study: program errors)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 14.4, Modelling program errors)

Die schlimmsten Fehler werden gemacht
in der Absicht, einen begangenen Fehler
wieder gut zu machen.

Jean Paul (1763-1825)
dt. Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ein Mensch würde nie dazu kommen,
etwas zu tun, wenn er stets warten würde,
bis er es so gut kann, dass niemand mehr
einen Fehler entdecken könnte.

John Henry Newman (1801-1890)
engl. Kardinal

Den größten Fehler, den man im Leben machen kann,
ist, immer Angst zu haben, einen Fehler zu machen.

Dietrich Bonhoeffer (1906-1945)
dt. luther. Theologe, NS-Widerständler

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 17

Programmierung im Großen: Module

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 17.1

Überblick, Orientierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Module, Modularisierung von Programmen

...Zerlegung von Programmen in überschaubare, (oft) getrennt übersetzbare Programmeinheiten als wichtige programmiersprachliche Unterstützung der

- Programmierung im Großen.

Ich denke gern in großen Dimensionen.
Wenn man schon denkt,
kann man es ja auch gleich ordentlich tun.

Donald Trump (* 1946)
amerik. Unternehmer
45. Präsident der USA

...ein programmiersprachen- und programmierstilübergreifend anzutreffendes und umgesetztes Konzept.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zwei wichtige Eigenschaften

...zur Charakterisierung guter Modularisierung:

1. Kohäsion (modullokal, intramodular)
   - beschäftigt sich mit dem inneren Zusammenhang von Modulen, mit Art und Typ der in einem Modul zusammengefassten Funktionen.
2. Koppelung (modulübergreifend, intermodular)
   - beschäftigt sich mit dem äußeren Zusammenhang von Modulen, dem Import-/Export- und Datenaustauschverhalten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

In diesem Kapitel

1. Ziele guter Modularisierung (Kap. 17.2)
2. Haskells Modulkonzept (Kap. 17.3)
3. Modul-Anwendung: Implementierung abstrakter Datentypen in Haskell (Kap. 17.4)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 17.2

Ziele guter Modularisierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ziele guter Modularisierung

...von einer technischen Programmperspektive aus:

Modullokal (intramodular): Module sollen

- einen klar umrissenen, unabhängig von anderen Modulen verständlichen Zweck besitzen.
- nur einer Abstraktion entsprechen.
- einfach zu testen sein.

Modulübergreifend (intermodular): Modular entworfene Programme sollen

- Auswirkungen von Designentscheidungen (z.B. Einfachheit vs. Effizienz einer Implementierung)
- Abhängigkeiten von anderen Programmen oder Hardware

...auf (möglichst) wenige Module beschränken.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ziele guter Modularisierung

...von einer semantischen, inhaltl. Programmperspektive aus:

Modullokal (intramodular):

- Funktionale Kohäsion: Fasse Funktionen gleicher Funktionalität zusammen, z.B. Sortierverfahren, Ein-/Ausgabe,...
- Datenkohäsion: Fasse Funktionen zusammen, die auf den gleichen Datenstrukturen arbeiten, z.B. Funktionen auf trigonometrischen Daten,...

Modulübergreifend (intermodular):

- Schwache funktionale Koppelung: Strebe nach wenigen, wohlbegründeten funktionalen Beziehungen und Abhängigkeiten zwischen Modulen.
- Feste Datenkoppelung: Strebe nach Kommunikation modulverschiedener Funktionen durch Wertübergabe: Ergebnisse einer Funktion werden Argumente einer anderen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zu vermeiden

Modullokal (intramodular):

- Logische Kohäsion: Vermeide Funktionen vergleichbarer Funktionalität, aber unterschiedlicher Implementierung zusammenzufassen, z.B. verschiedene Benutzerschnittstellen eines Systems.
- Zufällige Kohäsion: Vermeide Funktionen ohne sachlichen Grund zusammenzufassen.

Modulübergreifend (intermodular):

- Starke funktionale Koppelung: Vermeide eine Vielzahl fkt. Beziehungen und Abhängigkeiten zwischen Modulen.
- Lose Datenkoppelung: Vermeide andere Mechanismen als Wertübergabe zur Kommunikation von modulverschiedenen Funktionen, z.B. über Dateien.

Gut zu wissen: In fkt. Sprachen ist Datenkoppelung durch Wertübergabe *per se* die Standardform.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kennzeichen gelungener Modularisierung

Starke funktionale und Datenkohäsion

- enger inhaltlicher Zusammenhang der Definitionen eines Moduls.

Schwache funktionale und lose Datenkoppelung

- wenige Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Modulen, insbesondere keine direkten oder indirekten zirkulären Abhängigkeiten.

Für eine vertiefende Diskussion siehe:

Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. Einführung in die Programmierung mit Haskell, Pearson Studium, 2004, Kapitel 10.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Anforderungen an Modularisierungskonzepte

...zur Erreichung vorgenannter Ziele.

Unterstützung des Geheimnisprinzips durch Trennung von

- Schnittstelle (Import/Export)
  - Wie interagiert das Modul mit seiner Umgebung?
  - Welche Funktionalität stellt es zur Verfügung (Export)?
  - Welche Funktionalität benötigt es (Import)?
- Implementierung (Daten/Funktionen)
  - Wie sind die Datenstrukturen implementiert?
  - Wie ist die Funktionalität auf den Datenstrukturen realisiert?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 17.3

Haskells Modulkonzept

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Schematischer Aufbau von Haskellmodulen

Moduldateien werden eingeleitet von der Zeile:

```
module M where
```

gefolgt von Deklarationen/Definitionen von:

1. Typen (algebraische Typen, Neue Typen, Typsynonyme)
2. Typklassen
3. Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schematischer Modulaufbau: Illustration

```
module M where                  -- Moduldefinition

data D_1 ...    = ...           -- Algebraische Typen
...
data D_n ...    = ...

newtype N_1 ... = ...           -- Neue Typen
...
newtype N_m ... = ...

type T_1 ...    = ...           -- Typsynonyme
...
type T_p ...    = ...
class C_1 ...                   -- Typklassen
...
class C_q ...

f_1 :: ...                      -- Funktionen
f_1 ... = ...
...
f_r :: ...
f_r ... = ...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Haskells Modulkonzept

...unterstützt den Import und Export von Datentypen, Typsynonymen, Typklassen und Funktionen.

Im einzelnen:

- Import
  - Selektiv/nicht selektiv
  - Qualifiziert
  - Mit Umbenennung
- Export
  - Selektiv/nicht selektiv
  - Händischer Reexport
  - Nicht unterstützt: Automatischer Reexport

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 17.3.1

Import

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Nicht selektiver Import (schematisch)

```
module M1 where
...

module M2 where
import M1
...
```

- Modul `M2` importiert aus Modul `M1` alle (global sichtbaren) Bezeichner und Definitionen, die danach in `M2` verwendet werden können.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Selektiver Import (schematisch)

```
module M1 where
...
module M2 where                                    -- Variante 1
import M1 (D_1 (..), D_2, T_1, C_1 (..), C_2, f_5)
...
module M3 where                                    -- Variante 2
import M1 hiding (D_1, T_2, f_1)
...
```

- M2 importiert aus M1 ausschließlich die explizit genannten Bezeichner und Definitionen; das sind: D_1 (einschließlich von M1 exportierter Konstruktoren), D_2 (ohne Konstruktoren), T_1, C_1 (..) (einschließlich von M1 exportierter Funktionen), C_2 (ohne Funktionen), f_5.
- M3 importiert aus M1 alle in M1 (sichtbaren) Bezeichner und Definitionen mit Ausnahme der explizit genannten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Anwendungsbeispiel

...'verstecken' der im Standard-Präludium vordefinierten Funktionen

- `reverse`, `tail` und `zip`

durch Einfügen von

- `import Prelude hiding (reverse,tail,zip)`

am Anfang des Haskell-Skripts im Anschluss an die (so vorhandene) Modul-Anweisung (siehe Kapitel 1.3.1).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 17.3.2

Export

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Nicht selektiver Export (schematisch)

```
module M1 where
data D_1 ... = ...
...
newtype N_1 ... = ...
...
type T_1 = ...
...
class C_1 ...
...
f_1 :: ...
f_1 ... = ...
...
```

- Alle in `M1` eingeführten global sichtbaren Bezeichner und Definitionen sind exportbereit und können von anderen Modulen importiert werden.

  Beachte: Die Zeile `module M1 where...` ist bedeutungsgleich zu `module M1 (module M1) where...`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Selektiver Export (schematisch)

```
module M1 (D_1 (..), D_2, D_3 (Dc_1,...,Dc_k), C_1 (..),
           C_2, C_3 (cf_1,...,cf_l), T_1, f_2, f_5) where
data D_1 ... = ...
...
newtype N_1 ... = ...
...
type T_1 = ...
...
class C_1 ...
...
f_1 :: ...
f_1 ... = ...
...
```

- Nur die explizit genannten Bezeichner, Definitionen aus `M1` sind exportbereit und können von anderen Modulen importiert werden. Dabei ist `D_1` einschließl. seiner Konstruktoren exportbereit, `D_2` ohne, `D_3` mit den explizit genannten. Analog für die Klassen `C_i`.
- Beachte: Selektiver Export unterstützt das Geheimnisprinzip!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 17.3.3

Reexport

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Reexport (schematisch): Nicht automatisch!

```
module M1 where...

module M2 where
import M1
...
f_M2j
...

module M3 where
import M2
...
```

- M2 importiert nicht selektiv aus M1, d.h. alle in M1 (global sichtbaren) Bezeichner, Definitionen werden von M2 importiert und können in M2 benutzt werden.
- M3 importiert nicht selektiv aus M2, d.h. alle in M2 (global sichtbaren) Bezeichner, Definitionen werden von M3 importiert und können in M3 benutzt werden, nicht jedoch die von M2 aus M1 importierten Namen, d.h. kein automatischer Reexport!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Abhilfe: Händischer Reexport!

...in den zwei Varianten nicht selektiv und selektiv:

```
module M2 (module M1,f_M2_j) where          (nicht selektiv)
import M1
...
f_M2_j
...                                                 (selektiv)
module M3 (D_1 (..), D_2, D_3 (Dc_1,Dc_2), C_1 (..), C_2,
           C_3 (cf_1,cf_2,cf_3), f_1,f_M3_k) where
import M1
...
f_M3_k
...
```

- Nicht selektiver Reexport von M1 aus M2: M2 reexportiert jeden aus M1 importierten Namen, sowie das M2-lokale f_M2_j aus M2.
- Selektiver Reexport von M1 aus M3: M3 reexportiert von den aus M1 importierten Namen ausschließlich D_1 (einschließl. Konstruktoren), D_2 (ohne Konstruktoren), D_3 (mit angegebenen Konstruktoren); analog f. d. Klassen C_1, C_2, C_3, f_1 und das M3-lokale f_M3_k.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 17.3.4

Namenskonflikte, Umbenennungen, Konventionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Namenskonflikte, Umbenennungen

Namenskonflikte

- können durch qualifizierten Import aufgelöst werden:

  ```
  import qualified M1
  ```

  Verwendung: `M1.f` zur Bezeichnung der aus `M1` importierten Funktion `f`; `f` zur Bezeichnung der im importierenden Modul lokal definierten Funktion `f`.

Umbenennen importierter Module und Bezeichner

- durch Einführen lokaler Namen im importierenden Modul
  - für Modulnamen:

    ```
    import qualified M1 as MyLocalNameForM1
    ```

    ...`MyLocalNameForM1` wird im importierenden Modul anstelle von `M1` verwendet.
  - für ausgewählte Bezeichner:

    ```
    import M1 (f1,f2)
       renaming (f1 to fac, f2 to fib)
    ```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Haskell-Programme

...sind Modulsysteme.

Soll ein Haskell-Programm übersetzt (statt interpretiert) werden, muss dessen Modulsystem ein Hauptmodul namens

- `Main`

mit einer Funktion namens

- `main :: IO` τ für τ konkreter Typ

enthalten, mit deren Auswertung die Ausführung des übersetzten Programms beginnt (wobei das Ergebnis vom Typ τ unbeachtet bleibt).

Beachte: Die `module`-Deklaration darf in einem Haskell-Skript fehlen; implizit wird in diesem Fall die `module`-Deklaration

```
module Main (main) where
```

ergänzt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Konventionen, gute Praxis

Konventionen

- Pro Datei ein Modul.
- Modul- und Dateiname stimmen überein (abgesehen von der Endung `.hs` bzw. `.lhs` im Dateinamen).
- Alle Deklarationen beginnen in derselben Spalte wie das Schlüsselwort `module`.

Gute Praxis

- Module unterstützen eine (!) klar abgegrenzte Aufgabenstellung (vollständig) und sind in diesem Sinne in sich abgeschlossen; ansonsten Teilen (Teilungskriterium).
- Module sind 'kurz' (d.h. so kurz wie möglich, so lang wie nötig).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 17.4

Modul-Anwendung: Abstrakte Datentypen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Konkrete vs. abstrakte Datentypen

Konkrete Datentypen (KDT) (in Haskell: Algebr. Datentypen)

- werden durch die exakte Angabe und Darstellung ihrer Werte spezifiziert, aus denen sie bestehen.
- auf ihnen gegebene Funktionen/Operationen werden zum Definitionszeitpunkt nicht angegeben und bleiben offen.

Abstrakte Datentypen (ADT)

- werden durch ihr Verhalten spezifiziert, d.h. durch die auf ihren Werten definierten Funktionen/Operationen und deren Zusammenspiel.
- die tatsächliche Darstellung der Werte des Datentyps wird zum Definitionszeitpunkt nicht angegeben u. bleibt offen.
- Dem Anwender eines abstrakten Datentyps wird die Darstellung der Werte und die Implementierung der Funktionen darauf nie bekanntgegeben: Geheimnisprinzip!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Grundlegende Idee von ADT-Definitionen

...Festlegung u. Implementierung eines Datentyps in 3 Teilen:

A) Schnittstellenfestlegung: Angabe der auf den Werten des Datentyps zur Verfügung stehenden Operationen in Form ihrer syntaktischen Signaturen (öffentlich).

B) Verhaltensfestlegung: Festlegung der Bedeutung der Operationen durch Angabe ihres Zusammenspiels in Form von Axiomen (sog. Gesetzen), die von jeder (!) Implementierung dieser Operationen einzuhalten sind (öffentlich).

C) Implementierung: Implementierung des ADT durch einen KDT, der A) und B) erfüllt (nicht öffentlich).

Wichtig: In A) und B) wird die Darstellung der Werte des abstrakten Datentyps ausdrücklich nicht festgelegt; sie bleibt verborgen und deshalb für die Implementierung in C) als Freiheitsgrad offen!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Herausforderung für ADT-Definitionen

...in

- Teil B): Die Gesetze so zu wählen, dass das Verhalten der Operationen exakt und eindeutig festgelegt ist; also so, dass weder eine Überspezifikation (keine widerspruchsfreie Implementierung möglich) noch eine Unterspezifikation (mehrere in sich widerspruchsfreie, aber sich widersprechende Implementierungen möglich) vorliegt.
- Teil C): Die Implementierung durch Funktionen auf einem KDT so vorzunehmen, dass die Gesetze aus Teil B) erfüllt sind.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Vorteil von ADT-Definitionen

...die Trennung von öffentlicher A), B) Schnittstellen- und Verhaltensfestlegung und nicht öffentlicher C) Implementierung erlaubt die

- Implementierung zu verstecken (Geheimnisprinzip!)

und nach

- Zweckmäßigkeit und Anforderungen (z.B. Einfachheit, Performanz) auszuwählen und in der Einsatzphase bei Bedarf auch auszutauschen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel: Der ADT Warteschlange (FIFO)

...in Pseudo-Code (kein Haskell):

A) Schnittstellenfestlegung durch Signaturangabe:

```
NEW:                        -> Queue
ENQUEUE: Queue × Item       -> Queue
FRONT:   Queue              -> Item
DEQUEUE: Queue              -> Queue
IS_EMPTY: Queue             -> Boolean
```

B) Verhaltensfestlegung in Form von Axiomen/Gesetzen:

```
b1) IS_EMPTY(NEW)              = true
b2) IS_EMPTY(ENQUEUE(q,i))     = false
b3) FRONT(NEW)                 = error
b4) FRONT(ENQUEUE(q,i))        = if IS_EMPTY(q) then i
                                 else FRONT(q)
b5) DEQUEUE(NEW)               = error
b6) DEQUEUE(ENQUEUE(q,i)) =
      if IS_EMPTY(q) then NEW
                     else ENQUEUE(DEQUEUE(q),i)
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Implementierung des ADT Warteschlange

...in Haskell.

Implementierungstechnischer Schlüssel:

- Haskells Modulkonzept, speziell der selektive Export, bei dem Konstruktoren algebraischer Datentypen verborgen bleiben

wodurch das mit ADT-Definitionen verfolgte Ziel:

- Kapselung von Daten, Realisierung des Geheimnisprinzips auf Datenebene (engl. information hiding)

erreicht werden kann.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

A)&B): Schnittstellen-, Verhaltensfestlegung

```
module Queue
  {- Kommunikation von Teil A: Schnittstellenspezifikation -}
  (Queue,     -- Name des Datentyps (Geheimnisprinzip, kein
              -- Konstruktorexport!)
   new,       -- new :: Queue a
   enqueue,   -- enqueue :: Queue a -> a -> Queue a
   front,     -- front :: Queue a -> a
   dequeue,   -- dequeue :: Queue a -> Queue a
   is_empty, -- is_empty :: Queue a -> Bool

   {- Kommunikation von Teil B: Axiome/Gesetze
    b1) is_empty(new)            = True
    b2) is_empty(enqueue(q,i)) = False
    b3) front(new)               = error "Niemand wartet!"
    b4) front(enqueue(q,i))      = if is_empty(q) then i
                                   else front(q)
    b5) dequeue(new)             = error "Niemand wartet!"
    b6) dequeue(enqueue(q,i))    = if is_empty(q) then new
                                   else enqueue(dequeue(q),i) -}
  ) where...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

C) Implementierung 1 über KDT mit data

```
{- Implementierung von A), B) über algebraischem Datentyp -}

data Queue a = Qu [a]

new :: Queue a
new = Qu []

enqueue :: Queue a -> a -> Queue a
enqueue (Qu xs) x = Qu (xs ++ [x])

front :: Queue a -> a
front q@(Qu xs)              -- Hier praktisch: Das als-Muster
 | not (is_empty q) = head xs
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

dequeue :: Queue a -> Queue a
dequeue q@(Qu xs)            -- Hier praktisch: Das als-Muster
 | not (is_empty q) = Qu (tail xs)
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

is_empty :: Queue a -> Bool
is_empty (Qu []) = True
is_empty _       = False
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

C) Implementierung 2 über KDT m. newtype

```
{- Implementierung von A), B) über Neuem Typ -}

newtype Queue a = Qu [a]

new :: Queue a
new = Qu []

enqueue :: Queue a -> a -> Queue a
enqueue (Qu xs) x = Qu (xs ++ [x])

front :: Queue a -> a
front q@(Qu xs)              -- Hier praktisch: Das als-Muster
 | not (is_empty q) = head xs
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

dequeue :: Queue a -> Queue a
dequeue q@(Qu xs)            -- Hier praktisch: Das als-Muster
 | not (is_empty q) = Qu (tail xs)
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

is_empty :: Queue a -> Bool
is_empty (Qu []) = True
is_empty _       = False
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

C) Implementierung 3 über KDT mit type

```
{- Implementierung von A), B) über Typsynonym -}

type Queue a = [a]

new :: Queue a
new = []

enqueue :: Queue a -> a -> Queue a
enqueue q x = q ++ [x]

front :: Queue a -> a
front q
 | not (is_empty q) = head q
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

dequeue :: Queue a -> Queue a
dequeue q
 | not (is_empty q) = tail q
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

is_empty :: Queue a -> Bool
is_empty q = (q == [])
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Wiederholung: Das als-Muster

...als nützliche Musterspielart (siehe Kapitel 6.1.5):

```
front q@(Qu xs)   -- Arg. als q oder als (Qu xs).
dequeue q@(Qu xs) -- Arg. als q oder als Qu xs).
```

Das als-Muster (`q@(Qu xs)`) bietet mittels:

- `q`: Zugriff auf das Argument als Ganzes.
- `(Qu xs)`: Zugriff auf Teile des strukturierten Arguments.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Konzeptueller Vorteil abstrakter Datentypen

...das Geheimnisprinzip: Nur die ADT-Schnittstelle ist bekannt, die KDT-Implementierung bleibt verborgen.

Das gewährleistet folgende Vorteile der ADT-Konzepts:

1. Schutz der Datenstruktur vor unkontrolliertem oder nicht beabsichtigtem/zugelassenem Zugriff.

   Beispiel: Ein eigendefinierter Leerheitstest wie:

   ```
   emptyQ == Qu []
   ```

   führte in `Queue` importierenden Modulen zu einem Laufzeitfehler, da die Implementierung und somit der Konstruktor `Qu` dort nicht sichtbar sind.
2. Einfache Austauschbarkeit der zugrundeliegenden Implementierung.
3. Unterstützung arbeitsteiliger Programmierung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zur ADT-Realisierbarkeit in Haskell

...das ADT-Konzept ist kein erstrangiges Sprachelement (engl. first class citizens) in Haskell:

- Haskell bietet kein dezidiertes Sprachkonstrukt zur Spezifikation von ADTs, das eine externe Offenlegung von Signaturen und Gesetzen bei intern bleibender Implementierung erlaubte.

Allerdings können ADTs in Haskell (behelfsmäßig) mithilfe des

- Modulkonzepts realisiert werden.

Das erlaubt, die KDT-Implementierung eines ADT

+ intern und damit im Sinn des Geheimnisprinzips versteckt zu halten.
– jedoch können die Funktionssignaturen und Gesetze dem ADT-Anwender nur umständlich und in unsicherer Weise in Form von Kommentaren kommuniziert werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Wegweisende Arbeiten

...zu abstrakten Datentypen:

- John V. Guttag. *Abstract Data Types and the Development of Data Structures*. Communications of the ACM 20(6):396-404, 1977.
- John V. Guttag, James Jay Horning. *The Algebra Specification of Abstract Data Types*. Acta Informatica 10(1):27-52, 1978.
- John V. Guttag, Ellis Horowitz, David R. Musser. *Abstract Data Types and Software Validation*. Communications of the ACM 21(12):1048-1064, 1978.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 17.5

Zusammenfassung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Modularisierungsvorteile und -gewinne

- Arbeitsphysiologisch: Unterstützung arbeitsteiliger Programmierung.
- Softwaretechnisch: Unterstützung der Wiederbenutzung von Programmen und Programmteilen.
- Implementierungstechnisch: Unterstützung getrennter Übersetzung (engl. separate compilation).

Insgesamt:

- Höhere Effizienz der Softwareerstellung bei gleichzeitiger Qualitätssteigerung (Verlässlichkeit) und Kostenreduktion.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 17.6

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 17 (1)

Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 8, Modularisierung und Schnittstellen)

Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 10, Modularisierung und Programmdekomposition)

Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 6, Modules)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 17 (2)


John V. Guttag. *Abstract Data Types and the Development of Data Structures*. Communications of the ACM 20(6):396-404, 1977.


John V. Guttag, James Jay Horning. *The Algebra Specification of Abstract Data Types*. Acta Informatica 10(1):27-52, 1978.


John V. Guttag, Ellis Horowitz, David R. Musser. *Abstract Data Types and Software Validation*. Communications of the ACM 21(12):1048-1064, 1978.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 17 (3)


Manfred Nagl. *Softwaretechnik: Methodisches Programmieren im Großen*. Springer-V., 1990.


David L. Parnas. *On the Criteria to be used on Decomposing Systems into Modules*. Communications of the ACM 15(12):1053-1058, 1972.


David L. Parnas, Paul C. Clements, David M. Weiss. *The Modular Structure of Complex Systems*. IEEE Transactions on Software Engineering 11(3):259-266, 1985.


Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 5, Writing a Library: Working with JSON Data – The Anatomy of a Haskell Module, Generating a Haskell Program and Importing Modules)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 17 (4)

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 14, Datenstrukturen und Modularisierung)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 15.1, Modules in Haskell; Kapitel 15.2, Modular design; Kapitel 16, Abstract data types)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 15.1, Modules in Haskell; Kapitel 15.2, Modular design; Kapitel 16, Abstract data types)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 18

Allgemeine und funktionale Programmierprinzipien

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 18.1

Überblick, Orientierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Im Mittelpunkt: Drei Themen

Allgemeine Programmierprinzipien

1. Stetes Hinterfragen u. Anpassen seines Tuns (Kap. 18.2)
   - im Wege reflektiven Programmierens!

     Illustriert anhand von Schlüssel- und Leitfragen.

Funktionale Programmierprinzipien

2. Kapseln algorithmischen Vorgehens (Kap. 18.3)
   - möglich dank Funktionen höherer Ordnung!

     Illustriert anhand von Teile und Herrsche.
3. Problemorientiertes Modularisieren (Kap. 18.4)
   - möglich dank später Auswertung! (engl. lazy evaluation)

     Generatiere/anpass-Modularisierungen (selektieren, filtern, transformieren,...)

     Illustriert anhand von Stromprogrammierung (Ströme, unendliche Listen (engl. streams, lazy lists)).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

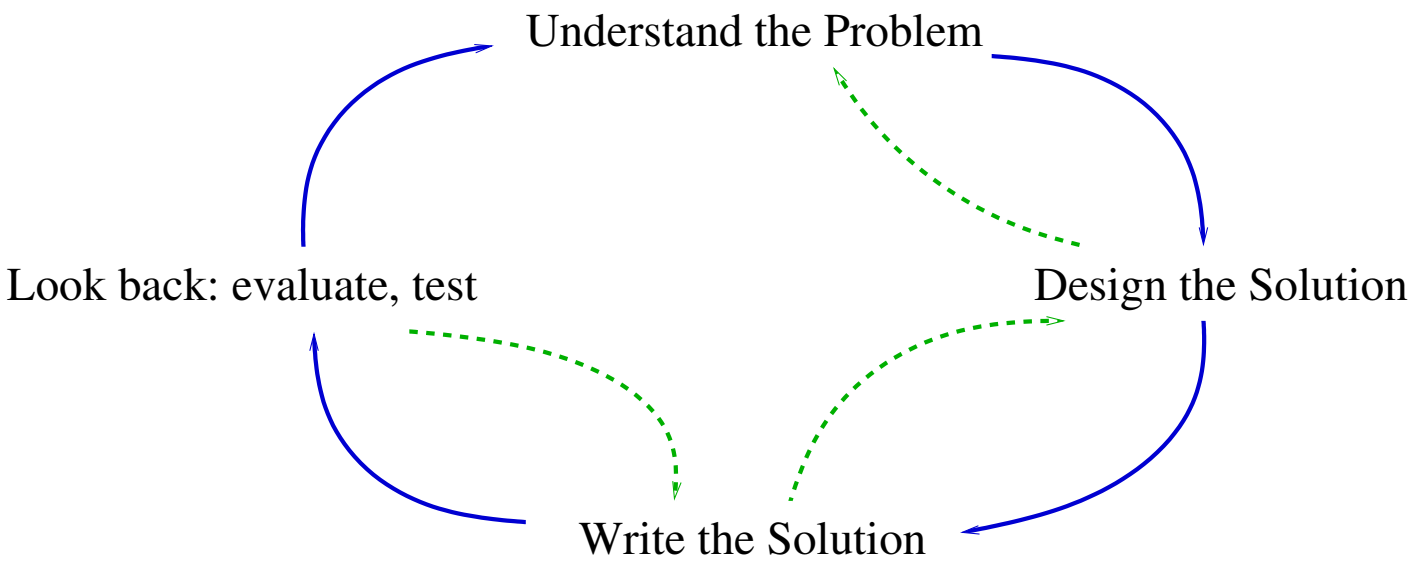
Kapitel 18.2

Reflektives Programmieren

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Reflektives Programmieren

...der Programm-Entwicklungszyklus nach Simon Thompson, Haskell: The Craft of Fuctional Programming, 2. Auflage, 1999, Kap. 11 'Reflective Programming':



...in jeder der 4 Phasen ist es nützlich, (sich) Fragen zu stellen, zu beantworten und den Lösungsweg ggf. anzupassen.

