Funktionale Programmierung

LVA 185.A03, VU 2.0, ECTS 3.0
WS 2018/2019

(Stand: 04.03.2019)

Jens Knoop

Technische Universität Wien
Information Systems Engineering
Compilers and Languages

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis (1)

Teil I: Einführung

Inhaltsverzeichnis (2)

Teil II: Grundlagen

Inhaltsverzeichnis (3)

Inhaltsverzeichnis (4)

Inhaltsverzeichnis (5)

Inhaltsverzeichnis (6)

Teil III: Applikative Programmierung

Inhaltsverzeichnis (7)

Inhaltsverzeichnis (8)

Inhaltsverzeichnis (9)

Inhaltsverzeichnis (10)

Inhaltsverzeichnis (11)

Inhaltsverzeichnis (12)

Teil VI: Weiterführende Konzepte

Inhaltsverzeichnis (13)

Inhaltsverzeichnis (14)

Inhaltsverzeichnis (15)

Anhänge

Inhaltsverzeichnis (16)

Teil I

Einführung

Kapitel 1

Motivation

Das leere Haskell-Programm

Das leere Haskell-Programm: Mehr als nichts!

...bereits das leere Haskell-Programm bietet

Taschenrechnerfunktionalität:

```
>hugs
Main>:load leeresHaskellProgramm.hs
Main>2+3
5
Main>abs (5-12)
7
Main>sqrt 121
11.0
Main>abs (-5) * 6 + 3 <= 2^3 * (4 + round 3.14)
True
Main>sin 0
0.0
Main>cos 0
1.0
```

Das leere Haskell-Programm: Mehr als nichts!

...und mehr:

```
Main>True && False
False
Main>not (True && False)
True
Main>"Funktionale" ++ " " ++ "Programmierung"
"Funktionale Programmierung"
Main>length "Funktionale Programmierung"
26
Main>[1..12]
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]
Main>[1,4..12]
[1,4,7,10]
Main>length [10..20]
11
Main>[ n | n <- [-6..8], mod n 2 == 0 ]
[-6,-4,-2,0,2,4,6,8]
```

Überblick

Funktionale Programmierung, funktionale Programmierung in Haskell

Anmerkung: Einige Begriffe werden in diesem Kapitel im Vorgriff angerissen und erst im Lauf der Vorlesung genau geklärt!

Kapitel 1.1

Ein Beispiel sagt (oft) mehr als 1000 Worte

Kapitel 1.1.1

Zehn Beispiele

Zehn Beispiele

Longum iter est per praecepta, breve et efficax per exempla.
Lang ist der Weg über Belehrungen,
kurz und wirkungsvoll durch Beispiele.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller

1. *Hello, World!*
2. Fakultätsfunktion
3. Das Sieb des Eratosthenes
4. Binomialkoeffizienten
5. Umkehren einer Zeichenreihe
6. Reißverschlussfunktion
7. Addition
8. Map-Funktion
9. Euklidischer Algorithmus
10. Gerade/ungerade-Test

1) Hello, World!

```
main = putStrLn "Hello, World!"
```

...ein Beispiel für ein Programm mit Ein-/Ausgabeoperation.

Nicht selbsterklärend: Die Deklaration von putStrLn

```
putStrLn :: String -> IO ()
putStrLn "Hello, World!"
```

Allerdings: Die Java-Entsprechung

```
class HelloWorld {
  public static void main (String[] args) {
    System.out.println("Hello, World!"); } }
```

...bedarf auch einer weiter ausholenden Erläuterung.

2) Fakultätsfunktion (1)

$$! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}.\ n\,! \ = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)\,! & \text{sonst} \end{cases}$$

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n - 1)
```

...ein Beispiel für eine rekursive Funktionsdefinition.

Aufrufe:

```
fac 0 ->> 1    fac 3 ->> 6      fac 6  ->> 720
fac 1 ->> 1    fac 5 ->> 120    fac 10 ->> 3.628.800
```

Lies: "Die Auswertung des Ausdrucks/Aufrufs `fac 5` liefert den Wert 120; der Ausdruck/Aufruf `fac 5` hat den Wert 120."

2) Fakultätsfunktion (2)

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n - 1)
```

Funktionale Programmierung mag es kurz und knackig, prägnant und konzis, ohne kryptisch zu sein. Auch Haskell hat hierfür ein Angebot.

Alternative Schreibweise:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
 | n == 0    = 1                   (| für (oder) wenn)
 | otherwise = n * fac (n - 1)    (otherwise ->> True)
```

```
fac :: Integer -> Integer        (Diese Variante nur zur
fac n                              Illustration von |)
 | n == 0 || n == 1 = 1          ((||) logisches oder)
 | n == 2           = 2
 | otherwise        = n * fac (n - 1)
```

2) Fakultätsfunktion (3)

Eine zweite weitere Schreibweise, musterbasiert:

```
fac :: Integer -> Integer
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n - 1)
```

Weitere alternative Implementierungen:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = foldl (*) 1 [1..n]      ([1..3] ->> [1,2,3],
                                  [1..0] ->> [],
          foldl (*) 1 [1..0] ->> foldl (*) 1 [] ->> 1)
```

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = product [1..n]      (product = foldl (*) 1 )
```

2) Fakultätsfunktion (4)

Zwei einfache Formen der Fehlerbehandlung:

```
fac' :: Integer -> Integer
fac' n
 | n == 0    = 1
 | n > 0     = n * fac' (n - 1)
 | otherwise = error "Arg. unzulässig"  (sog. Panikmodus)

fac'' :: Integer -> Integer
fac'' n
 | n == 0    = 1
 | n > 0     = n * fac'' (n - 1)
 | otherwise = n                        (Sonderwertrückgabe)
```

Aufrufe:

```
fac' 5    ->> 120                      fac'' 5    ->> 120
fac' 0    ->> 1                        fac'' 0    ->> 1
fac' (-5) ->> "Arg. unzulässig"        fac'' (-5) ->> -5
```

Funktional vs. imperativ: Kurzer Exkurs (1)

Vergleiche folgende funktionale und imperative Implementierungen der Fakultätsfunktion:

Funktional, hier in Haskell:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
```

Imperativ, hier in Pascal:

```
FUNCTION fac (n: integer): integer;
BEGIN
  IF n=0 THEN fac := 1 ELSE fac := n*fac(n-1)
END;
```

Beachte: Trotz der äußerlichen Ähnlichkeit sind die funktionale und imperative Fallunterscheidung, die in beiden Fällen die Fakultätsfunktion definieren, konzeptuell äußerst verschieden!

Funktional vs. imperativ: Kurzer Exkurs (2)

Die Fallunterscheidung ‘if-then-else’ im Vergleich:

Funktional:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
```

$$\texttt{fac n = }\underbrace{\texttt{if }\underbrace{\texttt{n == 0}}_{\textit{Ausdruck}}\texttt{ then }\underbrace{\texttt{1}}_{\textit{Ausdruck}}\texttt{ else }\underbrace{\texttt{n * fac (n-1)}}_{\textit{Ausdruck}}}_{\textit{Ausdruck}}$$

Imperativ:

```
FUNCTION fac (n: integer): integer;
BEGIN IF n=0 THEN fac := 1 ELSE fac := n*fac(n-1) END;
```

$$\texttt{BEGIN }\underbrace{\texttt{IF }\underbrace{\texttt{n=0}}_{\textit{Ausdruck}}\texttt{ THEN }\underbrace{\texttt{fac := }\underbrace{\texttt{1}}_{\textit{Ausdruck}}}_{\textit{Anweisung}}\texttt{ ELSE }\underbrace{\texttt{fac := }\underbrace{\texttt{n*fac(n-1)}}_{\textit{Ausdruck}}}_{\textit{Anweisung}}}_{\textit{Anweisung}}\texttt{ END;}$$

Funktional vs. imperativ: Kurzer Exkurs (3)

Die Fallunterscheidung ‘if-then-else’:

- Funktional: Die Fallunterscheidung ist ein Ausdruck. Ihre Bedeutung (Semantik) ist ein Wert.
- Imperativ: Die Fallunterscheidung ist eine Anweisung. Ihre Bedeutung (Semantik) ist eine Zustandstransformation, eine Belegung von Variablen mit (neuen) Werten.

Dieser Unterschied in Konzept u. Bedeutung ist fundamental.

- ‘if-then-else’ funktional $\neq$ ‘if-then-else’ imperativ

...es ist wichtig, sich diesen Unterschied klarzumachen und zu verinnerlichen (s.a. Kap. 1.2.2, Kap. 1.2.3, Anh. A.1).

3) Das Sieb des Eratosthenes (276 - 194 v.Chr.)

...zur Berechnung der unendlichen Folge der Primzahlen:

1. Schreibe alle natürlichen Zahlen ab 2 hintereinander auf.
2. Die kleinste nicht gestrichene Zahl in dieser Folge ist eine Primzahl. Streiche alle Vielfachen dieser Zahl.
3. Wiederhole Schritt 2 mit der kleinsten jeweils noch nicht gestrichenen Zahl.

```
Nach Schritt 1:
 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19...
Nach Schritt 2 für Zahl 2:
 2 3   5   7   9    11    13    15    17    19...
Nach Schritt 2 für Zahl 3:
 2 3   5   7        11    13          17    19...
usw.
```

3) Das Sieb des Eratosthenes (2)

$$\texttt{primes :: } \underbrace{\texttt{[Integer]}}_{\textit{Zahlenstromtyp}}$$

(primes, der (Prim-) Zahlenstrom als Integer-Liste)

$$\texttt{primes = } \underbrace{\texttt{sieve [2..]}}_{\textit{Strom der nat. Zahlen ab 2}}$$

(leistet Schritt 1)

$$\texttt{sieve :: } \underbrace{\texttt{[Integer]}}_{\textit{Argumentstromtyp}} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{[Integer]}}_{\textit{Resultatstromtyp}}$$

$$\texttt{sieve } \underbrace{\texttt{(x:xs)}}_{\textit{Argumentstrom}} \texttt{ = } \underbrace{\texttt{x : sieve [y | y <- xs, mod y x > 0]}}_{\textit{Resultatstrom}}$$

(leistet Schritt 2 für die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, usw.)

...ein Beispiel für die Programmierung mit Strömen.

3) Das Sieb des Eratosthenes (3)

$$\texttt{primes ::} \underbrace{\texttt{[Integer]}}_{(\textit{Prim}-)\ \textit{Zahlenstromtyp}}$$

$$\texttt{sieve ::} \underbrace{\texttt{[Integer]}}_{\textit{Argumentstromtyp}} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{[Integer]}}_{\textit{Resultatstromtyp}}$$

$$\underbrace{\texttt{sieve (x:xs)}}_{\substack{\textit{Strom der nat. Zahlen ab 2} \\ \textit{als Argument}}} = \underbrace{\texttt{x : sieve [y | y <- xs, mod y x > 0]}}_{\substack{\textit{Strom der Primzahlen} \\ \textit{als Resultat}}}$$

$$\underbrace{\texttt{primes}}_{\textit{Strom der Primzahlen}} \texttt{ = sieve } \overbrace{\texttt{[2..]}}^{\textit{Strom der nat. Zahlen ab 2}}$$

Aufruf:

```
primes ->> sieve [2..] ->> 2 : sieve [3,5..]
 ->> ... ->> [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,...
```

3) Das Sieb des Eratosthenes (4)

Im Überblick und (fast) ohne Farbspiele:

```
primes :: [Integer]
primes = sieve [2..]

sieve :: [Integer] -> [Integer]
sieve (x:xs) = x : sieve [y | y <- xs, mod y x > 0]
```

Aufrufe:

```
primes ->> [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,...

take 5 primes ->> [2,3,5,7,11]

drop 3 primes ->> [7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,...

take 3 (drop 3 primes) ->> [7,11,13]

primes!!0 ->> 2              ((!!) Zugriffsoperator)

primes!!1 ->> 3

primes!!5 ->> 13
```

4) Binomialkoeffizienten (1)

...geben die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n Elementen ohne Wiederholung an:

$$\binom{\cdot}{\cdot} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\forall\, n, k \in \mathbb{N}.\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k) = div (fac n) (fac k * fac (n-k))
```

...ein Beispiel für eine musterbasierte Funktionsdefinition mit hierarchischer Abstützung auf eine andere Funktion ('Hilfsfunktion'), hier die Fakultätsfunktion.

Aufrufe:

```
binom' (49,6) ->> 13.983.816
binom' (45,6) ->>  8.145.060
```

4) Binomialkoeffizienten (2)

Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

```
binom'' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom'' (n,k)
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise    = binom'' (n-1,k-1) + binom'' (n-1,k)
```

...ein Beispiel für eine musterbasierte (kaskaden- oder baumartig-) rekursive Funktionsdefinition.

Aufrufe:

```
binom'' (49,6) ->> 13.983.816
binom'' (45,6) ->>  8.145.060
```

4) Binomialkoeffizienten (3)

Uncurryfiziert

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k) = div (fac n) (fac k * fac (n-k))
```

Curryfiziert

```
binom :: Integer -> (Integer -> Integer)
binom n k  = div (fac n) (fac k * fac (n-k))
```

Aufrufe:

```
binom' (49,6) ->> 13.983.816
binom' (45,6) ->>  8.145.060
binom 49 6  ->> 13.983.816
binom 45 6  ->>  8.145.060
binom 49
binom 45 ...sind ebenfalls zulässige Ausdrücke!
```

4) Binomialkoeffizienten (4)

Die Aufrufe

```
binom 49
binom 45
```

...sind gültige Ausdrücke von einem funktionalen Wert:

```
(binom 49) :: Integer -> Integer
(binom 45) :: Integer -> Integer
```

...und repräsentieren die Funktionen '49_über_k' (entsprechend 'k_aus_49') und '45_über_k'' (entsprechend 'k_aus_45'):

$$\binom{49}{\cdot} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \binom{45}{\cdot} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}.\ \binom{49}{k} = \frac{49!}{k!(49-k)!} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.\ \binom{45}{k} = \frac{45!}{k!(45-k)!}$$

4) Binomialkoeffizienten (5)

In der Tat können wir als Funktionen definieren:

```
k_aus_49 :: Integer -> Integer
k_aus_49 k = binom 49 k

k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 k = binom 45 k
```

...und punktfrei (d.h., argumentlos) noch knapper:

```
k_aus_49 :: Integer -> Integer
k_aus_49 = binom 49

k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 = binom 45
```

Aufrufe:

```
k_aus_49 6 ->> binom 49 6 ->> 13.983.816
k_aus_45 6 ->> binom 45 6 ->>  8.145.060
```

5) Umkehren einer Zeichenreihe

```
data [a] = [] | a:[a]     (Informelle algebraische
                           Datentypspez. für Listen)

type String = [Char]                   (Typsynonym)

reverse :: String -> String
reverse ""      = ""  ("" == [], leere Zeichenreihe)
reverse (c:cs) = (reverse cs) ++ [c]
```

...ein Beispiel für eine Funktion auf Zeichenreihen.

Aufrufe:

```
reverse "" ->> ""
reverse "stressed" ->> "desserts"
reverse "desserts" ->> "stressed"
```

6) Reißverschlussfunktion

...zum ‘Verschmelzen’ zweier Listen zu einer Liste von Paaren:

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]   (a, b Typvariablen)
zip _ []          = []         (_ sog. "wild card")
zip [] _          = []         ([] leere Liste)
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
```

Liste mit Kopf y und Rest ys

: sog. Listenkonstruktor

...ein Beispiel für eine polymorphe Funktion auf Listen.

Aufrufe:

```
zip [2,3,5,7] ['a','b'] ->> [(2,'a'),(3,'b')]
zip [] ["stressed","desserts"] ->> []
zip [1.1,2.2.3.3] ["fun"] ->> [(1.1,"fun")]
zip [1.1,2.2.3.3] "fun"
  ->> zip [1.1,2.2.3.3] ['f','u','n']
  ->> [(1.1,'f'),(2.2,'u'),(3.3,'n')]
```

7) Addition

```
(+) :: Num a => a -> a -> a   (Num sog. Typklasse)
```

...ein Beispiel für eine überladene Funktion.

Aufrufe:

```
(+) 2 3     ->> 5       (+ auf ganzen Z., Präfixop.)
2 + 3       ->> 5         (+ als Infixop. auf g.Z.)
(+) 2.1 1.4 ->> 3.5 (+ auf Gleitkommaz., Präfixop.)
2.1 + 1.4   ->> 3.5          (+ als Infixop. auf Gkz)
(+) 7.81 2  ->> 9.81    (automatische Typanpassung)
```

```
((+) 1) :: Integer -> Integer  (Inkrementfunktion)
```

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+) 1          (vgl. die Funktion '(binom 49)')
```

```
inc' :: Integer -> Integer
inc' = (+1)         ((+1) ein sog. Operatorabschnitt)
```

8) Die map-Funktion

...zur Anwendung einer Funktion auf alle Elemente einer Liste:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]        (Fkt. als Arg.)
map _ [] = []
map f (x:xs) = (f x) : map f xs
```

...ein Beispiel für eine Funktion höherer Ordnung, für Funktionen als erstrangige Sprachelemente (engl. first class citizens).

Aufrufe:

```
map (2*) [1,2,3,4,5] ->> [2,4,6,8,10]
map (\x -> x*x) [1,2,3,4,5] ->> [1,4,9,16,25]
map (>3) [2,3,4,5] ->> [False,False,True,True]
map length ["functional","programming","is","fun"]
                                  ->> [10,11,2,3]
```

9) Der Euklidische Algorithmus (3.Jhdt.v.Chr.)

...zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen m, n mit $m \geq 0$ und $n > 0$:

```
ggt :: Int -> Int -> Int (Ganzz.-Typ, beschränkt)
ggt m n
  | n == 0 = m
  | n > 0  = ggt n (mod m n)

mod :: Int -> Int -> Int
mod m n
  | m < n  = m
  | m >= n = mod (m-n) n
```

...ein Beispiel für ein hierarchisches System von Funktionen.

Aufrufe:

```
ggt 25 15 ->> 5   ggt 48 60 ->> 12   mod 8 3 ->> 2
ggt 28 60 ->> 4   ggt 60 40 ->> 20   mod 9 3 ->> 0
```

10) Gerade/ungerade-Test

```
isEven :: Integer -> Bool
isEven n
 | n == 0 = True
 | n > 0  = isOdd (n-1)

isOdd :: Integer -> Bool
isOdd n
 | n == 0 = False
 | n > 0  = isEven (n-1)
```

...ein Beispiel für ein System wechselweise (oder indirekt) rekursiver Funktionen.

Aufrufe:

```
isEven 6 ->> True              isEven 9 ->> False
isOdd 6  ->> False             isOdd 9  ->> True
isEven (-5) ->> Musterfehler   isOdd (-1) ->> Musterfehler
```

Im Rückblick: Die ersten zehn Beispiele (1)

1. Ein- und Ausgabe
   - *Hello, World!*
2. Rekursion
   - Fakultätsfunktion
3. Stromprogrammierung
   - Das Sieb des Eratosthenes
4. Musterbasierte, curryfizierte und uncurryfizierte Funktionsdefinitionen, partiell ausgewertete Funktionen
   - Binomialkoeffizienten
5. Funktionen auf Zeichenreihen
   - Umkehren einer Zeichenreihe

Im Rückblick: Die ersten zehn Beispiele (2)

6. Parametrisch polymorphe Funktionen
   - Reißverschlussfunktion
7. Überladene Funktionen
   - Addition
8. Fkt. höherer Ordnung, Fkt. als 'Bürger erster Klasse'
   - Map-Funktion
9. Hierarchische Systeme von Funktionen
   - Euklidischer Algorithmus
10. Systeme wechselweise rekursiver Funktionen
    - Gerade/ungerade-Test

Nichts ist schwerer zu befolgen
als ein gutes Beispiel.

Mark Twain (1835-1910)
amerik. Schriftsteller

Wir halten fest

Funktionale Programme sind

- Systeme (wechselweise) rekursiver Funktionsvorschriften (oder Rechenvorschriften).

Funktionen

- sind zentrales Abstraktionsmittel in funktionalen Programmen (wie Prozeduren (Methoden) in prozeduralen (objektorientierten) Programmen).

Funktionale Programme

- werten Ausdrücke aus. Das Resultat dieser Auswertung ist ein Wert eines bestimmten Typs. Dieser Wert kann elementar oder funktional sein; er ist die Bedeutung, die Semantik des Ausdrucks.

Übungsaufgabe 1.1.1.1

1. Reimplementieren Sie die 10 Beispielprogramme aus Kapitel 1.1.1 in einer Programmiersprache Ihrer Wahl verschieden von Haskell, z.B. in Java, und vergleichen Sie die Programme miteinander, z.B. im Hinblick auf ihre Länge. Scheinen Ihnen die Programme der von Ihnen gewählten Sprache programmiertechnisch aufwändiger oder weniger aufwändig, einfacher oder weniger einfach verständlich? Wenn ja, warum?
2. Kehren Sie zu obigen Fragen im Lauf des Semesters zurück, speziell am Ende. Überlegen Sie dann, ob die heutigen Gründe für Ihre Einschätzung noch gültig sind. Wenn nein, warum nicht?