Nosce te ipsum, nosce tuum opus.
Erkenne dich selbst, erkenne dein Werk.

lat., sprichw., Apoll zugeschrieben, abgewandelt

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Schlüssel- und Leitfragen

Phase 1: Verstehen des Problems

- Welches sind die Ein- und Ausgaben des Problems?
- Welche Randbedingungen sind einzuhalten?
- Ist das Problem über- oder unterspezifiziert?
- Ist das Problem entscheidbar und damit grundsätzlich lösbar? In welche Komplexitätsklasse fällt es?
- Ist das Problem aufgrund seiner Struktur in Teilprobleme zerlegbar?
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Schlüssel- und Leitfragen

Phase 2: Entwerfen einer Lösung

- Ist das Problem verwandt zu (mir) bekannten anderen, möglicherweise einfacheren Problemen?
- Wenn ja, lassen sich deren Lösungsideen anpassen und anwenden? Ebenso deren Implementierungen, vorhandene Bibliotheken?
- Lässt sich das Problem verallgemeinern und so möglicherweise sogar einfacher lösen?
- Ist das Problem mit den vorhandenen Ressourcen, einem gegebenen Budget lösbar?
- Ist die Lösung änderungs-, erweiterungs-, wiederverwendungsfreundlich?
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Schlüssel- und Leitfragen

Phase 3: Ausformulieren und kodieren der Lösung

- Gibt es passende Bibliotheken, speziell geeignete polymorphe Funktionen höherer Ordnung für die Lösung von Teilproblemen?
- Können vorhandene Bibliotheksfunktionen (zumindest) als Vorbild dienen, um entsprechende Funktionen für eigene Datentypen zu definieren?
- Kann funktionale Abstraktion (auch höherer Stufe) zur Verallgemeinerung der Lösung angewendet werden?
- Welche Hilfsfunktionen, Datenstrukturen könnten nützlich sein?
- Welche Möglichkeiten der Sprache können für die Codierung vorteilhaft ausgenutzt werden und wie?
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Schlüssel- und Leitfragen

Phase 4: Blick zurück, evaluieren, testen

- Lässt sich die Lösung testen, ihre Korrektheit beweisen, auch formal?
- Worin sind möglicherweise gefundene Fehler begründet? Flüchtigkeitsfehler, Programmierfehler, falsches oder unvollständiges Problemverständnis, falsches Semantikverständnis der verwendeten Programmiersprache? Andere Gründe?
- Sollte das Problem noch einmal gelöst werden müssen; sollte die Lösung und ihre Implementierung genauso gemacht werden? Was sollte beibehalten oder geändert werden und warum?
- Erfüllt das Programm auch nichtfunktionale Eigenschaften gut wie Performanz, Speicherverbrauch, Skalierbarkeit, Verständlichkeit, Änder- und Erweiterbarkeit?
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Am Ende gilt

Opus opificem probat.
Das Werk empfiehlt den Meister.

lat., sprichwörtl.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 18.3

Kapseln algorithmischen Vorgehens

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel: Teile und Herrsche

...die zugrundeliegende algorithmische Idee dieses Vorgehens:

1. Ist ein Problem einfach genug, löse es sofort.
2. Wenn nicht: Teile das Problem rekursiv in kleinere Teilprobleme, bis alle Teilprobleme einfach genug sind, sofort gelöst werden zu können.
3. Berechne die Lösung des ursprünglichen Problems aus den Lösungen der Teilprobleme.

...typisches Beispiel einer von-oben-nach-unten-Vorgehensweise (engl. top-down)!

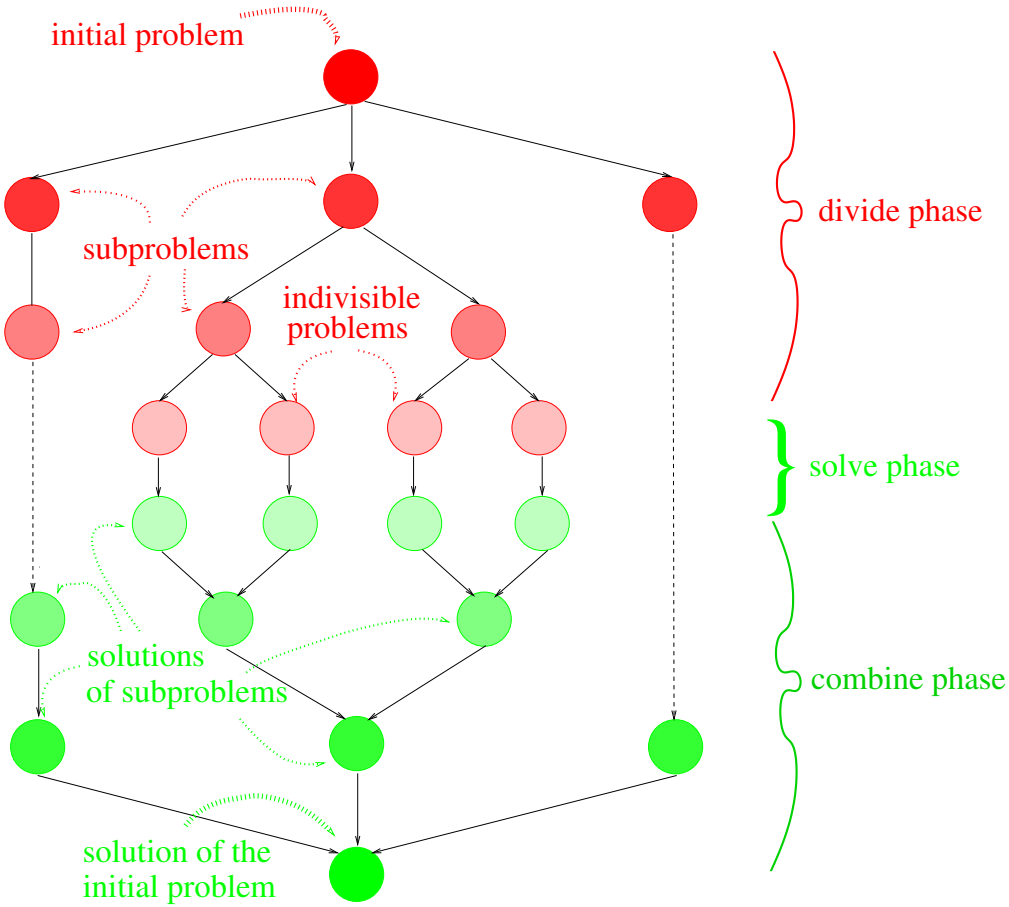
Divide et impera.
Teile und herrsche.

nach Ludwig XI von Frankreich (1423-1483)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Veranschaulichung

...der Phasenabfolge des 'Teile und Herrsche'-Vorgehens:



Fethi Rabhi, Guy Lapalme.
Algorithms: A Functional Programming Approach.
Addison-Wesley, 1999, Seite 156.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typische Anwendungsfelder, Anwendungen

...für ein 'Teile und Herrsche'-Vorgehen:

- Sortieren (Quicksort, Mergesort, etc.)
- Numerische Analyse(verfahren)
- Kryptographie
- Bildverarbeitung
- Binomialkoeffizientenberechnung
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Vorbereitung zur Vorgehenskapselung

...in einer Funktion höherer Ordnung.

Gegeben:

- Ein Problem mit Probleminstanzen eines generischen Typs, beschrieben durch die Typvariable `pb`.

Gesucht:

- Eine Lösung aus einer Menge von Lösungsinstanzen eines generischen Typs, beschrieben durch die Typvariable `lsg`.

Kapselungsziel:

Eine Funktion höherer Ordnung `teile_und_herrsche`, die geeignet parametrisiert für

- Probleminstanzen vom Typ `pb` gemäß des 'Teile und Herrsche'-Prinzips eine Lösungsinstanz vom Typ `lsg` berechnet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die Bedeutung der Parameter

...der Funktion höherer Ordnung `teile_und_herrsche`:

- `einfach_genug :: pb -> Bool`: ...liefert `True`, falls die Probleminstanz einfach genug ist, um sofort gelöst werden zu können.
- `loese :: pb -> lsg`: ...liefert die Lösungsinstanz einer unmittelbar lösbaren Probleminstanz.
- `teile :: pb -> [pb]`: ...teilt eine nicht unmittelbar lösbare Probleminstanz in eine Liste von Teilprobleminstanzen auf.
- `herrsche :: pb -> [lsg] -> lsg`: ...liefert angewendet auf eine Ausgangsprobleminstanz und eine Liste von Lösungen von Teilprobleminstanzen die Lösung der Ausgangsprobleminstanz.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Einführung sprechender Typsynonyme

...für die vorkommenden Funktionstypen:

```
type Einfach_genug pb  = pb -> Bool
type Loese pb lsg      = pb -> lsg
type Teile pb          = pb -> [pb]
type Herrsche pb lsg   = pb -> [lsg] -> lsg
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Das Funktional teile_und_herrsche

```
teile_und_herrsche :: (Einfach_genug pb) -> (Loese pb lsg)
     -> (Teile pb) -> (Herrsche pb lsg) -> pb -> lsg
teile_und_herrsche einfach_genug loese teile herrsche
                   pb_instanz
 = loesung_von pb_instanz
   where
    loesung_von p
     | einfach_genug p = loese p
     | otherwise
         = herrsche p (map loesung_von (teile p))
```

Löse rekursiv alle durch die Teilung entstehenden Probleme.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Anwendung: Teile und Herrsche für Quicksort

```
quickSort :: Ord a => [a] -> [a]
quickSort liste
 = teile_und_herrsche einfach_genug loese teile
                      herrsche liste
 where
  einfach_genug ls          = length ls <= 1
  loese                     = id
  teile (l:ls)              = [[ x | x <- ls, x <= l],
                               [ x | x <- ls, x > l]]
  herrsche (l:_) [ls1,ls2] = ls1 ++ [l] ++ ls2
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Aber Achtung!

...nicht jedes Problem, das dem 'teile und herrsche'-Vorgehen in natürlicher Weise zugänglich ist, ist auch dafür geeignet naiv umgesetzt.

Betrachte dazu:

```
fib :: Integer -> Integer
fib n = teile_und_herrsche einfach_genug loese
                           teile herrsche n
    where
     einfach_genug n     = (n == 0) || (n == 1)
     loese               = id
     teile n             = [n-2,n-1]
     herrsche _ [m1,m2] = m1 + m2
```

...besitzt exponentielles Laufzeitverhalten!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Algorithmenmuster

Die Idee, ein generelles algorithmisches Vorgehen wie ‘teile und herrsche’ in einer Funktion höherer Ordnung zu kapseln und so einfach wiederverwendbar zu machen, lässt sich auch für andere algorithmische Vorgehen umsetzen, darunter:

- Rücksetzsuche (engl. Backtracking Search)
- Prioritätsgesteuerte Suche
- Lokale Suche (engl. Greedy Search)
- Dynamische Programmierung

Wir sprechen hier auch von Algorithmenmustern (mehr dazu in der LVA 185.A05 ‘Fortgeschrittene funktionale Programmierung’).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Kapitel 18.4

Problemorientiertes Modularisieren

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beispiel: Generiere/anpass-Modularisierungen

...in fkt. Programmiersprachen mit später Auswertung.

Darunter:

- Generiere/selektiere-Modularisierungen
- Generiere/filtere-Modularisierungen
- Generiere/transformiere-Modularisierungen
- Generiere/...-Modularisierungen

mit denen sich viele Probleme elegant, knapp und effizient lösen lassen.

...illustriert im folgenden am Beispiel der Programmierung mit Strömen, programmiersprachlichem Jargon für die Programmierung mit (potentiell)

- unendlichen Listen (engl. streams, lazy lists).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Generator- und Anpassmodule

...am Beispiel des Siebs des Eratosthenes zur Berechnung des Stroms der Primzahlen:

1. Schreibe alle natürlichen Zahlen ab 2 hintereinander auf.
2. Die kleinste nicht gestrichene Zahl in dieser Folge ist eine Primzahl. Streiche alle Vielfachen dieser Zahl.
3. Wiederhole Schritt 2 mit der nächstkleinsten noch nicht gestrichenen Zahl.

Nach Schritt 1:

```
 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19...
```

Nach Schritt 2 für Zahl 2:

```
 2 3   5   7   9    11    13    15    17    19...
```

Nach Schritt 2 für Zahl 3:

```
 2 3   5   7        11    13          17    19...
```

usw.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

primes: Das Generatormodul

...für den Strom der Primzahlen.

```
primes :: [Integer]
primes = sieve [2..]

sieve :: [Integer] -> [Integer]
sieve (x:xs) = x : sieve [y | y <- xs, mod y x > 0]
```

Die (0-stellige) Generatorfunktion `primes` liefert

- den Strom der (unendlich vielen) Primzahlen.

Aufruf von `primes`:

```
primes ->> [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Veranschaulichung

...der Stromberechnung durch händische Auswertung:

```
    primes
->> sieve [2..]
->> 2 : sieve [y | y <- [3..], mod y 2 > 0]
->> 2 : sieve (3 : [y | y <- [4..], mod y 2 > 0]
->> 2 : 3 : sieve [z | z <- [ y | y <- [4..],
                                   mod y 2 > 0],
                                   mod z 3 > 0]
->> ...
->> 2 : 3 : sieve [z | z <- [5, 7, 9..],
                          mod z 3 > 0]
->> ...
->> 2 : 3 : sieve [5, 7, 11,...
->> ...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Generatormodule

...kombiniert mit Anpassmodulen ermöglichen neue, problem-orientierte Modularisierungen:

Insbesondere:

- Generiere/selektiere- (G/S-) Modularisierungen
- Generiere/filtere- (G/F-) Modularisierungen
- Generiere/transformiere- (G/T-) Modularisierungen
- ...

sowie in natürlicher Weise Kombinationen davon wie G/T/S-, G/T/F-Modularisierungen, etc.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

G/S-Modul. am Bsp. des Primzahlstroms (1)

Ein Generatormodul (G):

- ```
  gen_Primes :: [Integer]
  gen_Primes = primes
  ```

Viele Selektormodule (S):

- Nimm die ersten n Elemente einer Liste:
  ```
  take :: Int -> [a] -> [a]
  take n ls = ...
  ```
- Nimm das $(n+1)$-te Element einer Liste, $n \geq 0$:
  ```
  !! :: [a] -> Int -> a
  (!!) ls n = ...
  ```
- Nimm alle ab dem $(n+1)$-ten Element einer Liste:
  ```
  drop :: Int -> [a] -> [a]
  drop n ls = ...
  ```
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
  ```

G/S-Modul. am Bsp. des Primzahlstroms (2)

Zusammenfügen der G/S-Module zum Gesamtprogramm:

- Anwendung der G/S-Modularisierung:

  Die ersten 5 Primzahlen:

  ```
  take 5 gen_Primes ->> [2,3,5,7,11]
  ```

- Anwendung der G/S-Modularisierung:

  Die 5-te Primzahl:

  ```
  (!!) 4 gen_Primes ->> gen_Primes!!4 ->> 11
  ```

- Anwendung der G/S-Modularisierung:

  Die 6-te bis 10-te Primzahl:

  ```
  take 5 (drop 5 gen_Primes) ->> [13,17,19,23,29]
  ```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

G/F-Modul. am Bsp. des Primzahlstroms (1)

Ein Generatormodul (G):

- ```
  gen_Primes :: [Integer]
  gen_Primes = primes
  ```

Viele Filtermodule (F):

- Alle Listenelemente größer als 1000:
  ```
  filter (>1000) :: [Integer] -> [Integer]
  filter (>1000) ls = ...
  ```
- Ist Zahl mit genau drei Einsen in der Dezimaldarstellung:
  ```
  hat_drei_Einsen :: Integer -> Bool
  hat_drei_Einsen n = ...
  ```
- Ist Zahl mit Palindromdezimaldarstellung:
  ```
  ist_Palindrom :: Integer -> Bool
  ist_Palindrom n = ...
  ```
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
  ```

G/F-Modul. am Bsp. des Primzahlstroms (2)

Zusammenfügen der G/F-Module zum Gesamtprogramm:

- Anwendung der G/F-Modularisierung:

  Alle Primzahlen größer als 1000:

```
filter (>1000) gen_Primes
  ->> [1009,1013,1019,1021,1031,1033,1039,...
```

- Anwendung der G/F-Modularisierung:

  Alle Primzahlen mit genau drei Einsen in der Dezimaldarstellung:

```
[ n | n <- gen_Primes, hat_drei_Einsen n]
  ->> [1117,1151,1171,1181,1511,1811,2111,...
```

- Anwendung der G/F-Modularisierung:

  Alle Primzahlen mit Palindromdezimaldarstellung:

```
[ n | n <- gen_Primes, ist_Palindrom n]
  ->> [2,3,5,7,11,101,131,151,181,191,313,...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

G/T-Modul. am Bsp. des Primzahlstroms (1)

Ein Generator (G):

- ```
  gen_Primes :: [Integer]
  gen_Primes = primes
  ```

Viele Transformatoren (T):

- Quadrieren (für den Strom der Quadratprimzahlen):
  ```
  square :: Integer -> Integer
  square n = ...
  ```
- Dekrementieren (für den Strom der Primzahlvorgänger):
  ```
  decrement :: Integer -> Integer
  decrement n = n-1
  ```
- Summieren (für den Strom der partiellen Primzahlsummen (den Strom d. Summen d. Primzahlen von 2 bis n)):
  ```
  sum :: [Integer] -> Integer
  sum ls = ...
  ```
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
  ```

G/T-Modul. am Bsp. des Primzahlstroms (2)

Zusammenfügen der G/T-Module zum Gesamtprogramm:

- Anwendung der G/T-Modularisierung:

  Der Strom der Quadratprimzahlen:

```
[square n | n <- gen_Primes]
   ->> [4,9,25,49,121,169,289,361,529,841,...
```

- Anwendung der G/T-Modularisierung:

  Der Strom der Primzahlvorgänger:

```
[decrement n | n <- gen_Primes]
   ->> [1,2,4,6,10,12,16,18,22,28,...
```

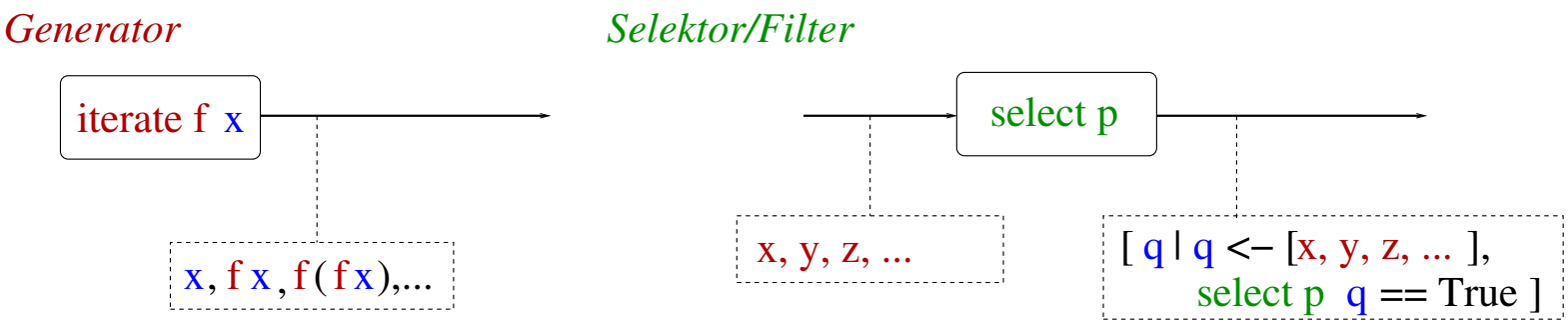
- Anwendung der G/T-Modularisierung:

  Der Strom der partiellen Primzahlsummen:

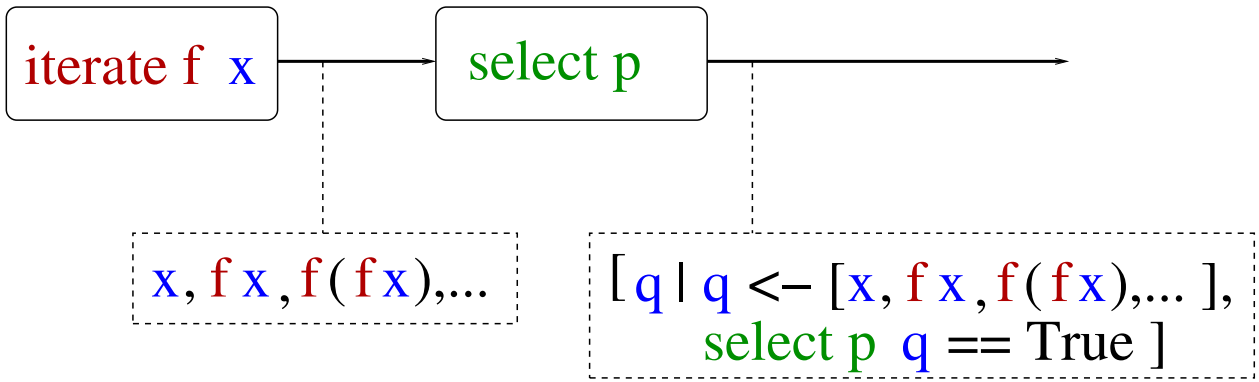
```
[sum [2..n] | n <- gen_Primes]
   ->> [2,5,14,27,65,90,152,189,275,434,...
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

G/S, G/F-Modularisierung auf einen Blick



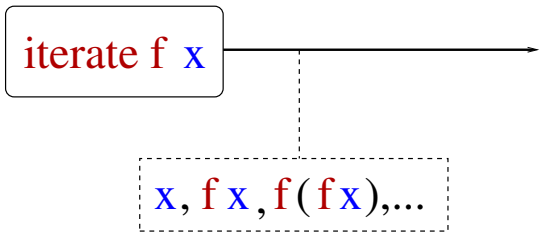
Verknüpfen von Generator und Selektor/Filter



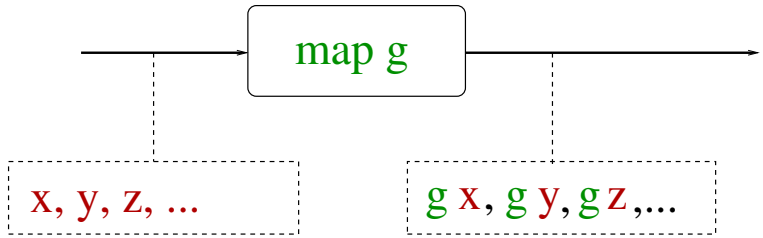
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

G/T-Modularisierung auf einen Blick

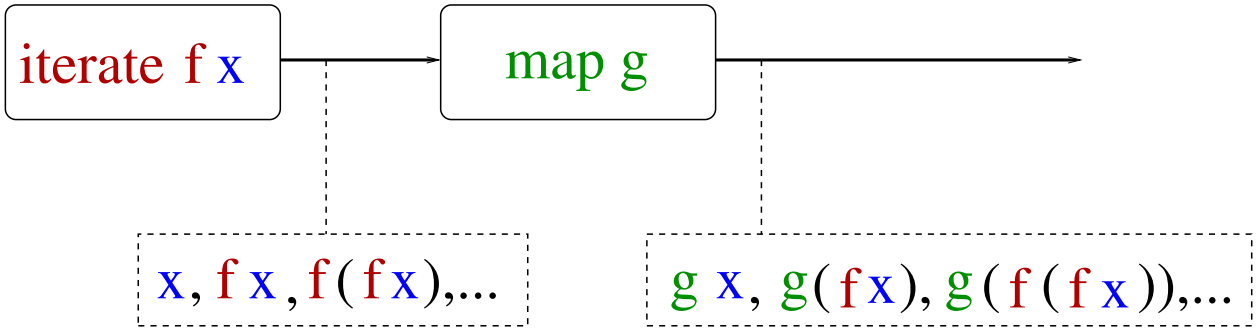
Generator



Transformator



Verknüpfen von Generator und Transformator



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Typische Anwendungen

...für G/S-, G/F-, G/T-Modularisierungen:

- Rucksackprobleme
- Potenzreihen
- Fibonacci-Zahlen
- Pascalsches Dreieck
- Goldenes Verhältnis
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Anmerkung zur Terminierung

Auf Terminierung ist bei Generiere/anpass-Modularisierungen

- stets besonders zu achten.

So terminiert der Aufruf:

```
filter (<10) gen_Primes ->> [2,3,5,7,
```

nicht; der Aufruf:

```
takeWhile (<10) gen_Primes ->> [2,3,5,7]
```

hingegen schon.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Rechnen mit Strömen: Naiv vs. intelligent

...am Beispiel des Stroms der Fibonacci-Zahlen:

```
fib :: Integer -> Integer
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)
```

Naiv – einfach, aber ineffizient:

Generator

```
fibs :: [Integer]  -- Generator der Fibonacci-Zahlen
fibs = map fib [0..]
```

Strom von Argumenten

```
fibs ->> [0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...
```

...hat exponentielles Laufzeitverhalten.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Rechnen mit Strömen: Intelligent, effizient

Intelligent – gleichfalls einfach, aber effizient:

```
G1, Strom der Fib.-Zahlen:      0 1 1 2 3 5  8  13 21...
G2, Rest d. Stroms d. Fib.-Z.: 1 1 2 3 5 8  13 21 34...
Summiere G1 u. G2, 'G1+G2':     + + + + + +  +  +  +...
Rest des Restes des Stroms      1 2 3 5 8 13 21 34 55...
der Fibonacci-Zahlen
```

Effiziente Berechnung der Fibonacci-Z. als Summe von G1 u. G2:

```
fibs :: [Integer] -- Generator der Fibonacci-Zahlen
fibs = 0 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)
       'Schopf'      'Sumpf' G1      G2
                  Rest d. Restes d. Stroms d. Fib.-Z.
       Strom der Fibonacci-Zahlen
```

...sich wie Münchhausen 'am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen'!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Generatoranwendungen und Hilfsfunktionen

Aufruf von Generator fibs:

```
fibs ->> [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...
```

Aufrufe von Generator/Filter-, Selektorkombinationen mit fibs:

```
filter even fibs ->> [0,2,8,34,144,...
take 10 fibs     ->> [0,1,1,2,3,5,8,13,21,34]
fibs!!5          ->> 3
```

Verwendete Hilfsfunktionen:

```
take :: Int -> [a] -> [a]
take 0 _              = []
take _ []             = []
take n (x:xs) | n>0 = x : take (n-1) xs
take _ _ = error "PreludeList.take: negative argument"

zipWith :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
zipWith f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith f xs ys
zipWith f _      _      = []
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Zusammenfassung

Späte Auswertung (engl. lazy evaluation) erlaubt

- die Kontrolle der Auswertungsreihenfolge von Daten

zu trennen und ermöglicht dadurch die elegante Behandlung

- unendlicher Datenwerte (genauer: nicht a priori in der Größe beschränkter Datenwerte), insbesondere
  - unendlicher Listen, sog. Ströme (engl. streams, lazy lists)

Das führt zu problemorientierten, von der Programmlogik her begründeten neuen Modularisierungsmöglichkeiten, von Generiere/anpass-Modularisierungen:

- Generiere/selektiere-Modularisierung
- Generiere/filtere-Modularisierung
- Generiere/transformiere-Modularisierung
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe 18.2.1

Nicht nur Generatoren lassen sich wie in den Beispielen demonstriert mit verschiedenen

- Selektoren, Filtern, Transformatoren

verknüpfen. Umgekehrt lassen sich auch Selektoren, Filter und Transformatoren mit verschiedenen

- Generatoren

verknüpfen.

Überlege und implementiere dazu einige Beispiele, die das demonstrieren.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 18.5

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 18 (1)

Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Prentice Hall, 2. Auflage, 1998. (Kapitel 9, Infinite Lists)

Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 9, Infinite lists)

Richard Bird, Phil Wadler. *An Introduction to Functional Programming*. Prentice Hall, 1988. (Kapitel 6.4, Divide and conquer; Kapitel 7, Infinite Lists)

Antonie J. T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 7.2, Infinite Objects; Kapitel 7.3, Streams)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 18 (2)

Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 2.2, Unendliche Datenstrukturen)

Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 14, Programming with Streams)

Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 15.6, Modular programming)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 18 (3)


Lambert Meertens. *Functional Pearl: Calculating the Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 14(6):759-763, 2004.


Matti Nykänen. *A Note on the Genuine Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 21(6):563-572, 2011.


Melissa E. O'Neill. *The Genuine Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 19(1):95-106, 2009.


Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 20.2, Sortieren von Listen)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 18 (4)

Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung*. Springer-V., 2006. (Kapitel 2, Faulheit währt unendlich)

Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 8.1, Divide-and-conquer)

Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 12, Developing higher-order programs; Kapitel 17, Lazy programming)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Teil VII

Abschluss

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 19

Rückschau, Ausschau

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Suavis est laborum praeteritorum memoria.
Süss ist die Erinnerung an vergangene Mühen.

Cicero (106 - 43 v.Chr.)
röm. Staatsmann und Schriftsteller

Kapitel 19.1

Rückschau, Rückblick

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Funktionale, imperative Programmierung (1)

Eigenschaften und Charakteristika im Vergleich.

- Funktional
  - Programm ist Ein-/Ausgaberelation.
  - Programme sind zustandsfrei und ‘zeitlos’.
  - Programmformulierung auf abstraktem, mathematisch geprägten Niveau, ohne eine Maschine im Blick.
- Imperativ
  - Programm ist Arbeitsanweisung für eine Maschine.
  - Programme sind zustands- und ‘zeitbehaftet’.
  - Programmformulierung mit Blick auf eine Maschine, ein Maschinenmodell (von Neumann).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Funktionale, imperative Programmierung (2)

- Funktional
  - Die Auswertungsreihenfolge von Ausdrücken liegt nicht fest (bis auf Datenabhängigkeiten).
  - Namen werden durch Wertvereinbarungen genau einmal für immer an einen Wert gebunden.
  - Schachtelung (rekursiver) Funktionsaufrufe erlaubt neue Werte mit neuen Namen zu verbinden.
- Imperativ
  - Die Ausführungsreihenfolge von Anweisungen liegt fest; Freiheiten bestehen bei der Auswertungsreihenfolge von Ausdrücken (wie funktional).
  - Namen werden in der zeitlichen Abfolge durch Zuweisungen temporär mit Werten belegt.
  - Namen können durch wiederholte Zuweisungen beliebig oft mit neuen Werten belegt werden (in rekursiven Aufrufen, repetitiven Anweisungen wie *while*, *repeat*, *for*).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Wenige Prinzipien, viel Kraft

Die Fülle an Möglichkeiten
[in funktionalen Programmiersprachen] erwächst
aus einer kleinen Zahl von elementaren
Konstruktionsprinzipien.

Peter Pepper, *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2003.

Im Falle von:

- Funktionen: (Fkt.-) Applikation, Fallunterscheidung, Rekursion, Polymorphie.
- Datenstrukturen: Aufzählung, Produkt-, Summenbildung, Rekursion, Polymorphie.

Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die Mächtigkeit und Eleganz

...funktionaler Programmierung erwächst aus diesen wenigen Prinzipien zusammen mit der durchgehenden Umsetzung der Konzepte von:

- Funktionen als erstrangige Sprachelemente (engl. first class citizens)
  - Funktionen höherer Ordnung
- Polymorphie als echte und unechte Polymorphie auf
  - Funktionen
  - Datentypen

...und ihrem nahtlosen Zusammenspiel, auf den Punkt gebracht im Slogan:

Functional Programming is Fun!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Im Rückblick auf die Vorbesprechung

...betrachte dazu noch einmal die Versprechungen über die Versprechen funktionaler Programmierung:

- Konrad Hinsen. The Promises of Functional Programming. Computing in Science and Engineering 11(4): 86-90, 2009.

  ...adopting a functional programming style could make your programs more robust, more compact, and more easily parallelizable.

- Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal. The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II. Computing in Science and Engineering 11(5): 68-75, 2009.

  ...this second installment picks up where Konrad Hinsen's article "The Promises of Functional Programming" [...] left off, covering static type inference and lazy evaluation in functional programming languages.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Erfolgreiche Einsatzfelder fkt. Programmierung

- Theorembeweiser HOL und Isabelle in ML.
- Modellprüfer (z.B. Edinburgh Concurrency Workbench).
- Mobility Server von Ericson in Erlang.
- Konsistenzprüfung mit Pdiff (Lucent 5ESS) in ML.
- Übersetzer in übersetzter Sprache geschrieben.
- Datenbankabfragesprachen (z.B. CPL/Kleisli, in ML; Natural Expert, Haskell-ähnliche Abfragesprache).
- Protokollspezifikation (effiziente Fallstudien z.B. in ML).
- Expertensysteme (oft Lisp-basiert).
- ...
- `http://homepages.inf.ed.ac.uk/wadler/realworld`
- `www.haskell.org/haskellwiki/Haskell_in_industry`
- `en.wikipedia.org/wiki/Functional_programming`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Zur (rethorischen) Eingangsfrage

Can programming be liberated from the von Neumann style?

John W. Backus (1924-2007)
Turing Award Preisträger 1977

Ja (im Detail kann diskutiert werden, siehe Ein-/Ausgabe).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ich denke nie an die Zukunft.
Sie kommt früh genug.

Albert Einstein (1879-1955)
dt.-schweiz.-amerik. Physiker

Wer nicht an die Zukunft denkt,
wird bald Sorgen haben.

Konfuzius (551 - 479 v.Chr.)
chin. Ethiker und Staatslehrer

Kapitel 19.2

Ausschau, Ausblick

Die Zukunft hat schon begonnen.

Robert Jungk (1913-1994)
österr. Wissenschaftspublizist und Zukunftsforscher

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Alles, was man wissen muss,
um selber weiter zu lernen,
...ist jetzt gelernt.

Dietrich Schwanitz (1940-2004)
dt. Anglistikprof. und Schriftsteller
(verkürzt und ergänzt in seinem Sinn)

Fort- und weiterführendes zu funktionaler Programmierung in TUW-Lehrveranstaltungen, insbesondere:

- LVA 185.A05 Fortgeschrittene funktionale Programmierung. VU 2.0, ECTS 3.0.
- LVA 183.653 Methodisches, industrielles Software-Engineering mit funktionalen Sprachen am Fallbeispiel von Haskell. VU 2.0, ECTS 3.0, ao.Prof. Thomas Grechenig.
- LVA 127.008 Haskell-Praxis: Programmieren mit der funktionalen Programmiersprache Haskell.
  VU 2.0, ECTS 3.0, Prof. em. Andreas Frank, Institut für Geoinformation und Kartographie.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Man muss so lange lernen,
wie man etwas nicht weiß;
und wenn wir dem Sprichwort glauben,
ein Leben lang.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller
Epistulae ad Lucilium 76,1-4

Lebenslanges Lernen?

Nihil novi sub sole.
Es gibt nicht Neues unter der Sonne.

Vulgata, lat. Neuübersetzung der Bibel aus dem 4. Jhdt. von
Hieronymus (um 347 - 419 oder 420)
Liber Ecclesiastes 1,10

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

LVA 185.A05 Fortg. fkt. Programmierung

Vorlesungsinhalte:

- Programmieren mit
  - Strömen, Funktoren, Monaden, Kombinatorbibliotheken.
  - Funktionalen Feldern, abstrakten Datentypen.
- Anwendungen
  - Funktionale Perlen, Algorithmenmuster, funktionale reaktive Programmierung, logische Programmierung funktional, Strukturanalyse (engl. Parsing).
- Qualitätssicherung
  - Programmverifikation, Programmvalidation, gleichungsbasiertes Schließen und Beweisen, automatisches Testen.
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

LVA 127.008 Haskell-Praxis: Progr. mit Haskell

Vorlesungsinhalte:

- Analyse und Verbesserung von gegebenem Code.
- Weiterentwicklung der Open-Source-Entwicklungsumgebung LEKSAH für Haskell, insbesondere der graphischen Benutzerschnittstelle (GUI).
- Gestaltung graphischer Benutzerschnittstellen (GUIs) mit Glade und Gtk+.
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Always look on the bright side of life

The clarity and economy of expression that the language of functional programming permits is often very impressive, and, but for human inertia, functional programming can be expected to have a brilliant future.(*)

Edsger W. Dijkstra (1930-2002)
Turing Award Preisträger 1972

(*) Zitat aus: Introducing a course on calculi. Ankündigung einer Lehrveranstaltung an der University of Texas at Austin, 1995.

Der größte Feind des Fortschritts
ist nicht der Irrtum, sondern die Trägheit.

Henry Thomas Buckle (1821-1862)
engl. Historiker, aus "Geschichte der Zivilisation" (unvollendet)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe 19.2.1 – Eiskunstlauf (1)

Eiskunstlauf heißt vor allem Disziplin,
Willensstärke und Ausdauer.
Einen neuen Sprung richtig zu beherrschen,
kann schon mal ein Jahr dauern.
Oder auch etwas länger.

Sophia Schaller (* 2000)
österr. Eiskunstläuferin

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 19.2.1 – Philosophie (2)

Die Kenntnis der Philosophie haben
die Götter niemandem mitgegeben,
doch die Fähigkeit allen.

Hätten die Götter auch die Philosophie
zu einem Allgemeingut gemacht und würden wir
bereits einsichtig geboren, hätte die Weisheit
ihren größten Vorzug verloren, nämlich
nicht zu den Zufallsgaben zu gehören.

Nun freilich ist gerade dies an ihr so kostbar und
herrlich, dass sie einem nicht einfach zufällt, sondern
dass jeder sie nur sich selbst verdankt, dass sie nicht
von einem anderen erbeten werden kann.

Warum solltest du zur Philosophie aufblicken, wenn
sie eine Sache der Gefälligkeit wäre?

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller
Epistulae ad Lucilium 90,1-3

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 19.2.1 – Bergsteigen (3)

Man kann sich keinen Gipfel erkaufen.

Peter Habeler (* 1942)
österr. Extrembergsteiger

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 19.2.1 – Informatik (4)

Ersetze in den Zitaten von Sophia Schaller, Seneca und Peter Habeler

1. Eiskunstlauf, Philosophie/Weisheit und Gipfel durch Informatik

und

2. neuen Sprung durch neues Paradigma und funktionale Programmierung.

Ergeben sich erneut sinnvolle, bedenkenswerte Aussagen? Sind sie nachvollziehbar?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 19.2.2 – Schätzaufgabe (1)

Ein ECTS-Punkt entspricht einem erwarteten ernsthaften (ungleich gefühltem) Arbeitsaufwand im Ausmaß von

- 25 Stunden in Italien, Österreich, Spanien,...
- 26 Stunden in Estland,...
- 27 Stunden in Finnland,...
- 28 Stunden in Dänemark, Portugal,...
- 30 Stunden in Deutschland, Rumänien, Schweiz,...
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 19.2.2 – Schätzaufgabe (2)

1. Schätze, mit wie vielen ECTS-Punkten der Aufwand des
   1.1 'zu richtiger Beherrschung' führenden Lernens und Einübens eines neuen Sprungs im Eiskunstlauf
   1.2 'zu richtiger Beherrschung' führenden Lernens und Einübens des funktionalen Programmierstils

   in Österreich, der Schweiz angemessen bewertet wäre?
2. Wie liegen diese Schätzwerte im Vergleich zum Referenzwert von 3 ECTS-Punkten für diese Lehrveranstaltung entsprechend 75 Aufwandsstunden für in Österreich Studierende bzw. 90 Aufwandsstunden für in der Schweiz Studierende? Höher? Niedriger?
3. Welche Schlussfolgerungen können aus diesem Vergleich gezogen, welche Maßnahmen ggf. abgeleitet werden?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe 19.2.3 – Feldstudie

Beobachten Sie Ihre Umgebung. Gibt es Parallelen zum Studium?

Um erfolgreich zu sein,
brauchst du das ganze Paket:
Talent, mehr Fleiß als die anderen,
Risikobereitschaft, keine Angst
vor der Niederlage.

Franz Klammer (* 1953)
österr. Skirennläufer, Olympiasieger 1976

Italien ist wie ein Athlet mit
Potenzial, der keine Veranlassung sieht,
an sich zu arbeiten. Ich hasse die
italienische Mentalität. Wir wollen
mit dem geringstmöglichen Aufwand
das Maximum erreichen.

Sofia Goggia (* 1992)
ital. Skirennläuferin, Olympiasiegerin 2018

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

In manchen Phasen muss man die Zähne zusammenbeißen: Stürze tun weh [ergänzt: Niederlagen auch].

Sophia Schaller (* 2000)
österr. Eiskunstläuferin

...gleich ob Eiskunstlauf, Philosophie, Informatik,...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Ewige Wahrheiten

Scientia prodest.
Wissen nützt.

Cicero (106 - 43 v.Chr.)
röm. Staatsmann und Schriftsteller

Alle Menschen streben
von Natur aus nach Wissen.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Die Summe unserer Erkenntnis
besteht aus dem, was wir gelernt,
und aus dem, was wir vergessen haben.

Marie von Ebner-Eschenbach (1830-1916)
österr. Schriftstellerin

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Glückes Geschick

Semper aliquid haeret.
Etwas bleibt immer hängen.

Plutarch (um 46 - nach 119 n.Chr.)
griech. Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Kapitel 19.3

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 19 (1)

Simon Peyton Jones. *16 Years of Haskell: A Retrospective on the occasion of its 15th Anniversary – Wearing the Hair Shirt: A Retrospective on Haskell*. Invited Keynote Presentation at the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'03), 2003.
`research.microsoft.com/users/simonpj/papers/haskell-retrospective/`

Paul Hudak, John Hughes, Simon Peyton Jones, Philip Wadler. *A History of Haskell: Being Lazy with Class*. In Proceedings of the 3rd ACM SIGPLAN 2007 Conference on History of Programming Languages (HOPL III), 12-1 - 12-55, 2007. (ACM Digital Library `www.acm.org/dl`)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 19 (2)


Andrew Appel. *A Critique of Standard ML*. Journal of Functional Programming 3(4):391-430, 1993.


Anthony J. Field, Peter G. Robinson. *Functional Programming*. Addison-Wesley, 1988. (Kapitel 5, Alternative functional styles)


John Hughes. *Why Functional Programming Matters*. The Computer Journal 32(2):98-107, 1989.


Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 1.3, Features of Haskell; Kapitel 1.4, Historical background)


Wolfram-Manfred Lippe. *Funktionale und Applikative Programmierung*. eXamen.press, 2009. (Kapitel 3, Programmiersprachen)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 19 (3)


Greg Michaelson. *An Introduction to Functional Programming through Lambda Calculus*. Dover Publications, 2. Auflage, 2011. (Kapitel 1, Introduction; Kapitel 9, Functional programming in Standard ML; Kapitel 10, Functional programming and LISP)


Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 23, Compiler and Interpreter für Opal, ML, Haskell, Gofer)


Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 1.2, Functional Languages)


Colin Runciman, David Wakeling. *Applications of Functional Programming*. UCL Press, 1995.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 19 (4)


Dietrich Schwanitz. *Bildung: Alles, was man wissen muss*. Eichborn Verlag, 1999.


Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Anhang A, Functional, imperative and OO programming)


Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Anhang A, Functional, imperative and OO programming)


Philip Wadler. *The Essence of Functional Programming*. In Conference Record of the 19th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 1-14, 1992.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Literaturverzeichnis

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

I cannot live without books.

Thomas Jefferson (1743-1826)
amerik. Staatsmann und Philosoph
3. Präsident der USA
Hauptverfasser der amerik. Unabhängigkeitserklärung

Literaturhinweise und Leseempfehlungen

...zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium.

- I Lehrbücher
- II Tutorien, Manuale
- III Grundlegende, wegweisende Artikel
- IV Weitere Arbeiten
- V Zum Haskell-Sprachstandard
- VI Die Haskell-Geschichte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

I Lehrbücher (1)


Christopher Allen, Julie Moronuki. *Haskell Programming from First Principles*. ebook. `http://haskellbook.com`.


Henri E. Baal, Dick Grune. *Programming Language Essentials*. Addison-Wesley, 1994.


Hendrik P. Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Revised Edn., North-Holland, 1984.


Henrik P. Barendregt, Wil Dekkers, Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Cambridge University Press, 2012.


Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015.


Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Prentice Hall, 2. Auflage, 1998.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

I Lehrbücher (2)


Richard Bird, Philip Wadler. *An Introduction to Functional Programming*. Prentice Hall, 1988.


Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011.


Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004.


Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald Rivest, Clifford Stein. *Algorithmen – Eine Einführung*. Oldenbourg Verlag, 2004.


Antonie J.T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

I Lehrbücher (3)


Ernst-Erich Doberkat. *Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte*. Oldenbourg Verlag, 2012.


Kees Doets, Jan van Eijck. *The Haskell Road to Logic, Maths and Programming*. Texts in Computing, Vol. 4, King's College, UK, 2004.


Gilles Dowek, Jean-Jacques Lévy. *Introduction to the Theory of Programming Languages*. Springer-V., 2011.


Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999.


Anthony J. Field, Peter G. Harrison. *Functional Programming*. Addison-Wesley, 1988.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

I Lehrbücher (4)


Matthias Felleisen, Rober B. Findler, Matthew Flatt, Shriram Krishnamurthi. *How to Design Programs: An Introduction to Programming and Computing*. MIT Press, 2001.


Hugh Glaser, Chris Hankin, David Till. *Principles of Functional Programming*. Prentice Hall, 1984.


Chris Hankin. *An Introduction to Lambda Calculi for Computer Scientists*. King's College London Publications, 2004.


David Harel. *Algorithmics: The Spirit of Computing*. Addison-Wesley, 2. Auflage, 1992.


Peter Henderson. *Functional Programming: Application and Implementation*. Prentice Hall, 1980.


Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

I Lehrbücher (5)


Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016.


Bruce MacLennan. *Functional Programming: Practice and Theory*. Addison-Wesley, 1990.


Wolfram-Manfred Lippe. *Funktionale und Applikative Programmierung*. eXamen.press, 2009.


Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. `learnyouahaskell.com`


Bruce J. MacLennan. *Functional Programming: Practice and Theory*. Addison-Wesley, 1990.


Greg Michaelson. *An Introduction to Functional Programming through Lambda Calculus*. Dover Publications, 2. Auflage, 2011.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

I Lehrbücher (6)


Manfred Nagl. *Softwaretechnik: Methodisches Programmieren im Großen*. Springer-V., 1990.


Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. `book.realworldhaskell.org`


Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003.


Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung: Sprachdesign und Programmiertechnik*. Springer-V., 2006.


Tomas Petricek, Jon Skeet. *Real World Functional Programming: With Examples in F# and C#*. Manning Publications Co., 2009.


Benjamin C. Pierce. *Types and Programming Languages*. MIT Press, 2002.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

I Lehrbücher (7)


Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999.


Chris Reade. *Elements of Functional Programming*. Addison-Wesley, 1989.


Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.). *Informatik-Handbuch*. Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 2006.


Colin Runciman, David Wakeling. *Applications of Functional Programming*. UCL Press, 1995.


Steven S. Skiena. *The Algorithm Design Manual*. Springer-V., 1998.


Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik. Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

I Lehrbücher (8)


Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018.


Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999.


Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011.


Allen B. Tucker (Editor-in-Chief). *Computer Science. Handbook*. Chapman & Hall/CRC, 2004.


Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

I Lehrbücher (9)


Avi Wigderson. *Mathematics and Computation: A Theory Revolutionizing Technology and Science*. Princeton University Press, 2019.


Reinhard Wilhelm, Helmut Seidl. *Compiler Design – Virtual Machines*. Springer-V., 2010.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

II Tutorien, Manuale (1)

- H. Conrad Cunningham. *Notes on Functional Programming with Haskell*. Course Notes, University of Mississippi, 2007. citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.114.2822&rep=rep1&type=pdf
- Hal Daumé III. *Yet Another Haskell Tutorial*. wikibooks.org-Ausgabe, 2007. https://en.wikibooks.org/wiki/Yet_Another_Haskell_Tutorial
- Chris Done. *Try Haskell*. Online Hands-on Haskell Tutorial. tryhaskell.org.
- Paul Hudak, Joseph Fasel, John Peterson. *A Gentle Introduction to Haskell*. Technischer Bericht, Yale University, 1996. https://www.haskell/org/tutorial

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

II Tutorien, Manuale (2)

GHCi-Benutzerhandbuch. *Glasgow Haskell Compiler User's Guide.* `http://www.haskell.org/ghc/docs/latest/html/users_guide/ghci.html`

Hugs-Benutzerhandbuch. *The Hugs98 User Manual.* `https://www.haskell.org/hugs/pages/hugsman/index.html`

Haskells Standard-Präludium. `https://www.haskell.org/onlinereport/standard-prelude.html`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

III Grundlegende, wegweisende Artikel (1)


John W. Backus. *Can Programming be Liberated from the von Neumann Style? A Functional Style and its Algebra of Programs*. Communications of the ACM 21(8):613-641, 1978.


Alonzo Church. *A Set of Postulates for the Foundation of Logic*. Annals of Mathematics 2(33):346-366, 1932.


Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Annals of Mathematical Studies, Vol. 6, Princeton University Press, 1941.


Robert W. Floyd. *The Paradigms of Programming*. Turing Award Lecture. Communications of the ACM 22(8):455-460, 1979.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

III Grundlegende, wegweisende Artikel (2)


John Hughes. *Why Functional Programming Matters*. The Computer Journal 32(2):98-107, 1989.


Paul Hudak. *Conception, Evolution and Applications of Functional Programming Languages*. Communications of the ACM 21(3):359-411, 1989.


Christopher Strachey. *Fundamental Concepts in Programming Languages*. Higher-Order and Symbolic Computation 13:11-49, 2000, Kluwer Academic Publishers (revised version of a report of the NATO Summer School in Programming, Copenhagen, Denmark, 1967.)


Philip Wadler. *The Essence of Functional Programming*. In Conference Record of the 19th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 1-14, 1992.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (1)


Wilhelm Ackermann. *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*. Mathematische Annalen 99:118-133, 1928.


Andrew Appel. *A Critique of Standard ML*. Journal of Functional Programming 3(4):391-430, 1993.


Zena M. Ariola, Matthias Felleisen, John Maraist, Martin Odersky, Philip Wadler. *The Call-by-Need Lambda Calculus*. In Conference Record of the 22nd Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'95), 233-246, 1995.


Hendrik Pieter Barendregt, Erik Barendsen. *Introduction to the Lambda Calculus*. Revised Edn., Technical Report, University of Nijmegen, March 2000. `ftp://ftp.cs.kun.nl/pub/CompMath.Found/lambda.pdf`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (2)


Luca Cardelli. *Basic Polymorphic Type Checking*. Science of Computer Programming 8:147-172, 1987.


Luca Cardelli, Peter Wegner. *On Understanding Types, Data Abstraction, and Polymorphism*. ACM Computing Surveys 17(4):471-522, 1985.


B. Jack Copeland, Oron Shagrir. *The Church-Turing Thesis: Logical Limit or Breachable Barrier?* Communications of the ACM 62(1):66-74, 2019.


Iavor S. Dachki, Thomas Hallgren, Mark P. Jones, Rebekah Leslie, Andrew Tolmach. *Writing System Software in a Functional Language: An Experience Report*. In Proceedings of the 4th International Workshop on Programming Languages and Operating Systems (PLOS 2007), Article No. 1, 5 pages, 2007.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (3)


Luís Damas, Robin Milner. *Principal Type Schemes for Functional Programming Languages*. In Conference Record of the 9th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'82), 207-218, 1982.


Noah M. Daniels, Andrew Gallant, Norman Ramsey. *Experience Report: Haskell in Computational Biology*. In Proceedings of the 17th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2012), 227-234, 2012.


Frank DeRemer, Hans H. Kron. *Programming-in-the-Large vs. Programming-in-the-Small*. IEEE Transactions on Software Engineering 2(2):80-86, 1976.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (4)


Atze Dijkstra, Jeroen Fokker, S. Doaitse Swierstra. *The Architecture of the Utrecht Haskell Compiler*. In Proceedings of the 2nd ACM SIGPLAN Symposium on Haskell (Haskell 2009), 93-104, 2009.


Atze Dijkstra, Jeroen Fokker, S. Doaitse Swierstra. *UHC Utrecht Haskell Compiler*, 2009. www.cs.uu.nl/wiki/UHC


Neal Ford. *Functional Thinking: Why Functional Programming is on the Rise*. IBM developerWorks, 11 pages, 2013. `www.ibm.com/developerworks/java/library/j-ft20/j-ft20-pdf.pdf`


Robert M. French. *Moving Beyond the Turing Test*. Communications of the ACM 55(12):74-77, 2012.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (5)

- Robin Gandy. *The Confluence of Ideas in 1936*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 51-102, 1995.
- Hugh Glaser, Pieter H. Hartel, Paul W. Garrat. *Programming by Numbers: A Programming Method for Novices*. The Computer Journal 43(4):252-265, 2000.
- Benjamin Goldberg. *Functional Programming Languages*. ACM Computing Surveys 28(1):249-251, 1996.
- Andrew J. Gordon. *Functional Programming and Input/Output*. British Computer Society Distinguished Dissertations in Computer Science. Cambridge University Press, 1994.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (6)


John V. Guttag. *Abstract Data Types and the Development of Data Structures*. Communications of the ACM 20(6):396-404, 1977.