Kapitel 1.1.2

Programme auswerten

Auswerten einfacher Ausdrücke (1)

Der Ausdruck `(15*7 + 12) * (7 + 15*12)` hat den Wert 21.879; seine Semantik ist der Wert 21.879.

```
    (15*7 + 12) * (7 + 15*12)
->> (105 + 12) * (7 + 180)
->> 117 * 187
->> 21.879
```

Auch andere Auswertungsreihenfolgen sind möglich, z.B.:

```
    (15*7 + 12) * (7 + 15*12)
->> (105 + 12) * (7 + 180)
->> 105*7 + 105*180 +12*7 + 12*180
->> 735 + 18.900 + 84 + 2.160
->> 21.879
```

Auswerten einfacher Ausdrücke (2)

```
    (15*7 + 12) * (7 + 15*12)
->> (105 + 12) * (7 + 180)
->> 117 * (7 + 180)
->> 117*7 + 117*180
->> 819 + 21.060
->> 21.879
```

...und viele mehr. Stets ist das Ergebnis gleich!
(s. Kap. 12.3.4, Church-Rosser-Theoreme).

Die einzelnen Vereinfachungs-, Rechenschritte nennen wir

- Simplifikationen.

Auswerten von Funktionsaufrufen (1)

Der Aufruf `fac 2` hat den Wert 2; seine Semantik (oder Bedeutung) ist der Wert 2.

Eine erste Auswertungsreihenfolge:

```
        fac 2
(E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->> 2 * fac (2-1)
(S) ->> 2 * fac 1
(E) ->> 2 * (if 1 == 0 then 1 else (1 * fac (1-1)))
(S) ->> 2 * (if False then 1 else (1 * fac (1-1)))
(S) ->> 2 * (1 * fac (1-1))
(S) ->> 2 * (1 * fac 0)
(E) ->> 2 * (1 * (if 0 == 0 then 1 else (0 * fac (0-1))))
(S) ->> 2 * (1 * (if True then 1 else (0 * fac (0-1))))
(S) ->> 2 * (1 * (1))
(S) ->> 2 * (1 * 1)
(S) ->> 2 * 1
(S) ->> 2
```

Auswerten von Funktionsaufrufen (2)

Eine zweite Auswertungsreihenfolge:

```
          fac 2
(E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2-1))
(S) ->> 2 * fac (2-1)
(E) ->> 2 * (if (2-1) == 0 then 1
             else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * (if 1 == 0 then 1
             else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * (if False then 1
             else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * (1 * fac ((2-1)-1)))
(E) ->> 2 * (1 * (if ((2-1)-1) == 0 then 1
                  else (((2-1)-1) * fac ((2-1)-1))))
(S) ->> 2 * (1 * (if (1-1) == 0 then 1
                  else (((2-1)-1) * fac ((2-1)-1))))
```

Auswerten von Funktionsaufrufen (3)

```
(S) ->> 2 * (1 * (if 0 == 0 then 1
                  else (((2-1)-1) * fac ((2-1)-1))))
(S) ->> 2 * (1 * (if True then 1
                  else (((2-1)-1) * fac ((2-1)-1))))
(S) ->> 2 * (1 * 1)
(S) ->> 2 * 1
(S) ->> 2
```

Wir bezeichnen mit

- (E) markierte Schritte als Expansionsschritte.
- (S) markierte Schritte als Simplifikationsschritte.

Auswerten von Funktionsaufrufen (4)

Die beiden Auswertungsreihenfolgen sind Beispiele sog.

- applikativer (sofortiger, unverzüglicher) (1. Ausw.folge, z.B. in ML)
- normaler (aufgeschobener, verzögerter) (2. Ausw.folge, z.B. in Haskell)

Auswertung.

Applikative Auswertung des Aufrufs natSum 2

Berechnung von $\sum_{i=0}^{n} i$ für positive Werte $n \in \mathbb{N}_0$ durch `natSum`:

```
natSum :: Int -> Int
natSum n = if n == 0 then 0 else (natSum (n-1)) + n
```

```
          natSum 2
(E) ->> if 2 == 0 then 0 else (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> if False then 0 else (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> (natSum 1) + 2
(E) ->> (if 1 == 0 then 0 else ((natSum (1-1)) +1)) + 2
(S) ->> (if False then 0 else ((natSum (1-1)) + 1)) + 2
(S) ->> ((natSum (1-1)) + 1) + 2
(S) ->> ((natSum 0) + 1) + 2
(E) ->> ((if 0 == 0 then 0 else (natSum (0-1)) + 0) + 1) + 2
(E) ->> ((if True then 0 else (natSum (0-1)) + 0) + 1) + 2
(S) ->> ((0) + 1) + 2
(S) ->> (0 + 1) + 2
(S) ->> 1 + 2
(S) ->> 3
```

Normale Auswertung des Aufrufs natSum 2

```
          natSum 2
(E) ->> if 2 == 0 then 0 else (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> if False then 0 else (natSum (2-1)) + 2
(S) ->> (natSum (2-1)) + 2
(E) ->> if (2-1) == 0 then 0 else (natSum ((2-1)-1)) + (2-1) + 2
(S) ->> if 1 == 0 then 0 else (natSum ((2-1)-1)) + (2-1) + 2
(S) ->> if False then 0 else (natSum ((2-1)-1)) + (2-1) + 2
(S) ->> (natSum ((2-1)-1)) + (2-1) + 2
(E) ->> ...
...
(S) ->> 3
```

Übungsaufgabe 1.1.2.1

Vervollständige die normale Auswertung des Aufrufs `natSum 2`.

Kapitel 1.1.3

Programme finden

'Finden' rekursiver Formulierungen (1)

...am Beispiel der Fakultätsfunktion:

```
fac n = n*(n-1)*...*6*5*4*3*2*1*1
```

Von der Lösung erwarten wir also:

```
fac 0 = 1 ->> 1
fac 1 = 1*1 ->> 1
fac 2 = 2*1*1 ->> 2
fac 3 = 3*2*1*1 ->> 6
fac 4 = 4*3*2*1*1 ->> 24
fac 5 = 5*4*3*2*1*1 ->> 120
fac 6 = 6*5*4*3*2*1*1 ->> 720
...

fac n = n*(n-1)*...*6*5*4*3*2*1*1 ->> n!
```

‘Finden’ rekursiver Formulierungen (2)

$$\texttt{fac 0 = 1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \texttt{->> 1}$$

$$\texttt{fac 1 = 1 * }\underbrace{\texttt{1}}_{\texttt{fac 0}} \qquad\qquad \texttt{== 1 * fac 0 ->> 1}$$

$$\texttt{fac 2 = 2 * }\underbrace{\texttt{1*1}}_{\texttt{fac 1}} \qquad\quad \texttt{== 2 * fac 1 ->> 2}$$

$$\texttt{fac 3 = 3 * }\underbrace{\texttt{2*1*1}}_{\texttt{fac 2}} \qquad \texttt{== 3 * fac 2 ->> 6}$$

$$\texttt{fac 4 = 4 * }\underbrace{\texttt{3*2*1*1}}_{\texttt{fac 3}} \quad \texttt{== 4 * fac 3 ->> 24}$$

$$\texttt{fac 5 = 5 * }\underbrace{\texttt{4*3*2*1*1}}_{\texttt{fac 4}} \texttt{ == 5 * fac 4 ->> 120}$$

...

$$\texttt{fac n = n * }\underbrace{\texttt{(n-1)*...*6*5*4*3*2*1*1}}_{\texttt{fac (n-1)}}$$

$$\texttt{== n * fac (n-1) ->> n!}$$

'Finden' rekursiver Formulierungen (3)

Wir erkennen:

- Ein Sonderfall: `fac 0 = 1`
- Ein Regelfall: `fac n = n * fac (n-1)`

Wir führen beide Fälle zusammen und erhalten:

```
fac n
 | n == 0    = 1
 | otherwise = n * fac (n-1)
```

Noch unmittelbarer zusammengeführt:

```
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n-1)
```

‘Finden’ rekursiver Formulierungen (4)

...am Beispiel der Berechnung von $0+1+2+3...+n$:

```
natSum n = 0+1+2+3+4+5+6+...+(n-1)+n
```

Von der Lösung erwarten wir also:

```
natSum 0 = 0 ->> 0
natSum 1 = 0+1 ->> 1
natSum 2 = 0+1+2 ->> 3
natSum 3 = 0+1+2+3 ->> 6
natSum 4 = 0+1+2+3+4 ->> 10
natSum 5 = 0+1+2+3+4+5 ->> 15
natSum 6 = 0+1+2+3+4+5+6 ->> 21
...

natSum n = 0+1+2+3+4+5+6+...+(n-1)+n
```

'Finden' rekursiver Formulierungen (5)

$$\texttt{natSum 0 = 0} \qquad \texttt{->> 0}$$

$$\texttt{natSum 1 = }\underbrace{\texttt{0}}_{\texttt{natSum 0}}\texttt{ + 1} \qquad \texttt{== natSum 0 + 1 ->> 1}$$

$$\texttt{natSum 2 = }\underbrace{\texttt{0+1}}_{\texttt{natSum 1}}\texttt{ + 2} \qquad \texttt{== natSum 1 + 2 ->> 3}$$

$$\texttt{natSum 3 = }\underbrace{\texttt{0+1+2}}_{\texttt{natSum 2}}\texttt{ + 3} \qquad \texttt{== natSum 2 + 3 ->> 6}$$

$$\texttt{natSum 4 = }\underbrace{\texttt{0+1+2+3}}_{\texttt{natSum 3}}\texttt{ + 4} \qquad \texttt{== natSum 3 + 4 ->> 10}$$

$$\texttt{natSum 5 = }\underbrace{\texttt{0+1+2+3+4}}_{\texttt{natSum 4}}\texttt{ + 5} \qquad \texttt{== natSum 4 + 5 ->> 15}$$

...

$$\texttt{natSum n = }\underbrace{\texttt{0+1+2+3+4+5+6+...+(n-1)}}_{\texttt{natSum (n-1)}}\texttt{ + n}$$

$$\texttt{== natSum (n-1) + n ->> natSum n}$$

‘Finden’ rekursiver Formulierungen (6)

Wir erkennen:

- Ein Sonderfall: `natSum 0 = 0`
- Ein Regelfall: `natSum n = (natSum (n-1)) + n`

Wir führen beide Fälle zusammen und erhalten:

```
natSum n
 | n == 0    = 0
 | otherwise = (natSum (n-1)) + n
```

Noch unmittelbarer zusammengeführt:

```
natSum 0 = 0
natSum n = (natSum (n-1)) + n
```

Anm.: Einfachere Klammerung ist möglich: `natSum (n-1) + n`

Est omnium rerum magister usus.
Aller Dinge Meister ist der Gebrauch.

Julius Caesar (100 - 44 v.Chr.)
röm. Feldherr und Staatsmann

Kapitel 1.2

Warum funktionale Programmierung? Warum mit Haskell?

Kapitel 1.2.1

Warum funktionale Programmierung?

Res loquitur ipsa.
Die Sache spricht für sich.

Cicero (106 - 43 v.Chr.)
röm. Staatsmann und Schriftsteller

> For at least the last 60 years, programmers
> have been faced with the question:
> What programming language should I use?
> Myriad languages have been developed
> in the last six decades, with at least a few
> dozen in common usage today.

Jeffrey S. Foster
Shedding new Light on an old Language Debate.
Communications of the ACM 60(10):90, 2017.

Etwas spezieller die Frage von John W. Backus

Can programming be liberated from the von Neumann style?

John W. Backus (1924-2007)
Turing Award Preisträger 1977

John W. Backus. Can Programming be Liberated from the von Neumann Style? A Functional Style and its Algebra of Programs. Communications of the ACM 21(8):613-641, 1978.

Evolution von Paradigmen und Sprachen (1)

...gekennzeichnet durch die schrittweise Einführung von Abstraktionen mit dem Ziel, Einzelheiten der zugrundeliegenden Rechenmaschine und Programmausführung immer mehr zu verbergen:

- Assembler-Sprachen führen mnemo-technische Instruktionsbezeichner und symbolische Marken ein, um Maschinenbefehle und Programm- und Datenspeicheradressen zu verbergen.
- FORTRAN führt Felder (engl. arrays) und Ausdrücke in mathematisch-üblicher Schreibweise ein, um Register zu verbergen.
- ALGOL-ähnliche Sprachen führen strukturierte Kontrollanweisungen ein, um Sprungbefehle und Sprungmarken zu verbergen (*'goto considered harmful'*).

Evolution von Paradigmen und Sprachen (2)

- Objektorientierte Sprachen führen Sichtbarkeitsebenen und Kapselungen ein, um die Datendarstellung und Speicherverwaltung zu verbergen.
- Deklarative Sprachen, am bekanntesten funktionale und logische Sprachen, verbergen die Auswertungsreihenfolge und verzichten dafür auf Kontrollanweisungen. Reine deklarative Sprachen verzichten auch auf Zuweisungen, um Seiteneffekte auszuschließen.

In deklarativen Sprachen verschiebt sich dadurch die Programmieraufgabe von der

- Festlegung der Rechenschritte zur Strukturierung der Anwendungsdaten und Beziehungen der Programmbestandteile.

Deklarative Sprachen ähneln hierin formalen Spezifikationssprachen, sind aber ausführbar.

Abgrenzung funktionaler u. logischer Sprachen

Funktionale Sprachen

- beruhen auf dem mathematischen Funktionsbegriff.
- Programme sind Systeme von Funktionen, die über Gleichungen, Fallunterscheidungen und Rekursion definiert sind und auf (strukturierten) Daten arbeiten.
- bieten effiziente, anforderungsgetriebene Auswertungsstrategien, die auch die Arbeit mit (potentiell) unendlichen Strukturen unterstützen.

Logische Sprachen

- beruhen auf Prädikatenlogik.
- Programme sind Systeme von Prädikaten, die durch eingeschränkte Formen logischer Formeln, z.B., Horn-Formeln (Implikation), definiert sind.
- bieten Nichtdeterminismus und Prädikate mit mehreren Eingabe-/Ausgabemodi zur Wiederverwendung von Code.

Ziel all dieser Abstraktionen

...maßgebliche Beiträge zur Überwindung der sog. Software-krise zu leisten hin zu einer

- ingenieurmäßigen Software-Entwicklung ('in time, in functionality, in budget')
- verifiziert, wartbar, erweiterbar, etc.

indem dem Programmierer ein

- angemessen(er)es Abstraktionsniveau zur Formulierung, Modellierung und Lösung von Problemen

zur Verfügung gestellt wird.

Prozedural vs. funktional: Ein Vergleich

Gegeben eine Aufgabe A, gesucht eine Lösung L für A.

Prozedural: Lösungsablauf typischerweise in 2 Schritten:

1. Ersinne ein algorithmisches Verfahren V zur Berechnung der Lösung L von A.
2. Codiere V als Folge von Anweisungen (Befehlen, Instruktionen) für den Rechner.

Beachte:

- Schritt 2 erfordert hier zwingend, den Speicher explizit anzusprechen und zu verwalten (Allokation, Manipulation, Deallokation von Speicherzellen für Daten).

Zur Illustration ein einfaches Beispiel (1)

Aufgabe: *Liefere die Werte aller Einträge eines ganzzahligen Feldes mit einem Wert von höchstens 10.*

Hier eine typische prozedurale Lösung, hier in Pascal (Argument in Feldvariable a, Resultat in Feldvariable b):

```
PROGRAM filter (input,output);
VAR a, b: ARRAY [1..maxLength] OF integer;
BEGIN
 (* Code zur Initialisierung von Feldvariable a *)
 FOR i := 1 TO maxLength DO a[i] := ⟨Init.-Ausdruck⟩
 (* Hauptcode *)
 j := 1;
 FOR i := 1 TO maxLength DO
  IF a[i] <= 10 THEN BEGIN b[j] := a[i]; j := j+1 END
END.
```

Beachte: Der Speicher wird explizit adressiert und manipuliert. Zusätzlich ist 'overhead' Code erforderlich.

Zur Illustration ein einfaches Beispiel (2)

...zum Vergleich hier eine typische funktionale Lösung, hier in Haskell:

```
a = [2,5..21]        ([2,5..21] = [2,5,8,11,14,17,20])
b = [n | n <- a, n <= 10]
```

Beachte: Keine Speicheradressierung, -manipulation oder -verwaltung zur Berechnung von `b` erforderlich: `b ->> [2,5,8]`. Kein 'overhead' Code. Sogar noch knapper möglich:

```
b = [n | n <- [2,5..21], n <= 10]
```

Vergleiche die funktionale und mathematische Beschreibung

- `[ n | n <- a , n <= 10 ]`
- $\{ \; n \; | \; n \in \; a \wedge n \leq \; 10 \; \}$

unter dem Anspruch funktionaler Programmierung

- *"...etwas von der Eleganz der Mathematik in die Programmierung zu bringen!"*

Essenz deklarativer Programmierung

...speziell auch funktionaler Programmierung: Betonung des

- **'was'** anstelle des **'wie'**!

  Deklarativ (fkt.): Beschreibe, **was** wir bekommen möchten:

```
b = [n | n <- [2,5..21], n <= 10]
```

  Präskriptiv (proz.): Beschreibe, **wie** wir etwas bek. möchten:

```
VAR a, b: ARRAY [1..maxLength] OF integer;
 (* Code zur Initialisierung von Feldvariable a *)
 FOR i := 1 TO maxLength DO a[i] := ⟨Init.-Ausdruck⟩
 (* Hauptcode *)
 j := 1;
 FOR i:=1 TO maxLength DO
  IF a[i] <= 10 THEN BEGIN b[j] := a[i]; j := j+1 END
```

Man soll den Menschen nie sagen,
wie sie etwas tun sollen,
sondern nur, was sie tun sollen.
Dann wird ihr Einfallsreichtum einen verblüffen.

George S. Patton (1885-1945)
amerik. General

Automatische Listengenerierung

...mittels Listenkomprehension (engl. list comprehension) wie im Ausdruck

- `[n | n <- a, n <= 10]` (vgl. $\{n \mid n \in a \land n \leq 10\}$)

...ist hierfür ein wichtiges, nützliches und für funktionale Programmiersprachen typisches sprachliches Konstrukt ohne Parallele in nichtfunktionalen Sprachen.

Anm.: Komprehension – Zusammenfassung, Vereinigung von Mannigfaltigem zu einer Einheit (Philos.).

Noch nicht überzeugt? Quicksort, Hoare-Stil

Betrachte eine komplexere Aufgabe: Sortieren à la Hoare.

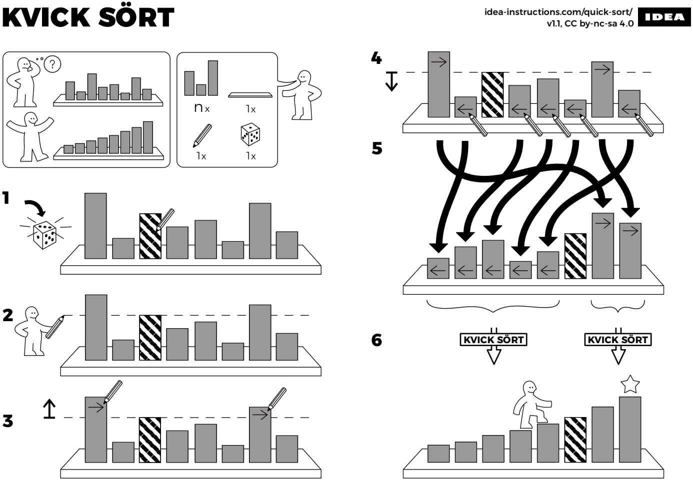
Aufgabe: *Sortiere eine Liste L ganzer Zahlen aufsteigend.*

Lösungsverfahren: Das 'Teile und herrsche'-Sortierverfahren Quicksort von Sir Tony Hoare (1961):

- *Teile:* Wähle ein Element l aus L und partitioniere L in zwei (möglicherweise leere) Teillisten L_1 und L_2, so dass alle Elemente von L_1 (L_2) kleiner oder gleich (größer) l sind.
- *Herrsche:* Sortiere L_1 und L_2 mittels des Quicksort-Verfahrens (d.h. mittels rekursiver Aufrufe von Quicksort).
- *Kombiniere:* Bestimme Gesamtsortierung durch Zusammenführen der Teilsortierungen (hier trivial: konkateniere die sortierten Teillisten zur sortierten Gesamtliste).