John V. Guttag, James J. Horning. *The Algebra Specification of Abstract Data Types*. Acta Informatica 10(1):27-52, 1978.


John V. Guttag, Ellis Horowitz, David R. Musser. *Abstract Data Types and Software Validation*. Communications of the ACM 21(12):1048-1064, 1978.


Bastiaan Heeren, Daan Leijen, Arjan van IJzendoorn. *Helium, for Learning Haskell*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN 2003 Haskell Workshop (Haskell 2003), 62-71, 2003.


Konrad Hinsen. *The Promises of Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 11(4):86-90, 2009.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (7)


C.A.R. Hoare. *Algorithm 64: Quicksort*. Communications of the ACM 4(7):321, 1961.


C.A.R. Hoare. *Quicksort*. The Computer Journal 5(1):10-15, 1962.


Ian Horswill. *What is Computation?* Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):8-14, 2012.


Paul Hudak, Joseph H. Fasel. *A Gentle Introduction to Haskell*. ACM SIGPLAN Notices 27(5):1-52, 1992.


Arjan van IJzendoorn, Daan Leijen, Bastiaan Heeren. *The Helium Compiler*. `www.cs.uu.nl/helium`.


Neil D. Jones. *Constant Time Factors do Matter*. In Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'93), 602-611, 1993.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (8)


Jerzy Karczmarczuk. *Scientific Computation and Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 1(3):64-72, 1999.


Stephen C. Kleene. *General Recursive Functions of Natural Numbers*. Mathematische Annalen 112:727-742, 1936.


Stephen C. Kleene. *λ-Definability and Recursiveness*. Duke Mathematical Journal 2:340-352, 1936.


Stephen C. Kleene. *Origins of Recursive Function Theory*. Annals of the History of Computing 3:52-67, 1981.


Donald E. Knuth. *Big Omicron and Big Omega and Big Theta*. ACM SIGACT News 8(2):18-24, 1976.
(s.a. Nachdruck unter gleichem Titel in: Donald E. Knuth. *Selected Papers on Analysis of Algorithms*. CSLI Lecture Notes Number 102, CSLI Publications, 35-41, 2012.)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

IV Weitere Arbeiten (9)

- Donald E. Knuth. *Literate Programming*. The Computer Journal 27(2):97-111, 1984.
- Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal. *The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II*. Computing in Science and Engineering 11(5):68-75, 2009.
- John Maraist, Martin Odersky, David N. Turner, Philip Wadler. *Call-by-name, Call-by-value, call-by-need, and the Linear Lambda Calculus*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science 1:370-392, 1995.
- John Maraist, Martin Odersky, Philip Wadler. *The Call-by-Need Lambda Calculus*. Journal of Functional Programming 8(3):275-317, 1998.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (10)


John Maraist, Martin Odersky, David N. Turner, Philip Wadler. *Call-by-name, Call-by-value, call-by-need, and the Linear Lambda Calculus*. Theoretical Computer Science 228(1-2):175-210, 1999.


Alberto Martinelli, Umberto Montanari. *An Efficient Uniß fication Algorithm*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 4(2):258-282, 1982.


Mihai Maruseac. *Haskell: A Language for Modern Times*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 24(1):64-66, 2017.


John McCarthy. *A Basis for a Mathematical Theory of Computation*. In *Computer Programming and Formal Systems*, Paul Braffort, David Hirschberg (Hrsg.), North-Holland, 33-70, 1963.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (11)


Lambert Meertens. *Functional Pearl: Calculating the Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 14(6):759-763, 2004.


Donald Michie. *'Memo' Functions and Machine Learning*. Nature 218:19-22, 1968.


Robin Milner. *A Theory of Type Polymorphism in Programming*. Journal of Computer and System Sciences 17:248-375, 1978.


Yaron Minsky. *OCaml for the Masses*. Communications of the ACM 54(11):53-58, 2011.


John C. Mitchell. *Type Systems for Programming Languages*. In *Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. B: Formal Methods and Semantics*, Jan van Leeuwen (Hrsg.). Elsevier Science Publishers, 367-458, 1990.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (12)


William Newman. *Alan Turing Remembered – A Unique Firsthand Account of Formative Experiences with Alan Turing*. Communications of the ACM 55(12):39-41, 2012.


Matti Nykänen. *A Note on the Genuine Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 21(6):563-572, 2011.


Melissa E. O'Neill. *The Genuine Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 19(1):95-106, 2009.


David L. Parnas. *On the Criteria to be used on Decomposing Systems into Modules*. Communications of the ACM 15(12):1053-1058, 1972.


David L. Parnas, Paul C. Clements, David M. Weiss. *The Modular Structure of Complex Systems*. IEEE Transactions on Software Engineering 11(3):259-266, 1985.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (13)


Rózsa Péter. *Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktionen*. Mathematische Annalen 110:612-632, 1934.


Rózsa Péter. *Konstruktion nichtrekursiver Funktionen*. Mathematische Annalen 111:42-60, 1935.


Gordon Plotkin. *Call-by-name, Call-by-value, and the λ-Calculus*. Theoretical Computer Science 1:125-159, 1975.


Norman Ramsey. *On Teaching How to Design Programs*. In Proceedings of the 19th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2014), 153-166, 2014.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

IV Weitere Arbeiten (14)


Omer Reingold. *Through the Lens of a Passionate Theoretician*. Communications of the ACM 63(3):25-27, 2020.


J. A. Robinson. *A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle*. Journal of the ACM 12(1):23-42, 1965.


Chris Sadler, Susan Eisenbach. *Why Functional Programming?* In *Functional Programming: Languages, Tools and Architectures*, Susan Eisenbach (Hrsg.), Ellis Horwood, 9-20, 1987.


Neil Savage. *Using Functions for Easier Programming*. Communications of the ACM 61(5):29-30, 2018.


Uwe Schöning, Wolfgang Thomas. *Turings Arbeiten über Berechenbarkeit – eine Einführung und Lesehilfe*. Informatik Spektrum 35(4):253-260, 2012.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Weitere Arbeiten (15)


Curt J. Simpson. *Experience Report: Haskell in the "Real World": Writing a Commercial Application in a Lazy Functional Language*. In Proceedings of the 14th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2009), 185-190, 2009.


Michael Snoyman. *Developing Web Applications with Haskell and Yesod*. O'Reilly, 2012.


Simon Thompson. *Where Do I Begin? A Problem Solving Approach in Teaching Functional Programming*. In Proceedings of the 9th International Symposium on Programming Languages: Implementations, Logics, and Programs (PLILP'97), Springer-Verlag, LNCS 1292, 323-334, 1997.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Weitere Arbeiten (16)

- Boris A. Trakhtenbrot *Comparing the Church and Turing Approaches: Two Prophetical Messages*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 557-582, 1995.
- Moshe Vardi. *Self-Reference and Section 230*. Communications of the ACM 61(11):7, 2018.
- Alvaro Videla. *Metaphors We Compute By*. Communications of the ACM 60(10):42-45, 2017.
- Philip Wadler. *An angry half-dozen*. ACM SIGPLAN Notices 33(2):25-30, 1998.
- Philip Wadler. *Why no one uses Functional Languages*. ACM SIGPLAN Notices 33(8):23-27, 1998.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Weitere Arbeiten (17)


Philip Wadler. *Comprehending Monads*. Mathematical Structures in Computer Science 2:461-493, 1992.


Philip Wadler, Robert B. Findler. *Well-typed Programs can't be Blamed*. In Proceedings of the 18th European Symposium on Programming (ESOP 2009), Springer-V. LNCS 5502, 1–16. 2009.
doi: 10.1007/978-3-642-00590-9_1.


Mitchell Wand. *A Simple Algorithm and Proof for Type Inference*. Fundamenta Informaticae 10, 115–122, 1987.


Interview mit John Hughes über *'Funktionale Programmierung und Haskell'*.
https://www.youtube.com/watch?v=LnX3B9oaKzw

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Weitere Arbeiten (18)

Welches Paradigma, welche Sprache sollte ich nutzen?


Peter J. Landin. *The next 700 Programming Languages*. Communications of the ACM 9(3):157-166, 1966.


Jeffrey S. Foster. *Shedding New Light on an Old Language Debate*. Communications of the ACM 60(10):90, 2017.


Baishakhi Ray, Daryl Posnett, Premkunar Devanbu, Vladimir Filkov. *A Large-Scale Study of Programming Languages and Code Quality in GitHub*. Communications of the ACM 60(10):91-100, 2017.


Rachel Harrison, L. G. Smaraweera, Mark R. Dobie, Paul H. Lewis. *Comparing Programming Paradigms: An Evaluation of Functional and Object-Oriented Programs*. Software Engineering Journal 11(4):247-254, 1996.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

V Zum Haskell-Sprachstandard


Paul Hudak, Philip Wadler (Eds.). *Report on the Functional Programming Language Haskell*. Technical Report YALEU/DCS/RR656, Yale University, 1988.


Paul Hudak, Simon Peyton Jones, Philip Wadler (Hrsg.). *Report on the Programming Language Haskell: Version 1.1*. Technical Report, Yale University and Glasgow University, August 1991.


Paul Hudak, Simon Peyton Jones, Philip Wadler (Hrsg.) *Report on the Programming Language Haskell: A Non-strict Purely Funcional Language (Version 1.2)*. ACM SIGPLAN Notices, 27(5):1-164, 1992.


Simon Marlow (Hrsg.). *Haskell 2010 Language Report*, 2010. `www.haskell.org/definition/haskell2010.pdf`


Simon Peyton Jones (Hrsg.). *Haskell 98: Language and Libraries. The Revised Report*. Cambridge University Press, 2003. `www.haskell.org/definitions`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

VI Die Haskell-Geschichte (1)

Simon Peyton Jones. *16 Years of Haskell: A Retrospective on the occasion of its 15th Anniversary – Wearing the Hair Shirt: A Retrospective on Haskell*. Invited Keynote Presentation at the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 2003.
https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/wearing-hair-shirt-retrospective-haskell-2003/

Paul Hudak, John Hughes, Simon Peyton Jones, Philip Wadler. *A History of Haskell: Being Lazy with Class*. In Proceedings of the 3rd ACM SIGPLAN 2007 Conference on History of Programming Languages (HOPL III), 12-1 - 12-55, 2007. (ACM Digital Library www.acm.org/dl)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

VI Die Haskell-Geschichte (2)

Simon Peyton Jones. *Escape from the Ivory Tower: The Haskell Journey.* Aufzeichnumg (1:04:16) aus dem Jahr 2017 am Churchill College, University of Cambridge, UK. https://www.chu.cam.ac.uk/news/2017/may/9/annual-computer-science-lecture-2017/

Simon Peyton Jones. *(Failing to) avoid Success at all Costs: The Haskell Story.*
Veranstalter: Cambridge University Computing and Technology Society, https://cucats.org/event/12
Vortragsfolien:
https://cucats.org/files/Escape%20from%20the%20ivory%20tower%20Feb12.pdf

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Daher verehre ich die Erkenntnisse der Weisheit und ihre Entdecker; mit Freude nähere ich mich gleichsam dem Vermächtnis vieler. Für mich ist dies alles erworben, für mich erarbeitet.

Doch wir wollen uns als guter Familienvater erweisen und mehr hinterlassen, als wir bekommen haben; dies Erbe soll vergrößert von mir auf die Nachwelt übergehen. Viel bleibt noch zu tun, und viel wird bleiben, und keinem, der nach tausend Menschenaltern auf die Welt kommt, ist die Möglichkeit versperrt, noch etwas hinzuzufügen.

Aber selbst wenn schon alles von den alten Denkern herausgefunden wurde, wird dies immer neu sein: die Anwendung, das Verstehen und die Neuordnung der von anderen stammenden Erkenntnisse.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller
Epistulae ad Lucilium 64, 7f.

Seneca. Der Weise ist sich selbst genug. Gedanken für alle Lebenslagen.
Übersetzt u. herausgegeben von Ursula Blank-Sangmeister, Reclam, 2014.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Wenn ich weiter gesehen habe als andere,
so deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stehe.

gewöhnlich Isaac Newton zugeschrieben,
jedoch wesentlich älteren Ursprungs
Sir Isaac Newton (1643-1727)
engl. Naturforscher, Physiker und Philosoph

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Anhänge

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

A

Schlaglichter: Imperative vs. funktionale Programmierung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

A.1

Programmatischer Kern

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Imperativ vs. fkt.: Programmatischer Kern

In imperativen (prozeduralen, objektorientierten) Programmen geht es um die Ausführung von Anweisungen (dafür müssen auch Ausdrücke ausgewertet werden):

```
a := y + z;
b := x + y;
if a>0 then c := a*b else c := a/2;
```

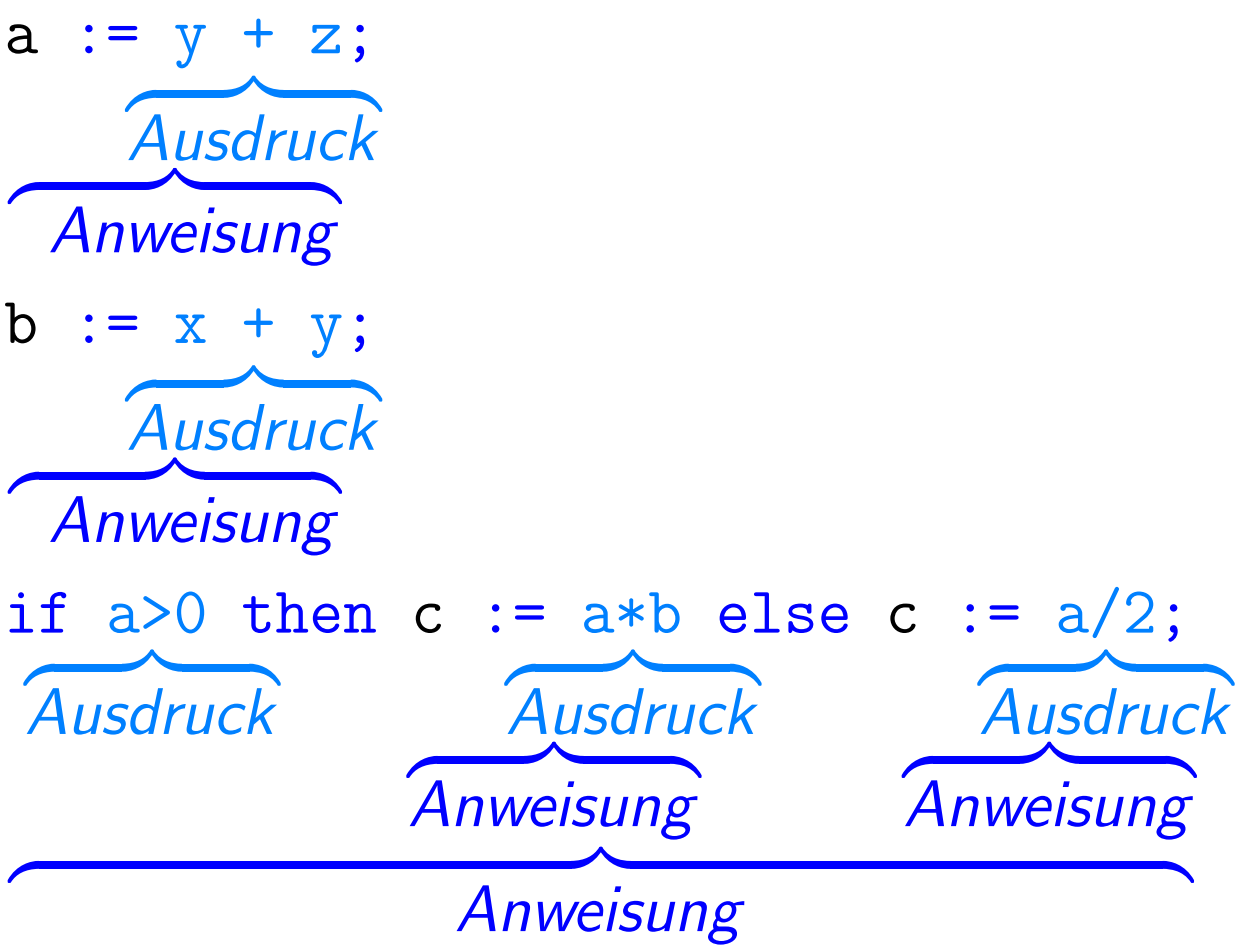
In funktionalen Programmen geht es ausschließlich um die Auswertung von Ausdrücken. Anweisungen gibt es nicht!

```
y + z
x + y
if (y+z)>0 then (y+z)*(x+y) else (y+z)/2
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Imperativ: Anweisungen und Ausdrücke

...im Detail:

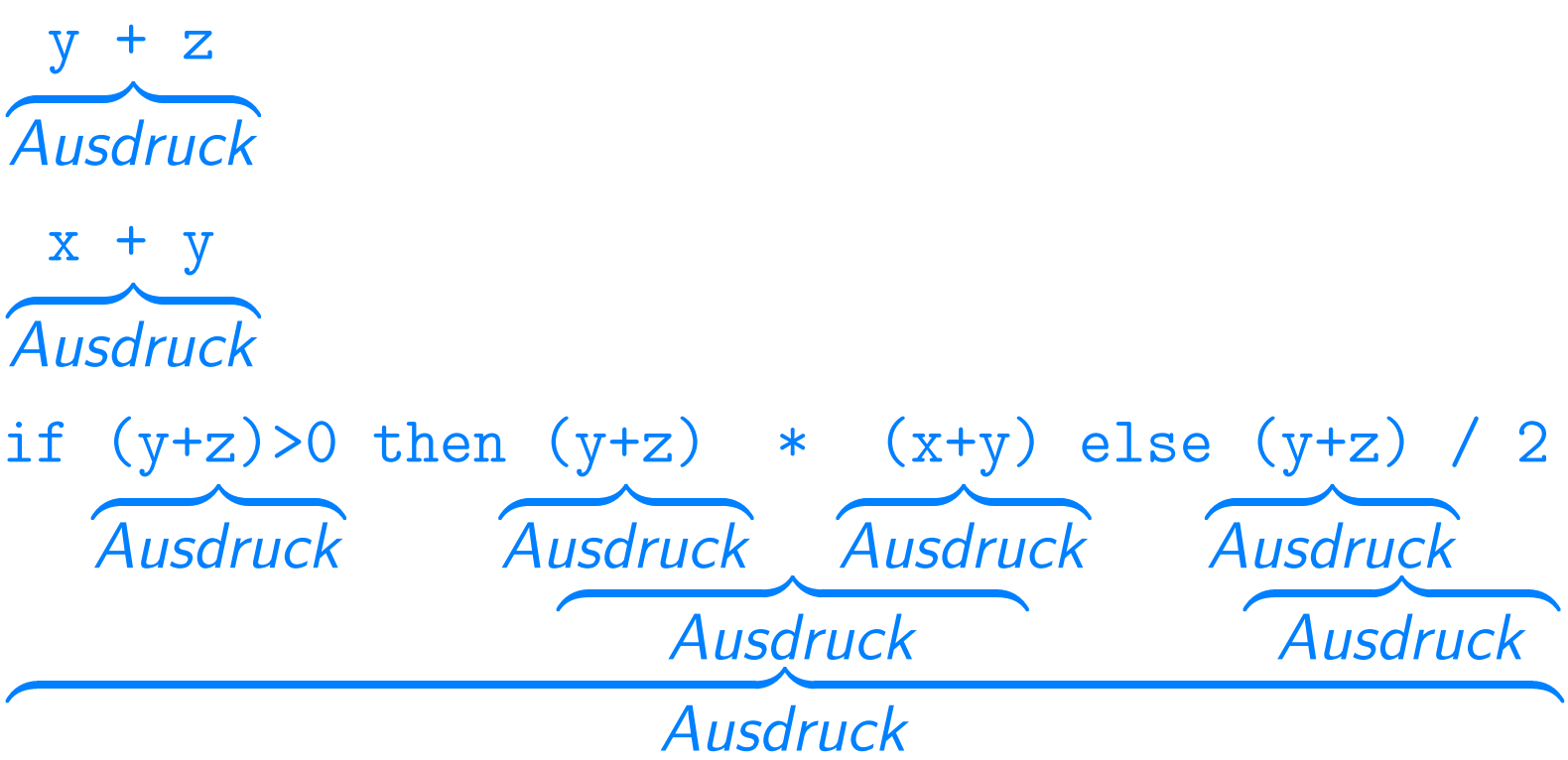


Genauer sind auch `0` und `2` Ausdrücke; `y`, `z`, `x` `a`, `b` und `c` hingegen Programmvariable, deren Wert abseits von linksseitigen Vorkommen als Ausdruck verwendet wird.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Funktional: Ausschließlich Ausdrücke

...im Detail:



Genauer sind auch `y`, `z`, `x`, `0` und `2` Ausdrücke.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

A.2

Namensvereinbarungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

A.2.1

Namensvereinbarungen in imperativen Programmen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Namensvereinbarungen

...werden getroffen u.a. für:

- Speicherplätze: Variablennamen
- Anweisungsfolgen: Prozedur-/Methodennamen
- Ausdrücke: Funktionsnamen
- Wertarten: Typnamen
- ...

Dabei gilt: Die Einführung benamter

- Variablen, Prozeduren/Methoden ist von überragender Bedeutung.
- Funktionen ist oft nur eingeschränkt möglich.
- Typen, etc.: Für diesen Abschnitt nicht relevant und daher unbetrachtet bleibend.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

A.2.2

Namensvereinbarungen in funktionalen Programmen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Namensvereinbarungen

Für Ausdrücke können Namen vergeben, vereinbart werden:

$$\overbrace{\texttt{a = y + z}}^{\text{Vereinb. von Name a für Ausdruck y + z}}$$

$$\overbrace{\texttt{b = x + y}}^{\text{Vereinb. von Name b für Ausdruck x + y}}$$

$$\overbrace{\texttt{c = if (y+z)>0 then (y+z)*(x+y) else (y+z)/2}}^{\text{Vereinb. von Name c für Ausdr. if...then...else...}}$$

Jeder Name kann nur einmal als Bezeichnung gewählt werden und somit Bezeichnung nur eines einzigen Ausdrucks sein. Namen sind ebenfalls Ausdrücke. Ausdrücke und ihre Namen dürfen sich in Ausdrücken wechselweise vertreten (mit '==' in der Bedeutung von 'ist wertgleich mit'):

```
    (x+y)*(if (y+z)>0 then (y+z)*(x+y) else (y+z)/2)
== b*(if a>0 then a*b else a/2)
== b*c
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Namensvereinbarungen mit Argumenten

Namensvereinbarungen können Argumente erhalten:

```
quadrat n       = n*n
flaeche l b     = l*b
volumen l b h = l*b*h
antwort_auf_alle_Fragen = 42
```

Namen sind unabhängig von der Zahl ihrer Argumente Ausdrücke. Der Wert von Namen mit m Argumenten ist eine m-stellige Funktion. Ist m gleich null, spricht man von einer Konstante oder einer 0-stelligen Funktion, was eine einheitliche Sicht von Ausdrücken als Ausdrücke von funktionalem Wert (oder kürzer als funktionale Ausdrücke) ermöglicht:

```
quadrat :: Int -> Int                    -- 1-stellig
flaeche :: Int -> Int -> Int             -- 2-stellig
volumen :: Int -> Int -> Int -> Int      -- 3-stellig
antwort_auf_alle_Fragen :: Int           -- 0-stellig
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Namensvereinbarungen mit Bezug

Namensvereinbarungen können Bezug aufeinander nehmen, auch auf sich selbst. In diesem Fall spricht man von Rekursion:

```
fac n     = if n <= 0 then 1 else n * fac (n-1)
binom n k = div (fac n) (fac k * fac (n-k))
```

Die Werte von `fac` und `binom` sind Funktionen:

```
fac   :: Int -> Int                    -- 1-stellig
binom :: Int -> Int -> Int             -- 2-stellig
```

Argumente können implizit sein:

```
fib = \n -> if n==0 then 0
            else if n==1 then 1
                 else fib (n-2) + fib (n-1)
```

Der Wert von `fib` ist ebenfalls eine Funktion:

```
fib :: Int -> Int                      -- 1-stellig
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Aufgebrochene Namensvereinbarungen

Namensvereinbarungen für m-stellige Funktionen, $m \geq 1$, können in mehrere Gleichungen aufgebrochen werden, die einer Fallunterscheidung entsprechen:

```
fac' 0 = 1
fac' n = n * fac' (n-1)

fib' 0 = 0
fib' 1 = 1
fib' n = fib' (n-2) + fib' (n-1)
```

Die Werte von `fac'` und `fib'` sind Funktionen:

```
fac' :: Int -> Int                    -- 1-stellig
fib' :: Int -> Int                    -- 1-stellig
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Namensvereinbarungen mit Wächtern

Gleichungen können mit Bedingungen, sog. Wächtern, versehen und vor ungewollter Anwendung geschützt werden:

```
fac'' n
  | n == 0 = 1
  | n >= 0 = n * fac'' (n-1)

fib'' n
  | n == 0 = 0
  | n == 1 = 1
  | n >= 0 = fib'' (n-2) + fib'' (n-1)
```

Mögl. Mehrdeutigkeiten durch Überschneidungen (`fac''`: `n==0` mit `n>=0`; `fib''`: `n==0`, `n==1` mit `n>=0`) werden (in Haskell) durch Prüfung der Wächter von oben nach unten aufgelöst.

Die Werte von `fac''` und `fib''` sind Funktionen:

```
fac'' :: Int -> Int                    -- 1-stellig
fib'' :: Int -> Int                    -- 1-stellig
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

A.3
Operanden und Werte von Ausdrücken

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Werte von Ausdrücken, Ausdruckswerte

Ausdrücke können einen elementaren Wert (Zahlen, Zeichen, Wahrheitswerte,...) oder einen funktionalen Wert (Funktion auf den ganzen Zahlen, Funktion auf Zeichenreihen in Wahrheitswerte,...) haben.

- Der Wert des Ausdrucks `a` vereinbart durch:

  ```
  a = (17+4)*2
  ```

  ist elementar, ganzzahlig vom Wert 42; in Haskell: `a :: Int`.

- Der Wert der Ausdrucks `fac''' n` vereinbart durch:

  ```
  fac''' n = if n==0 then 1 else n * fac''' (n-1)
  ```

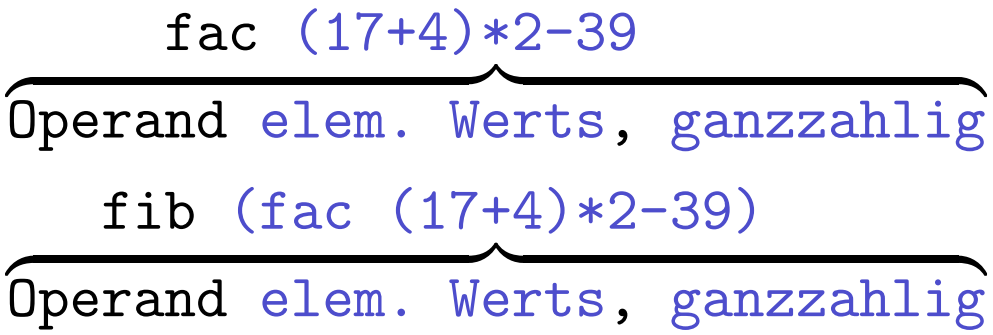
  ist funktional, eine Funktion auf den ganzen Zahlen; in Haskell: `fac''' :: Int -> Int`.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

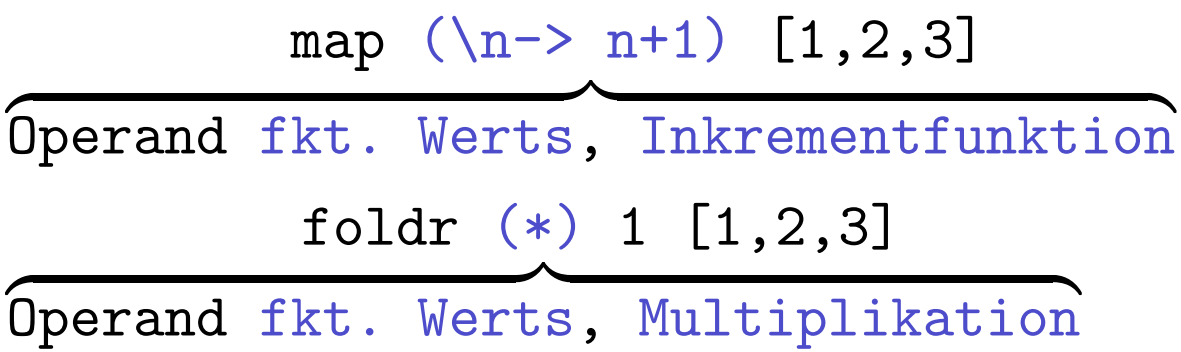
Operanden von Ausdrücken

Ausdrücke können als Operanden (andere) Ausdrücke

- elementaren Werts haben:



- funktionalen Werts haben:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Werte von Ausdrücken

Werte von Ausdrücken können

- elementar sein:

```
fac (17+4)*2-39 ->> 6 :: Int
fib (fac (17+4)*2-39) ->> fib 6 ->> 8  :: Int
map (\n-> n+1) [1,2,3] ->> [2,3,4] :: [Int]
foldr (*) 1 [3,4,5] ->> 60 :: Int
```

- funktional sein:

```
map (\n-> n+1) :: [Int] -> [Int]     -- 1-stellig
foldr (*) :: Int -> [Int] -> Int     -- 2-stellig
foldr (*) 1 :: [Int] -> Int          -- 1-stellig
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Funktionen, Funktionen höherer Ordnung

Ausdrücke

- eines funktionalen Werts heißen Funktionen.
- mit mindestens einem funktionalwertigen Operanden oder Wert (-teil) heißen Funktionen höherer Ordnung (oder Funktionale).

Funktionen höherer Ordnung sind also Funktionen, Funktionen mit speziellen Eigenschaften ihrer Argumente oder/und Resultate.

Statt von Operand(en) und Wert spricht man bei Funktionen auch von Argument(en) und Resultat.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Funktionen erster Ordnung

Funktionen, die keine Funktionen höherer Ordnung sind, heissen

- Funktionen erster Ordnung.

Funktionen erster Ordnung sind Funktionen mit elementarwertigen Argumenten und elementarwertigem Resultat.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

A.4

Funktionen und Polymorphie: Erstrangige Sprachelemente

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Funktionen

...sind in funktionalen Sprachen

- erstrangige Sprachelemente (engl. first-class citizens):

  Ausdrücke funktionalen Werts dürfen (fast überall) stehen, wo auch Ausdrücke elementaren Werts stehen dürfen und umgekehrt.

...sind in imperativen Sprachen

- zweitrangige Sprachelemente (engl. second-class citizens):

  Ausdrücke funktionalen Werts oder Prozeduren dürfen nicht überall stehen; in vielen Sprachen noch auf Argumentposition als funktionale oder prozedurale Argumente von Funktionen und Prozeduren, kaum jedoch als Resultat von Funktionen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Polymorphie

...ist in funktionalen Sprachen

- erstrangiges Sprachelement (engl. first-class citizen):

```
map    :: (a -> b) -> [a] -> [b]
foldr  :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
flip   :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
length :: [a] -> Int
```

  Der Typ jeder Funktion ist grundsätzlich von den konkreten Typen der Argumentwerte so weit entkoppelt wie irgend möglich.

...ist in imperativen Sprachen

- zweitrangiges Sprachelement (engl. second-class citizen):

  Möglichkeiten zur polymorphen Typspezifikation fehlen oft völlig oder sind im Vergleich zu funktionalen Sprachen wesentlich limitiert.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

A.5

Imperative vs. funktionale Programme

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Imperative Programme

...sind eine Menge von Anweisungsvereinbarungen, kurz Anweisungen, zusammen mit einer Anordnung, in welcher Reihenfolge diese Anweisungen auszuführen sind.

Anweisungen werden in Prozeduren zusammengefasst, um das Programm zu strukturieren; Prozeduren werden in Modulen zusammengefasst, um das Programm weiter zu strukturieren.

Anm.: In objektorientierten Sprachen ist als Bezeichnung Methode statt Prozedur üblich.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Funktionale Programme

...sind eine Menge von Ausdrucksvereinbarungen, kurz Ausdrücken.

Eine explizite, ausdrückliche Anordnung, in welcher Reihenfolge sie ausgewertet werden sollen, gibt es nicht (Ausnahme: In übersetzten Programmen ist ein Ausdruck durch seinen Namen (in Haskell `main`) als zuerst auszuwertender 'Hauptausdruck' ausgezeichnet).

Einzig Wertabhängigkeiten zwischen Ausdrücken legen lose eine Reihenfolge fest, wenn Ausdrücke zur Auswertung ausgewählt werden.

Ausdrücke werden in Modulen zusammengefasst, um Programme zu strukturieren; eine Zusammenfassung von Ausdrücken zu 'Ausdruckssammlungen' analog einer Prozedur (oder Methode) gibt es nicht; eine Funktion ist ein benamter Ausdruck, keine Ausdruckssammlung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

A.6

Wertzuweisung vs. Wertvereinbarung

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Wertzuweisungen vs. Wertvereinbarungen

Betrachte die Bedeutung von:

```
a := (17+4)*2      (oft a = (17+4)*2 als Schreibw.)
```

als imperative Wertzuweisung und von:

```
b = (17+4)*2
```

als funktionale Wertvereinbarung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Imp. Wertzuweisung, fkt. Wertvereinbarung

...ähnliche Optik, gänzlich andere Bedeutung.

- Imperativ: Wertzuweisung, temporär, abänderbar

  ```
  a := (17+4)*2
  ```

  Wertzuweisung für Speicherzelle a auf Zeit; Wertzuweisungen sind temporäre Wertfestlegungen für benamte Speicherzellen, Festlegungen auf Zeit, bis zum nächsten Überschreiben (abänderbar, engl. mutable).

- Funktional: Wertvereinbarung, dauerhaft, unabänderbar

  ```
  b = (17+4)*2
  ```

  Wertvereinbarung für Ausdrucksnamen b für die gesamte Programmzukunft; Wertvereinbarungen sind permanente Wertfestlegungen für Ausdrucksnamen, Festlegungen für immer, auf alle Zeit (unabänderbar, engl. immutable).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Imperativ: Wertzuweisungen

Wertzuweisung:

```
a := (17+4)*2
```

Bedeutung:

- In der mit dem Namen a bezeichneten Speicherzelle sei ab jetzt bis auf weiteres (abänderbar!) der Wert 42 gespeichert.
- Diese Festlegung kann in der Zukunft jederzeit und beliebig oft widerrufen und durch eine neue Wertfestlegung ersetzt werden, ebenfalls auf Zeit.
- Ein Austausch von a durch 42 oder umgekehrt hat deshalb (über die Vertauschung hinaus) i.a. einen von außen beobachtbaren Effekt und ist deshalb nicht möglich: Nicht überall, wo 42 stehen darf, darf ohne Bedeutungsunterschied auch a stehen oder umgekehrt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Funktional: Wertvereinbarungen

Wertvereinbarung:

```
b = (17+4)*2
```

Bedeutung:

- Der Name `b` hat ab jetzt für den gesamten restlichen Programmlauf (unabänderbar!) den Wert `42`.
- Wo immer `42` stehen darf, darf bedeutungsgleich auch `b` stehen und umgekehrt (cum grano salis - mit einem Körnchen Salz (Plinius der Ältere): $42 = $ `b` ist nicht möglich, weil 42 kein gültiger Name ist).
- Ein Austausch von `b` durch `42` oder umgekehrt hat (über die Vertauschung hinaus) keinen von außen beobachtbaren Effekt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Imperativ: Variablennamen

...Namen sind Variablennamen.

`a := (17+4)*2` Wertzuweisung, a Variablenname

- Es besteht auf dem Niveau des Programms eine logische und adressierbare Verknüpfung zwischen dem Variablennamen a und einer Speicherzelle, die den Wert der Variablen aufnimmt.
- Aufgrund der Verknüpfung kann diese Speicherzelle vom Programmierer vom Programm aus angesprochen, gelesen und ihr Inhalt auch geändert werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Funktional: Ausdrucksnamen

...Namen sind Ausdrucksnamen.

`b = (17+4)*2` Wertvereinbarung, `b` Ausdrucksname

- Eine logische oder/und adressierbare Verknüpfung des Ausdrucksnamens `b` mit einer Speicherzelle besteht auf dem Niveau des Programms nicht.

  Auf der Maschine ist der mit dem Namen `b` verbundene Wert `42` natürlich in einer Speicherzelle gespeichert (wie auch und wo auch sonst, da wir für funktionale und imperative Programme dieselben Maschinen, dieselben Hardware-Architekturen benutzen). Diese Speicherzelle kann allerdings vom Programmierer vom Programm aus weder angesprochen noch gelesen oder gar geändert werden.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

A.7

Selbstbezügliche Wertzuweisungen, Wertvereinbarungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Selbstbezügliche Wertzuw. und Wertvereinb.

...lassen den konzeptuell fundamentalen Unterschied zwischen

- imperativen Wertzuweisungen (`a := a + 1`)

und

- funktionalen Wertvereinbarungen (`b = b + 1`)

besonders hervortreten und auf den Punkt zu bringen:

Welchen Wert erhält

1. `a` durch die imperative Wertzuweisung '`a := a + 1`'?
2. `b` durch die funktionale Wertvereinbarung '`b = b + 1`'? Kann oder sollte `b` durch diese Vereinbarung einen wohldefinierten Wert erhalten? Welchen?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Imperativ: Selbstbezug in Wertzuweisungen

Selbstbezügliche Wertzuweisung:

- `a := a + 1`

Operationelle Bedeutung:

- Lies den Wert, der in der mit dem Variablennamen a verknüpften Speicherzelle abgelegt ist, erhöhe ihn um 1 und überschreibe den gelesenen alten Wert mit dem erhöhten neuen Wert.

Das heißt:

1. Alles ist wohldefiniert! Der alte Wert, der neue Wert und der Weg vom alten zum neuen Wert. Die Ausführung der selbstbezüglichen Wertzuweisung terminiert!
2. Es gibt ein Konzept von vorher und nachher, von Wert vor und nach der Ausführung, von Zustand!
3. Der neue Wert von a ist der alte Wert von a erhöht um 1.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Funktional: Selbstbezug in Wertvereinbarungen

Selbstbezügliche Wertvereinbarung:

- `b = b + 1`

Bedeutung:

- Ausdrucksname `b` und rechtsseitiger Ausdruck `b+1` haben denselben Wert; der Wert von `b` ist Lösung der Gleichung `b = b + 1`.

Das heißt:

1. Der Wert von `b` ist gleich dem Wert von `b+1`, welcher gleich dem Wert von `(b+1)+1` ist, welcher gleich dem Wert von `((b+1)+1)+1` ist, welcher gleich dem Wert von `(((b+1)+1)+1)+1` ist usw: Ein unendlicher Regress!
2. Die operationelle Berechnung des Wert von `b` über die Berechnung des Werts von `b+1`:
   `b ->> b+1 ->> (b+1)+1 ->> ((b+1)+1)+1 ->> ...`
   terminiert nicht! Der Wert von `b` ist undefiniert!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Funktional: Selbstbezug in Wertvereinbarungen

Wichtig:

1. Funktional ist weder die Rede von einem alten noch von einem neuen Wert von `b`, sondern nur vom Wert von `b`.
2. Funktional gibt es kein Konzept von vorher und nachher, kein Konzept eines Wertes von vor oder nach der Auswertung eines Ausdrucks, kein Konzept eines Zustands!
3. Die Gleichung `b = b + 1` hat keine Lösung!
4. Der Wert von `b` als Lösung der Gleichung `b = b + 1` existiert deshalb nicht in einem wohldefinierten Sinn, er ist undefiniert.
5. Im operationellen Versuch, den Wert einer selbstbezüglichen Wertvereinbarung zu berechnen, zeigt sich das daran, dass die Berechnungsfolge nicht terminiert!

   ```
   b ->> b+1 ->> (b+1)+1 ->> ((b+1)+1)+1 ->> ...
   ```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Auf den Punkt gebracht:

Die imperative Wertzuweisung ‘`a := a + 1`’ bedeutet:

- Erhöhe den in Speicherzelle `a` befindlichen Wert um `1`.

Die funktionale Wertvereinbarung ‘`b = b + 1`’ bedeutet:

- Finde eine Lösung für die Gleichung `b = b + 1`.

Der Bedeutungsunterschied ist offensichtlich und er ist fundamental.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

A.8

Problem- und Lösungssicht: Imperativ vs. funktional

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die Problemsicht

...ident für imperative und funktionale Programmierung, gegeben und beschrieben durch:

1. Problemmenge $\mathcal{P}$, Lösungsmenge $\mathcal{L}$.
2. Probleminstanzen $p \in \mathcal{P}$ mit Lösungen $l_p \in \mathcal{L}$.
3. Gesucht: Ein Weg, von p zu l_p zu gelangen.

Beispiel:

1. $\mathcal{P}$: Die Menge der Listen ganzer Zahlen.

   $\mathcal{L}$: Die Menge der aufsteigend sortierten Listen ganzer Zahlen.
2. p: Die Zahlenliste $42, 4, 4711, 17$.

   l_p: Die aufsteigend sortierte Zahlenliste $4, 17, 42, 4711$.
3. Gesucht: Ein Sortierverfahren für Listen ganzer Zahlen (z.B. Quicksort).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Die imperative Lösungssicht

Ansatz:

- Schreibe ein imperatives Programm π über der Variablenmenge V zur Lösung von Probleminstanzen $p \in \mathcal{P}$.

  (Wichtig: Eine Variablenbelegung von π ist eine Abb. $\nu : V \to W$, die jeder Variablen aus V einen Wert aus einem Wertebereich W zuordnet.)

Korrektheitsannahme (partielle Korrektheit):

- Wenn eine initiale Variablenbelegung ν_{init} von π eine Probleminstanz $p \in \mathcal{P}$ beschreibt und π angesetzt auf ν_{init} mit der finalen Variablenbelegung ν_{final} terminiert, dann beschreibt ν_{final} eine Lösung $l_p \in \mathcal{L}$ von p.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Frage, Aufforderung an ein imperatives Prg.

Ist π ein imperatives Programm, $p \in \mathcal{P}$ eine Probleminstanz und ν_{init} eine p beschreibende initiale Variablenbelegung von π, so lauten Frage und Aufforderung an π:

Frage: Welches ist die

- finale Variablenbelegung (und damit Beschreibung einer Lösung $l_p \in \mathcal{L}$ von p)

wenn π auf ν_{init} angesetzt wird, d.h. wenn π mit der durch ν_{init} gegebenen Variablenbelegung gestartet wird?

Aufforderung:

- Führe deine Instruktionen beginnend mit den Werten der initialen Variablenbelegung aus und liefere die Werte der finalen Variabenbelegung!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Die funktionale Lösungssicht

Ansatz:

- Schreibe ein funktionales Programm ϕ über der Namensmenge N zur Lösung von Probleminstanzen $p \in \mathcal{P}$.

  (Wichtig: Ein Ausdruck α ist ein Ausdruck über der Namensmenge N von ϕ, wenn α induktiv auschließlich aus Grundoperanden, Grundoperationen und Namen aus N aufgebaut ist.)

Korrektheitsannahme (partielle Korrektheit):

- Wenn ein Ausdruck α über der Namensmenge N von ϕ eine Probleminstanz $p \in \mathcal{P}$ beschreibt und die Auswertung von α durch ϕ mit dem Wert w terminiert, dann beschreibt w eine Lösung $l_p \in \mathcal{L}$ von p.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Frage, Aufforderung an ein funktionales Prg.

Ist ϕ ein funktionales Programm (also ein System von Gleichungen), $p \in \mathcal{P}$ eine Probleminstanz und α ein p beschreibender Ausdruck über der Namensmenge von ϕ, so lauten Frage und Aufforderung an ϕ:

Frage: Welches ist der

- Wert von α (und damit die Beschreibung einer Lösung $l_p \in \mathcal{L}$ von p)

unter Zugrundelegung und Lösung der Gleichungen von ϕ?

Aufforderung:

- Liefere den Wert von Ausdruck α unter Zugrundelegung und Lösung deiner Gleichungen!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Direkte Gegenüberstellung zum Vergleich

Aufforderung an ein imperatives Programm:

- Führe deine Instruktionen beginnend mit der durch ν_{init} gegebenen Variablenbelegung aus und liefere die finale Variablenbelegung ν_{final}!

Aufforderung an ein funktionales Programm:

- Liefere den Wert von Ausdruck α unter Lösung der Gleichungen deines Gleichungssystems!

Der Unterschied ist offensichtlich u. konzeptuell fundamental:

- Imperativ: Denken in Instruktionen und ihren Effekten.
- Funktional: Denken in Gleichung(ssystem)en und Eigenschaften ihrer Lösungen.

Eine Aufgabe imperativ zu lösen erfordert deshalb eine andere Herangehens- und Denkweise als funktional und umgekehrt!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Diese konzeptuell unterschiedl. Problemsicht

...hat Auswirkungen auf das Denken, Tun und Produkt

- imperativer
- funktionaler

Programmierung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Denken, Tun, Produkt imp. Programmierung

Denken:

- Denken in Instruktionen und ihren Effekten.

Tun:

Spezifiziere Instruktionen an den Rechner:

- Tu dies, tu das, tu jenes,...

mit dem Ziel, ihn in die Lage zu versetzen, durch Ausführung dieser Instruktionen eine problembeschreibende initiale Variablenbelegung in eine

- lösungsbeschreibende finale Variablenbelegung

zu überführen.

Produkt:

Ein imperatives Programm als Gesamtheit seiner Instruktionen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Denken, Tun, Produkt fkt. Programmierung

Denken:

- Denken in Gleichung(ssystem)en und Eigenschaften ihrer Lösungen.

Tun:

Spezifiziere Gleichungen für den Rechner:

- Diese, jene, folgende,...

mit dem Ziel, ihn in die Lage zu versetzen, durch Lösung dieser Gleichungen einen problembeschreibenden Ausdruck in seinen

- lösungsbeschreibenden Wert

zu überführen.

Produkt:

Ein funktionales Programm als Gesamtheit seiner Gleichungen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Das Schreiben funktionaler Programme

...ist deshalb das Schreiben von Gleichung(ssystem)en.

Gleichungen funktionaler Programme beschreiben fast alle

- polymorphe echte Funktionen (d.h. 1- oder mehrst. Fkt.):

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f xs = if xs==[] then []
                     else f (head xs) : map f (tail xs)
```

Die allermeisten beschreiben:

- polymorphe Funktionen höherer Ordnung:

```
flip  :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
flip f x y = f y  x
```

- einige polymorphe Funktionen erster Ordnung:

```
length :: [a] -> Int
length xs = if xs==[] then 0 else 1 + length (tail xs)
```

- wenige unechte Funktionen (d.h. 0-stell. Fkt., Konstanten):

```
pi :: Float
pi = 3.14
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe A.8.1 – Logisierung

Wie sehen die Welt und ihre Probleme durch die Brille logischer Programmierung aus? Wie sehen im Sinn dieses Abschnitts die

- logische Lösungssicht (Ansatz, Korrektheitsannahme)
- Frage, Aufforderung an ein logisches Programm

aus?

Wodurch sind Herangehens- und Denkweise gekennzeichnet, ein Problem durch logische Programmierung, z.B. ein Prolog-Programm, zu lösen?

- Logisch Programmieren heißt: Denken in ...?

Was folgt daraus für Tun und Produkt im Fall logischer Programmierung?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

A.9
Welcher Problemlösungstyp bin ich?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Der imperative Problemlösungstyp

Konzeptionell:

- Denkt in Instruktionen und ihren Effekten.

Operationell:

- Ordnet haarklein jeden Schritt bis hin zum allerletzten Detail unzweideutig an.

Ich erkär's nur einmal – Sortieren geht so:

```
quickSort (L,low,high)
  if low < high
    then splitInd = partition (L,low,high)
         quickSort (L,low,splitInd-1)
         quickSort (L,splitInd+1,high) fi

partition (L,low,high)
  l = L[low]
  left = low
  for i = low+1 to high do
    if L[i] <= l then left = left+1
                      swap (L[i],L[left]) fi od
  swap (L[low],L[left])
  return left
```

Abtreten zum Sortieren! Im Laufschritt. Marsch!

In der Gefahr besteht die Schwierigkeit nie darin, Menschen zu finden, die gehorchen werden, sondern Männer, die befehlen können.

George Bernard Shaw (1854-1900)
irischer Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Der funktionale Problemlösungstyp

Konzeptionell:

- Denkt in Gleichung(ssystem)en und Eigenschaften ihrer Lösungen.

Operationell:

- Beschreibt präzise die Eigenschaften der Lösung.

Lieber Sesselkreis, liebe Sesselkreisler,
ich wünsche mir, dass meine Liste permutiert eine
der folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:

```
(1) quickSort []     = []
(2) quickSort (n:ns) = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                       ++ [n]
                       ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

...den lästigen Rest zur Wunschverwirklichung überneh-
men ihre Sesselkreisler, begeistert, zwanglos, sofort.

Der ideale Mensch fühlt Freude,
wenn er anderen einen Dienst erweisen kann.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Man soll den Menschen nie sagen,
wie sie etwas tun sollen,
sondern nur, was sie tun sollen.
Dann wird ihr Einfallsreichtum einen verblüffen.

George S. Patton (1885-1945)
amerik. General

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Imperativer und fkt. Lösungstyp im Vergleich

Imperativ:

Der inspirierende Instrukteur:

> Ordnet exakt den einzuschlagenden Lösungsweg an, das ‘wie’ zur Lösung gelangen.

Funktional:

Der elegante Sesselkreis-Delegateur:

> Beschreibt präzise die essentiellen Eigenschaften der Lösung, das ‘was’ der Lösung, unter weitreichender Freistellung des konkreten Wegs zur Lösung für den Sesselkreis bei freilich determiniertem Ergebnis!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Instrukteur, Delegateur: Erforderliches Wissen

Imperativ:

- Wie sieht die Lösung aus? Wie komme ich zur Lösung hin?

  Bsp.: Der Instrukteur muss wissen: Wenn auf meine Liste folgende Schritte pippifein angewendet werden, ist sie sortiert.

```
quickSort (L,low,high)
  if low < high
    then splitInd = partition (L,low,high)
         quickSort (L,low,splitInd-1)
         quickSort (L,splitInd+1,high) fi
```

```
partition (L,low,high)
  l = L[low]
  left = low
  for i = low+1 to high do
    if L[i] <= l then left = left+1
                      swap (L[i],L[left]) fi od
  swap (L[low],L[left])
  return left
```

Funktional:

- Was erwarte ich von der Lösung?