Quicksort, I~~K~~DEA-Stil

...Sortieren à la Hoare, die Grundidee so einfach, dass sie auch I~~K~~DEA-erklärungsstilgeeignet ist (Feteke et al., TU Braunschw.):



http://idea-instructions.com/quick-sort v.1.1, CC by-cs-sa 4.0

Quicksort, prozedural

...eine typische prozedurale Realisierung, hier in Pseudocode:

```
quickSort (L,low,high)
  if low < high
    then splitInd = partition (L,low,high)
         quickSort (L,low,splitInd-1)
         quickSort (L,splitInd+1,high) fi

partition (L,low,high)
  l = L[low]
  left = low
  for i = low+1 to high do
    if L[i] <= l then left = left+1
                      swap (L[i],L[left]) fi od
  swap (L[low],L[left])
  return left
```

Aufruf: `quickSort(L,1,length(L))`, wobei `L` die zu sortierende Liste ist, z.B. `L=[4,2,3,4,1,9,3,3]`.

Quicksort, funktional

...zum Vergleich eine typische funktionale Realisierung, hier in Haskell, mehr als eine Spur näher am Hoare- und I~~K~~DEA-Stil:

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                   ++ [n]
                   ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

Aufrufe:

```
quickSort [] ->> []
quickSort [4,1,7,3,9] ->> [1,3,4,7,9]
quickSort [4,2,3,4,1,9,3,3] ->> [1,2,3,3,3,4,4,9]
```

Übungsaufgabe 1.2.1.1

Betrachten Sie das 'Sieb des Eratosthenes' aus Kapitel 1.1.1 als weiteres Beispiel. Realisieren Sie seine Verfahrensidee zur Berechnung von Primzahlen in

- imperativen
  - prozeduralen (z.B. C, Pascal, Modula,...)
  - objektorientierten (z.B. Java, C++, C#,...)
- deklarativen
  - logischen (z.B. Prolog)

Programmiersprachen ihrer Wahl und vergleichen Sie Ihre Implementierungen mit der Haskell-Implementierung aus Kapitel 1.1.1. Lässt sich die Verfahrensidee von Eratosthenes in manchen Sprachen einfacher umsetzen als in anderen? Kommt sie in allen Sprachen gleich gut und deutlich zum Ausdruck oder wird sie in manchen Sprachen von (Ausführungs-) Details überlagert?

Kapitel 1.2.2

Imperative vs. funktionale Programmierung

Imperative Programmierung

...gekennzeichnet durch:

- Unterscheidung von Ausdrücken und Anweisungen.
- Ausdrücke liefern Werte; Anweisungen bewirken Zustandsänderungen (Seiteneffekte).
- Programmausführung ist die Abarbeitung von Anweisungen; dabei müssen auch Ausdrücke ausgewertet werden.
- Kontrollflussspezifikation mittels spezieller Anweisungen (Sequentielle Komposition, Fallunterscheidung, Schleifen, etc.)
- Variablen sind Verweise auf Speicherplätze. Ihre Werte können im Verlauf der Programmausführung (beliebig oft) geändert werden.
- Die bewirkte Zustandsänderung ist die Bedeutung des Programms.

Funktionale Programmierung

...gekennzeichnet durch:

- Ausschließlich Ausdrücke, keine Anweisungen.
- Ausdrücke liefern Werte. Zustandsänderungen gibt es nicht (und deshalb auch keine Seiteneffekte).
- Programmausführung ist Auswertung eines Ausdrucks. Sein Wert ist Ergebnis und Bedeutung des Programms.
- Keine Kontrollflussspezifikation; allein Datenabhängigkeiten steuern die Auswertung(sreihenfolge).
- Variablen (besser: Namen) sind an Ausdrücke gebunden. Einmal ausgewertet, ist eine Variable (Name) an einen einzelnen Wert gebunden; ein späteres Überschreiben oder Neubelegen ist nicht möglich.

Imperative Programmierung

...befehlsbasierte Programmierung:

- Programm: Menge von Befehlen (oder Instruktionen oder Anweisungen) strukturiert durch ein Regelwerk (in Form von Kontrollflussanweisungen (*if-then-else*, *while-do*, *for-do*,...)), das ihre Ausführungsabfolge festlegt und steuert.
- Bedeutung von Befehlen und Programmen: Zustandsänderungen (Zustand: Zuordnung von Werten an Variablen 'σ : *Variablen* $\rightarrow$ *Werte*'. Zustandsänderung: Neuzuordnung von Werten an Variablen; Bsp.: Angesetzt auf σ ordnet der Befehl `x:=x+y` Variable x die Summe aus $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ neu als Wert zu und lässt alle anderen Zuordnungen unverändert).
- Vorlegbare Frage an ein Programm: Was sind die Werte der Variablen nach Terminierung von einem Programm π_{imp}, d.h. in welchem (End-) Zustand σ' terminiert π_{imp} angesetzt auf einen (Anfangs-) Zustand σ?

Funktionale Programmierung

...gleichungsbasierte Programmierung:

- Programm: Menge von Vereinbarungen von Wertegleichheiten von Ausdrücken (`pi = 3.14`, `quadrat n = n*n`, `isodd n = iseven (n-1)`, `binom m n =...`).
- Bedeutung von Ausdrücken und Programmen: Von Ausdrücken, ihr Wert (Bsp.: Der Wert von Ausdruck `binom 45 6` ist die natürliche Zahl 8.145.060, von Ausdruck `quadrat 8` die natürliche Zahl 64); von Programmen, der Wert ihres 'Hauptausdrucks' (`main =...`).
- Vorlegbare Frage an ein Programm: Was ist der Wert von einem Ausdruck *ausd*, wenn *ausd* unter Rückgriff auf die im Programm π_{fkt} definierten Ausdruckswertegleichheiten ausgewertet wird?

Kapitel 1.2.3

Von imperativer zu funktionaler Programmierung

Hauptherausforderung

...konzeptuell und praktisch den Übergang von

- befehlsorientierter

zu

- ergebnisorientierter

Denk- und Handlungsweise zu meistern!

Dabei gilt:

Omne initium difficile.
Aller Anfang ist schwer.

lat., sprichwörtl.

Versprechen

...ist dieser Übergang gemeistert, sind auch das neue Paradigma funktionaler Programmierung und die Inhalte dieser LVA i.w. gemeistert.

Tipp: Fällt es anfangs schwer, weil ungewohnt, eine Aufgabe funktional zu lösen, so lohnt es sich, zu diesem Abschnitt zurückzukehren und zu überlegen, ob die Ursache der empfundenen Schwierigkeit möglicherweise darin liegt, die Aufgabe in befehls- statt ergebnisorientierter Denk- und Handlungsweise angehen zu wollen (s. auch Anh. A, insb. A.6 bis A.9).

Der Mensch beginnt nicht leicht zu denken.
Sobald er aber erst einmal den Anfang damit gemacht hat,
hört er nicht mehr damit auf.

Jean-Jacques Rousseau (1712-1778)
franz.-schweizer. Philosoph

Übungsaufgabe 1.2.3.1

Macht euch nichts draus,
ich weiß, ihr werdet das nie verstehen.

Ludwig Wittgenstein (1889-1951)
österr. Philosoph
Namenspate für den höchstdotierten
österr. Wissenschaftspreis

Generalaufgabe für dieses (und alle folgenden) Semester:

Widerleg(t) Wittgenstein!

Kapitel 1.2.4

Funktionale Programmierung: Stärken, Schwächen

Stärken und Vorteile fkt. Programmierung

- Einfach(er) zu erlernen

  ...da wenige(r) Grundkonzepte (vor allem keinerlei (Maschinen-) Instruktionen; deshalb auch keine Zuweisungen, keine Schleifen, keine Sprünge)

- Höhere Produktivität

  ...da Programme signifikant kürzer als funktional vergleichbare imperative Programme sind (Faktor 5 bis 10)

- Höhere Zuverlässigkeit

  ...da Korrektheitsüberlegungen und -beweise einfach(er) sind (math. Fundierung, keine durchscheinende Maschine)

Illustration auf der syntaktischen Ebene

Konzeptuell:

- Die unendliche Folge der natürlichen Zahlen ab 1:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$$

Mögliche Kurzschreibweisen:

- 1. (zu knapp, Verwechslungsgefahr mit 1-tens)
- 1... (zu lang)
- 1.., 1*ff* (*f*ort*f*olgende), 1ϕ, $\mathbb{N}_1$, $\mathbb{N}$,... (genau richtig)

In Haskell:

`[1..]` (Synt. Zucker: Eckige Klammern zur Listenkennzeichnung)

In Java:

```
class Naturals implements Iterator<Integer> {
  private int value = 1;
  public boolean hasNext() { return true; }
  public Integer next() { return value++; }
 }
```

(deutlich mehr syntakt. Zucker)

Schwächen und Nachteile fkt. Programmierung

- Geringe(re) Performanz
  Aber: Große Fortschritte sind erzielt (Performanz oft vergleichbar mit entsprechenden C-Implementierungen); Korrektheit zudem vorrangig gegenüber Performanz; einfache(re) Parallelisierbarkeit fkt. Programme.
- Manchmal unangemessen, oft für inhärent zustandsbasierte Anwendungen, zur GUI-Programmierung
  Aber: Eignung einer Methode/Technologie/Programmierstils für einen Anwendungsfall ist stets zu untersuchen und überprüfen; dies ist kein Spezifikum fkt. Programmierung.

  Außerdem: Unterstützung zustandsbehafteter Programmierung in vielen funktionalen Programmiersprachen durch spezielle Mechanismen; z.B. in Haskell durch das Monadenkonzept (s. LVA 185.A05 Fortgeschrittene funktionale Programmierung).

Es ist schwieriger, eine vorgefasste Meinung
zu zertrümmern als ein Atom.

Albert Einstein (1879-1955)
dt. schweiz.-amerik. Physiker

...häufig vorgebrachte Schwächen und Nachteile funktionaler Programmierung insgesamt (oft) nur vorurteilsbehaftet und vermeintlich.

Lass dich nicht durch Vorurteile bestimmen [...].

1. Timotheus 5,21

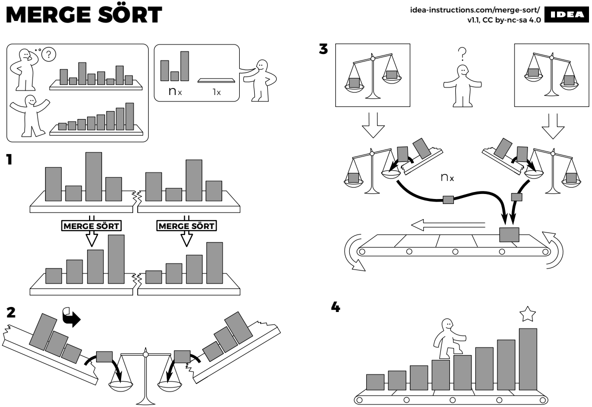
Einsatzfelder funktionaler Programmierung

...mittlerweile 'überall':

- Curt J. Simpson. Experience Report: Haskell in the "Real World": Writing a Commercial Application in a Lazy Functional Language. In Proc. 14th ACM SIGPLAN Int. Conf. on Funct. Prog. (ICFP 2009), 185-190, 2009.
- Jerzy Karczmarczuk. Scientific Computation and Functional Programming. Computing in Science and Engineering 1(3):64-72, 1999.
- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. Real World Haskell. O'Reilly, 2008.
- Yaron Minsky. OCaml for the Masses. Communications of the ACM, 54(11):53-58, 2011.
- Michael Snoyman. Developing Web Applications with Haskell and Yesod. O'Reilly, 2012.
- Haskell in Industry and Open Source: `www.haskell.org/haskellwiki/Haskell_in_industry`

Übungsaufgabe 1.2.4.1: Aufwand, Performanz

Implementieren Sie die Verfahren *Kvick Sört* und *Merge Sört* zum Sortieren ganzzahliger Listen in Haskell und in einer weiteren Programmiersprache Ihrer Wahl. Vergleichen Sie die Implementierungen hinsichtlich Programmieraufwand und Laufzeitverhalten durch Laufzeitmessungen für Argumentlisten wachsender Länge.



http://idea-instructions.com/merge-sort v.1.1, CC by-cs-sa 4.0

Kapitel 1.2.5

Warum funktionale Programmierung mit Haskell?

Facta loquuntur.
Tatsachen sprechen (lassen).

lat., sprichwörtl.

Funktionale Programmierprachen

...vielfältig und zahlreich, z.B.:

- λ-Kalkül (späte 1930er Jahre, Alonzo Church, Stephen Kleene)
- Lisp (frühe 1960er Jahre, John McCarthy)
- ML, SML (Mitte 1970er Jahre, Michael Gordon, Robin Milner)
- Hope (um 1980, Rod Burstall, David McQuee)
- Miranda (um 1980, David Turner)
- OPAL (Mitte 1980er Jahre, Peter Pepper et al.)
- Haskell (späte 1980er Jahre, Paul Hudak, Philip Wadler et al.)
- Gofer (frühe 1990er Jahre, Mark Jones)
- ...

Warum also gerade Haskell?

Learning Haskell opens one's mind to new programming paradigms, which might produce clearer and shorter implementations.

Mihai Maruseac
Haskell: A Language for Modern Times.
Crossroads, the ACM Magazine for Students 24(1):64-66, 2017.

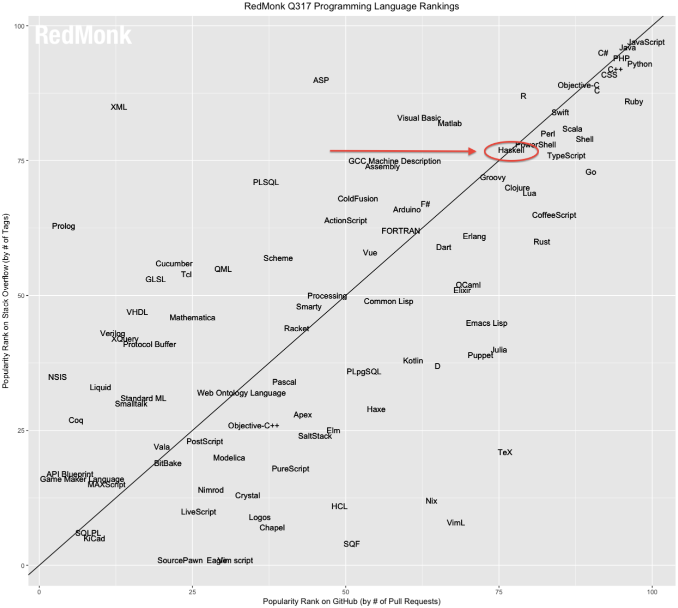
Warum also nicht Haskell?

...Haskell ist eine

- fortgeschrittene moderne funktionale Sprache
  - starke Typisierung
  - verzögerte Auswertung (lazy evaluation)
  - Funktionen höherer Ordnung/Funktionale
  - Polymorphie/Generizität
  - Musterpassung (pattern matching)
  - Datenabstraktion (abstrakte Datentypen)
  - Modularisierung (für Programmierung im Großen)
  - ...
- Sprache für 'realistische (real world)' Probleme
  - mächtige Bibliotheken
  - Schnittstellen zu anderen Sprachen, z.B. zu C
  - ...

In Summe: Haskell ist reich; zugleich ist es eine gute Lehrsprache; auch dank des Interpretierers Hugs! Und Haskell ist mehr als das!

RedMonk Jun'17 Programming Lang. Ranking



RedMonk Programming Language Rankings

Rg	Jan.'15	Rg	Jun'15	Rg	Jan'16	Rg	Jun'16	Rg	Jan'17	Rg	Jun'17
1	JS	1	JS	1	JS	1	JS	1	JS	1	JS
2	Java	2	Java	2	Java	2	Java	2	Java	2	Java
3	PHP	3	PHP	3	PHP	3	PHP	3	Python	3	PHP
4	Python	4	Python	4	Python	4	Python	4	PHP	4	Python
5	C#	5	C#	5	C#	5	C#	5	C#	5	C#
6	C++	5	C++	5	C++	5	C++	5	C++	5	C++
7	Ruby	5	Ruby	5	Ruby	5	Ruby	7	CSS	5	Ruby
8	CSS	8	CSS	8	CSS	8	CSS	7	Ruby	8	CSS
9	C	9	C	9	C	9	C	9	C	9	C
10	Obj-C	10	Obj-C	10	Ob-C	10	Obj-C	10	Obj-C	10	Obj-C
11	Perl	11	Perl	11	Shell	11	Shell	11	Scala	11	Shell
12	Shell	11	Shell	12	Perl	12	R	11	Shell	12	R
13	R	13	R	13	R	13	Perl	11	Swift	13	Perl
14	Scala	14	Scala	14	Scala	14	Scala	14	R	14	Scala
15	Haskell	15	Go	15	Go	15	Go	15	Go	15	Go
16	Matlab	15	Haskell	15	Haskell	16	Haskell	15	Perl	16	Haskell
17	Go	17	Matlab	17	Swift	17	Swift	17	TS	17	Swift
18	VB	18	Swift	18	Matlab	18	Matlab	18	PS	18	Matlab
19	Clojure	19	Groovy	19	Clojure	19	VB	19	Haskell	19	VB
20	Groovy	19	VB	19	Groovy	20	Clojure	20	Clojure	20	Clojure
				19	VB	20	Groovy	20	CS		20 Groovy
								20	Lua		
								20	Matlab		

Abkürzungen:

JS	JavaScript	TS	TypeScript
Obj-C	Objective-C	PS	PowerShell
VB	Visual Basic	CS	CoffeeScript

URL: `http://redmonk.com`

Übungsaufgabe 1.2.5.1

Überprüfe, wie Haskell in den RedMonk-Ranglisten aus dem

- Januar 2018
- Juni 2018

abschneidet. Welche Verschiebungen hat es generell gegeben? Welche für Haskell?

Steckbrief ‘Funktionale Programmierung’

Grundlage:	Lambda- (λ-) Kalkül; Basis formaler Berechenbarkeitsmodelle
Abstraktionsprinzip:	Funktionen (höherer Ordnung)
Charakt. Eigenschaft:	Referentielle Transparenz
Historische und aktuelle Bedeutung:	Basis vieler Programmiersprachen; praktische Ausprägung auf dem λ-Kalkül basierender Berechenbarkeitsmodelle
Anwendungsbereiche:	Theoretische Informatik, Künstliche Intelligenz (Expertensysteme), Experimentelle Software/Prototypen, Programmierunterricht,..., Software-Lsg. industriellen Maßstabs
Programmiersprachen:	Lisp, ML, Miranda, Haskell,...

Steckbrief 'Haskell'

Benannt nach:	Haskell B. Curry (1900-1982) `www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Curry.html`
Paradigma:	Rein funktionale Programmierung
Eigenschaften:	Lazy evaluation, pattern matching
Typsicherheit:	Stark typisiert, Typinferenz, modernes polymorphes Typsystem
Syntax:	Komprimiert, kompakt, intuitiv
Informationen:	`http://haskell.org` `http://haskell.org/tutorial/`
Interpretierer:	Hugs (`haskell.org/hugs/`)
Compiler:	Glasgow Haskell Compiler (GHC)

Kapitel 1.2.6

Erste Schritte in Haskell

Haskell-Programme

...gibt es in zwei sich konzeptuell und notationell unterscheidenden Varianten.

Als sog.

- (Gewöhnliches) Haskell-Skript
  ...alles, was nicht notationell als Kommentar ausgezeichnet ist, wird als Programmtext betrachtet.

  Konvention: `.hs` als Dateiendung

- Literates Haskell-Skript (engl. literate Haskell Script)
  ...alles, was nicht notationell als Programmtext ausgezeichnet ist, wird als Kommentar betrachtet.

  Konvention: `.lhs` als Dateiendung

myFirstScript.hs: Gewöhnliches Haskell-Skript

```haskell
{- myFirstScript.hs: Gewöhnliche Skripte erhalten
   konventionsgemäß die Dateiendung .hs -}

-- Fakultätsfunktion
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)

-- Binomialkoeffizienten
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k) = div (fac n) (fac k * fac (n-k))

-- Konstante (0-stellige) Funktion sechs_aus_45
sechs_aus_45 :: Integer
sechs_aus_45 = (fac 45) `div` (fac 6 * fac (45-6))
```

myFirstLitScript.lhs: Literates Haskell-Skript

```
myFirstLitScript.lhs: Literate Skripte erhalten
konventionsgemäß die Dateiendung .lhs

Fakultätsfunktion

> fac :: Integer -> Integer
> fac n = if n == 0 then 1 else n * fac(n-1)

Binomialkoeffizienten

> binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
> binom' (n,k) = div (fac n) (fac k * fac (n-k))

Konstante (0-stellige) Funktion sechs_aus_45

> sechs_aus_45 :: Integer
> sechs_aus_45 = (fac 45) `div` (fac 6 * fac (45-6))
```

Kommentare in Haskell-Programmen

Kommentare in

- (gewöhnlichem) Haskell-Skript
  - Einzeilig: Alles nach -- bis zum Rest der Zeile
  - Mehrzeilig: Alles zwischen {- und -}
- literatem Haskell-Skript
  - Jede nicht durch > eingeleitete Zeile

    (Beachte: Kommentar- und Codezeilen müssen durch mindestens eine Leerzeile getrennt sein.)