  Bsp.: Der Delegateur erwartet: Meine Liste ist sortiert, wenn sie Gleichung (1) oder Gleichung (2) erfüllt (und denkt sich: Zu wissen, was ich will, war durchaus genug mit Arbeit verbunden; Wegschrittfolgen auch noch wissen zu sollen, wäre zu viel erwartet!).

```
(1) quickSort []     = []
(2) quickSort (n:ns) = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                       ++ [n] ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Imp. vs. fkt. Lsg.-Weg: Aufgabenlastverteilung

Auf wem liegt konzeptionell und operationell die größere Last?

- Dem handlungsfixierten imperativ vorgehenden Instrukteur?

- Dem ergebnisorientierten funktional vorgehenden Delegateur?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe A.9.1 – Schönheitssehnsucht

Instrukteur und imperativer Programmierer erfreuen sich an der exakten Beschreibung der Schönheiten des Wegs zur Lösung, Delegateur und funktionaler Programmierer an der präzisen Beschreibung der Schönheiten der Lösung selbst.

Welche Parallelen gibt es zum Zitat von Antoine de Saint-Exupéry? Welche Doppelrolle kommt den 'Männern' im Zitat in dieser Sicht zu?

Wenn du ein Schiff bauen willst,
dann trommle nicht Männer zusammen,
um Holz zu beschaffen, Aufgaben zu vergeben
und die Arbeit einzuteilen, sondern lehre die Männer
die Sehnsucht nach dem weiten unendlichen Meer.

Antoine de Saint-Exupéry (1900-1944)
franz. Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Imperative oder funktionale Programmierung

...eine Frage (auch?!) von Typ, Persönlichkeit, Führungsstil:

- Sie bevorzugen Ordnung, klare Hierarchien und Ansagen und wissen ohnehin am besten, wie eine Aufgabe zu erledigen ist?

  Imperative Programmierung ist Ihr Ding. Probieren Sie nichts anderes.

- Sie bevorzugen ein kooperatives, harmonisches Arbeitsumfeld, in dem partizipativ, konsensual mit schließlicher Zufriedenstellung aller ohne der Rede werten eigenen Beitrags Ihr ganz persönliches Wunschergebnis erarbeitet wird?

  Funktionale Programmierung könnte Ihr Ding sein. Probieren Sie es!

  Gleichungen bilden Ihr kooperatives und harmonisches Arbeitsumfeld!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Typauswertung und Prognose

(1) Sie sind als Instrukteur geboren auf die Welt gekommen ohne sonderliche Veranlassung sich zu verändern? Vor Ihnen

- liegt eine harte Zeit; Sie werden sich glücklich schätzen, anschließend in Ihre Welt der klaren Ansagen zurückkehren zu dürfen.

(2) Sie haben sich als Instrukteur nie wirklich, nie rundum wohlgefühlt? Als Delegateur werden Sie möglicherweise

- aufblühen und darin ihre Bestimmung finden; Ihre Rückkehr in die Welt der klaren Ansagen ist zweifelhaft.

(3) Sie können situationselastisch gleichermaßen gut als Instrukteur wie als Delegateur agieren? Sie werden in beiden

- Welten, der imperativen und der funktionalen Programmierung, reüssieren; das wünsche ich Ihnen!

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Ihr Typ ist nicht dabei?

...instruieren scheint Ihnen zu harsch, delegieren zu ausnutzend, logisieren zu kalt, empathie- und herzlos?

Der vierte Weg: Augenhöhe, Wertschätzung!

> Du, Rechner — ich glaube, Deine Ergebnisse — stimmen nicht — was denkst Du? — Wir müssen mal — reden.
>
> Hallo!? — Rechner? — Hallooo? — Wir müssen — reeden!! — Hörst Du nicht? — ICH WILL MIT DIR REEEDEN...

Wenn die Alternativen unattraktiv erscheinen, sicher einen Versuch wert. Oder, Blaise Pascals Logik-Variante, fünfter Weg:

Logik des Herzens.

Blaise Pascal (1623-1662)
franz. Philosoph, Mathematiker und Physiker

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Oder 6. Weg: Den Rechner nehmen 'wie er ist'!

- Imperativ zu programmieren verlangt als Instrukteur zu denken und zu handeln.

Gib keine Befehle, die man nicht vollbringen kann.

Äsop (6. Jh. v.Chr.)
griech. Fabeldichter

- Funktional zu programmieren verlangt als Delegateur zu denken und zu handeln.

Delegiere, was andere besser können.

sprichwörtl., lebensklug

- Logisch zu programmieren verlangt als Spockteur zu denken und zu handeln.

Logik, die Anatomie des Denkens.

John Locke (1632-1704)
engl. Philosoph

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Das heißt: Ist mein Programmierumfeld

...hineingeworfen oder selbstgewählt (LVA, Firma, mein Projekt), in dem ich erfolgreich sein will, eine Welt

- klarer Ansagen, so denke ich beim Programmieren imperativ in Instruktionen und ihren Effekten und handle als Instrukteur.

- harmonischen und konsensualen Ausgleichs, so denke ich beim Programmieren funktional in Gleichungssystemen und Eigenschaften ihrer Lösungen und handle als Delegateur.

- faszinierender Empathie- und Herzlosigkeit, so denke ich beim Programmieren logisch in Formeln und ihrer logischen Konsequenzen und handle als Spockteur.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Bedenkenswertes zu(m) Denken und Handeln

Das Handeln ist eine Folge des Denkens.

Franz Peter Künzel (* 1925)
dt. Lektor und Redakteur

Denken ist oft schwerer als man denkt.

Werner Mitsch (1936-2009)
dt. Aphoristiker

Denken ist die schwerste Arbeit, die es gibt.
Das ist wahrscheinlich der Grund, warum
sich so wenige damit beschäftigen.

Henry Ford (1863-1947)
amerikan. Unternehmer

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Das Denken ist zwar allen Menschen erlaubt,
aber vielen bleibt es erspart.

Curt Goetz (1888-1960)
dt. Schauspieler, Schriftsteller und Bühnenautor

Es gibt keinen Ausweg,
den ein Mensch nicht beschreitet,
um die tatsächliche Arbeit
des Denkens zu vermeiden.

Thomas A. Edison (1847-1931)
amerikan. Erfinder und Unternehmer

Verzicht auf Denken ist geistige Bankrotterklärung.

Albert Schweitzer (1875-1965)
elsäss. evang. Theologe und Arzt

Denken hilft. Meistens.
Nachdenken noch mehr.
Am meisten vorher.

Hochschullehrerweisheit, unbekannt (leider)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Auch im Denken gibt es eine Zeit des Pflügens
und eine Zeit der Ernte.

Ludwig Wittgenstein (1889-1951)
österr. Philosoph

Denken lernt man nicht an Regeln zum Denken,
sondern an Stoff zum Denken.

Jean Paul (1763-1825)
dt. Schriftsteller

Worüber wir nicht ernsthaft nachgedacht haben,
vergessen wir schnell.

Marcel Proust (1871-1922)
franz. Schriftsteller

Denken ist nicht dasselbe wie Gelesenhaben.

Antonio Machado (1875-1939)
span. Lyriker

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Eine Sache lernt man, indem man sie macht.

Cesare Pavese (1908-1950)
italien. Schriftsteller

Für das Können gibt es nur einen Beweis, das Tun.

Marie von Ebner-Eschenbach (1830-1916)
österr. Schriftstellerin

Wer immer tut, was er schon kann,
bleibt immer das, was er schon ist.

Henry Ford (1863-1947)
amerikan. Unternehmer

Der Weg zum Ziel beginnt an dem Tag,
an dem du die hundertprozentige Verantwortung
für dein Tun übernimmst.

Dante (um 1265-1321)
italien. Schriftsteller

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe A.9.2 – Feldstudie

Beobachten Sie Ihre Umgebung. Hat Aristoteles recht?

Einen guten und einen weniger guten imperativen Programmierer unterscheidet:

Niemand kann gut befehlen,
der nicht zuvor gehorchen gelernt hat.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Ein funktionaler Programmierer folgt dem Prinzip:

Der Gebildete treibt die Genauigkeit nicht weiter,
als es der Natur der Sache entspricht.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Cogita, omne simile claudicat.
Bedenke, jedes Gleichnis hinkt.

lat., sprichwörtl.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe A.9.3 – Syllogilei (1)

Die Syllogistik ist die Lehre von den Syllogismen, den logischen Schlüssen, bei denen deduktiv vom Allgemeinen auf das Besondere geschlossen wird. Die Syllogistik geht auf Aristoteles zurück, dargestellt in den beiden *Analytiken*.

Berühmtes Beispiel eines Syllogismus ist:

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
Also ist Sokrates sterblich.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe A.9.3 – Syllogilei (2)

Ambros Bierce (1842 - Weihnachten/Neujahr 1913/14), amerik. Schriftsteller, Autor von *'The Cynic's Word Book'*, hat in seiner Erklärung der Logik den arithmetischen Syllogismus als Schluss eingeführt. Mr. Spock, ist (syl)logisch alles o.k.?

Logik, die: Die Kunst des Denkens und Argumentierens in strenger Übereinstimmung mit den Beschränkungen und Unfähigkeiten des menschlichen Missverstehens. Die Grundlage der Logik ist der Syllogismus, der aus einem Obersatz, einem Untersatz und einer Konklusion besteht – in etwa so:

> Obersatz: Sechzig Männer können eine Arbeit sechzigmal so schnell vollbringen wie ein einziger.
> Untersatz: Ein Mann kann ein Pfostenloch in 60 Sekunden graben, also...
> Konklusion: Sechzig Männer können ein Pfostenloch in 1 Sekunde graben.

Dies kann man einen arithmetischen Syllogismus nennen, durch den wir aufgrund der Verbindung von Logik und Mathematik eine doppelte Gewissheit erlangen und daher gleich zwiefach gesegnet sind (Übersetzung von Dr. Michael Siefener).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

A.10

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang A (1)


Neal Ford. *Functional Thinking: Why Functional Programming is on the Rise*. IBM developerWorks, 11 pages, 2013. `www.ibm.com/developerworks/java/library/j-ft20/j-ft20-pdf.pdf`


Konrad Hinsen. *The Promises of Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 11(4):86-90, 2009.


John Hughes. *Why Functional Programming Matters*. The Computer Journal 32(2):98-107, 1989.


Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal. *The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II*. Computing in Science and Engineering 11(5):68-75, 2009.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang A (2)

- Mihai Maruseac. *Haskell: A Language for Modern Times*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 24(1):64-66, 2017.
- Yaron Minsky. *OCaml for the Masses*. Communications of the ACM 54(11):53-58, 2011.
- Neil Savage. *Using Functions for Easier Programming*. Communications of the ACM 61(5):29-30, 2018.
- Michael Siefener. *Aus dem Wörterbuch des Teufels*. marixverlag, 2011.
- Philip Wadler. *The Essence of Functional Programming*. In Conference Record of the 19th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 1-14, 1992.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

B

Formale Rechenmodelle

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

B.1

Turing-Maschinen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Turing-Maschine

Definition B.1.1 (Turing-Maschine)

Eine Turing-Maschine *TM* ist ein 'schwarzer' Kasten, der über einen Lese/Schreibkopf mit einem unendlichen Rechenband verbunden ist.

Das Rechenband ist in einzelne (nummerierte) Felder eingeteilt, von denen zu jeder Zeit genau eines unter dem Lese/Schreibkopf liegt.

TM kann interne Zustände $0, 1, 2, 3, \ldots$ aus $\mathbb{N}_0$ annehmen; der interne Zustand 0 ist der Startzustand von *TM*.

Es gibt eine Möglichkeit, *TM* einzuschalten; das Arbeiten und Abschalten von *TM* erfolgt selbsttätig.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Turing-Tafel, Turing-Programm

Definition B.1.2 (Turing-Tafel, Turing-Programm)

Eine Turing-Tafel (oder Turing-Programm) T über einem (endlichen) Zeichenvorrat $\mathcal{A}$ ist eine Tafel mit 4 Spalten und $m+1$ Zeilen, $m \geq 0$:

$$\begin{array}{cccc} i_0 & a_0 & b_0 & j_0 \\ i_1 & a_1 & b_1 & j_1 \\ \ldots & & & \\ i_k & a_k & b_k & j_k \\ \ldots & & & \\ i_m & a_m & b_m & j_m \end{array}$$

Dabei gilt für alle $0 \leq k \leq m$:

- $i_k, j_k \in \mathbb{N}_0$.
- $a_k \in \mathcal{A} \dot\cup \{\natural\}$ (d.h. $\natural \notin \mathcal{A}$).
- $b_k \in \mathcal{A} \dot\cup \{\natural\} \dot\cup \{L, R\}$ (d.h. $L, R \notin \mathcal{A} \dot\cup \{\natural\}$).
- Für alle Paare $(i_p, a_p) \in \mathbb{N}_0 \times (\mathcal{A} \cup \{\natural\})$ gilt: (i_p, a_p) kommt höchstens einmal als Zeilenanfang vor.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Turing-Tafel, Turing-Programm (fgs.)

Die Elemente jeder Zeile von T bedeuten für eine T beobachtende Turing-Maschine TM:

- Das erste Element einen Zustand, den TM mit ihrem internen Zustand zu vergleichen hat.
- Das zweite Element ein Zeichen aus $\mathcal{A} \dot{\cup} \{\text{ß}\}$, das TM mit dem aktuell unter ihrem Lese/Schreibkopf liegenden Zeichen zu vergleichen hat.
- Das dritte Element den Befehl für TM: 'Drucke b_k', falls $b_k \in \mathcal{A} \dot{\cup} \{\text{ß}\}$; den Befehl 'Gehe nach links', falls $b_k = L$; den Befehl 'Gehe nach rechts', falls $b_k = R$ (d.h. positioniere den Lese/Schreibkopf je ein Feld weiter links bzw. rechts).
- Das vierte Element den internen Folgezustand, den TM nach Ausführung des Befehls annimmt.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Arbeitsweise einer Turing-Maschine

Definition B.1.3 (Arbeitsweise einer TM)

Sei TM eine Turing-Maschine, T eine endliche Turing-Tafel:

1. Mit Einschalten nimmt TM den internen Zustand 0 an und der Lese/Schreibkopf positioniert sich über Feld 0 des Rechenbands, von dem angenommen wird, dass auf jedem Feld etwas steht.
2. Eingeschaltet beobachtet TM die endliche Turing-Tafel (oder Turing-Programm) T und kann abhängig davon:
   - Den Lese/Schreibkopf ein Feld nach links oder nach rechts bewegen.
   - Zeichen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eines (endlichen) Zeichenvorrats $\mathcal{A}$ sowie das Sonderzeichen $\text{ƀ} \notin \mathcal{A}$ auf Felder des Rechenbands drucken; ƀ steht dabei für das Leerzeichen. Jedes Drucken löscht und überschreibt das vorher auf dem Feld befindliche Zeichen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Arbeitsweise einer Turing-Maschine (fgs.)

Arbeiten/rechnen:

3. Stimmen interner Zustand von TM und aktuelles Zeichen unter dem Lese/Schreibkopf von TM mit dem Anfang einer Zeile in T überein, so führt TM den Befehl dieser (eindeutig bestimmten) Zeile aus und nimmt anschließend den in dieser Zeile genannten Folgezustand als neuen internen Zustand an.

Abschalten/terminieren:

4. TM schaltet sich ab, wenn interner Zustand von TM und aktuelles Zeichen unter dem Lese/Schreibkopf von TM nicht als Anfang einer Zeile in T vorkommen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Turing-berechenbar

Definition B.1.4 (Turing-berechenbar)

Eine partiell definierte Funktion f ist Turing-berechenbar gdw. es gibt eine Turing-Tafel T, eine T beobachtende Turing-Maschine TM, eine eineindeutige Codierung der Argument- und Bildwerte von f als Rechenbandinhalte, so dass TM angesetzt auf die Codierung eines Arguments a von f mit der Codierung des Bildwerts b von a auf dem Rechenband terminiert, wenn $f(a) = b$ definiert ist, oder nicht terminiert oder mit einem speziellen Fehlerwert als Bandinhalt terminiert, wenn $f(a)$ nicht definiert ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

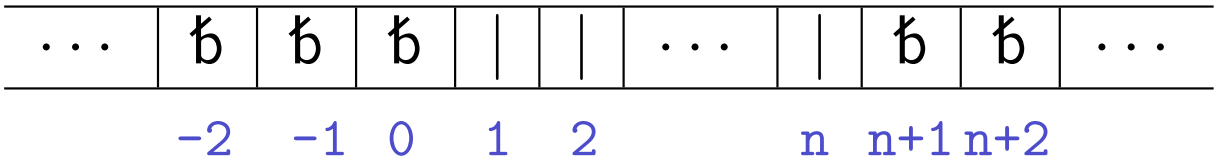
Beispiele zweier Turing-Programme (1)

...gegeben durch die Turing-Tafeln T_1 und T_2 über dem einelementigen Zeichenvorrat $\{|\}$.

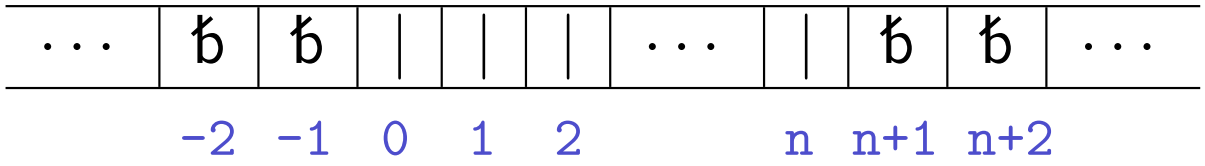
1. Turing-Tafel T_1:

0	ƀ	|	1
1	|	L	2

Eine T_1 beobachtende Turing-Maschine TM terminiert angesetzt auf das Rechenband (vgl. Übungsaufgabe B.1.4):



im Zustand 2 mit dem Bandinhalt:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiele zweier Turing-Programme (2)

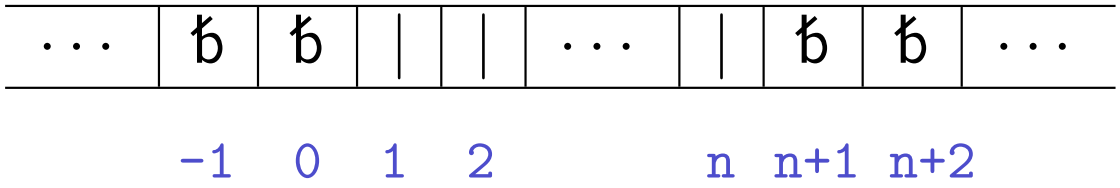
2. Turing-Tafel T_2:

0	↯	R	1
1	↯	↯	8
1	|	↯	2
2	↯	R	3
3	|	R	3
3	↯	R	4
4	|	R	4
4	↯	|	5
5	|	R	5
5	↯	|	6
6	|	L	6
6	↯	L	7
7	|	L	7
7	↯	R	1

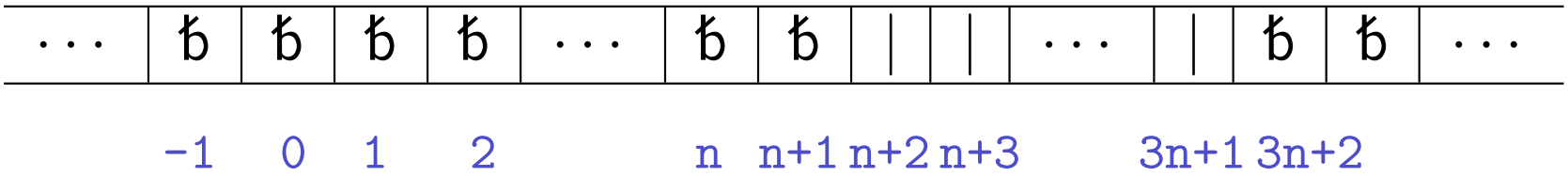
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiele zweier Turing-Programme (3)

Eine T_2 beobachtende Turing-Maschine TM terminiert angesetzt auf das Rechenband (vgl. Übungsaufgabe B.1.4):



mit dem Bandinhalt:



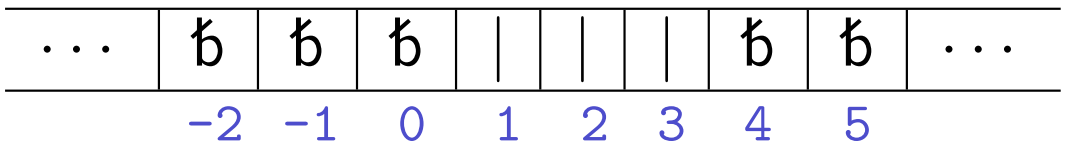
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe B.1.4

Eine Turing-Maschine TM, die angesetzt auf ein Band mit je einem Strich auf den Feldern 1 bis n, das ansonsten leer ist, die Turing-Tafel

- T_1 beobachtet, fügt zu den vorhandenen Strichen einen Strich im Feld 0 hinzu, geht einen Schritt nach links und terminiert im Zustand 2.
- T_2 beobachtet, löscht sukzessive alle Striche auf den Feldern 1 bis n und druckt $2n$ Striche neu auf das Band beginnend im Feld $n+2$ und endend im Feld $3n+1$.

1. Überprüfe dieses Verhalten von TM durch schrittweises händisches Nachvollziehen der Arbeitsschritte von TM für jeweils folgenden Anfangsinhalt des Rechenbands:



2. In welchem Zustand terminiert TM T_2 beobachtend?

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

B.2

Markov-Algorithmen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Markov-Tafel

Definition B.2.1 (Markov-Tafel)

Eine Markov-Tafel T über einem (endlichen) Zeichenvorrat $\mathcal{A}$ ist eine Tafel mit 5 Spalten und $m+1$ Zeilen, $m \geq 0$:

0	a_0	i_0	b_0	j_0
1	a_1	i_1	b_1	j_1
...				
k	a_k	i_k	b_k	j_k
...				
m	a_m	i_m	b_m	j_m

Dabei gilt:

- $k, i_p, j_p \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq m$.
- $a_p, b_p \in \mathcal{A}^*$ mit $\mathcal{A}^*$ Menge der Worte über $\mathcal{A}$; ε bezeichnet das leere Wort aus $\mathcal{A}^*$.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Markov-Algorithmus

Definition B.2.2 (Markov-Algorithmus)

Ein Markov-Algorithmus

$$M = (T, Z, E, A, f_M)$$

ist gegeben durch

1. Eine Zwischenkonfigurationsmenge $Z = \mathcal{A}^* \times \mathbb{N}_0$.
2. Eine Eingabekonfigurationsmenge $E \subseteq \mathcal{A}^* \times \{0\}$.
3. Eine Ausgabekonfigurationsmenge $A \subseteq \mathcal{A}^* \times [m+1..\infty)$.
4. Eine Markov-Tafel T über dem (endlichen) Zeichenvorrat $\mathcal{A}$ mit $m+1$ Zeilen mit der durch T definierten (partiellen) Überführungsfunktion

$$f_M : Z \to Z$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Markov-Algorithmus (fgs.)

...wobei die Überführungsfunktion

$$f_M : Z \to Z$$

definiert ist durch:

$\forall\, x \in \mathcal{A}^*.\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$

$$f_M(x,k) =_{df} \begin{cases} (x, i_k) & \text{falls } k \leq m \text{ und } a_k \text{ keine Teilzeichenreihe von } x \text{ ist.} \\ (\bar{x} b_k \bar{\bar{x}}, j_k) & \text{falls } k \leq m \text{ und } x = \bar{x} a_k \bar{\bar{x}}, \text{ wobei die Länge von } \bar{x} \text{ minimal ist.} \\ \textit{undefiniert} & \text{falls } k > m. \end{cases}$$

Der Markov-Alogorithmus M terminiert, wenn das Resultat der Überführungsfunktion undefiniert ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Markov-berechenbar

Definition B.2.3 (Markov-berechenbar)

Eine partiell definierte Funktion f ist Markov-berechenbar gdw. es gibt einen Markov-Algorithmus M, eine eineindeutige Codierung der Argument- und Bildwerte von f über dem Zeichenvorrat von M, so dass M angesetzt auf die Codierung eines Arguments a von f mit der Codierung des Bildwerts b von a terminiert, wenn $f(a) = b$ definiert ist, oder nicht terminiert oder mit einer speziellen Zeichenreihe als Fehlerwert terminiert, wenn $f(a)$ nicht definiert ist.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiele dreier Markov-Algorithmen (1)

...in Form der Markov-Tafeln T_1, T_2 und T_3.

1. Markov-Tafel T_1 über dem Alphabet $\{|\}$:

$$0 \quad \varepsilon \quad i_0 \quad | \quad 1$$

2. Markov-Tafel T_2 über dem Alphabet $\{|, ƀ\}$:

$$0 \quad ƀ \quad i_0 \quad \varepsilon \quad 1$$

wobei in T_1 und T_2 der Wert i_0 (verschieden von null) beliebig aus $\mathbb{N}_1$ gewählt werden darf.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiele dreier Markov-Algorithmen (2)

3. Markov-Tafel T_3 über dem Alphabet $\{|, \alpha, \beta, \text{ƀ}\}$:

0	ƀ	i_0	ƀβ	1
1	β|	2	|β	1
2	|ƀ	7	ƀ	3
3	ƀ	i_3	ƀα	4
4	α|	6	|α	5
5	β	i_5	β|	4
6	α	i_6	ε	2
7	ƀ|	8	ƀ	7
8	ƀβ	i_8	ε	9

wobei die Werte i_0, i_3, i_5, i_6, i_8 (verschieden von null) beliebig aus $\mathbb{N}_1$ gewählt werden dürfen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Beispiele dreier Markov-Algorithmen (3)

Stellt man die natürlichen Zahlen als Strichfolgen im Einersystem dar (die leere Strichfolge ε repräsentiert die null, die Strichfolge aus n Strichen die Zahl n), so gilt: Die durch die Markov-Tafel

- T_1 induzierte Überführungsfunktion realisiert die Nachfolger-Funktion einer als Strichfolge gegebenen natürlichen Zahl: '$nf\ ||| = ||||$'
- T_2 induzierte Überführungsfunktion realisiert die Addition zweier als Strichfolgen gegebener natürlicher Zahlen: '$|| + ||| = |||||$'
- T_3 induzierte Überführungsfunktion realisiert die Multiplikation zweier als Strichfolgen gegebener natürlicher Zahlen: '$|| * ||| = ||||||$'

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe B.2.4

Überprüfe anhand einiger selbstgewählter Beispiele durch schrittweises händisches Nachvollziehen der Arbeitsschritte der durch die Markov-Tafeln T_1, T_2 und T_3 induzierten Überführungsfunktionen, dass die zugehörigen Markov-Algorithmen

- M_1 angewendet auf eine als Strichfolge gegebene natürliche Zahl deren Nachfolger dargestellt als Strichfolge berechnet.
- M_2 angewendet auf zwei als Strichfolgen gegebene durch genau ein Leerzeichen ƀ voneinander getrennte natürliche Zahlen deren Summe dargestellt als Strichfolge berechnet.
- M_3 angewendet auf zwei als Strichfolgen gegebene durch genau ein Leerzeichen ƀ voneinander getrennte natürliche Zahlen deren Produkt dargestellt als Strichfolge berechnet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

B.3

Primitiv rekursive Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Primitiv rekursive Funktionen

Definition B.3.1 (Primitiv rekursive Funktionen)

Eine Funktion f heißt primitiv rekursiv, wenn f ausgehend von den Grundfunktionen $\lambda x.0$ und $\lambda x.x + 1$ durch endlich viele Anwendungen expliziter Transformationen, Kompositionen und primitiver Rekursionen hervorgeht.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Transformation, Komposition

Definition B.3.2 (Explizite Transformation)

Eine Funktion g geht aus einer Funktion f durch eine explizite Transformation hervor, wenn es $e_1, \ldots, e_n$ gibt, so dass jedes e_i entweder eine Konstante aus $\mathbb{N}$ oder eine Variable x_i ist, so dass für alle $\bar{x}^m \in \mathbb{N}^m$ gilt:

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f(e_1, \ldots, e_n)$$

Definition B.3.3 (Komposition)

Sind $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}_\perp$, $g_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}_\perp$ für $i = 1, \ldots, k$ Funktionen, dann geht $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}_\perp$ durch Komposition aus den Funktionen $f, g_1, \ldots, g_k$ hervor gdw. für alle $\bar{x}^n \in \mathbb{N}^n$ gilt:

$$h(\bar{x}^n) = \begin{cases} f(g_1(\bar{x}^n), \ldots, g_k(\bar{x}^n)) & \text{falls jedes } g_i(\bar{x}^n) \neq \perp \text{ ist} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Primitive Rekursion

Definition B.3.4 (Primitive Rekursion)

Sind $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}_\perp$ und $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}_\perp$ Funktionen, dann geht $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}_\perp$ durch primitive Rekursion aus f und g hervor gdw. für alle $\bar{x}^n \in \mathbb{N}^n, t \in \mathbb{N}$ gilt:

$$h(0, \bar{x}^n) = f(\bar{x}^n)$$

$$h(t+1, \bar{x}^n) = \begin{cases} g(t, h(t, \bar{x}^n), \bar{x}^n) & \text{falls } h(t, \bar{x}^n) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

B.4

μ-rekursive Funktionen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

μ-rekursive Funktionen, Minimierung

Definition B.4.1 (μ-rekursive Funktionen)

Eine Funktion f heißt μ-rekursiv, wenn f ausgehend von den Grundfunktionen $\lambda x.0$ und $\lambda x.x+1$ durch endlich viele Anwendungen expliziter Transformationen, Kompositionen, primitiver Rekursionen und Minimierungen totaler Funktionen hervorgeht.

Definition B.4.2 (Minimierung)

Ist $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}_\perp$ eine Funktion, dann geht $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}_\perp$ aus g durch Minimierung hervor gdw. für alle $\bar{x}^n \in \mathbb{N}^n$ gilt:

$$h(\bar{x}^n) = \begin{cases} t & \text{falls } t \in \mathbb{N} \text{ die kleinste Zahl ist mit } g(t, \bar{x}^n) = 0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

B.5

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (1)


Friedrich L. Bauer. *Historische Notizen – Wer erfand den von-Neumann-Rechner?* Informatik-Spektrum 21(3):84-89, 1998.


Cristian S. Calude. *People and Ideas in Theoretical Computer Science*. Springer-V., 1999.


Luca Cardelli. *Global Computation*. ACM SIGPLAN Notices 32(1):66-68, 1997.


Gregory J. Chaitin. *The Limits of Mathematics*. Journal of Universal Computer Science 2(5):270-305, 1996.


Gregory J. Chaitin. *The Limits of Mathematics – A Course on Information Theory and the Limits of Formal Reasoning*. Springer-V., 1998.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (2)


Gregory J. Chaitin. *The Unknowable*. Springer-V., 1999.


Paul Cockshott, Lewis M. Mackenzie, Greg Michaelson. *Computation and its Limits*. Open University Press, 2012.


Paul Cockshott, Greg Michaelson. *Are There New Models of Computation? Reply to Wegner and Eberbach*. The Computer Journal 50(2):232-247, 2007.


S. Barry Cooper, Benedikt Löwe, Andrea Sorbi (Hrsg). *New Computational Paradigms: Changing Conceptions of What is Computable*. Springer-V., 2008.


B. Jack Copeland. *The Broad Conception of Computation*. American Behavioral Scientist 40(6):690-716, 1997.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (3)

- B. Jack Copeland. *The Church-Turing Thesis*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2002. `http://plato.stanford.edu/entries/church-turing`
- B. Jack Copeland. *Accelerating Turing Machines*. Minds and Machines 12(2):281-301, 2002.
- B. Jack Copeland. *Hypercomputation*. Minds and Machines 12(4):461-502, 2002.
- B. Jack Copeland, Eli Dresner, Diane Proudfoot, Oron Shagrir. *Viewpoint: Time to Reinspect the Foundations? Questioning if Computer Science is Outgrowing its Traditional Foundations*. Communications of the ACM 59(11):34-36, 2016.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (4)

- B. Jack Copeland, Carl J. Posy, Oron Shagrir (Hrsg.). *Computability: Turing, Gödel, Church, and Beyond.* MIT Press, 2013.
- B. Jack Copeland, Oron Shagrir. *The Church-Turing Thesis: Logical Limit or Breachable Barrier?* Communications of the ACM 62(1):66-74, 2019.
- Martin Davis. *What is a Computation?* Kapitel in Lynn A. Steen (Hrsg.), Mathematics Today – Twelve Informal Essays. Springer-V., 241-268, 1978.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (5)


Martin Davis. *Mathematical Logic and the Origin of Modern Computers*. Studies in the History of Mathematics, Mathematical Association of America, 137-165, 1987. Nachdruck in: Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine – A Half-Century Survey, Kemmerer&Unverzagt und Oxford University Press, 149-174, 1988.


Martin Davis. *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*. W.W. Norton and Company, 2000.


Martin Davis. *The Myth of Hypercomputation*. Christof Teuscher (Hrsg.), Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker, Springer-V., 195-212, 2004.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (6)


Martin Davis. *The Church-Turing Thesis: Consensus and Opposition*. In Proceedings of the 2nd Conference on Computability in Europe – Logical Approaches to Computational Barriers (CiE 2006), Springer-V., LNCS 3988, 125-132, 2006.


Martin Davis. *Why There is No Such Discipline as Hypercomputation*. Applied Mathematics and Computation 178(1):4-7, Special issue on Hypercomputation, 2006.


John W. Dawson Jr. *Gödel and the Origin of Computer Science*. In Proceedings of the 2nd Conference on Computability in Europe – Logical Approaches to Computational Barriers (CiE 2006), Springer-V., LNCS 3988, 133-136, 2006.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (7)


Peter J. Denning. *The Field of Programmers Myth*. Communications of the ACM 47(7):15-20, 2004.


Peter J. Denning, Peter Wegner. *Introduction to What is Computation*. The Computer Journal 55(7):803-804, 2012.


David Deutsch. *Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer*. Proceedings of the Royal Society A, 400(1818), 1985. doi:10.1098/rspa.1985.0070


Jon Doyle. *What is Church's Thesis? An Outline*. Minds and Machines 12(4):519-520, 2002.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (8)


Charles E.M. Dunlop. Book review on: M. Gams, M. Paprzycki, X. Wu (Hrsg.). *Mind Versus Computer: Were Dreyfus and Winograd Right?*, Frontiers in Artificial Intelligence and Applications Vol. 43, IOS Press, 1997. Minds and Machines 10(2):289-296, 2000.


Eugene Eberbach, Dina Q. Goldin, Peter Wegner. *Turing's Ideas and Models of Computation*. Christof Teuscher (Hrsg.), Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker, Springer-V., 159-194, 2004.


Bertil Ekdahl. *Interactive Computing does not Supersede Church's Thesis*. In Proceedings of the 17th International Conference on Computer Science, Association of Management and the International Association of Management, Vol. 17, No. 2, Part B, 261-265, 1999.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (9)


Matjaž Gams. *The Turing Machine may not be the Universal Machine – A Reply to Dunlop*. Minds and Machines 12(1):137-142, 2002.


Matjaž Gams. *Alan Turing, Turing Machines and Stronger*. Informatica 37(1):9-14, 2013.


Dina Q. Goldin, Scott B. Smolka, Paul C. Attie, Elaine L. Sonderegger. *Turing Machines, Transition Systems, and Interaction*. Information and Computation Journal 194(2):101-128, 2004.


Dina Q. Goldin, Peter Wegner. *The Interactive Nature of Computing: Refuting the Strong Church-Rosser Thesis*. Minds and Machines 18(1):17-38, 2008.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (10)

Yuri Gurevich. *What is an Algorithm?* In Proceedings of SOFSEM 2012: Theory and Practice of Computer Science - 38th Conference on Current Trends in the Theory and Practice of Computer Science. Springer-V., LNCS 7147, 31-42, 2012.

Yuri Gurevich. *Unconstrained Church-Turing Thesis cannot Possibly be True*. CoRR abs/1901.04911, 2019. `https://arxiv.org/abs/1901.04911`

Brosl Hasslacher. *Beyond the Turing Machine*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 387-402, 1995.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (11)

- Mark Hogarth. *Non-Turing Computers are the New Non-Euclidean Geometries*. International Journal of Unconventional Computing 5(3-4):277-291, 2009. http://www.oldcitypublishing.com/journals/ijuc-home/ijuc-issue-contents/ijuc-volume-5-number-3-4-2009/ijuc-5-3-4-p-277-291
- Neil D. Jones. *Computability and Complexity from a Programming Perspective*. MIT Press, 1997.
- Saul B. Kripke. *The Church-Turing "Thesis" as a Special Corollary of Gödel's Completeness Theorem*. In B. Jack Copeland, Carl J. Posy, Oron Shagrir (Hrsg.) Computability: Turing, Gödel, Church, and Beyond. MIT Press, 77-104, 2013.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (12)


John MacCormick. *What can be Computed? A Practical Guide to the Theory of Computation*. Princeton University Press, 2018.


Greg Michaelson. *Programming Paradigms, Turing Completeness and Computational Thinking*. The Art, Science, and Engineering of Programming 4(3), Article 4, 21 pages, 2020.


Emil Leon Post. *Finite Combinatory Processes: Formulation I*. The Journal of Symbolic Logic 1(3):103-105, 1936.


Michael Prasse, Peter Rittgen. *Bemerkungen zu Peter Wegners Ausführungen über Interaktion und Berechenbarkeit*. Informatik-Spektrum 21(3):141-146, 1998.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (13)

- Michael Prasse, Peter Rittgen. *Why Church's Thesis Still Holds. Some Notes on Peter Wegner's Tracts on Interaction and Computability*. The Computer Journal 41(6):357-362, 1998.
- Bernhard Reus. *Limits of Computation: From a Programming Perspective*. Springer-V., 2016.
- Edna E. Reiter, Clayton M. Johnson. *Limits of Computation: An Introduction to the Undecidable and the Intractable*. Chapman and Hall, 2012.
- Uwe Schöning. *Complexity Theory and Interaction*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine – A Half-Century Survey. 2. Auflage, Springer-V., 519-536, 1995.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (14)

- Jack T. Schwartz. *Do the Integers Exist? The Unknowability of Arithmetic Consistency*. Communications on Pure and Applied Mathematics 58:1280-1286, 2005.
- Dennis Shasha. *Future of Computing: Inspiration from Nature*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):38-39, 2012.
- Wilfried Sieg. *Church without Dogma: Axioms for Computability*. In S. Barry Cooper, Benedikt Löwe, Andrea Sorbi (Hrsg.), New Computational Paradigms - Changing Conceptions of What is Computable, Springer-V., 139-152, 2008.
- Tom Stuart. *Understanding Computation: From Simple Machines to Impossible Programs*. O'Reilly, 2013.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (15)


Alan Turing. *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*. Proceedings of the London Mathematical Society 42(2):230-265, 1936. Correction, ibid, 43:544-546, 1937.


Alan Turing. *Computing Machinery and Intelligence*. Mind 59:433-460, 1950.


Jan van Leeuwen, Jirí Wiedermann. *On Algorithms and Interaction*. In Proceedings of the 25th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2000), Springer-V., LNCS 1893, 99-112, 2000.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (16)


Jan van Leeuwen, Jirí Wiedermann. *The Turing Machine Paradigm in Contemporary Computing*. In Björn Enquist, Wilfried Schmidt (Hrsg.), Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond. Springer-V., 1139-1155, 2001.


Jan van Leeuwen, Jirí Wiedermann. *Beyond the Turing Limit: Evolving Interactive Systems*. In Proceedings of the 28th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics (SOFSEM 2001), Springer-V., LNCS 2234, 90-109, 2001.


Robin Milner. *Elements of Interaction: Turing Award Lecture*. Communications of the ACM 36(1):78-89, 1993.


Hava T. Siegelmann. *Neural Networks and Analog Computation: Beyond the Turing Limit.* Birkhäuser, 1999.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (17)


Peter Wegner. *Why Interaction is More Powerful Than Algorithms*. Communications of the ACM 40(5):81-91, 1997.


Peter Wegner. *Interactive Foundations of Computing*. Theoretical Computer Science 192(2):315-351, 1998.


Peter Wegner. *Observability and Empirical Computation*. The Monist 82(1), Issue on the Philosophy of Computation, 1999.
www.cs.brown.edu/people/pw/papers/monist.ps


Peter Wegner. *The Evolution of Computation*. The Computer Journal 55(7):811-813, 2012.


Peter Wegner, Eugene Eberbach. *New Models of Computation*. The Computer Journal 47(1):4-9, 2004.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (18)

Peter Wegner, Dina Q. Goldin. *Interaction, Computability, and Church's Thesis*. Accepted to the British Computer Journal.
`www.cs.brown.edu/people/pw/papers/bcj1.pdf`

Peter Wegner, Dina Q. Goldin. *Computation Beyond Turing Machines*. Communications of the ACM 46(4):100-102, 2003.

Peter Wegner, Dina Q. Goldin. *The Church-Turing Thesis: Breaking the Myth*. In Proceedings of the 1st Conference on Computability in Europe – New Computational Paradigms (CiE 2005), Springer-V., LNCS 3526, 152-168, 2005.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

C

Ausgewählte andere funktionale Sprachen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Schlaglichter

...auf ausgewählte andere funktionale Programmiersprachen und wesentliche ihrer Eigenschaften:

- ML: Starker Wettbewerber von Haskell mit sofortiger (engl. eager) Auswertung.
- Lisp: Der *Oldtimer* unter den funktionalen Sprachen.
- APL: Ein sprachlicher Exot.
- ...

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

C.1

ML

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

ML: Eine Sprache mit ‘sofortiger’ Auswertung

ML, eine strikte funktionale Sprache.

Wichtige Eigenschaften:

- Starke Typisierung mit Typinferenz, keine Typklassen.
- Umfangreiches Typkonzept für Module und abstrakte Datentypen (ADTs).
- Lexical scoping, curryfizieren (wie Haskell).
- Zahlreiche Erweiterungen (z.B. in OCaml) auch für imperative und objektorientierte Programmierung.
- Sehr gute theoretische Fundierung.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

ML-Programmbeispiel: Module/ADTs in ML