Das Haskell-Vokabular

21 Schlüsselwörter, mehr nicht:

```
case  class  data  default  deriving  do  else
if  import  in  infix  infixl infixr  instance
let  module  newtype  of  then  type  where
```

Schlüsselwörter haben

- wie in anderen Programmiersprachen eine besondere Bedeutung und dürfen nicht als Identifikatoren für z.B. Funktionen oder Funktionsargumente verwendet werden.

Identifikatoren

...sind:

- Nichtleere Zeichenfolgen aus Klein- und Großbuchstaben, Ziffern, einfachen Hochkommata ′ und Unterstrichen _, die mit einem Buchstaben beginnen.

Die Verwendung des Identifikators (als Funktionsname, Typname, Typvariable, etc.) legt fest, ob der erste Buchstabe ein

- Kleinbuchstabe (z.B. für Funktionsnamen, Typvariablen)
- Großbuchstabe (z.B. für Typnamen)

sein muss.

Module Prelude: Standard-Präludium

Die Definitionen

- einiger der in diesem Kapitel beispielhaft betrachteten Rechenvorschriften und vieler weiterer allgemein nützlicher Deklarationen von Typen und Rechenvorschriften finden sich im vordefinierten Modul Prelude, dem sog. Standard-Präludium (engl. Standard Prelude).

Das quelloffene Standard-Präludium

- wird automatisch mit jedem Haskell-Programm geladen, so dass die darin definierten Typen und Rechenvorschriften stets zur Verfügung stehen.

Tipp

Nachschlagen und lesen im Standard-Präludium ist

- gute und einfache Möglichkeit, sich mit der Syntax von Haskell vertraut zu machen und ein Gefühl für den Stil funktionaler Programmierung zu entwickeln.

'Haskell 98'-Sprachbericht:

- Simon Peyton Jones (Hrsg.). Haskell 98: Language and Libraries. The Revised Report. Cambridge University Press, 2003. `www.haskell.org/definitions`. (Kapitel 8, Standard Prelude; Kapitel 8.1, Module `Prelude`)
- Standard-Präludium. `http://www.haskell.org/onlinereport/standard-Prelude.html`

Kapitel 1.3

Nützliche Werkzeuge für Haskell: Hugs, GHC, GHCi, Hoogle, Hayoo, Leksah

Überblick

...beispielhaft 5 nützliche Werkzeuge für die funktionale Programmierung in Haskell:

1. Hugs: Ein Haskell-Interpretierer
2. GHC, GHCi: Ein Haskell-Übersetzer, ein Haskell-Interpretierer
3. Hoogle, Hayoo: Zwei Haskell(-spezifische) Suchmaschinen
4. Leksah: Eine (in Haskell geschriebene) quelloffene integrierte Entwicklungsumgebung IDE

Kapitel 1.3.1

Hugs

Hugs

...ein (weiterhin) populärer Haskell-Interpretierer (mit allerdings eingestellter Entwicklung).

Hugs im Netz:

- `www.haskell.org/hugs`

Zur Arbeit mit Hugs siehe z.B.:

- H. Conrad Cunningham. *Notes on Functional Programming with Haskell*. Course Notes, University of Mississippi, 2007. `citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.114.2822&rep=rep1&type=pdf` (Chapter 4, Using the Hugs Interpreter)

Hugs-Aufruf ohne Programmskript

Aufruf von Hugs ohne Skript:

```
hugs
```

Nach Aufruf steht die Taschenrechnerfunktionalität von Hugs (sowie im Prelude definierte Funktionen) zur Auswertung von Ausdrücken zur Verfügung:

```
Main>47*100+11
4711
Main>reverse "stressed"
"desserts"
Main>length "desserts"
8
Main>(4>17) || (17+4==21)
True
Main>True && False
False
```

Hugs-Aufruf mit Programmskript

Aufruf von Hugs mit Skript:

```
hugs <filename>
```

Zum Beispiel:

```
hugs myFirstScript.hs
hugs myFirstScript.lhs
```

Nach Aufruf stehen zusätzlich zu den Präludiumsfunktionen auch alle im geladenen Skript deklarierten Funktionen zur Verfügung:

```
Main>fac 6
720
Main>binom' (49,6)
13.983.816
Main>sechs_aus_45
8.145.060
```

Das Hugs-Kommando `:l(oad)` erlaubt ein anderes Skript zu laden (wodurch ein eventuell vorher geladenes Skript ersetzt wird):

```
Main>:l myFirstScript.lhs
```

Wichtige Hugs-Kommandos

`:?`	Liefert Liste der Hugs-Kommandos
`:load <fileName>`	Lädt die Haskell-Datei `<fileName>` (erkennbar an Endung `.hs` bzw. `.lhs`)
`:reload`	Wiederholt letztes Ladekommando
`:quit`	Beendet den aktuellen Hugs-Lauf
`:info name`	Liefert Information über das mit `name` bezeichnete 'Objekt'
`:type exp`	Liefert den Typ des Argumentausdrucks `exp`
`:edit <fileName>.hs`	Öffnet die Datei `<fileName>.hs` enthaltende Datei im voreingestellten Editor
`:find name`	Öffnet die Deklaration von `name` im voreingestellten Editor
`!<com>`	Ausführen des Unix- oder DOS-Kommandos `<com>`

Alle Kommandos können mit dem ersten Buchstaben abgekürzt werden.

Hugs-Fehlermeldungen und -warnungen

- Fehlermeldungen
  - Syntaxfehler
    `Main> sechsAus45 == 123456)` ...liefert
    `ERROR: Syntax error in input (unexpected ‘)’)`
  - Typfehler
    `Main> sechsAus45 + False` ...liefert
    `ERROR: Bool is not an instance of class "Num"`
  - Programmfehler
    ...später
  - Modulfehler
    ...später
- Warnungen
  - Systemmeldungen
    ...später

Bibliotheken: Professionell und praxisgerecht

- Haskell stellt umfangreiche Bibliotheken mit vielen vordefinierten Funktionen zur Verfügung.
- Das sog. Standard-Präludium (engl. `Standard Prelude`) wird automatisch beim Start von Hugs geladen und stellt eine Vielzahl von Funktionen bereit, z.B. zum
  - Umkehren von Zeichenreichen bzw. genereller, allgemein von Listen beliebiger Typen (`reverse`)
  - Ver- und entpaaren von Listen (`zip`, `unzip`)
  - Aufsummieren und Aufmultiplizieren von Elementen einer numerischen Liste (`sum`, `product`)
  - ...

Namenskonflikte mit vordefinierten Namen

...soll eine Funktion eines gleichen (bereits in `Prelude.hs` vordefinierten) Namens deklariert werden, können Namenskonflikte durch verstecken (engl. hiding) vordefinierter Namen vermieden werden.

Am Beispiel von `reverse`, `zip`, `sum`:

- Füge die Zeile

  ```
  import Prelude hiding (reverse,zip,sum)
  ```

  am Anfang des Haskell-Skripts im Anschluss an die Modul-Anweisung (so vorhanden) ein; dadurch werden die vordefinierten Namen `reverse`, `zip` und `sum` verborgen.

  (Mehr dazu in Kapitel 17 im Zusammenhang mit dem Modulkonzept von Haskell).

Kapitel 1.3.2

GHC, GHCi

GHC, GHCi

...ein populärer Haskell-Compiler:

- Glasgow Haskell Compiler (GHC)

...und ein damit verbundener Interpretierer:

- GHCi (GHC interactive)

GHC und GHCi im Netz:

- `hackage.haskell.org/platform`

Kapitel 1.3.3

Hoogle, Hayoo

Hoogle, Hayoo

...zwei nützliche Suchmaschinen, um vordefinierte Funktionen (in Haskell-Bibliotheken) aufzuspüren.

Hoogle und Hayoo unterstützen die Suche nach

- Funktionsnamen
- Modulnamen
- Funktionssignaturen

Hoogle und Hayoo im Netz:

- `www.haskell.org/hoogle`
- `hayoo.fh-wedel.de`

Kapitel 1.3.4

Leksah

Leksah

...eine quelloffene in Haskell geschriebene IDE mit GTK-Oberfläche für Linux, Windows und MacOS.

Unterstützte Eigenschaften:

- Quell-Editor zur Quellprogrammerstellung.
- Arbeitsbereiche zur Verwaltung von Haskell-Projekten in Form eines oder mehrerer Cabal-Projekte.
- Cabal-Paketverwaltung zur Verwaltung von Versionen, Übersetzeroptionen, Testfällen, Haskell-Erweiterungen, etc.
- Modulbetrachter zur Projektinspektion.
- Debugger auf Basis eines integrierten ghc-Interpretierers.
- Erweiterte Editorfunktionen mit Autovervollständigung, 'Spring-zu-Fehlerstelle'-Funktionalität, etc.
- ...

Leksah (fgs.)

Leksah im Netz:

- www.leksah.org

Anmerkung:

- Teils aufwändige Installation, oft vertrackte Versionsabhängigkeiten zwischen Komponenten.
- Für die Zwecke der LVA nicht benötigt.

Kapitel 1.4

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (1)

- Christopher Allen, Julie Moronuki. *Haskell Programming from First Principles*. ebook. `http://haskellbook.com`
- Sergio Antoy, Michael Hanus. *Functional Logic Programming*. Communications of the ACM 53(4):74-85, 2010.
- John W. Backus. *Can Programming be Liberated from the von Neumann Style? A Functional Style and its Algebra of Programs*. Communications of the ACM 21(8):613-641, 1978.
- Henri E. Baal, Dick Grune. *Programming Language Essentials*. Addison-Wesley, 1994. (Chapter 4, Functional Languages; Chapter 7, Other Paradigms)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (2)

- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 1, Motivation und Einführung)
- Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 1, What is functional programming? Kapitel 2.1, A session with GHCi)
- Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 1, Einführung; Kapitel 2, Programmierumgebung; Kapitel 4.1, Rekursion über Zahlen; Kapitel 6, Die Unix-Programmierumgebung)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (3)

- H. Conrad Cunningham. *Notes on Functional Programming with Haskell*. Course Notes, University of Mississippi, 2007. `citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.114.2822&rep=rep1&type=pdf` (Chapter 1.2, Excerpts from Backus' 1977 Turing Award Address; Chapter 1.3, Programming Language Paradigms; Chapter 1.4, Reasons for Studying Functional Programming; Chapter 1.5, Objections Raised Against Functional Programming; Chapter 4, Using the Hugs Interpreter)
- Hal Daumé III. *Yet Another Haskell Tutorial*. `wikibooks.org`-Ausgabe, 2007. `https://en.wikibooks.org/wiki/Yet_Another_Haskell_Tutorial`

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (4)

- Antonie J.T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 1.1, The von Neumann Bottleneck; Kapitel 1.2, Von Neumann Languages)
- Frank DeRemer, Hans H. Kron. *Programming-in-the-Large vs. Programming-in-the-Small*. IEEE Transactions on Software Engineering 2(2):80-86, 1976.
- Atze Dijkstra, Jeroen Fokker, S. Doaitse Swierstra. *The Architecture of the Utrecht Haskell Compiler*. In Proceedings of the 2nd ACM SIGPLAN Symposium on Haskell (Haskell 2009), 93-104, 2009.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (5)

- Atze Dijkstra, Jeroen Fokker, S. Doaitse Swierstra. *UHC Utrecht Haskell Compiler*, 2009. www.cs.uu.nl/wiki/UHC
- Ernst-Erich Doberkat. *Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte*. Oldenbourg Verlag, 2012. (Kapitel 1, Erste Schritte; Anhang A, Zur Benutzung des Systems)
- Chris Done. *Try Haskell*. Online Hands-on Haskell Tutorial. tryhaskell.org.
- Robert W. Floyd. *The Paradigms of Programming*. Turing Award Lecture. Communications of the ACM 22(8):455-460, 1979.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (6)

- Bastiaan Heeren, Daan Leijen, Arjan van IJzendoorn. *Helium, for Learning Haskell*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN 2003 Haskell Workshop (Haskell 2003), 62-71, 2003.
- Konrad Hinsen. *The Promises of Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 11(4):86-90, 2009.
- C.A.R. Hoare. *Algorithm 64: Quicksort*. Communications of the ACM 4(7):321, 1961.
- C.A.R. Hoare. *Quicksort*. The Computer Journal 5(1):10-15, 1962.
- Paul Hudak. *Conception, Evolution and Applications of Functional Programming Languages*. Communications of the ACM 21(3):359-411, 1989.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (7)

- Paul Hudak, Joseph Fasel, John Peterson. *A Gentle Introduction to Haskell*. Technischer Bericht, Yale University, 1996. `https://www.haskell/org/tutorial`
- John Hughes. *Why Functional Programming Matters*. The Computer Journal 32(2):98-107, 1989.
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 1, Introduction; Kapitel 2, First Steps)
- Arjan van IJzendoorn, Daan Leijen, Bastiaan Heeren. *The Helium Compiler*. www.cs.uu.nl/helium.
- Mark P. Jones, Alastair Reid et al. *The Hugs98 User Manual*, 1999. `www.haskell.org/hugs`

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (8)

- Jerzy Karczmarczuk. *Scientific Computation and Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 1(3):64-72, 1999.
- Donald E. Knuth. *Literate Programming*. The Computer Journal 27(2):97-111, 1984.
- Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal. *The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II*. Computing in Science and Engineering 11(5):68-75, 2009.
- Mihai Maruseac. *Haskell: A Language for Modern Times*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 24(1):64-66, 2017.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (9)

- Martin Odersky. *Funktionale Programmierung*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 599-612, 2006. (Kapitel 5.1, Funktionale Programmiersprachen; Kapitel 5.2, Grundzüge des funktionalen Programmierens)
- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 1, Getting Started)
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 1, Was die Mathematik uns bietet; Kapitel 2, Funktionen als Programmiersprache)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (10)

- Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung: Sprachdesign und Programmiertechnik*. Springer-V., 2006. (Kapitel 1, Grundlagen der funktionalen Programmierung)
- Tomas Petricek, Jon Skeet. *Real World Functional Programming: With Examples in F# and C#*. Manning Publications Co., 2009. (Chapter 1, Thinking differently; Chapter 2, Core concepts in functional programming)
- Simon Peyton Jones (Hrsg.). *Haskell 98: Language and Libraries. The Revised Report*. Cambridge University Press, 2003. `www.haskell.org/definitions`. (Kapitel 8, Standard Prelude; Kapitel 8.1, Module `Prelude`)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (11)

- Chris Sadler, Susan Eisenbach. *Why Functional Programming?* In *Functional Programming: Languages, Tools and Architectures*, Susan Eisenbach (Hrsg.), Ellis Horwood, 9-20, 1987.
- Neil Savage. *Using Functions for Easier Programming*. Communications of the ACM 61(5):29-30, 2018.
- Curt J. Simpson. *Experience Report: Haskell in the "Real World": Writing a Commercial Application in a Lazy Functional Language*. In Proceedings of the 14th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2009), 185-190, 2009.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (12)

- Simon Thompson. *Where Do I Begin? A Problem Solving Approach in Teaching Functional Programming*. In Proceedings of the 9th International Symposium on Programming Languages: Implementations, Logics, and Programs (PLILP'97), Springer-Verlag, LNCS 1292, 323-334, 1997.
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 1, Introducing functional programming; Kapitel 2, Getting started with Haskell and Hugs)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 1, Introducing functional programming; Kapitel 2, Getting started with Haskell and GHCi)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (13)

- Reinhard Wilhelm, Helmut Seidl. *Compiler Design – Virtual Machines*. Springer-V., 2010. (Kapitel 3, Functional Programming Languages; Kapitel 3.1, Basic Concepts and Introductory Examples)
- Hugs-Benutzerhandbuch. *The Hugs98 User Manual*. `https://www.haskell.org/hugs/pages/hugsman/index.html`
- GHCi-Benutzerhandbuch. *Glasgow Haskell Compiler User's Guide*. `http://www.haskell.org/ghc/docs/latest/html/users_guide/ghci.html`
- Haskells Standard-Präludium. `https://www.haskell.org/onlinereport/standard-prelude.html`

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 1 (14)

Welches Paradigma, welche Sprache sollte ich nutzen?

- Peter J. Landin. *The next 700 Programming Languages*. Communications of the ACM 9(3):157-166, 1966.
- Jeffrey S. Foster. *Shedding New Light on an Old Language Debate*. Communications of the ACM 60(10):90, 2017.
- Baishakhi Ray, Daryl Posnett, Premkunar Devanbu, Vladimir Filkov. *A Large-Scale Study of Programming Languages and Code Quality in GitHub*. Communications of the ACM 60(10):91-100, 2017.
- Rachel Harrison L. G. Smaraweera, Mark R. Dobie, Paul H. Lewis. *Comparing Programming Paradigms: An Evaluation of Functional and Object-Oriented Programs*. Software Engineering Journal 11(4):247-254, 1996.

Quis leget haec?
Wer soll das lesen?

Persius (34 - 62 n.Chr.)
röm. Dichter

Non omnia possumus omnes!
Wir können nicht alle alles!
Wir können alle nicht alles!
Wir alle können nicht alles!

Vergil (70 - 19 v.Chr.)
röm. Dichter und Epiker

Nicht einmal alles lesen.
Jeder aber kann etwas,
auch einiges lesen.
Und sollte das.

Lege multum, non multa!
Lies viel, nicht vieles!

Plinius der Jüngere (um 61 - um 113 n.Chr.)
röm. Beamter und Schriftsteller
beschrieb den Ausbruch des Vesuvs im Jahr 79 n.Chr.

Drei Vorschläge:

- Sie sind mit objektorientierter Programmierung groß geworden und fühlen sich dort heimisch?

  Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte von Ernst-Erich Doberkat könnte Ihre Wahl sein.

- Sie möchten die Welt funktionaler Programmierung zugleich mit Beispielen weiterer funktionaler Sprachen erkunden?

  Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer von Peter Pepper bietet sich als Ihre Wahl an.

- Sie suchen ein Buch, das möglichst weite Teile der Vorlesung überstreicht?

  Haskell: The Craft of Functional Programming von Simon Thompson könnte sich für Sie lohnen.

Teil II

Grundlagen

Kapitel 2

Elementare Typen, Tupel, Listen, Zeichenreihen

Kapitel 2.1

Elementare Typen

Überblick

Elementare (Daten-) Typen

- Wahrheitswerte: `Bool`
- Ganze Zahlen: `Int`, `Integer`
- Gleitkommazahlen: `Float`, `Double`
- Zeichen: `Char`

...in der Folge nach folgendem Schema angegeben:

- Typname
- Typtypische Konstanten
- Typtypische Operatoren und Relatoren

Für Details siehe Haskell-Sprachbericht und Standard-Präludium.

Kapitel 2.1.1

Wahrheitswerte

Wahrheitswerte: Bool

Typ	`Bool`	Wahrheitswerte
Konstanten	`True :: Bool` `False :: Bool`	Darstellung v. 'wahr' Darstellung v. 'falsch'
Vordef. Name	`otherwise :: Bool` `otherwise = True`	(Bedingte Ausdrücke: Stets erfüllter Wächter)

Operatoren	`(&&) :: Bool -> Bool -> Bool`
	`(||) :: Bool -> Bool -> Bool`
	`not  :: Bool -> Bool`
		Konjunktion
		Disjunktion
		Negation

Relatoren	`(==) :: Bool -> Bool -> Bool`
	`(/=) :: Bool -> Bool -> Bool`
	`(>)  :: Bool -> Bool -> Bool`
	...
		gleich
		ungleich
		echt größer

Kapitel 2.1.2

Ganze Zahlen

Ganze Zahlen: Int, Integer (1)

Typ	`Int`	Ganze Zahlen, -2^{63} bis $2^{63}-1$ oder -2^{31} bis $2^{31}-1$ (engl. fixed-precision integers)
Konstanten	`0  :: Int`	Null
	`42 :: Int`	Zweiundvierzig
	`-5 :: Int`	Minus fünf
	...	
Operatoren	`(+) :: Int -> Int -> Int`	Addition
	`(*) :: Int -> Int -> Int`	Multiplikation
	`(^) :: Int -> Int -> Int`	Exponentiation
	`(-) :: Int -> Int -> Int`	Subtraktion
	`-   :: Int -> Int`	Vorzeichenwechsel
	`div :: Int -> Int -> Int`	Division
	`mod :: Int -> Int -> Int`	Divisionsrest
	`abs :: Int -> Int`	Absolutbetrag
	`negate :: Int -> Int`	Vorzeichenwechsel
	...	
	`fromInt :: Num a => Int -> a`	Typkonversion

Ganze Zahlen: `Int`, `Integer` (2)

Relatoren

```
(==) :: Int -> Int -> Bool    gleich
(/=) :: Int -> Int -> Bool    ungleich
(>=) :: Int -> Int -> Bool    größer oder gleich
 (>) :: Int -> Int -> Bool    echt größer
(<=) :: Int -> Int -> Bool    kleiner oder gleich
 (<) :: Int -> Int -> Bool    echt kleiner
...
```

Vorgriff: Numerische Typen in Haskell: Ganze Zahlen, Gleitkommazahlen, rationale und komplexe Zahlen, zusammengefasst in der Typklasse `Num` (vgl. `fromInt :: Num a => Int -> a`)

Ganze Zahlen: Int, Integer (3)

Typ	`Integer`	Ganze Zahlen, keine Bereichsbeschränkung (engl. arbitrary-precision integers)
Konstanten	`0 :: Integer`	Null
	`42 :: Integer`	Zweiundvierzig
	`-5 :: Integer`	Minus fünf
	`93948307853803234 :: Integer`	'Große' Zahl
	...	
Operatoren	`(+) :: Integer -> Integer -> Integer`	Addition
	...	
	`fromInteger :: Num a => Integer -> a`	Typkonversion
Relatoren	...	