```
structure S = struct
    type 't Stack                = 't list;
    val  create                  = Stack nil;
    fun  push x (Stack xs)       = Stack (x::xs);
    fun  pop (Stack nil)         = Stack nil;
    |    pop (Stack (x::xs))     = Stack xs;
    fun  top (Stack nil)         = nil;
    |    top (Stack (x:xs))      = x;
end;

signature st = sig type q; val push: 't -> q -> q; end;

structure S1:st = S;
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

C.2

Lisp

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Lisp: Der 'Oldtimer' fkt. Programmierspr.

Lisp, eine bewährte und weiterhin häufig verwendete strikte funktionale Sprache mit imperativen Zusätzen.

Wichtige Eigenschaften:

- Einfache, interpretierte Sprache, dynamisch typisiert.
- Listen sind gleichzeitig Daten und Funktionsanwendungen.
- Nur lesbar, wenn Programme gut strukturiert sind.
- Erfolgreicher Einsatz in vielen Bereichen, insbesondere künstliche Intelligenz, Expertensysteme.
- Umfangreiche Bibliotheken, leicht erweiterbar.
- Sehr gut zur Metaprogrammierung geeignet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Ausdrücke in Lisp

Beispiele für Symbole:	A	(Atom)
	austria	(Atom)
	68000	(Zahl)

Beispiele für Listen:
(plus a b)
((meat chicken) water)
(unc trw synapse ridge hp)
nil bzw. () entsprechen leerer Liste

Eine Zahl repräsentiert ihren Wert direkt —
ein Atom ist der Name eines assoziierten Werts.

(setq x (a b c)) bindet x global an (a b c)
(let ((x a) (y b)) e) bindet x lokal in e an a und y an b

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Funktionen in Lisp

Das erste Element einer Liste wird normalerweise als Funktion interpretiert, anzuwenden auf die restlichen Listenelemente.

(quote a) bzw. 'a liefert Argument a selbst als Ergebnis.

Beispiele für primitive Funktionen:

```
(car '(a b c))     ->> a
(car 'a)           ->> error
(cdr '(a b c))     ->> (b c)
(cdr '(a))         ->> nil
(cons 'a '(b c))   ->> (a b c)
(cons '(a) '(b))   ->> ((a) b)
```

```
(atom 'a)          ->> t
(atom '(a))        ->> nil
(eq 'a 'a)         ->> t
(eq 'a 'b)         ->> nil
(cond ((eq 'x 'y) 'b)
      (t 'c))      ->> c
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Funktionsdefinitionen in Lisp

- (lambda (x y) (plus x y)) ist Funktion mit zwei Parametern.
- ((lambda (x y) (plus x y)) 2 3) wendet diese Funktion auf die Argumente 2 und 3 an und liefert 5 als Resultat.
- (define (add (lambda (x y) (plus x y)))) definiert einen globalen Namen "'add'" für die Funktion.
- (defun add (x y) (plus x y)) ist abgekürzte Schreibweise dafür.

Beispiel:

```
(defun reverse (l) (rev nil l))
(defun rev (out in)
    (cond ((null in) out)
          (t (rev (cons (car in) out) (cdr in)))))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Closures in Lisp

- Kein curryfizieren in Lisp, sog. closures als Ersatz.
- Closures: lokale Bindungen behalten Wert auch nach Verlassen der Funktion.

  Beispiel:
  ```
  (let ((x 5))
    (setf (symbol-function 'test)
      #'(lambda () x)))
  ```
- Praktisch: Funktion gibt closure zurück.

  Beispiel:
  ```
  (defun create-function (x)
    (function (lambda (y) (add x y))))
  ```
- Closures sind flexibel, aber curryfizieren ist viel einfacher.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Dynamisches vs. statisches Binden

...engl. dynamic scoping, static scoping.

- Lexikalisch: Bindung ortsabhängig (Quellcode).
- Dynamisch: Bindung vom Zeitpunkt abhängig.
- 'Normales' Lisp: Lexikalisches Binden.

  Beispiel:
  ```
  (setq a 100)
  (defun test () a)
  (let ((a 4)) (test))    ->> 100
  ```

- Dynamisches Binden durch (defvar a) möglich.

  Das obige Beispiel liefert mit dynamischer Bindung 4 als Resultat (statt 100 wie bei statischer Bindung).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Makros

- Code expandiert, nicht als Funktion aufgerufen (wie C).
- Definition: Erzeugt Code, der danach evaluiert wird.

  Beispiel:
  ```
  (defmacro get-name (x n)
      (list 'cadr (list 'assoc x n)))
  ```
- Expansion und Ausführung:

  (get-name 'a b) <<–>> (cadr (assoc 'a b))
- Nur Expansion:

  (macroexpand '(get-name 'a b)) –>> '(cadr (assoc 'a b))

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Lisp im Vergleich mit Haskell

Kriterium	Lisp	Haskell
Basis	Einfacher Interpreter	Formale Grundlage
Zielsetzung	Viele Bereiche	Referentiell transparent
Verwendung	Noch häufig	Zunehmend
Sprachumfang	Riesig (kleiner Kern)	Moderat, wachsend
Syntax	Einfach, verwirrend	Modern, Eigenheiten
Interaktivität	Hervorragend	Mit Einschränkungen
Typisierung	Dynamisch, einfach	Statisch, modern
Effizienz	Relativ gut	Relativ gut
Zukunft	Noch lange genutzt	Einflussreich

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

C.3

APL

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

APL: Ein Exot unter den Sprachen

APL, eine ältere applikative (funktionale) Sprache mit imperativen Zusätzen.

Wichtige Eigenschaften:

- Dynamische Typisierung.
- Verwendung speziellen Zeichensatzes.
- Zahlreiche Funktionen (höherer Ordnung) sind vordefiniert; Sprache aber nicht einfach erweiterbar.
- Programme sehr kurz und kompakt, aber kaum lesbar.
- Besonders für Berechnungen mit Feldern gut geeignet.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

APL-Programmentwicklung

...anhand eines Beispiels: Berechne d. Primzahlen von 1 bis N:

Schritt 1. $(\iota N) \circ.| (\iota N)$

Schritt 2. $0 = (\iota N) \circ.| (\iota N)$

Schritt 3. $+/[2]\ 0 = (\iota N) \circ.| (\iota N)$

Schritt 4. $2 = (+/[2]\ 0 = (\iota N) \circ.| (\iota N))$

Schritt 5. $(2 = (+/[2]\ 0 = (\iota N) \circ.| (\iota N))) / \iota N$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

C.4

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang C (1)

David MacQueen, Robert Harper, John Reppy. *The History of Standard ML*. 4th History of Programming Languages Conference (HOPL-IV). In Proceedings of the ACM on Programming Languages, Volume 4, Issue HOPL, Article 86, 100 pages, 2020. https://doi.org/10.1145/3386336

Guy L. Steele Jr., Richard P. Gabriel. *The Evolution of Lisp*. In Proceedings of the 2nd History of Programming Languages Conference (HOPL-II), ACM SIGPLAN Notices 28(3):231-270, 1993. https://doi.org/10.1145/154766.155373

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang C (2)

Gerald J. Sussman, Guy L. Steele Jr., Richard P. Gabriel. *A Brief Introduction to Lisp*. ACM SIGPLAN Notices 28(3):361-362, 1993. https://doi.org/10.1145/155360.155597

Stefan Monnier, Michael Sperber. *Evolution of Emacs Lisp*. 4th History of Programming Languages Conference (HOPL-IV). In Proceedings of the ACM on Programming Languages, Volume 4, Issue HOPL, Article 74, 55 pages, 2020. https://doi.org/10.1145/3386324

Adin D. Falkoff, Kenneth E. Iverson. *The Evolution of APL*. 1st History of Programming Languages Conference (HOPL-I). ACM SIGPLAN Notices 13(8):47-57, 1978. https://doi.org/10.1145/960118.808372

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang C (3)

Reprint. *APL Language Summary*. ACM SIGPLAN Notices 13(8):45, 1978. https://doi.org/10.1145/960118.808371

Roger K.W. Hui, Morten J. Kromberg. *APL Since 1978*. 4th History of Programming Languages Conference (HOPL-IV). In Proceedings of the ACM on Programming Languages, Volume 4, Issue HOPL, Article 69, 108 pages, 2020. https://doi.org/10.1145/3386319

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

D

Datentypen in Pascal

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

D.1

Pascals Typvarietäten

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Aufzählungstypen in Pascal

```
TYPE jahreszeiten = (fruehling, sommer, herbst, winter);
     spielfarbe   = (karo, herz, pik, kreuz);
     werktage     = (montag, dienstag, mittwoch,
                     donnerstag, freitag);
     wochenende   = (samstag, sonntag);
```

Bemerkungen:

- Gleichheits- und Ordnungsrelationen sind auf Aufzählungstypen automatisch definiert (entspricht `deriving (Eq,Ord)`), so dass Aufzählungstypwerte verglichen werden können, z.B. karo $=$ pik ->> false, karo $<$ pik ->> true, kreuz $>=$ herz ->> true, herz $<>$ kreuz ->> true.
- Die Funktionen succ und pred liefern den Nachfolge- und Vorgängerwert eines Werts, die Funktion ord seine Position in der Aufzählung (entspricht `deriving Enum`), z.B. succ (herz) ->> pik, pred (herz) ->> karo, succ (kreuz) undef., ord (karo) ->> 0, ord (kreuz) ->> 3.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Produkttypen in Pascal

```
TYPE person     = RECORD
                    name: ARRAY [1..50] OF char;
                    geschlecht: (maennlich, weiblich);
                    alter: 0..150
                  END;
     anschrift  = RECORD
                    gemeinde: ARRAY [1..50] OF char;
                    strasse: ARRAY [1..75] OF char;
                    hausnr: integer;
                    land: ARRAY [1..100] OF char
                  END;
```

Bemerkungen:

- Der Typ von alter ist hier als Ausschnittstyp ganzer Zahlen definiert. Werte des Typs 0..150 sind die Zahlen von 0 bis 150.
- Mögliche Bereichsüberschreitungen werden zur Laufzeit automatisch überprüft und führen zum Programmabbruch.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Summentypen in Pascal

```
TYPE index1 = 1..5;
TYPE index2 = 1..100;
TYPE traegermedium = (buch, ebuch, dvd, cd);

TYPE bildSchriftUndTonTraeger =
 RECORD
  CASE
   medium: traegermedium OF
   buch: (autor, titel, verlag: ARRAY [index2] OF char;
          auflage: 1..20; lieferbar: boolean);
   ebuch: (autor, titel, verlag: ARRAY [index2] OF char;
           lizenzBisJahr: integer);
   dvd: (titel, regisseur: ARRAY [index2] OF char;
         hauptdarsteller, sprachen: ARRAY [index1,index2]
                                              OF char);
   cd: (kuenstler, titel: ARRAY [index2] OF char;
        spieldauer: ARRAY [1..3] OF integer)
 END;
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Mengentypen in Pascal

```
TYPE buchstaben = 'a'..'z';
TYPE zutaten = (mehl, zucker, salz, hefe, eier, essig,
                honig, rosinen, mandeln, joghurt, obst)

TYPE buchstabensuppe = SET OF buchstaben;
TYPE rezept = SET OF zutaten;

VAR vokalsuppe, allerleisuppe: buchstabensuppe;
VAR lebkuchen, nachtisch, verdorben: rezept;

vokalsuppe    := ['a','o','e','u']
                  * ['u','a'..'g'];          (Durchschnitt)
allerleisuppe := ['a'..'z'] - vokalsuppe;     (Differenz)
lebkuchen     := [mehl..salz,eier,honig..mandeln];
nachtisch     := [joghurt,obst];
verdorben     := lebkuchen + [essig];     (Vereinigung)
```

Bemerkung: Mengentypen in Pascal besitzen Eigenschaften und Funktionen, die denen von Listentypen und automatischer Listengenerierung in funktionalen Sprachen ähnlich sind.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

D.2

Leseempfehlungen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang D


Kathleen Jensen, Niklaus Wirth. *Pascal: User Manual and Report*. 2. Auflage, Springer-V., 1978.


Niklaus Wirth. *Recollections about the Development of Pascal*. In Proceedings of the History of Programming Languages Conference (HOPL-II), ACM SIGPLAN Notices 28(3):333-342, 1993. https://doi.org/10.1145/154766.155378


Peter Lee. *A Brief Introduction to Pascal*. In ACM SIGPLAN Notices 28(3):363-364, 1993. https://doi.org/10.1145/155360.155386


Charles Hayden. *A Brief Introduction to Concurrent Pascal*. In ACM SIGPLAN Notices 28(3):353-354, 1993. https://doi.org/10.1145/155360.155597

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

E

Implementierungsaspekte

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Lineare und repetitive Rekursion

...am Beispiel der Fakultätsfunktion.

Formulierung mittels linearer Rekursion:

Funktional (in Haskell)

```
fac :: Int -> Int
fac n
 | n == 0 = 1
 | True   = n * fac (n-1)
```

Imperativ (in Pseudo-Code)

```
FUNC fac (n: int): int;
 {
  IF n == 0 THEN fac := 1
  ELSE fac := n * fac(n-1) FI }
```

Formulierung mittels repetitiver Rekursion:

Funktional (in Haskell)

```
fac :: Int -> Int -> Int
fac n res
 | n == 0 = res
 | True   = fac (n-1) (n*res)
```

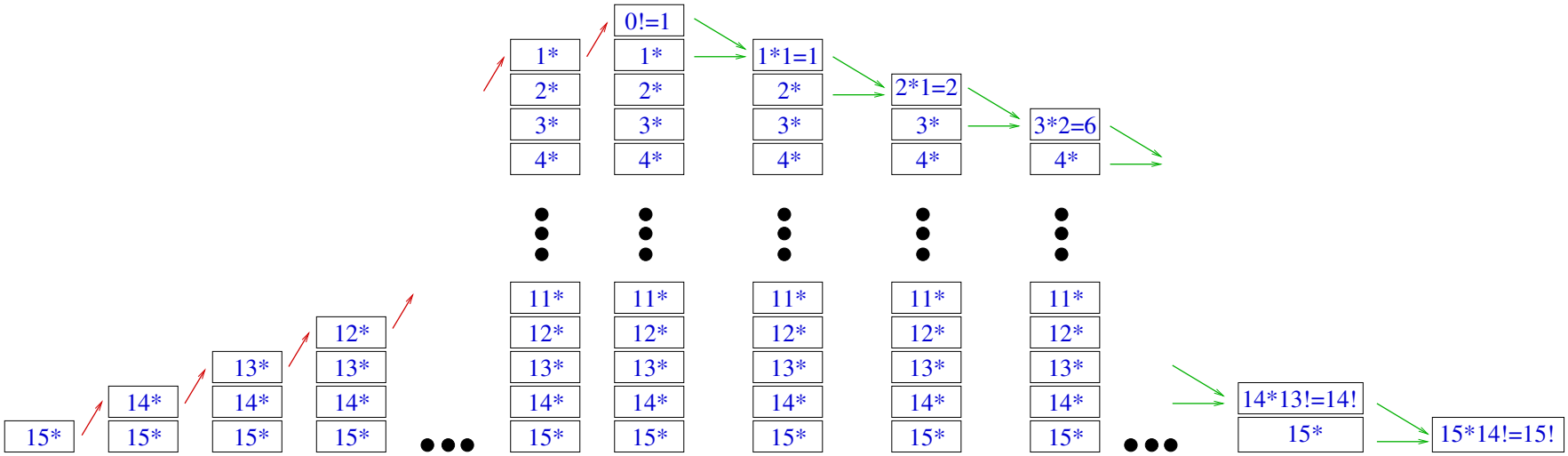
Imperativ (in Pseudo-Code)