Konstanten, Operatoren und Relatoren für `Integer` wie für `Int`, jedoch keine *a-priori* Zahlbereichsbeschränkung.

Kapitel 2.1.3

Gleitkommazahlen

Gleitkommazahlen: Float, Double (1)

Typ	`Float`	Gleitkommazahlen (32 Bit-Darstellung)
Konstanten	`0.125  :: Float`	Ein Achtel
	`-1.75  :: Float`	Minus eindreiviertel
	`8.5e-2 :: Float`	Achteinhalbhundertstel
	...	
Operatoren	`(+) :: Float -> Float -> Float`	Addition
	`(*) :: Float -> Float -> Float`	Multiplikation
	...	
	`sqrt :: Float -> Float`	(positive) Quadrat-wurzel
	`sin  :: Float -> Float`	sinus
	`cos  :: Float -> Float`	cosinus
	...	
	`ceiling :: Float -> Int`	Typkonversion
	`floor   :: Float -> Int`	Typkonversion
	`round   :: Float -> Int`	Typkonversion

Gleitkommazahlen: `Float`, `Double` (2)

Relatoren	`(==) :: Float -> Float -> Bool`	gleich
	`(/=) :: Float -> Float -> Bool`	ungleich
	`(>=) :: Float -> Float -> Bool`	größer oder gleich
	`(>) :: Float -> Float -> Bool`	echt größer
	`(<=) :: Float -> Float -> Bool`	kleiner oder gleich
	`(<) :: Float -> Float -> Bool`	echt kleiner
	...	

Gleitkommazahlen: `Float`, `Double` (3)

Typ	`Double`	Gleitkommazahlen (64 Bit-Darstellung)
Konstanten	...	
Operatoren	...	
Relatoren	...	

Konstanten, Operatoren und Relatoren für `Double` wie für `Float`, jedoch mit doppelter Genauigkeit.

Kapitel 2.1.4

Zeichen, Ziffern, Sonderzeichen

Zeichen: Char

Typ	`Char`	Zeichen (Literal) (Unicode-Darst.)
Konstanten	`'a' :: Char`	Darst. von a
	…	
	`'Z' :: Char`	Darst. von Z
	`'\t':: Char`	Tabulator
	`'\n':: Char`	Neue Zeile
	`'\\':: Char`	'backslash'
	`'\'' :: Char`	Hochkomma
	`'\"':: Char`	Anführungszeichen
	…	
Operatoren	`ord :: Char -> Int`	Konversionsfkt.
	`chr :: Int -> Char`	Konversionsfkt.
	…	
Relatoren	`(==) :: Char -> Char -> Bool`	gleich
	`(>) :: Char -> Char -> Bool`	echt größer
	…	

Kapitel 2.2

Tupel

Tupel

Tupel

- fassen eine vorbestimmte Zahl von Werten möglicherweise verschiedener Typen zusammen.
- sind in diesem Sinn heterogen.

Allgemeines Muster

- Allgemeines Muster für Tupelwerte

  `(v1,v2,...,vk) :: (T1,T2,...,Tk)`

  Dabei bezeichnen `v1,...,vk` Werte und `T1,...,Tk` Typen mit

  `v1 :: T1, v2 :: T2,..., vk :: Tk`

- Standardkonstruktor (runde Klammern)
  - Leerer Tupelkonstruktor:

    `() :: ()` (exotisch, aber sinnvoll, s. Kap. 15)
  - Paarkonstruktor:

    `(,) :: a -> b -> (a,b)`
  - Tripelkonstruktor:

    `(,,) :: a -> b -> c -> (a,b,c)`
  - Quadrupelkonstruktor:

    `(,,,) :: a -> b -> c -> d -> (a,b,c,d)`
  - ...

Beispiele für Tupel

Beispiele:

```
(,) 3.14 17.4 ->> (3.14,17.4) :: (Float,Float)
(,) 'a' True   ->> ('a',True) :: (Char,Bool)
(,) "Fun" 3    ->> ("Fun",3) :: (String,Int)
(,) ("Fun",3) True
     ->> (("Fun",3),True) :: ((String,Int),Bool)
(,,) 5 8 6.5 ->> (5,8,6.5) :: (Int,Int,Float)
(,,,) 'b' False "Fun" 3
     ->> ('b',False,"Fun",3) :: (Char,Bool,String,Int)
p = (,,,) 'b' False :: a -> b -> (Char,Bool,a,b)
p "Fun" 3
     ->> ('b',False,"Fun",3) :: (Char,Bool,String,Int)
p 2.1 True
     ->> ('b',False,2.1,True) :: (Char,Bool,Float,Bool)
```

Standardselektoren für Paare

Standardselektoren (vordefiniert ausschließlich für Paare):

```
fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x
snd :: (a,b) -> b
snd (_,y) = y
```

Aufrufbeispiele:

```
fst (3.14,‘a‘) ->> 3.14
snd (3.14,‘a‘) ->> ‘a‘
```

Bemerkung: Für drei- und mehrstellige Tupel bietet Haskell keine vordefinierten (Selektor-) Funktionen für den Zugriff auf Tupelkomponenten an.

Selektoren für Tripel

Selbstdefinierte Selektoren für Tripel:

```
fst′ :: (a,b,c) -> a
fst′ (x,_,_) = x
snd′ :: (a,b,c) -> b
snd′ (_,y,_) = y
thd′ :: (a,b,c) -> c
thd′ (_,_,z) = z
```

Aufrufbeispiele:

```
fst′ (3.14,‘a‘,True) ->> 3.14
snd′ (3.14,‘a‘,True) ->> ‘a‘
thd′ (3.14,‘a‘,True) ->> True
```

Kapitel 2.3

Listen

Listen

Listen

- fassen eine nicht vorbestimmte Zahl von Werten gleichen Typs zusammen.
- sind in diesem Sinn homogen.

Allgemeines Muster

- Allgemeines Muster für Listenwerte

  `v1 : (v2 : (.. : (vk : [])..)) = [v1,v2,..,vk] :: [T]`

  Dabei bezeichnen `v1,...,vk` Werte und `T` einen Typ mit `v1, v2,..., vk :: T`
- Standardkonstruktor (:), zusätzlich eckige Klammern als Listenoperator für kompaktere Schreibweise
  - Allgemein:

    `v1 : (v2 : (.. : (vk : [])..)) :: [a]` (Standard)

    `[v1,v2,..,vk] :: [a]` (Abgekürzt)
  - Konkret:

    `1 : (2 : (3 : (4 : []))) :: [Int]` (Standard)

    `[1,2,3,4] :: [Int]` (Abgekürzt)

    `[] :: [a]` (Leere Liste)

  Erinnerung:
  ```
  quickSort []     = []
  quickSort (n:ns) = ...
  ```

Beispiele für Listen (1)

...von

- Zeichen
  `['a','b','c','d','e'] :: [Char]`
- Wahrheitswerten
  `[True,False,True] :: [Bool]`
- ganzen Zahlen
  `[2,5,17,4,42,4711] :: [Int]`
- Gleitkommazahlen
  `[3.14,5.0,12.21] :: [Float]`
- keinen Elementen (bel. Typs), leere Liste (bel. Typs)
  `[] :: [a]`

Beispiele für Listen (2)

...von

- Tupeln

  ```
  [('a',True),('b',False),('c',False),
   ('d',False),('e',True)] :: [(Char,Bool)]
  ```

  ```
  [(3,5,4.0),(4,7,5.5),(2,8,5.0),(2,11,6.5)]
                                  :: [(Int,Int,Float)]
  ```

- Listen

  ```
  [[1,2,3],[9],[],[17,4,21],[],[3,2]] :: [[Int]]
  ```

  ```
  [(['f','p'],2),(['h'],1),([],0)] :: [([Char],Int)]
  ```

  ```
  [("fun",3),("h",1),("",0)] :: [([Char],Int)]
  ```

Beispiele für Listen (3)

...von

- Zeichenreihen

  `["sin","cos","tan","sin","cos","tan"] :: [[Char]]`

- Funktionen

  `[sin,cos,tan,sin,cos,tan] :: [Float -> Float]`

  `[(+),(*),ggt,mod] :: [Int -> Int -> Int]`

  `[binom',binom''] :: [(Integer,Integer) -> Integer]`

  `[binom,binom] :: [Integer -> Integer -> Integer]`

- ...

Vergleichbarkeit und Gleichheit von Listen (1)

Nur typgleiche Listenwerte sind vergleichbar:

```
cs = [‘a‘,‘b‘,‘c‘] :: [Char]
ss = ["a","b","c"] :: [String]
xs = "abc" :: String

ns = [1,2,3] :: [Int]
ms = [1,2,3] :: [Integer]

fs = [1.0,2.0,3.0] :: [Float]
ds = [1.0,2.0,3.0] :: [Double]

cs == ns ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
ns == fs ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
ns == ms ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
fs == ds ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"

ns == ns ->> True
fs == fs ->> True

cs == ss ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
ss == xs ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"

cs == xs ->> True
```

Vergleichbarkeit und Gleichheit von Listen (2)

Nur typgleiche Listen gleicher Länge u. Anordnung sind gleich:

```
ns = [1,2,3,4]
ms = [1,2,3]
ks = [1,2,3,4,5]
ls = [2,1,4,3]

ns == ns ->> True

ns == ms ->> False
ns == ks ->> False
ns == ls ->> False

[17,4,21] :: [Int] == [17,4,21] :: [Int] ->> True
[17,4,21] :: [Int] == [17,4,21] :: [Integer] ->>
                    "Fehler: Typfehler in Anwendung"
```

Vergleichbarkeit und Gleichheit von Listen (3)

Auch 'leere' Listen sind nur typabhängig vergleichbar:

```
[] == [] ->> True
[] :: [Int] == [] :: [Int] ->> True
[] :: [Int] == [] :: [Integer]
    ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
[] :: [Float] == [] :: [Double]
    ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
```

```
bs = [] :: [Bool]
cs = [] :: [Char]
bs == cs ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
bs /= cs ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
```

```
xs = []
ys = []
xs == ys ->> True
xs /= ys ->> False
```

Vordefinierte Funktionen auf Listen (1)

Name und Typ	Bedeutung und Beispiel
`(:)  :: a -> [a] -> [a]`	Anfügen eines Elements am Anfang einer Liste: `5:[3,2] ->> [5,3,2]`
`(++) :: [a] -> [a] -> [a]`	Aneinanderhängen zweier Listen: `[11,7] ++ [5,3,2]->> [11,7,5,3,2]`
`(!!) :: [a] -> Int -> a`	Zugreifen auf ein Listenelement: `[5,3,2]!!0 ->> 5` `[5,3,2]!!1 ->> 3`
`concat :: [[a]] -> [a]`	Verschmelzen einer Liste von Listen zu einer Liste: `concat [[11,7],[5,3,2]] ->> [11,7,5,3,2]`
`reverse :: [a] -> [a]`	Umkehren einer Liste: `reverse [5,3,2] ->> [2,3,5]`

...und viele mehr (siehe Standard-Präludium).

Vordefinierte Funktionen auf Listen (2)

...drei Beispiele vordefinierter Funktionen auf Listen mit ihrer Implementierung.

Die Funktion `length`:

```
length :: [a] -> Int
length []      = 0
length (x:xs) = 1 + length xs
```

Aufrufbeispiele:

```
length [1,2,3]                ->> 3
length [[1],[2,3],[4,5,6]]    ->> 3
length [sin,cos,tan]          ->> 3
length []                     ->> 0
```

Vordefinierte Funktionen auf Listen (3)

Die Funktionen `head` und `tail`:

```
head :: [a] -> a
head (x:_) = x

tail :: [a] -> [a]
tail (_:xs) = xs
```

Aufrufbeispiele:

```
head [1,2,3]                ->> 1
head [[1],[2,3],[4,5,6]]    ->> [1]
head [sin,cos,tan]         ‘->> sin’
head [sin,cos,tan] (pi/2)   ->> 1.0

tail [1,2,3]                ->> [2,3]
tail [[1],[2,3],[4,5,6]]    ->> [[2,3],[4,5,6]]
tail [sin,cos,tan]         ‘->> [cos,tan]’
```

Listenkomprehension

...Zusammenfassung, Vereinigung von Mannigfaltigkeiten zu einer Einheit (Philos.):

- In funktionalen Sprachen ein wichtiges, ausdruckskräftiges Sprachkonstrukt, das eine automatische Listengenerierung ermöglicht!

Beispiele:

```
ns = [1..10]  -- kurz für [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]

[3*n | n <- ns] ->> [3,6,9,12,15,18,21,24,27,30]
[n | n <- ns, odd(n)] ->> [1,3,5,7,9]
[n | n <- ns, even(n), n>5] ->> [6,8,10]
[n*(n+1) | n <- ns, (even(n) || n>5)]
                         ->> [6,20,42,56,72,90,110]
[p | n <- ns, m <- ns, n<=3, m>=9, let p=m*n]
                         ->> [9,10,18,20,27,30]
```

Aufzählungsausdrücke

...stellen einen weiteren Erzeugungsautomatismus für Listen über Typen geordneter aufzählbarer Werte (Typen der Typklasse `Enum`) dar:

```
[2..13]       ->> [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13]
[2,5..20]     ->> [2,5,8,11,14,17,20]
[2,5..21]     ->> [2,5,8,11,14,17,20]
[2,5..22]     ->> [2,5,8,11,14,17,20]
[2,5..23]     ->> [2,5,8,11,14,17,20,23]
[11,9..3]     ->> [11,9,7,5,3]
[11,9..2]     ->> [11,9,7,5,3]
[11,10..2]    ->> [11,10,9,8,7,6,5,4,3,2]
[11..2]       ->> []
['a','c'..'g'] ->> ['a','c','e','g'] ->> "aceg"
['a','c'..'h'] ->> ['a','c','e','g'] ->> "aceg"
[0.0,0.3..1.2] ->> [0.0,0.3,0.6,0.9,1.2]
```

Beachte

...folgende Gleichheiten und abkürzende Schreibweisen:

```
   (1:(2:(3:[])))             (Standarddarstellung)
== 1:2:3:[]                   (Rechtsassoziativität)
== [1,2,3]                    (Syntaktischer Zucker)
```

...Typisierungen und überladene Schreibweisen:

```
[] :: [a]
```

```
[1,2,3]
ns = [1,2,3] :: [Int]
ms = [1,2,3] :: [Integer]
```

```
[1,2,3] :: Num a => [a]    (Gleiche Schreibweise,
ns :: [Int]                   verschiedene Typen,
ms :: [Integer]            Überladung von [1,2,3])
```

...überprüfbar in Hugs mittels des Kommandos `:t`.

Kapitel 2.4

Zeichenreihen

Zeichenreihen

Zeichenreihen (engl. Strings)

- fassen eine nicht vorbestimmte Zahl von Werten des Typs Zeichen `Char` zusammen.
- sind spezielle Listen und deshalb ebenfalls homogen.

Zeichenreihen: String

Zeichenreihen sind in Haskell über dem Datentyp Liste realisiert, als Listen von Zeichen, kurz Zeichenlisten:

Typ	`[Char]`	Zeichenlisten
Bezeichner	`String`	Typsynonym
Vereinbarung	`‘data [a] = [] | a:[a] deriving (Eq,Ord)’` `type String = [Char]`	Kein zulässiges Haskell; nur zur Illustration

Konstanten	`[‘F‘,‘u‘,‘n‘] :: String`
	`"Fun" :: String`
	`[] :: String`
	`"" :: String`
		Zwei Darst. der Z-Reihe ‘Fun’ und der leeren Z-Reihe

Operatoren	`(++) :: String -> String -> String` ...	Konkatenation
Relatoren	`(==) :: String -> String -> Bool` `(/=) :: String -> String -> Bool`	gleich ungleich

Beispiele mit Zeichenreihen

...zu Konstruktion und Gleichheitstests:

```
"Fun"         == ['F','u','n']                 ->> True
['F','u','n'] == ('F' : ('u' : ('n' : []))) ->> True
"Fun"         == ('F' : ('u' : ('n' : []))) ->> True

['H','e','l','l','o'] ++ "," ++ " " ++ "world!"
                                == "Hello, world!" ->> True

"a" == 'a'   ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
"a" == ['a'] ->> True
"a" == []    ->> False
 'a' == []   ->> "Fehler: Typfehler in Anwendung"
```

Vordefinierte Funktionen auf Zeichenreihen

...Zeichenreihen sind Listen über dem Zeichentyp `Char`, mithin Listen:

```
type String = [Char]
```

Deshalb stehen alle auf Listen vordefinierte Operatoren und Relatoren unmittelbar auch auf Zeichenreihen zur Verfügung.

Kapitel 2.5

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 2 (1)

- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 2, Einfache Datentypen; Kapitel 5.1, Listen; Kapitel 5.2, Tupel; Kapitel 5.3, Zeichenreihen)
- Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 1998. (Kapitel 2, Simple datatypes; Kapitel 4, Lists)
- Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 2, Expressions, types, and values; Kapitel 4, Lists)
- Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 1, Elemente funktionaler Programmierung)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 2 (2)

- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 3.1, Basic concepts; Kapitel 3.2, Basic types; Kapitel 3.3, List types; Kapitel 3.4, Tuple types; Kapitel 5, List comprehensions)
- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 1, An Intro to Lists, Tuples; Kapitel 2, Common Haskell Types)
- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 2, Types and Functions – Useful Composite Data Types: Lists and Tuples, Functions over Lists and Tuples)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 2 (3)

- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 3.2, Elementare Strukturen; Kapitel 15, Listen (Sequenzen))
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 3, Basic types and definitions; Kapitel 5, Data types, tuples and lists)

Kapitel 3

Funktionen

Kapitel 3.1

Definition, Schreibweisen, Sprachkonstrukte

Funktionen

...sind wichtigstes Abstraktions- und Ausdrucksmittel in funktionaler Programmierung.

Funktionale Programmiersprachen bieten deshalb oft mehrere Schreibweisen an, um Funktionen zu definieren. So ist

```
fac :: Int -> Int
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
```

nur eine Möglichkeit, die Fakultätsfunktion in Haskell zu definieren:

$$! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n\,! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)\,! & \text{sonst} \end{cases}$$

Prägnanz d. Vermeiden bedingter Ausdrücke

Haskell bietet weitere Schreibweisen an, die meist knapper, konziser und deshalb übersichtlicher und verständlicher sind, insbesondere durch weitere Möglichkeiten

- Fallunterscheidungen

anders als durch bedingte Ausdrücke wie in

```
fac :: Int -> Int
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
```

Bedingter Ausdruck

auszudrücken, insbesondere

- bewachte Ausdrücke
- Muster

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (1)

(1) Mittels bedingter Ausdrücke:

```
fac :: Int -> Int
```

$\texttt{fac n = }\underbrace{\texttt{if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)}}_{\textit{Bedingter Ausdruck}}$

(2) Mittels bewachter Ausdrücke:

```
fac :: Int -> Int
fac n
```

$\texttt{| }\underbrace{\texttt{n == 0}}_{\textit{Wächter}}\texttt{ = }\underbrace{\texttt{1}}_{\textit{Bewachter Ausdruck}}$

$\texttt{| }\underbrace{\texttt{otherwise}}_{\textit{Wächter}}\texttt{ = }\underbrace{\texttt{n * fac (n-1)}}_{\textit{Bewachter Ausdruck}}$

(otherwise, der stets erfüllte Wächter)

```
otherwise :: Bool
otherwise = True
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (2)

(3a) Mittels Muster (hier für ganze Zahlen):

```
fac :: Int -> Int              -- Fakultätsfunktion
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n - 1)

fib :: Int -> Int             -- Fibonacci-Funktion
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = fib (n-2) + fib (n-1)
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (3)

(3b) Mittels Muster (hier für Zeichen):

```
capitalizeVowels :: Char -> Char
capitalizeVowels = capVow

capVow :: Char -> Char
capVow 'a' = 'A'
capVow 'e' = 'E'
capVow 'i' = 'I'
capVow 'o' = 'O'
capVow 'u' = 'U'
capVow c   = c
```

(3c) Mittels Muster (hier für Wahrheitswerte):

```
xor :: Bool -> Bool -> Bool
xor True  False = True
xor False True  = True
xor b1    b2    = False
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (4)

(3d) Mittels Muster (hier für Listen):

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []       = []
    Muster leere Liste
quickSort (n          :          ns)
    Muster Listenkopf   Muster Listenrest
          Muster nichtleere Liste
               = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                 ++ [n]
                 ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (5)

(3e) Mittels Muster, hier zusätzlich mit 'wild card'-Muster:

```
mult :: Int -> Int -> Int
mult 0 _ = 0
mult _ 0 = 0
mult 1 y = y
mult x 1 = x
mult x y = x*y

tail :: [a] -> [a]
tail (_:xs) = xs
tail _      = error "Liste darf nicht leer sein."

nand :: Bool -> Bool -> Bool
nand False _ = True
nand _ False = True
nand _ _     = False    (auch in xor ist _ mögl.)
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (6)

Mittels Muster und...

(4) case-Ausdrucks:

```
capVow :: Char -> Char
capVow c = case c of ‘a‘ -> ‘A‘
                     ‘e‘ -> ‘E‘
                     ‘i‘ -> ‘I‘
                     ‘o‘ -> ‘O‘
                     ‘u‘ -> ‘U‘
                     otherwise -> c
```

```
describeList :: [a] -> String
describeList ls
 = "The list ls "
    ++ case ls of []        -> "is empty."
                  (x:[])    -> "is a singleton list."
                  (x:y:[])  -> "has two elements."
                  _ -> "has three or more elements."
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (7)

Mittels Muster und...

(5a) lokaler Deklarationen (where-Konstrukt, nachgestellt):

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = quickSort smaller
                   ++ [n]
                   ++ quickSort larger
                   where
                    smaller = [m | m<-ns, m<=n]
                    larger  = [m | m<-ns, m>n]
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (8)

Mittels Muster und...

(5b) lokaler Deklarationen (let-Konstrukt, vorgestellt):

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = let
                    smaller = [m | m<-ns, m<=n]
                    larger  = [m | m<-ns, m>n]
                   in (quickSort smaller
                       ++ [n]
                       ++ quickSort larger)
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (9)

In einer Zeile mittels where-Konstrukts und...

(6a) Semikolons ';':

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) =
 quickSort smaller ++ [n] ++ quickSort larger
 where smaller = [m|m<-ns, m<=n]; larger = [m|m<-ns, m>n]
```

In einer Zeile mittels let-Konstrukts und...

(6b) Semikolons ';':

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) =
 let smaller = [m|m<-ns, m<=n]; larger = [m|m<-ns, m>n]
 in (quickSort smaller ++ [n] ++ quickSort larger)
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (10)

(7a) Mittels anderer Funktionen (argumentbehaftet):

```
fac :: Int -> Int
fac n = foldl (*) 1 [1..n]

foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl f z []     = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs


fac :: Int -> Int
fac n = product [1..n]

product :: (Num a) => [a] -> a
product ns = foldl (*) 1 ns    -- argumentbehaftet
-- Gleichbedeutend:
product = foldl (*) 1          -- argumentfrei
```

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (11)

(7b) Mittels anderer Funktionen (argumentfrei):

```
factorial :: Int -> Int
factorial = fac

qs :: [Integer] -> [Integer]
qs = quickSort
```

...wenn z.B. der Name `fac` zu wenig sprechend, der Name `quickSort` zu lang erscheint (vgl. auch das Funktionenpaar `capitalizeVowels` und `capVow`).

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (12)

(7b) Mittels anderer Funktionen (argumentfrei), fgs.:

```
and :: Bool -> Bool -> Bool
and = (&&)
```

Zusätzlich zu Ausdrücken der Form:

```
  (x>0) && (y<0)      (&&) (x>0) (y<0)
```

sind nun auch Ausdrücke der Form:

```
 (x>0) `and` (y<0)      and (x>0) (y<0)
```

möglich!

```
(./.) :: Integer -> Integer -> Integer
(./.) = div
```

Zusätzlich zu Ausdrücken der Form:

```
  div 5 2      5 `div` 2
```

sind nun auch Ausdrücke der Form:

```
  5 ./. 2      (./.) 5 2
```

möglich!

Schreibweisen für Funktionsdefinitionen (13)

(8) Mittels anonymer Funktionen (argumentfrei):

$$\texttt{fac = }\underbrace{\texttt{\textbackslash n -> (if n == 0 then 1 else n * fac (n-1))}}_{\textit{Anonyme } \lambda\textit{-Abstraktion}}$$

Die Schreibweise ist

- Reminiszenz an den funktionaler Programmierung zugrundeliegenden λ-Kalkül:
  - Im λ-Kalkül: $\lambda x\, y.\ x + y$
  - In Haskell: `\x y -> x+y`

Anwendung in Haskell:

- Immer dann, wenn der Funktionsname keine Rolle spielt:

```
map (\n -> 2*n+1) [1,2,3] ->> [3,5,7]
map (\n -> n*n-1) [1,2,3] ->> [0,3,8]
```

Verwendungshinweise: Bewachte Ausdrücke (1)

Funktionen sind außer in den einfachsten Fällen fast immer über Fallunterscheidungen definiert.

- Bewachte Ausdrücke führen meist zu besserer Lesbarkeit als (geschachtelte) bedingte Ausdrücke.

Vergleiche:

```
signum :: Int -> Int
signum n
 | n < 0  = -1
 | n == 0 = 0
 | n > 0  = 1
```

```
signum' :: Int -> Int
signum' n
 | n < 0     = -1
 | n == 0    = 0
 | otherwise = 1
```

(Ein Tick effizienter!)

mit:

```
signum'' :: Int -> Int
signum'' n = if n < 0 then -1 else
               if n == 0 then 0 else 1
```

Verwendungshinweise: Bewachte Ausdrücke (2)

Mischformen sind möglich, aber mindestens auf die Weise wie hier gar nicht schön, sinnvoll oder empfehlenswert:

```
signum''' :: Int -> Int
signum''' n
 | n < 0      = -1
 | otherwise = if n == 0 then 0 else 1
```

Verwendungshinweise: Muster (1)

Funktionen arbeiten häufig auf strukturierten Werten.

- Musterbasierte Definitionen sind meist am zweckmäßigsten und übersichtlichsten (weil sie die Struktur offenlegen und Selektoren dadurch unnötig machen).

Vergleiche:

```
binom' :: (Int,Int) -> Int
binom' (n,k)
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise    = binom' (n-1,k-1) + binom' (n-1,k)
```

mit:

```
binom'' :: (Int,Int) -> Int
binom'' p
 | snd(p) == 0 || fst(p) == snd(p) = 1
 | otherwise = binom'' (fst(p)-1,snd(p)-1)
               + binom'' (fst(p)-1,snd(p))
```

Verwendungshinweise: Muster (2)

Vorteile musterbasierter Funktionsdefinitionen:

Muster

- legen die Struktur des (Argument-) Werts offen
- legen Namen für die verschiedenen Strukturteile des Werts fest und erlauben über diese Namen unmittelbaren Zugriff auf diese Teile
- vermeiden dadurch sonst nötige Selektorfunktionen

und führen dadurch zu einem

- Gewinn an Lesbarkeit und Transparenz.

Bezeichnungskonventionen für Muster (1)

Für Int(eger)-Werte: n, m,...
für Listen von Int(eger)-Werten: ns, ms,...

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                   ++ [n]
                   ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

Für Werte beliebigen Typs: x, y,...
für Listenwerte beliebigen Typs: xs, ys,...

```
quickSort :: Ord a => [a] -> [a]
quickSort []     = []
quickSort (x:xs) = quickSort [y | y <- xs, y <= x]
                   ++ [x]
                   ++ quickSort [y | y <- xs, y > x]
```

Bezeichnungskonventionen für Muster (2)

- Für Zeichen-Werte: `c`, `c'`, `d`,...
  für Listen von Zeichen-Werten: `cs`, `cs'`, `ds`,...
- Für Ziffern-Werte: `d`, `d'`, `e`,...
  für Listen von Ziffern-Werten: `ds`, `ds'`, `es`,...
- Für Wahrheitswerte: `b`, `b'`,...
  für Listen von Wahrheitswerten: `bs`, `bs'`,...
- Für ganze Zahlen: `n`, `n'`, `m`,...
  für Listen ganzer Zahlen: `ns`, `ns'`, `ms`,...
- Für Werte beliebigen Typs: `x`, `x'`, `y`, `y'`,...
  für Listen von Werten beliebigen Typs: `xs`, `xs'`, `ys`, `ys'`,...
- Für Listen von Listen-Werten: `nss`, `mss`, `xss`, `yss`,...
- ...

Muster

...sind (soweit wie bislang eingeführt):

- Konstanten eines Typs (z.B. `0`, `42`, `3.14`, `False`, `True`, `'c'`, `"c"`, `"fun"`, `""`, `[]`,...)
  ...ein Argumentwert passt mit dem Muster zusammen, wenn es wertgleich mit der Konstanten ist.
- Variablen (z.B. `n`, `x`, `c`,...)
  ...jeder Argumentwert passt.
- Wild card '_'
  ...jeder Argumentwert passt (Verwendung von "_" für alle Argumentwerte, die nicht zum Ergebnis beitragen; siehe `mult`, `tail`, `nand`,...).
- Zusammengesetzte Muster, bis jetzt für Tupel und Listen (z.B. `[]`, `[x]`, `(x:[])`, `(x:y:[])`, `(x:y:z:[])`, `(x:xs)`, `(x:y:xs)`, `(m,n)`, `(m,_)`, `(_,_)`, `(x,y,z)`, `(x,_,z)`,...)
- ...

Kapitel 3.2

Funktionssignaturen, Funktionsterme, Funktionsstelligkeiten

Überblick

Funktions-

- Signaturen
- Terme
- Stelligkeiten

und damit verbundene

- Klammereinsparungsregeln in Haskell.

Das Wichtigste auf einen Blick:

- (Funktions-) Signaturen sind rechtsassoziativ geklammert
- (Funktions-) Terme sind linksassoziativ geklammert
- (Funktions-) Stelligkeit ist 1

Beispiel: Die Editorfunktion ‘ersetze’

...eine Funktion, die in einem Text das n-te Vorkommen einer Zeichenreihe s durch eine Zeichenreihe s' ersetzt.

Implementierung in Haskell

```
type Txt  = String
type Vork = Int
type Alt  = Txt
type Neu  = Txt

ersetze :: (Txt -> (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt))))
```

...angewendet auf einen Text t, eine Vorkommensnummer n und zwei Zeichenreihen s und s' ist das Resultat der Anwendung von `ersetze` ein Text t', in dem das n-te Vorkommen von s in t durch s' ersetzt ist.

Eine Anwendung von 'ersetze'

Funktion

```
type Txt  = String
type Vork = Int
type Alt  = Txt
type Neu  = Txt
ersetze :: (Txt -> (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt))))
```

Argumente

```
"Ein alter Text" :: Txt
1 :: Vork
"alter" :: Alt
"neuer" :: Neu
```

Auswertung

```
((((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer")
 ->> "Ein neuer Text" :: Txt
```

Schrittweise Auswertung (1)

...`ersetze` und die nach fortgesetzter Argumentkonsumation entstehenden Funktionsterme sind mit Ausnahme des letzten von funktionalem Typ.

Schritt 1: Der Funktionsterm `ersetze` konsumiert **ein** Argument, den Wert `"Ein alter Text"` vom Typ `Txt`. Der dadurch entstehende Funktionsterm ist von funktionalem Typ:

```
(ersetze "Ein alter Text") ::
                    (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt)))
```

Schritt 2: Der Funktionsterm `(ersetze "Ein alter Text")` konsumiert **ein** Argument, den Wert `1` vom Typ `Vork`. Der dadurch entstehende Funktionsterm ist von funktionalem Typ:

```
((ersetze "Ein alter Text") 1) :: (Alt -> (Neu -> Txt))
```

Schrittweise Auswertung (2)

Schritt 3: Der Funktionsterm `((ersetze "Ein alter Text") 1)` konsumiert **ein** Argument, den Wert `"alter"` vom Typ `Alt`. Der dadurch entstehende Funktionsterm ist von funktionalem Typ:

```
(((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") :: (Neu -> Txt)
```

Schritt 4: Der Funktionsterm `(((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter")` konsumiert **ein** Argument, den Wert `"neuer"` vom Typ `Neu`. Der dadurch entstehende Term ist von nichtfunktionalem Typ:

```
((((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer") :: Txt
```

Insgesamt erhalten wir:

```
((((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer")
  ->> "Ein neuer Text" :: Txt
```

Funktionssignaturen, Funktionsterme

Funktionssignaturen (oder syntaktische Funktionssignaturen oder Signaturen)

- geben den Typ einer Funktion an.

Funktionsterme

- sind aus Funktionsaufrufen aufgebaute Ausdrücke.

Beispiele:

- Funktionssignatur

```
ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt
```

- Funktionsterme

```
ersetze "Ein alter Text"
ersetze "Ein alter Text" 1
ersetze "Ein alter Text" 1 "alter"
ersetze "Ein alter Text" 1 "alter" "neuer"
```

Klammereinsparungsregeln

...für Funktionssignaturen und Funktionsterme.

Rechtsassoziativität für Funktionssignaturen:

```
ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt
```

...steht abkürzend für die vollständig, aber nicht überflüssig rechtsassoziativ geklammerte Funktionssignatur:

```
ersetze :: (Txt -> (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt))))
```

Linksassoziativität für Funktionsterme:

```
ersetze "Ein alter Text" 1 "alter" "neuer"
```

...steht abkürzend für den vollständig, aber nicht überflüssig linksassoziativ geklammerten Funktionsterm:

```
((((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer")
```

Hintergrund

Die Festlegung von

- Rechtsassoziativität für Funktionssignaturen
- Linksassoziativität für Funktionsterme

dient der Einsparung von Klammern (vgl. Punkt- vor Strichrechnung in der Mathematik).

Die Festlegung erfolgt auf diese Weise, da so in

- Signaturen und Funktionstermen

meist möglichst wenige, oft gar keine Klammern nötig sind.

1-Stelligkeit von Funktionen in Haskell

Das Beispiel illustriert, dass Haskell-Funktionen einstellig sind:

- Es wird stets **ein** Argument zur Zeit konsumiert!

```
ersetze :: Txt -> (Vork -> Alt -> Neu -> Txt)
```

$$\underbrace{\texttt{ersetze}}_{\texttt{:: Txt -> (Vork -> Alt -> Neu -> Txt)}}\ \underbrace{\texttt{"Ein alter Text"}}_{\texttt{:: Txt}}\ \texttt{:: Vork -> (Alt -> Neu -> Txt)}$$

$$\underbrace{\texttt{(ersetze "Ein alter Text")}}_{\texttt{:: Vork -> (Alt -> Neu -> Txt)}}\ \underbrace{\texttt{1}}_{\texttt{:: Vork}}\ \texttt{:: Alt -> (Neu -> Txt)}$$

$$\underbrace{\texttt{((ersetze "Ein alter Text") 1)}}_{\texttt{:: Alt -> (Neu -> Txt)}}\ \underbrace{\texttt{"alter"}}_{\texttt{:: Alt}}\ \texttt{:: Neu -> Txt}$$

$$\underbrace{\texttt{(((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter")}}_{\texttt{:: Neu -> Txt}}\ \underbrace{\texttt{"neuer"}}_{\texttt{:: Neu}}\ \texttt{:: Txt}$$

```
->> "Ein neuer Text" :: Txt
```

Zur 1-Stelligkeit von Funktionen

Es gilt: Konsumierte Argumente müssen nicht elementar sein; ausgedrückt durch Klammerung können sie

- zusammengesetzt und komplex sein.

Beispiel:

$$\texttt{add}' :: \underbrace{\texttt{(Int -> Int)}}_{\texttt{`Arg. 1'}} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{(Int -> Int)}}_{\texttt{`Arg. 2'}} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{(Int,Int)}}_{\texttt{`Arg. 3'}} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{Int}}_{\texttt{`Resultat'}}$$

```
add' f g (m,n) = (+) (f m) (g n)
```

Vollständig, aber nicht überflüssig geklammert:

```
add' :: ((Int -> Int) -> ((Int -> Int) -> ((Int,Int) -> Int)))
add' f g (m,n) = (((+) (f m)) (g n))
```

Beispiel 1: Konsumation komplexer Arg. (1)

```
add' :: ((Int -> Int) -> ((Int -> Int) -> ((Int,Int) -> Int)))
add' f g (m,n) = (((+) (f m)) (g n))
```

```
(add' fac fib (5,7)) ->>
        :: Int

          (((add' fac) fib) (5,7)) ->>
:: ((Int -> Int) -> ((Int,Int) -> Int))
         :: ((Int,Int) -> Int)
                   :: Int

 ->>   (((+)             (fac 5))      (fib 7))
:: Int -> Int -> Int       :: Int         :: Int
                  :: Int -> Int :: Int -> Int
                        :: Int         :: Int
            :: Int -> Int
                    :: Int
```

Beispiel 1: Konsumation komplexer Arg. (2)

$$\texttt{->>}\ \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{\texttt{(+)}}_{\texttt{:: Int -> Int -> Int}}\ \underbrace{\texttt{120}}_{\texttt{:: Int}})}_{\texttt{:: Int -> Int}}\ \underbrace{\texttt{13}}_{\texttt{:: Int}})}_{\texttt{:: Int}}$$

$$\texttt{->>}\ \underbrace{(\underbrace{\texttt{(120+)}}_{\texttt{:: Int -> Int}}\ \underbrace{\texttt{13}}_{\texttt{:: Int}})}_{\texttt{:: Int}}$$

$$\texttt{->>}\ \underbrace{\texttt{133}}_{\texttt{:: Int}}$$

Beispiel 2: Konsumation komplexer Argumente

```
type I = Int

op :: (I -> I) -> I -> (I -> I) -> I -> (I -> I -> I) -> I
op f m g n h = h (f m) (g n)
```

Vollständig, aber nicht überflüssig geklammert:

```
op :: ((I -> I) -> (I -> ((I -> I) -> (I -> ((I -> (I -> I)) -> I)))))
op f m g n h = ((h (f m)) (g n))
```

Aufrufbeispiel:

```
op fac 5 fib 8 ggt ->>
                   (((((op fac) 5) fib) 8) ggt)
:: (I -> ((I -> I) -> (I -> ((I -> (I -> I)) -> I))))
   :: ((I -> I) -> (I -> ((I -> (I -> I)) -> I)))
         :: (I -> ((I -> (I -> I)) -> I))
            :: ((I -> (I -> I)) -> I)
                            :: I
 ->> ggt (fac 5) (fib 8) ->> ((ggt (fac 5)) (fib 8))
 ->> ((ggt 120) 21)      ->> 3
```

Klammereinsparungen für Funktionsterme (1)

...anhand einiger Beispiele:

```
fib :: Int -> Int
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = ((fib (n-2)) + (fib (n-1)))
```

Der vollständig, aber nicht überflüssig geklammerte Ausdruck

- `((fib (n-2)) + (fib (n-1)))`

kann bedeutungsgleich verkürzt werden zu:

- `fib (n-2) + fib (n-1)` $(*)$

...aber nicht weiter:

- `fib n-2 + fib n-1` entspricht vollständig geklammert:
  `(((fib n) - 2) + ((fib n) - 1))` $(**)$

Somit erhalten wir:

$(*)$ `fib (6-2) + fib (6-1) ->> fib 4 + fib 5 ->> 3 + 5 ->> 8`

$(**)$ `fib 6-2 + fib 6-1 ->> (8-2) + (8-1) ->> 6 + 7 ->> 13`

Klammereinsparungen für Funktionsterme (2)

Die vollständig, aber nicht überflüssig geklammerten Ausdrücke

- `((fac (fib 6)) - 1) ->> 119`
- `(fac ((fib 6) - 1)) ->> 24`
- `(fac (fib (6 - 1))) ->> 6`

können bedeutungsgleich verkürzt werden zu:

- `fac (fib 6) - 1 ->> fac 5 - 1 ->> 120 - 1 ->> 119`
- `fac (fib 6 - 1) ->> fac (5 - 1) ->> fac 4 ->> 24`
- `fac (fib (6 - 1)) ->> fac (fib 5) ->> fac 3 ->> 6`

Weitere Klammern können ohne Bedeutungsänderung nicht eingespart werden.

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (1)

Eine naheliegende Frage im Zshg. mit der Funktion `ersetze`:

- Warum so viele Pfeile (`->`), warum so wenige Kreuze ($\times$) in der Signatur von `ersetze`?
- Warum nicht

  ‘`ersetze :: (Txt` $\times$ `Vork` $\times$ `Alt` $\times$ `Neu) -> Txt`’

  statt

  `ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt` ?