```
FUNC fac (n,res: int): int;
 {
  IF n == 0 THEN fac := res
  ELSE fac := fac(n-1,n*res) FI }
```

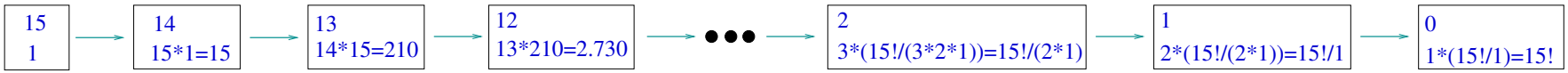
Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Berechnungsablauf

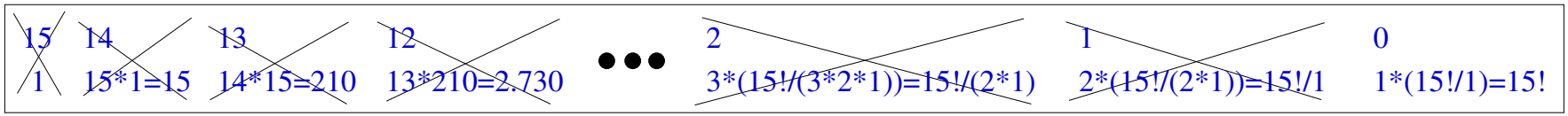
...im Fall linearer Rekursion:



...im Fall repetitiver Rekursion:

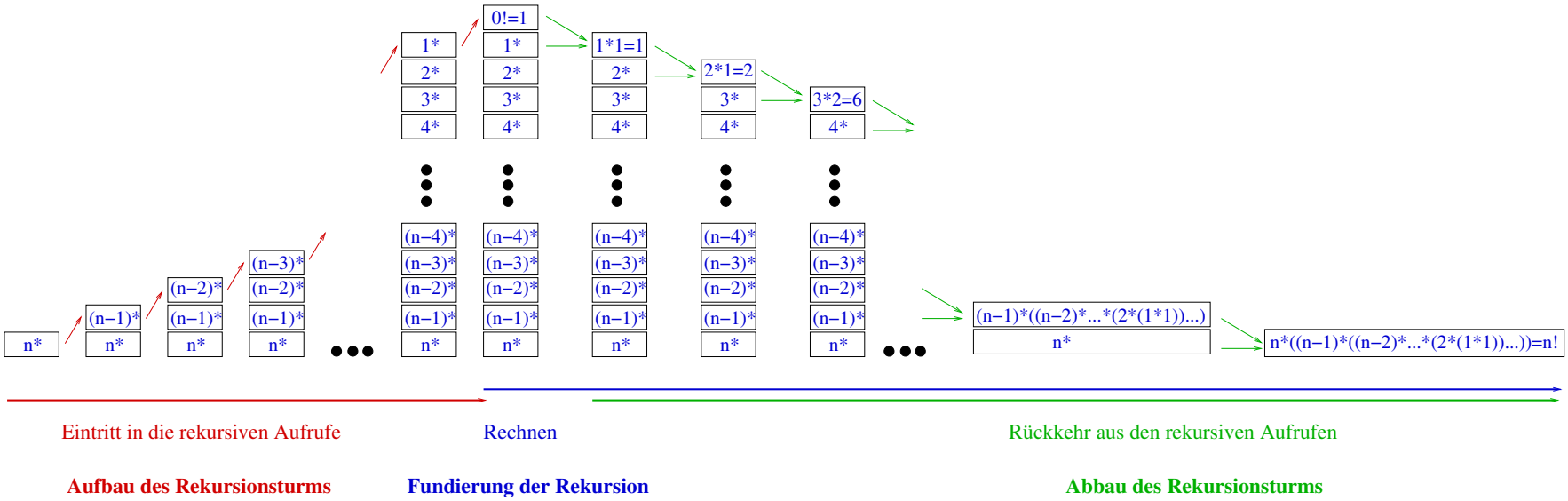


Ein (überschreibbarer) Speicherplatz reicht für die Rechnung:



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

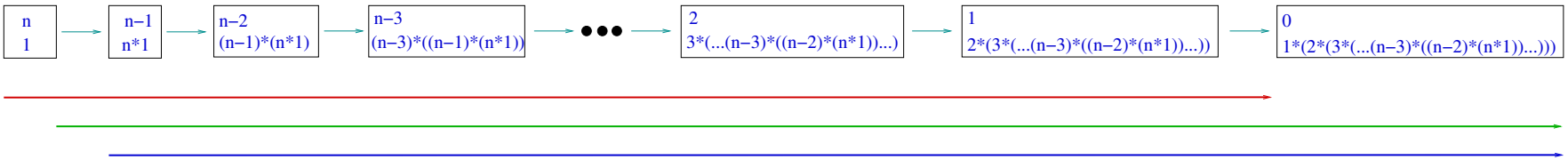
Laufzeitkeller/-stapel bei linearer Rekursion



- Im Fall linearer Rekursion ist der rekursive Aufruf nicht die letzte Aktivität in einem Rechenzweig; nach Rückkehr aus dem rekursiven Aufruf wird die Rechnung in der akuellen Funktionsinkarnation fortgesetzt.
- Für die Fortsetzung der Rechnung sind Werte vorzuhalten, organisiert in Form eines Laufzeitkellers/-stapels.
- Auf- und Abbau des Laufzeitkellers erfordern Verwaltungsaktivitäten, die über die eigentliche Berechnung hinausgehenden zusätzlichen Rechenaufwand zur Laufzeit verursachen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Laufzeitkeller/-stapel bei repetitiver Rekursion



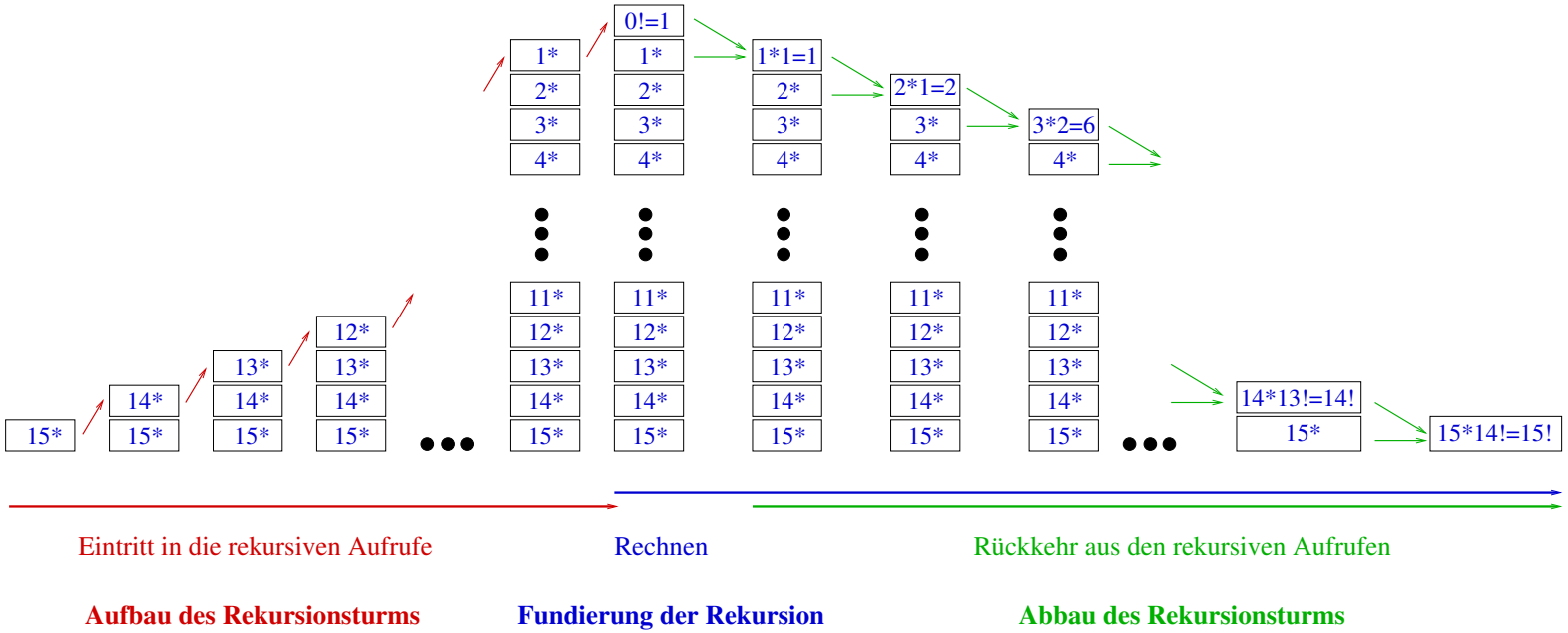
Eintritt, Rechnen und Rückkehr aus rekursiven Aufrufen gehen Hand in Hand.

Werte aus früheren Aufrufen werden nicht benötigt; ein Rekursionsturm entsteht nicht.

- Im Fall repetitiver Rekursion ist der rekursive Aufruf die letzte Aktivität in einem Rechenzweig; sie schließt den aktuellen Aufruf vollständig ab.
- Eine Rückkehr in diese (oder frühere) Funktionsinkarnationen erfolgt nicht; Werte müssen nicht für eine Fortsetzung der Rechnung vorgehalten werden.
- Der Laufzeitkeller bleibt flach; Rechenaufwand für Auf- und Abbau entsteht nicht.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Konkret: Lineare Rekursion am Bsp. von 15!



Ablauf der Rechnung:

- Phase 1: Vollständiger Aufbau des Terms (Eintritt in die Rekursion)

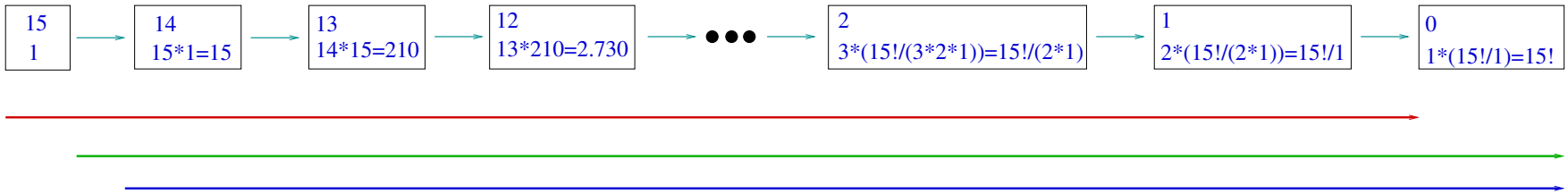
$$15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * (3 * (2 * (1 * 1)))) \ldots))))$$

- Phase 2: Ausführung der Rechnung (Rückkehr aus der Rekursion)

$$\begin{aligned} & 15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * (3 * (2 * (1 * 1)))) \ldots)))) \\ \rightsquigarrow\ & 15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * (3 * (2 * 1))) \ldots)))) \\ \rightsquigarrow\ & 15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * (3 * 2)) \ldots)))) \\ \rightsquigarrow\ & 15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * 6) \ldots)))) \\ \rightsquigarrow\ & \cdots \rightsquigarrow 15! = 1.307.674.368.000 \end{aligned}$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Konkret: Repetitive Rekursion am Bsp. v. 15!



Eintritt, Rechnen und Rückkehr aus rekursiven Aufrufen gehen Hand in Hand.

Werte aus früheren Aufrufen werden nicht benötigt; ein Rekursionsturm entsteht nicht.

Ablauf der Rechnung:

- 1-phasig: Termaufbau und Rechnung gehen Hand in Hand!

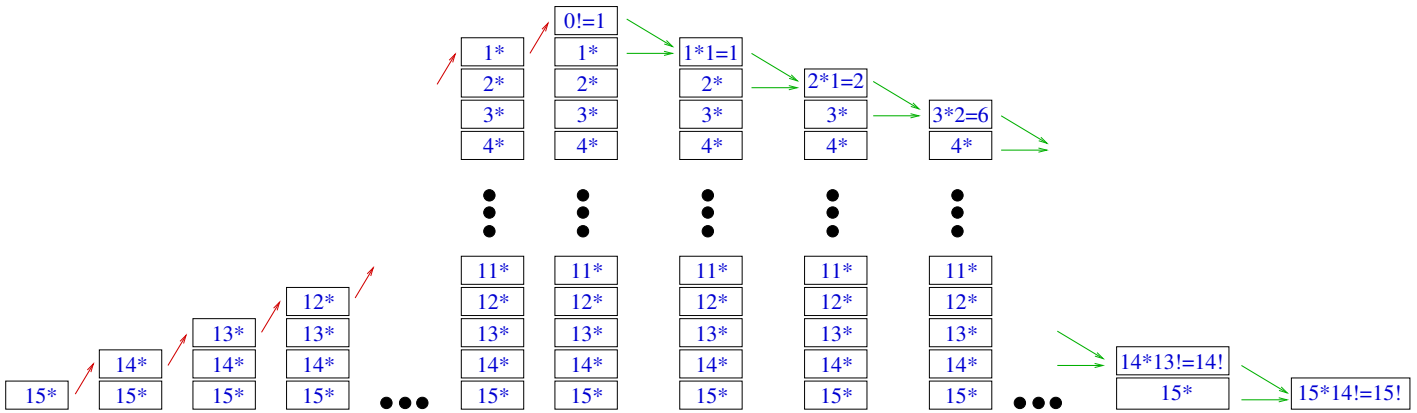
$$
\begin{aligned}
& 15 \;/\; 1 \\
\rightsquigarrow\; & 15-1=14 \;/\; 15*1=15 \\
\rightsquigarrow\; & 14-1=13 \;/\; 14*15=210 \\
\rightsquigarrow\; & 13-1=12 \;/\; 13*210=2.730 \\
\rightsquigarrow\; & \quad\ldots \\
\rightsquigarrow\; & 3-1=2 \;/\; 3*\tfrac{15!}{3*2*1}=\tfrac{15!}{2*1}=653.837.184.000 \\
\rightsquigarrow\; & 2-1=1 \;/\; 2*\tfrac{15!}{2*1}=\tfrac{15!}{1}=1.307.674.368.000 \\
\rightsquigarrow\; & 1-1=0 \;/\; 1*\tfrac{15!}{1}=15!=1.307.674.368.000
\end{aligned}
$$

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Wer wird eher fertig sein?

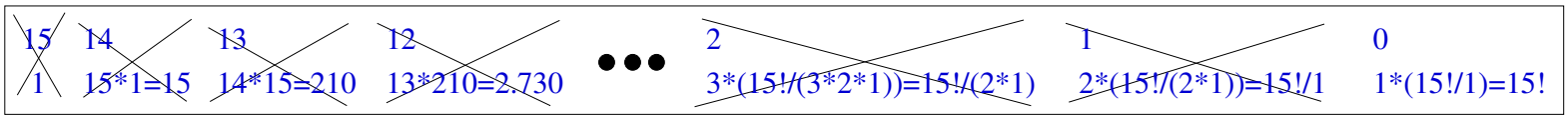
Jemand, der

- auf der grünen Wiese für jeden Rechenschnipsel ein neues Stockwerk zu einem Wolkenkratzer in die Höhe türmt, um nach der Ausführung jedes dieser Stockwerke wieder abzureißen, um die Wiese wieder grün zu hinterlassen?



...oder jemand, der

- die grüne Wiese grün sein lässt, Platz darauf nimmt und die gesamte Rechnung direkt am (Sitz-) Platz vornimmt?



Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Mehr dazu

...in Lehrveranstaltungen zum Übersetzerbau, insbesondere:

- LVA 185.A48 Übersetzerbau
- LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer
- LVA 185.A22 Seminar aus Übersetzerbau

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Orthogonal

...zu vorigen Überlegungen ist die Überführung von

- repetitiver, linearer Rekursion

in funktionalen (oder imperativen) Programmen in

- Iteration (d.h. in while-Schleifen).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Überführung repetitiver Rekursion in Iteration

...am Bsp. der Berechnung des größten gemeinsamen Teilers.

Formulierung mittels repetitiver Rekursion:

Funktional (in Haskell)

```
ggt :: Int -> Int -> Int
ggt m n
 | n == 0 = m
 | m >= n = ggt (m-n) n
 | True   = ggt (n-m) m
```

Imperativ (in Pseudo-Code)

```
FUNC ggt (m,n: int): int;
 {
  IF n=0 THEN ggt := m
  ELSF m >= 0 THEN ggt := ggt(m-n,n)
  ELSE ggt := ggt(n-m,m) FI }
```

Formulierung mittels Iteration (in Pseudo-Code):

```
VAR m,n,ggt: int;
read(m,n);
WHILE not(n==0) DO
 IF m >= 0 THEN m := m-n ELSE (m,n) := (n-m,m) FI OD;
ggt := m.
```

$\widehat{=}$ Aufrufen ggt m n, ggt(m,n)

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Überführung repetitiver Rekursion in Iteration

...am Beispiel der Fakultätsfunktion.

Formulierung mittels repetitiver Rekursion:

Funktional (in Haskell)

```
fac :: Int -> Int -> Int
fac n res
 | n == 0 = res
 | True   = fac (n-1) (n*res)
```

Imperativ (in Pseudo-Code)

```
FUNC fac (n,res: int): int;
 {
  IF n==0 THEN fac := res
  ELSE fac := fac(n-1,n*res) FI }
```

Formulierung mittels Iteration (in Pseudo-Code):

```
VAR n,res,fac: int;
(n,res) := (readint,1);
WHILE not(n==0) DO
 (n,res) := (n-1,n*res) OD;
fac := res.
```

$\widehat{=}$ Aufrufen `fac n 1`, `fac(n,1)`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Überführung linearer Rekursion in Iteration

...am Beispiel der Fakultätsfunktion.

Formulierung mittels linearer Rekursion:

Funktional (in Haskell)

```
fac :: Int -> Int
fac n
 | n == 0 = 1
 | True   = n * fac (n-1)
```

Imperativ (in Pseudo-Code)

```
FUNC fac (n: int): int;
 {
  IF n==0 THEN fac := 1
  ELSE fac := n * fac(n-1) FI }
```

Formulierung mittels Iteration (in Pseudo-Code):

```
VAR n,fac: int; ns: [int];
n := readint;                          ≙ Aufrufen fac n, fac(n)
ns := [];
WHILE not(n==0) DO                (Phase 1: Sammeln aller Werte)
 (n,ns) := (n-1,n:ns) OD;
ns := 1:ns
WHILE length(ns)>=2 DO                        (Phase 2: Rechnen)
 ns := (fst(ns)*snd(ns)):(tail(tail(ns)) OD;
fac := fst(ns).
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Verbesserung: Ersetzen der

...Laufzeitkeller/-stapelsimulation mittels Liste ns in Phase 1:

```
VAR n,fac: int; ns: [int];
n := readint;                              ≙ Aufrufen fac n, fac(n)
ns := [];
WHILE not(n==0) DO                (Phase 1: Sammeln aller Werte)
 (n,ns) := (n-1,n:ns) FI OD;
ns := 1:ns
WHILE length(ns)>=2 DO                          (Phase 2: Rechnen)
 ns := (fst(ns)*snd(ns)):(tail(tail(ns)) OD;
fac := fst(ns).
```

durch sofortiges Rechnen mittels einer Variablen res:

```
VAR n,fac,res: int;
n := readint;                              ≙ Aufrufen fac n, fac(n)
res := 1;
WHILE not(n==0) DO
 (n,res) := (n-1,n*res) OD;
fac := res.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Beobachtung

Die verbesserte iterative Umsetzung linearer Rekursion:

```
    VAR n,fac,res: int;
↦   n := readint;                    ≙ Aufrufen fac n, fac(n)
↦   res := 1;
    WHILE not(n==0) DO
     (n,res) := (n-1,n*res) OD;
    fac := res.
```

...ist *de facto* die iterative Umsetzung der auf repetitive Rekursion zurückgeführten linearen Rekursion:

```
    VAR n,res,fac: int;
↦   (n,res) := (readint,1);     ≙ Aufrufen fac n 1, fac(n,1)
    WHILE not(n==0) DO
     (n,res) := (n-1,n*res) OD;
    fac := res.
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Programmanalysen

...erlauben Übersetzern, Rekursionsmuster wie z.B.

- lineare Rekursion

durch

- repetitive Rekursion

oder in Abhängigkeit der Zielsprache auch durch

- Iteration

zu ersetzen.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Exkurs: Turing-Mächtigkeit von WHILE

Die Programmiersprache WHILE (der sog. while-Kern imperativer Programmiersprachen) mit

$$
\begin{array}{lll}
\pi & ::= & x := a \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(Zuweisung)} \\
& | & \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \qquad \text{(Fallunterscheidung)} \\
& | & \text{while } b \text{ do } \pi_1 \text{ od} \qquad\quad \text{(while-Schleife)} \\
& | & \pi_1; \pi_2 \qquad\qquad\qquad\quad \text{(Sequentielle Komposition)}
\end{array}
$$

wobei

- a für Ausdrücke
- b für Wahrheitswertausdrücke

stehen, ist Turing-mächtig.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Informelle Folgerung

...aus der Turing-Mächtigkeit von WHILE:

- Jedes rekursive Programm lässt sich in ein bedeutungsgleiches WHILE-Programm überführen, d.h. in ein iteratives Programm, das ausschließlich while-Schleifen zur wiederholten Ausführung nutzt.

...und stärker:

- Jedes WHILE-Programm lässt sich in ein bedeutungsgleiches WHILE-Programm mit einer einzigen while-Schleife überführen, ein Programm in sog. Engelerscher Normalform.

Nicht immer jedoch ist dies so einfach wie für

- repetitive und lineare Rekursion.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Übungsaufgabe E.1

Löse die Probleme

1. Türme von Hanoi
2. fun91

nach dem Vorbild der Haskell-Funktionen `hanoi` und `fun91` rekursiv in einer imperativen oder objektorientierten Sprache, z.B. Java.

```
hanoi :: Turmhoehe -> A_Stapel -> Z_Stapel -> H_Stapel
                                        -> [(Scheibe,Von,Nach)]
hanoi n a z h
 | n == 0    = []
 | otherwise =
    (hanoi (n-1) a h z) ++ [(n,a,z)] ++ (hanoi (n-1) h z a)

fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
 | n >  100 = n - 10
 | n <= 100 = fun91 (fun91 (n+11))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe E.2

Löse die Probleme

1. Türme von Hanoi
2. fun91

iterativ, d.h. gib für die Haskell-Funktionen `hanoi` und `fun91` gleichbedeutende Programme der Sprache WHILE oder des while-Kerns von z.B. Java an:

```
hanoi :: Turmhoehe -> A_Stapel -> Z_Stapel -> H_Stapel
                                          -> [(Scheibe,Von,Nach)]
hanoi n a z h
 | n == 0    = []
 | otherwise =
    (hanoi (n-1) a h z) ++ [(n,a,z)] ++ (hanoi (n-1) h z a)

fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
 | n >  100 = n - 10
 | n <= 100 = fun91 (fun91 (n+11))
```

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Übungsaufgabe E.3

Gib für die iterativen Programme aus Übungsaufgabe E.2 gleichbedeutende Programme mit je nur einer einzigen while-Schleife an.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Was man kann, erfährt man
nur durch eine Prüfung.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller
De providentia 4,3

F

Hinweise zu den Leistungsnachweisen

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

F.1

Zu den 7 Programmierangaben

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Hinweise zu den 7 Programmierangaben

- Geplante Termine:[1]

Angabe	Ausgabe	Erstabgabe	Zweitabgabe	max. Punkte
1	Fr, 16.10.20	Fr, 23.10.20	Fr, 30.10.20	50
2	Fr, 23.10.20	Fr, 30.10.20	Fr, 06.11.20	50
3	Fr, 30.10.20	Fr, 06.11.20	Fr, 13.11.20	50
4	Fr, 06.11.20	Fr, 13.11.20	Fr, 20.11.20	50
5	Fr, 13.11.20	Fr, 20.11.20	Fr, 27.11.20	100
6	Fr, 20.11.20	Fr, 27.11.20	Fr, 04.12.20	100
7	Fr, 27.11.20	Fr, 04.12.20	Fr, 11.12.20	100

- Erreichte Punkte pro Angabe: $\frac{1}{2} * \sum_{i=1}^{2} Punkte\_aus\_Abgabe_i$
- Erreichte Gesamtpunktzahl: $\sum_{j=1}^{7} Punkte\_aus\_Angabe_j$

[1] Plantermine! Im Zweifel gelten die Termine auf der LVA-Webseite.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

F.2

Zu den 3 schriftlichen Tests

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Hinweise zu den 3 schriftlichen Tests (1)

- Worüber:
  - Vorlesungs- und Übungsstoff.
  - Folgende zusammengehörende wissenschaftliche Artikel:
    1. Konrad Hinsen. The Promises of Functional Programming. Computing in Science and Engineering 11(4): 86-90, 2009.
    2. Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal. The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II. Computing in Science and Engineering 11(5):68-75, 2009.

    (zugänglich aus TUW-Netz in IEEE Digital Library)
- Wann:[2]
  - Test 1: Geplant am Do, 14.01.2021, 16:00 - 18:00 Uhr
  - Test 2: Geplant am Fr, 05.03.2021, 15:00 - 17:00 Uhr
  - Test 3: Geplant am Fr, 28.05.2021, 15:00 - 17:00 Uhr
- Hilfsmittel: **Keine.**

[2] Plantermine! Im Zweifel gelten die Termine in TISS.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Hinweise zu den 3 schriftlichen Tests (2)

- Anzahl Testteilnahmen:
  - Nach Wahl an einem, zwei oder allen drei Tests.
- Erreichte Gesamtpunktzahl aus Tests:
  - Summe der Punkte aus Tests geteilt durch die Anzahl an Testteilnahmen.
- Anmeldung zu den Tests:
  - Erforderlich; erfolgt stets über TISS.
- Voraussetzung zu Testteilnahmen:
  - Mindestens 50% der Punkte aus dem Übungsteil.
- Mitzubringen zu jeder Testteilnahme:
  - **Studierendenausweis, Stift** (Papier wird gestellt).

Vergiss nicht: Erfolg ist die Belohnung für schwere Arbeit.

Sophokles (497/496 - 406/405 v.Chr) griech. Dichter

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12

Es war sehr schön,
es hat mich sehr gefreut.

Franz-Josef I. (1830-1916)
Kaiser von Österreich

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13