Beachte: Das Kreuzprodukt in Haskell wird durch Tupelbeistrich ausgedrückt, d.h. ‘,’ statt $\times$. Die korrekte Haskell-Spezifikation für die Kreuzproduktvariante lautete daher:

```
ersetze :: (Txt,Vork,Alt,Neu) -> Txt
```

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (2)

Beide Formen

- sind möglich, sinnvoll und berechtigt.

Funktionspfeil

- führt jedoch zu höherer (Anwendungs-) Flexibilität als Kreuzprodukt, da partielle Auswertung von Funktionen möglich ist.
- ist daher in funktionaler Programmierung die weitaus häufiger verwendete Form.

Zur Illustration:

- Berechnung der Binomialkoeffizienten.

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (3)

Vergleiche die Funktionspfeilform:

```
binom :: Integer -> Integer -> Integer
binom n k
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise    = binom (n-1) (k-1) + binom (n-1) k
```

...mit der Kreuzproduktform:

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k)
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise    = binom' (n-1,k-1) + binom' (n-1,k)
```

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (4)

Die höhere Flexibilität der Funktionspfeilform zeigt sich in der Anwendungssituation:

Der Funktionsterm `(binom 45)`

- ist von funktionalem Typ `(Integer -> Integer)`, eine Funktion, die ganze Zahlen in sich abbildet.
- liefert angewendet auf eine natürliche Zahl k die Anzahl der Möglichkeiten, auf die man k Elemente aus einer 45-elementigen Grundgesamtheit herausgreifen kann:

  (`(binom 45)` entspricht der Funktion `k_aus_45`)

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (5)

Wir können den Funktionsterm `(binom 45)` deshalb auch benutzen, um in argumentfreier Weise eine neue Funktion zu definieren, z.B. die Funktion k_aus_45 (vgl. Kap. 1.1.1):

```
k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 = binom 45 -- arg.frei: k_aus_45 ist nicht
                    -- von einem Arg. gefolgt
```

Die Funktion `k_aus_45` und der Funktionsterm `(binom 45)` bezeichnen dieselbe Funktion; sie sind Synonyme.

Aufrufe folgender Form sind deshalb möglich:

```
(binom 45) 6 ->> 8.145.060
 binom 45 6  ->> 8.145.060  -- Klammereinsparungsr.
 k_aus_45 6  ->> binom 45 6 ->> 8.145.060
```

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (6)

Beachte: Auch die Funktion

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
```

ist im Haskell-Sinn einstellig.

Folgende Schreibweise macht dies besonders deutlich:

```
type IntPair = (Integer,Integer)

binom' :: IntPair -> Integer -- 1 Argument: 1-stellig
binom' p
 | snd(p) == 0 || fst(p)==snd(p) = 1
 | otherwise = binom' (fst(p)-1,snd(p)-1)
                + binom' (fst(p)-1,snd(p))
```

p vom Typ IntPair, das eine Argument von binom′ ist von einem Paartyp.

Funktionspfeil vs. Kreuzprodukt (7)

Beachte: `binom'` bietet nicht die Flexibilität von `binom`:

- `binom'` konsumiert ihr eines Argument `p` vom Paartyp `(Integer,Integer)` und liefert unmittelbar ein Resultat vom elementaren Typ `Integer`.

  ```
  binom' (45,6) ->> 8.145.060 :: Integer
  ```

- ein funktionales Zwischenresultat entsteht anders als bei `binom` nicht.

- Eine lediglich teilweise Versorgung mit Argumenten und damit partielle Auswertung von `binom'` ist nicht möglich.

  Aufrufe der Form:

  ```
  binom' 45
  ```

  sind syntaktisch inkorrekt und führen zu Fehlermeldungen.

Vordef. arithmetische Operationen in Pfeilform

Auch die arithmetischen (und viele weitere) Operationen sind in Haskell aus diesem Grund in der Funktionspfeilform vordefiniert:

```
(+) :: Num a => a -> a -> a
(*) :: Num a => a -> a -> a
(-) :: Num a => a -> a -> a
...
```

Nachstehend instantiiert für den Typ `Int`:

```
(+) :: Int -> Int -> Int
(*) :: Int -> Int -> Int
(-) :: Int -> Int -> Int
...
```

Funktionsstelligkeiten: Mathematik vs. Haskell

...unterschiedliche Sichtweisen und Akzentsetzungen.

Mathematik: Betonung der 'Teile' – eine Funktion der Form:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

wird zweistellig angesehen: $\binom{\cdot}{\cdot} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Allgemein: $f : M_1 \times \ldots \times M_n \to M$ hat Stelligkeit n.

Haskell: Betonung des 'Ganzen' – eine Funktion der Form:

```
type I = Integer
binom' (n,k)
  | k==0 || n==k = 1
  | otherwise = binom' (n-1,k-1) + binom' (n-1,k)
```

wird einstellig angesehen: `binom' :: (I,I) -> I`

Allgemein: $\texttt{f} :: (\texttt{M}_1,\ldots,\texttt{M}_n) \to \texttt{M}$ hat Stelligkeit 1.

Zusammenfassung (1)

Für Haskell gilt:

Die Klammerung unvollständig geklammerter

- Funktionssignaturen ist rechtsassoziativ
- Funktionsterme ist linksassoziativ

zu vervollständigen.

Funktionen sind

- einstellig; sie konsumieren stets ein Argument zur Zeit.

Argumente und Werte von Funktionen und Funktionstermen

- können elementaren, zusammengesetzten oder funktionalen Typs sein.

Zusammenfassung (2)

Klammern in Signaturen und Funktionstermen

- sind mehr als schmückendes Beiwerk; sie bestimmen die Bedeutung.

Wann immer eine von den Klammereinsparungsregeln induzierte abweichende Argument- oder/und Resultatstruktur gewollt ist, muss dies durch

- explizite Klammerung in Signatur und Funktionsterm

ausgedrückt werden.

Zusammenfassung (3)

...exakte, saloppe Sprechweise für curryfizierte Funktionen.

Exakt: binom ist eine 1-stellige Funktion:

$$\underbrace{\texttt{(binom n)}}_{\texttt{:: (Integer -> Integer)}}$$

```
binom :: Integer -> (Integer -> Integer)
(binom n) k = if ... then ... else ...
```

...Sichtweise von binom als 1-stellige Funktion, die ganze Zahlen auf 1-stellige Funktionen abbildet, die ganze Zahlen auf ganze Zahlen abbilden.

Salopp: binom ist eine 2-stellige Funktion:

$$\underbrace{\texttt{binom n k}}_{\texttt{:: Integer}}$$

```
binom :: Integer -> Integer -> Integer
binom n k = if ... then ... else ...
```

...Sichtweise von binom als 2-stellige Funktion, die zwei ganze Zahlen auf ganze Zahlen abbildet.

Übungsaufgabe 3.2.1

1. Wie liest sich die Signatur der Editor-Funktion

   ```
   ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt
   ```

   gemäß

   1.1 exakter Sichtweise:

   ```
   ersetze :: Txt -> (Vork -> (Alt -> (Neu -> Txt)))
   ```

   1.2 salopper Sichtweise:

   ```
   ersetze :: Txt -> Vork -> Alt -> Neu -> Txt
   ```

2. Wie sind die Signaturen der Funktionen

   ```
   f :: (I -> I -> I) -> I -> [I] -> I
   g :: (I -> I) -> (I -> I) -> [I] -> I
   h :: I -> (I -> I -> I) -> [I] -> I
   ```

   exakt bzw. salopp zu lesen (`type I = Int`)?

3. Wiederholen Sie die Übung mit anderen curryfizierten Funktionssignaturen aus den bisherigen Kapiteln oder/und dem Standard-Präludium.

Kapitel 3.3

Curryfizierte, uncurryfizierte Funktionen

Scharf oder mild

...curryfiziert oder uncurryfiziert, das ist hier die Frage.

Curryfiziert und uncurryfiziert

...bezeichnen bestimmte ineinander überführbare Deklarationsweisen für Funktionen.

Entscheidend für die Unterscheidung ist die

- Art der Konsumation der Argumente.

Erfolgt die Konsumation

- Einzeln Argument für Argument: curryfiziert
- Alle auf einmal als Tupel: uncurryfiziert

Implizit liefert dies eine Unterscheidung in

- curryfizierte Funktionen
- uncurryfizierte Funktionen

Curryfiziert vs. uncurryfiziert deklariert (1)

...anhand eines Beispiels:

- `binom :: Integer -> Integer -> Integer`

  ...ist curryfiziert deklariert.

- `binom' :: (Integer,Integer) -> Integer`

  ...ist uncurryfiziert deklariert.

Curryfiziert vs. uncurryfiziert deklariert (2)

Curryfiziert deklariertes binom:

```
binom :: Integer -> Integer -> Integer
binom n k
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise = binom (n-1) (k-1) + binom (n-1) k
```

```
binom 45 6 ->> (binom 45) 6 ->> 8.145.060
           :: Integer -> Integer
                :: Integer
```

Uncurryfiziert deklariertes binom′:

```
binom′ :: (Integer,Integer) -> Integer
binom′ (n,k)
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise = binom′ (n-1,k-1) + binom′ (n-1,k)
```

```
binom′ (45,6) ->> 8.145.060
  :: Integer
```

Informell

Curryfizieren ersetzt

- Produkt-/Tupelbildung '$\times$' durch Funktionspfeil '$\rightarrow$'.

Uncurryfizieren ersetzt

- Funktionspfeil '$\rightarrow$' durch Produkt-/Tupelbildung '$\times$'.

Bemerkung: Die Bezeichnung erinnert an Haskell B. Curry; die Idee selbst ist weit älter und geht auf Moses Schönfinkel aus der Mitte der 1920er-Jahre zurück.

Die Funktionale curry und uncurry

..als Mittler zwischen curryfizierter und uncurryfizierter Darstellung:

Das Funktional curry:

$$\texttt{curry :: } \underbrace{\texttt{((a,b) -> c)}}_{\substack{\texttt{Argumenttyp von curry:}\\ \texttt{uncurryfiziert!}}} \quad \texttt{->} \quad \underbrace{\texttt{(a -> b -> c)}}_{\substack{\texttt{Resultattyp von curry:}\\ \texttt{curryfiziert!}}}$$

Das Funktional uncurry:

$$\texttt{uncurry :: } \underbrace{\texttt{(a -> b -> c)}}_{\substack{\texttt{Argumenttyp von uncurry:}\\ \texttt{curryfiziert!}}} \quad \texttt{->} \quad \underbrace{\texttt{((a,b) -> c)}}_{\substack{\texttt{Resultattyp von uncurry:}\\ \texttt{uncurryfiziert!}}}$$

Die Implementierungen v. curry u. uncurry (1)

Das Funktional curry:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)    -- x, y wird zu (x,y)
                         -- zusammengesetzt und so
                         -- für f verarbeitbar
```

Das Funktional uncurry:

```
uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry g (x,y) = g x y   -- (x,y) wird in x, y
                          -- getrennt und so
                          -- für g verarbeitbar
```

Die Implementierungen v. curry u. uncurry (2)

...in größerem Detail:

Das Funktional curry:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)
```

$$\underbrace{\texttt{curry f}}_{\texttt{:: ((a,b) -> c)}}\;\underbrace{\texttt{x}}_{\texttt{:: a}}\;\underbrace{\texttt{y}}_{\texttt{:: b}}\;\texttt{=}\;\underbrace{\texttt{f}\;\underbrace{\texttt{(x,y)}}_{\texttt{:: (a,b)}}}_{\texttt{:: c}}$$

Das Funktional uncurry:

```
uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry g (x,y) = g x y
```

$$\underbrace{\texttt{uncurry g}}_{\texttt{:: (a -> b -> c)}}\;\underbrace{\texttt{(x,y)}}_{\texttt{:: (a,b)}}\;\texttt{=}\;\underbrace{\texttt{g}\;\underbrace{\texttt{x}}_{\texttt{:: a}}\;\underbrace{\texttt{y}}_{\texttt{:: b}}}_{\texttt{:: c}}$$

Zur Klammerung von curry und uncurry

...vollständig, aber nicht überflüssig geklammert:

```
curry :: (((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c)))
curry f x y  = f (x,y)

uncurry :: ((a -> (b -> c)) -> ((a,b) -> c))
uncurry g (x,y)  =  g x y
```

...miminal geklammert gemäß Klammereinsparungsregeln:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> a -> b -> c
curry f x y  = f (x,y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> (a,b) -> c
uncurry g (x,y)  =  g x y
```

curry: Schritt für Schritt zur Definition

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c))
curry f x y = f (x,y)
```

Sei `f` eine Funktion mit Signatur

```
f :: ((a,b) -> c)
```

Mit `f` erhalten wir für die Signaturen der Funktionsterme:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c))
(curry f) :: (a -> (b -> c))
((curry f) x) :: (b -> c)
(((curry f) x) y) :: c
```

Entsprechend erhalten wir für den Typ des rechtss. Fkt-Terms:

```
(((curry f) x) y) = f (x,y) :: c
```

Nach Einsparung von Klammern erhalten wir insgesamt:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c))
curry f x y = f (x,y)
```

Anwendung von curry

Sei f uncurryfiziert gegebene Funktion mit Signatur

```
f :: ((a,b) -> c)
```

Definiere

```
g :: (a -> (b -> c))
g = curry f                    -- argumentfrei!
```

Damit

```
f (x,y) = g x y  = (curry f) x y = curry f x y
```

Übungsaufgabe 3.3.1

Vollziehe die Schritt-für-Schritt-Entwicklung zur Definition und Anwendung von `curry` für `uncurry` nach, d.h. entwickle nach dem Beispiel von `curry` Schritt für Schritt die Definition und Anwendung von `uncurry`.

Die Funktionale curry und uncurry

...bilden

- uncurryfizierte Funktionen auf ihre curryfizierten Gegenstücke ab:

  Für uncurryfiziertes `f :: (a,b) -> c` ist

  `curry f :: a -> (b -> c)`

  curryfiziert (entsprechend `g :: a -> (b -> c)`).

- curryfizierte Funktionen auf ihre uncurryfizierten Gegenstücke ab:

  Für curryfiziertes `g :: a -> (b -> c)` ist

  `uncurry g :: (a,b) -> c`

  decurryfiziert (entsprechend `f :: (a,b) -> c`).

Anwendungen von curry und uncurry

Betrachte:

```
binom  :: Integer -> Integer -> Integer
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
```

und

```
curry   :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
```

Anwendung von curry und uncurry liefert:

```
curry binom' :: Integer -> Integer -> Integer
uncurry binom :: (Integer,Integer) -> Integer
```

Somit sind folgende Aufrufe möglich und gültig:

```
curry binom' 45 6     ->> binom' (45,6) ->> 8.145.060
uncurry binom (45,6) ->> binom 45 6   ->> 8.145.060
```

Curryfiziert oder uncurryfiziert?

...das ist die Frage.

Geschmackssache? Notationelle Spielerei?

- `f x`, `f x y`, `f x y z`,... vs. `f(x)`, `f(x,y)`, `f(x,y,z)`,...
  Allenfalls bei oberflächlicher Betrachtung.

Denn es gilt: Nur curryfizierte Funktionen unterstützen das

- Prinzip partieller Auswertung und damit das Prinzip:

  $\rightsquigarrow$ Funktionen liefern Funktionen als Ergebnis!

  Beispiel: Die für das Argument 45 partiell ausgewertete Funktion `binom` liefert als Resultat eine einstellige Funktion, die Funktion `k_aus_45 :: Integer -> Integer` definiert durch `k_aus_45 = (binom 45)`.

Die Bevorzugung curryfizierter Formen ist deshalb sachlich gut begründet, vorteilhaft und in der Praxis vorherrschend.

Faustregel für Funktionsdefinitionen

...curryfiziert, wo möglich, uncurryfiziert, wo nötig.

(vgl. die Funktionen `binom` und `binom'` vom Anfang dieses Abschnitts.)

Kapitel 3.4

Operatoren, Präfix- und Infixverwendung

Operatorverwendung

Präfixverwendung

- den Operanden vorangestellt:

  Beispiele: `fac 5`, `binom (45,6)`, `reverse "desserts"`, `quickSort [4,2,1,9,3,7,5]`,...

Infixverwendung

- zwischen die Operanden gestellt:

  Beispiele: `2 + 3`, `5 * 7`, `5^3`, `4 : [3,2,1]`, `[1,2,3,4]!!2`, `[3,2,1] ++ [1,2,3]`,...

Postfixverwendung

- den Operanden nachgestellt:

  Beispiele: In Haskell keine; in der Mathematik wenige, etwa die Fakultätsfunktion "!"; regelmäßig bei Verwendung "umgekehrt polnischer Notation".

Operatorverwendung in Haskell

Präfixverwendung ist

- Regelfall, insbesondere für alle selbstdeklarierten Operatoren (d.h. selbstdeklarierte Funktionen).

  Beispiele:

  - Vordefinierte Funktionen: `div`, `reverse`, `zip`,...
  - Selbstdefinierte Funktionen: `fac`, `binom`, `quicksort`,...

Infixverwendung ist

- Regelfall für einige vordefinierte Operatoren und Relatoren, darunter viele arithmetische Operatoren und Relatoren.

  Beispiele: `2 + 3`, `5 * 7`, `5^3`, `4 : [3,2,1]`, `[1,2,3,4]!!2`, `[3,2,1] ++ [1,2,3]`, `[3,2,1] == [1,2,3]`, `4 <= 5`, `"Fun" < "More Fun"`,...

Erweiterte Verwendungsmöglichkeiten

...gelten für binäre Operatoren in Haskell.

Infix- und Präfixverwendung ist möglich für

- vordefinierte und selbstdefinierte Binäroperatoren.

Allgemein: Wird der Binäroperator `bop` im Regelfall als

- Präfixoperator verwendet, so kann `bop` mit Hochkommata als Infixoperator `` `bop` `` verwendet werden.

  Beispiele: ``45 `binom` 6``, ``3 `mult` 5``
  (statt standardmäßig: `binom 45 6`, `mult 3 5`)

- Infixoperator verwendet, so kann `bop` geklammert als Präfixoperator `(bop)` verwendet werden.

  Beispiele: `(+) 2 3`, `(++) [3,2,1] [1,2,3]`
  (statt standardmäßig: `2 + 3`, `[2,1] ++ [1,2]`)

Beispiel

...berechne das Maximum dreier ganzer Zahlen:

```
max :: Int -> Int -> Int -> Int
max p q r
 | (mx p q == p) && (p `mx` r == p) = p
 | (mx p q == q) && (q `mx` r == q) = q
 | otherwise                        = r

  where mx :: Int -> Int -> Int
        mx p q
         | p >= q    = p
         | otherwise = q
```

Beachte: Der Binäroperator `mx` wird in `max` als Präfixoperator (`mx p q`) und Infixoperator (``p `mx` r``) verwendet.

Weitere Beispiele

...für Infix- und Präfixverwendung von Binäroperatoren anhand einiger arithmetischer Funktionen:

- Inkrement
- Dekrement
- Halbieren
- Verdoppeln
- 10er-Inkrement
- ...

Infixverwendete Binäroperatoren

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc n = n + 1
```

- Dekrement

```
dec :: Integer -> Integer
dec n = n - 1
```

- Halbieren

```
hlv :: Integer -> Integer
hlv n = n `div` 2    -- Nichtstandardverwendung
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl n = 2 * n
```

- 10er-Inkrement

```
inc10 :: Integer -> Integer
inc10 n = n + 10
```

Präfixverwendete Binäroperatoren

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc n = (+) n 1            -- Nichtstandardverw.
```

- Dekrement

```
dec :: Integer -> Integer
dec n = (-) n 1            -- Nichtstandardverw.
```

- Halbieren

```
hlv :: Integer -> Integer
hlv n = div n 2                 -- Standardverw.
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl n = (*) 2 n            -- Nichtstandardverw.
```

- 10er-Inkrement

```
inc10 :: Integer -> Integer
inc10 n = (+) n 10         -- Nichtstandardverw.
```

Punktfrei als partiell ausgewertete Funktionen

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+) 1
```

- Eins_minus (nicht Dekrement)

```
eins_minus :: Integer -> Integer
eins_minus = (-) 1     -- (-) nicht kommutativ
```

- Zwei_durch (nicht Halbieren)

```
zwei_durch :: Integer -> Integer
zwei_durch = div 2     -- div nicht kommutativ
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (*) 2
```

- 10er-Inkrement

```
inc10 :: Integer -> Integer
inc10 = (+) 10
```

Operandenstellung und Klammerung

...führen uns zu sog. Operatorabschnitten:

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+1)
```

- Eins_minus

```
eins_minus :: Integer -> Integer
eins_minus = (1-)
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (2*)
```

- Halbieren

```
hlv :: Integer -> Integer
hlv = (`div` 2)
```

Beachte die unterschiedliche Klammerung und Operandenstellung in `inc` und `eins_minus` sowie in `dbl` und `hlv`.

Kapitel 3.5

Operatorabschnitte

Operatorabschnitte (1)

Partiell ausgewertete Binäroperatoren heißen in Haskell

- Operatorabschnitte (engl. operator sections)

Beispiele:

- `(*2)` `dbl`, die Funktion, die ihr Argument verdoppelt $(\lambda x. \, x * 2)$
- `(2*)` `dbl`, s.o. $(\lambda x. \, 2 * x)$
- `(2<)` `2_kleiner_als_x`, das Prädikat, das überprüft, ob sein Argument größer als 2 ist $(\lambda x. \, 2 < x)$
- `(<2)` `x_kleiner_als_2`, das Prädikat, das überprüft, ob sein Argument kleiner als 2 ist $(\lambda x. \, x < 2)$
- `(2:)` `headAppend`, die Funktion, die 2 an den Anfang einer typkompatiblen Liste setzt $(\lambda xs. \, (2 : xs))$
- ...

Operatorabschnitte (2)

Beispiele (fgs.):

- `(+1), (1+)` `inc`, die Funktion, die ihr Argument um 1 erhöht $(\lambda x.\, x+1)$ bzw. $(\lambda x.\, 1+x)$
- `(1-)` `eins_minus`, die Funktion, die ihr Argument von 1 abzieht $(\lambda x.\, 1-x)$
- `(-1)` kein Operatorabschn., sondern d. Zahl '-1'.
- `(+(-1))` `dec`, die Funktion, die ihr Argument um 1 erniedrigt $(\lambda x.\, x+(-1))$ bzw. $(\lambda x.\, x-1)$
- ``(`div` 2)`` `hlv`, die Funktion, die ihr Argument ganzzahlig halbiert $(\lambda x.\, x\ \mathit{div}\ 2)$
- ``(2 `div`)`` `zwei_durch`, die Funktion, die 2 ganzzahlig durch ihr Argument teilt $(\lambda x.\, 2\ \mathit{div}\ x)$
- ...
- `(div 2)`, `div 2` `zwei_durch`, s.o. $(\lambda x.\, 2\ \mathit{div}\ x)$; keine echten Operatorabschnitte, sondern gewöhnliche Präfixoperatorverwendung.

Operatorabschnitte (3)

Operatorabschnitte können in Haskell gebildet werden mit

- vordefinierten und selbstdefinierten binären Operatoren.

Beispiele für die curryfizierte Funktion `binom` (vgl. Kap. 3.2):

- `(binom 45)` 45_über_k, die Funktion k_aus_45.
- `(45 ‘binom‘)` 45_über_k, s.o.
- `(‘binom‘ 6)` n_über_6, die Funktion 6_aus_n.
- ...

Beachte: Mit der uncurryifzierten Funktion `binom'` (vgl. Kapitel 3.2) können keine Operatorabschnitte gebildet werden.

Anwendung: Punktfreie, argumentlose

...Funktionsdefinitionen mit Operatorabschnitten:

- 45_über_k bzw. k_aus_45

```
k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 = binom 45
```

```
k_aus_45 :: Integer -> Integer
k_aus_45 = (45 `binom`)
```

- n_über_6 bzw. 6_aus_n

```
sechs_aus_n :: Integer -> Integer
sechs_aus_n = (`binom` 6)
```

- Inkrement

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+1)
```

- Verdoppeln

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (2*)
```

- ...

Nichtkommutative Operatoren

...benötigen Obacht bei der Bildung von Operatorabschnitten.

Infix- und Präfixbenutzung hat für nichtkommutative Operatoren einen Bedeutungsunterschied. Am Beispiel von `div`:

- Infixverwendung führt zu den Funkionen `hlv` und `zwei_durch`.
- Präfixverwendung führt zur Funktion `zwei_durch`.

bei ansonsten gleicher partieller Auswertung.

Am Beispiel von div für hlv und zwei_durch

- Halbieren (durch_zwei) (div infixverwendet)

```
hlv :: Integer -> Integer
hlv = (`div` 2)              -- Operatorabschnitt

hlv 5 ->> 2, hlv 10 ->> 5, hlv 15 ->> 7
```

- zwei_durch (div präfixverwendet)

```
zwei_durch :: Integer -> Integer
zwei_durch = div 2              -- Präfixverwendung
-- bedeutungsgleich mit:
zwei_durch = (2 `div`)       -- Operatorabschnitt

zwei_durch 5 ->> 0, zwei_durch 2 ->> 1,
zwei_durch 1 ->> 2
```

Am Beispiel von (-) für eins_minus

- eins_minus ((-) infixverwendet)

```
eins_minus :: Integer -> Integer
eins_minus = (1-)          -- Operatorabschnitt

eins_minus 5    ->> -4, eins_minus 1 ->> 0,
eins_minus (-1) ->> 2
```

- eins_minus ((-) präfixverwendet)

```
eins_minus :: Integer -> Integer
eins_minus = (-) 1          -- Präfixverwendung
 -- bedeutungsgleich mit:
eins_minus = (1-)          -- Operatorabschnitt
```

Beachte: (-1) repräsentiert die Zahl '-1', keinen Operatorabschnitt.

Am Beispiel von (+) für `inc`

...kein Unterschied wg. Kommutativität der Addition:

- Inkrement ((+) infixverwendet)

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+1)                    -- Operatorabschnitt
-- bedeutungsgleich mit:
inc = (1+)                    -- Operatorabschnitt
```

```
inc 5 ->> 6, inc 10 ->> 11, inc 15 ->> 16
```

- Inkrement ((+) präfixverwendet)

```
inc :: Integer -> Integer
inc = (+) 1                    -- Präfixverwendung
-- entspricht:
inc = (1+)
```

```
inc 5 ->> 6, inc 10 ->> 11, inc 15 ->> 16
```

Am Beispiel von (*) für dbl

...kein Unterschied wg. Kommutativität der Multiplikation:

- Verdoppeln ((*) infixverwendet)

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (*2)                    -- Operatorabschnitt
-- bedeutungsgleich mit:
dbl = (2*)                    -- Operatorabschnitt
```

```
dbl 5 ->> 10, dbl 10 ->> 20, dbl 15 ->> 30
```

- Verdoppeln ((*) präfixverwendet)

```
dbl :: Integer -> Integer
dbl = (*) 2                    -- Präfixverwendung
-- entspricht:
dbl = (2*)
```

```
dbl 5 ->> 10, dbl 10 ->> 20, dbl 15 ->> 30
```

Zusammenfassung

...Operatorabschnitte: Notationelle Abkürzungen ('syntaktischer Zucker') für anonyme λ-Abstraktionen.

Im Detail: Ist `op` ein Binäroperator und sind `x` und `y` typgeeignete Operanden für `op`, dann heißen die Ausdrücke:

- `(op)`, `(x op)`, `(op y)`

Operatorabschnitte, die für folgende Funktionen stehen:

- `(op)   = (`λ`x. (`λ`y. x op y))`
- `(x op) = (`λ`y. x op y)`
- `(op y) = (`λ`x. x op y)`

und somit besonders knappe Funktionsdefinitionen erlauben (Sonderfall: Der Subtraktionsoperator `(-)`).

Kapitel 3.6

Angemessene, unangemessene Funktionsdefinitionen

Total vs. partiell definierte Funktionen (1)

Total definierte Funktionen sind die Ausnahme, partiell definierte Funktionen die Regel.

Betrachte z.B. die Funktionen `fac` und `fib`, deren Auswertung nur für nichtnegative Argumente terminiert und definiert ist:

```
fac :: Int-> Int
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n - 1)

fib :: Int -> Int
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-2) + fib (n-1)
```

Total vs. partiell definierte Funktionen (2)

...als Implementierungen der (auf den natürlichen Zahlen total definierten) Fakultäts- und Fibonacci-Funktion:

$$! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n\,! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)\,! & \text{sonst} \end{cases}$$

$$fib : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ fib(n-2) + fib(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Transparenz der Partialität

Partialität der Implementierungen von `fac` und `fib`

- i.w. technisch induziert (Abwesenheit eines Datentyps für natürliche Zahlen).

Explizite, transparente Sichtbarmachung der Partialität ist dennoch sinnvoll, angemessen und auch einfach möglich:

```
fac :: Int -> Int
fac n | n == 0 = 1
      | n >= 1 = n * fac (n - 1)
      | otherwise = error "undefiniert"

fib :: Int -> Int
fib n | n == 0 = 1
      | n == 1 = 1
      | n >= 2 = fib (n-2) + fib (n-1)
      | otherwise = error "undefiniert"
```

Partiell definierte Funktionen

...sind auch `f`, `g` und `h`:

$$f \;: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$f(z) = \begin{cases} 2 & \text{falls } z \geq 1 \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g \;: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$g(z) = \begin{cases} 2^z & \text{falls } z \geq 1 \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h \;: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$h(z) = \begin{cases} 2^1 & \text{falls } z = 1 \\ 2^{(|z|+2)} & \text{falls } z \leq 0 \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

Angemessene Implementierungen von `f`, `g`, `h`

...die Partialität der Implementierungen von `f`, `g` und `h` liegt transparent und offen zutage:

```
f :: Integer -> Integer
f z | z >= 1    = 2
    | otherwise = error "undefiniert"

g :: Integer -> Integer
g z | z >= 1    = 2^z
    | otherwise = error "undefiniert"

h :: Integer -> Integer
h z | z == 1    = 2
    | z <= 0    = 2^((abs z)+2)
    | otherwise = error "undefiniert"
```

Unangemessene Implementierung von f

Betrachte folgende intransparente Implementierung von `f`:

```
f :: Integer -> Integer
f 1 = 2
f x = 2 * (f x)
```

Verschleiernd und intransparent, auch wenn man sich durch Nachrechnen darüber versichern kann:

Die Auswertung von `f` terminiert für $n = 1$:

```
f 1 ->> 2
```

...aber für keinen von 1 verschiedenen Argumentwert.

Auswertungsbeispiele für f

Die Auswertung von f terminiert für $n = 1$:

```
f 1     ->> 2
```

Die Auswertung von f terminiert nicht für $n \neq 1$:

```
f (-9) ->> 2 * (f (-9)) ->> 2 * (2 * (f (-9)))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f (-9)))) ->>...
f (-1) ->> 2 * (f (-1)) ->> 2 * (2 * (f (-1)))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f (-1)))) ->>...
f 0    ->> 2 * (f 0)    ->> 2 * (2 * (f 0))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f 0)))    ->>...
f 2    ->> 2 * (f 2)    ->> 2 * (2 * (f 2))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f 2)))    ->>...
f 3    ->> 2 * (f 3)    ->> 2 * (2 * (f 3))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f 3)))    ->>...
f 9    ->> 2 * (f 9)    ->> 2 * (2 * (f 9))
       ->> 2 * (2 * (2 * (f 9)))    ->>...
```

Angemessenheit vs. Unangemessenheit für `f`

...beide Implementierungen der Funktion f sind formal und inhaltlich korrekt, dennoch:

Die Deklaration:

```
f :: Integer -> Integer
f 1 = 2
f x = 2 * (f x)
```

...ist unangemessen, weil intransparent und verschleiernd.

```
f :: Integer -> Integer
f z | z = 1     = 2
    | otherwise = error "undefiniert"
```

...ist angemessen, weil transparent und offen legend.

Unangemessene Implementierungen von g, h

Betrachte folgende intransparente Implementierungen von g und h:

```
g :: Integer -> Integer
g 1     = 2
g (x+1) = 2 * (g x)

h :: Integer -> Integer
h 1 = 2
h x = 2 * (h (x+1))
```

Bemerkung: Muster der Form `(x+1)` wie in der Definition von g nicht mehr zulässig in neueren Haskell-Versionen.

Auswertungsbeispiele für g

Die Ausw. von g terminiert für echt positive Argumentwerte:

```
g 1 ->> 2
g 2 ->> g (1+1) ->> 2 * (g 1) ->> 2 * 2 ->> 4
g 3 ->> g (2+1) ->> 2 * (g 2) ->> 2 * g (1+1)
    ->> 2 * (2 * (g 1)) ->> 2 * (2 * 2) ->> 2 * 4
    ->> 8
g 9 ->> g (8+1) ->> 2 * (2 * (g 8)) ->> ... ->> 512
```

Die Auswertung von g terminiert nicht sonst:

```
g 0      ->> g ((-1)+1)       ->> 2 * (g (-1))
         ->> 2 * (g ((-2)+1)) ->> 2 * (2 * (g (-2)))
         ->> 2 * (2 * (g ((-3)+1)))
         ->> 2 * (2 * (2 * (g (-3)))) ->>...
g (-1)   ->> g ((-2)+1)       ->> 2 * (g (-2))  ->>...
g (-9)   ->> g ((-10)+1)      ->> 2 * (g (-10)) ->>...
```

Auswertungsbeispiele für h

Die Auswertung von h terminiert für Argumentwerte ≤ 1:

```
h 1    ->> 2
h 0    ->> 2 * (h (0+1)) ->> 2 * (h 1) ->> 2 * 2
       ->> 4
h (-1) ->> 2 * (h ((-1)+1)) ->> 2 * (h 0)
       ->> ... ->> 2 * 4 ->> 8
h (-9) ->> 2 * (h ((-9)+1))
       ->> 2 * (h (-8)) ->> ... ->> 2048
```

Die Auswertung von h terminiert nicht sonst:

```
h 2 ->> 2 * (h (2+1)) ->> 2 * (h 3)
    ->> 2 * (2 * (h (3+1))) ->> 2 * (2* (h 4)) ->>...
h 3 ->> 2 * (h (3+1)) ->> 2 * (h 4)  ->>...
h 9 ->> 2 * (h (9+1)) ->> 2 * (h 10) ->>...
```

Angemessenheit vs. Unangemessenheit für g, h

...beide Implementierungen der Funktionen *g* und *h* sind formal und inhaltlich korrekt, dennoch:

Die Deklarationen:

```
g :: Integer -> Integer
g 1     = 2
g (x+1) = 2 * (g x)
```

```
h :: Integer -> Integer
h 1 = 2
h x = 2 * (h (x+1))
```

...sind unangemessen, weil intransparent und verschleiernd.

```
g :: Integer -> Integer
g z
 | z >= 1 = 2^z
 | otherwise
     = error "undefiniert"
```

```
h :: Integer -> Integer
h z
 | z == 1 = 2
 | z <= 0 = 2^((abs z)+2)
 | otherwise
     = error "undefiniert"
```

...sind angemessen, weil transparent und offen legend.

Kapitel 3.7

Funktions- und Programmlayout, Abseitsregel

Programmlayout, Programmbedeutung

Für die meisten Programmiersprachen gilt:

- Die Gestaltung (engl. layout) des Programmtexts beeinflusst
  - seine Lesbarkeit, Verständlichkeit, Wartbarkeit
  - aber nicht seine Bedeutung

Nicht so für Haskell – für Haskell gilt:

- Die Gestalt des Programmtexts trägt Bedeutung!

Dieser Aspekt des Sprachentwurfs

- ist für Haskell grundsätzlich anders entschieden worden als für Sprachen wie Java, Pascal, C und viele andere.
- ersetzt begin/end- oder {/}-Paare durch Gestaltanforderungen.
- kann als Reminiszenz an Sprachen wie Cobol, Fortran gesehen werden, findet sich aber auch in anderen neueren Sprachen wie z.B. occam.

Bindungs- und Gültigkeitsbereiche in Haskell

...bestimmt durch gestaltabhängige Syntax.

Eröffnung, Fortsetzung und Beendigung eines Bindungs- und Gültigkeitsbereichs (Jargon: 'Box') gemäß 'Abseits'-Regel*):

- Das jeweils erste Zeichen einer Deklaration (auch nach `let`, `where`) eröffnet eine neuen Bereich.
- Ist die nächste Zeile
  - gegenüber der aktuellen Box nach rechts eingerückt:
    $\leadsto$ die aktuelle Zeile wird fortgesetzt
  - genau am linken Rand der aktuellen Box:
    $\leadsto$ eine neue Deklaration innerhalb der aktuellen Box wird eingeleitet
  - weiter links als die aktuelle Box:
    $\leadsto$ die aktuelle Box wird beendet und eine neue eröffnet ('Abseitssituation')

*) Die Abseitsregel findet sich bereits in: Peter J. Landin. *The next 700 Programming Languages*. Communications of the ACM 9(3):157-166, 1966 (S. 160, linke Spalte unten).

kugel_OV 'üblich' gestaltet

...Veranschaulichung der Abseitsregel anhand einer Funktion kugel_OV zur Berechnung von Oberfläche und Volumen einer Kugel mit Radius r: Oberfläche: $4\pi r^2$; Volumen: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

```
type Radius      = Float
type Oberflaeche = Float
type Volumen     = Float

pi = 3.14

kugel_OV :: Radius -> (Oberflaeche,Volumen)
kugel_OV r = (oberflaeche r,volumen r)
 where oberflaeche :: Radius -> Oberflaeche
       oberflaeche r = 4 * pi * square r

       volumen :: Radius -> Volumen
       volumen r = (4/3) * pi * cubic r
        where cubic x = x * square x

square :: Float -> Float
square x = x^2
```

kugel_OV korrekt, aber 'unschön' gestaltet

```
type Radius      = Float
type Oberflaeche = Float
type Volumen     = Float

pi = 3.14 :: Float

kugel_OV :: Radius -> (Oberflaeche,Volumen)
kugel_OV r =
 (oberflaeche r,
   volumen r)
    where oberflaeche :: Radius -> Oberflaeche
          oberflaeche r = 4 * pi *
              square r
          volumen :: Radius -> Volumen
          volumen r = (4/3)
               * pi * cubic r
              where cubic x = x * square x

square :: Float -> Float
square x = x^2
```

Graphische Veranschaulichung des Box-Begriffs

```
type Radius      = Float -- Radius, Oberflaeche, Volumen und pi
type Oberflaeche = Float -- global im Gesamtprogramm sichtbar
type Volumen     = Float

pi = 3.14 :: Float
-----------------------------------------------
| -- kugelOV global im Gesamtprogramm sichtbar
kugel_OV :: Radius -> (Oberflaeche,Volumen)
kugel_OV =
|(oberflaeche r,
|  volumen r)
|          -------------------------------
|          | -- oberflaeche lokal in kugelOV sichtbar
|    where oberflaeche :: Radius -> Oberflaeche
|          oberflaeche r = 4 * pi *
|          |   square r
|          ------------------------>
|          -------------------------------
|          | -- volumen lokal in kugelOV sichtbar
|          volumen :: Radius -> Volumen
|          volumen r = (4/3)
|          |    * pi * cubic r
|          | ------------------------
|          | | -- cubic lokal in volumen sichtbar
|          | | where cubic x = x * square x
|          | ------------------->
|          ------------------------>
----------------------------------->
-----------------------------------------------
| -- square global im Gesamtprogramm sichtbar
square :: Float -> Float
square x = x^2
----------------------------------->
```

Bewährte Layoutkonventionen (1)

...zur Einhaltung der Abseitsregel für Funktionsdefinitionen:

```
funktionsName parameter_1 parameter_2... parameter_n
 | waechter_1 = ausdruck_1
 | waechter_2 = ausdruck_2
 ...
 | otherwise  = ausdruck_k
   where
   v_1 a_1 ... a_n = r_1    -- v_1, v_2,..., sichtbar
   v_2             = r_2    -- in der gesamten Funk-
   ...                      -- tion funktionsName,
                            -- aber nicht außerhalb.
```

Bewährte Layoutkonventionen (2)

...zum Umgang mit langen Bedingungen und Ausdrücken:

```
funktionsName parameter_1 parameter_2... parameter_n
  | waechter_1 = ausdruck_1
  | waechter_2 = ausdruck_2
  | diesIsteineGanz
    BesondersLangeMehrzeilige
     BedingungAlsWaechter
               = diesIstEinBesonders
                  LangerMehrzeiliger
                   AusdruckZurWertfestlegung
  | waechter_4 = ausdruck_4
  ...
  | otherwise  = ausdruck_k
    where...
```

Sprachkonstrukt- und Layoutwahl

...nach Angemessenheitserwägungen:

- Was ist gut und einfach lesbar und verständlich?

Illustration:

Vergleiche folgende je drei Implementierungen der Rechenvorschriften miteinander:

- `fib :: Int -> Int`
- `max :: Int -> Int -> Int -> Int`

Drei Implementierungen für `fib`

Mittels Muster:

```
fib :: Int -> Int
fib 0 = 1
fib 1 = 1
fib n = fib (n-2) + fib (n-1)
```

Mittels bedingter Ausdrücke:

```
fib :: Int -> Int
fib n = if (n == 0) || (n == 1) then 1
           else fib (n-2) + fib (n-1)
```

Mittels geschachtelter bedingter Ausdrücke:

```
fib :: Int -> Int
fib n = if n == 0
           then 1
           else if n == 1
                     then 1
                     else fib (n-2) + fib (n-1)
```

Drei Implementierungen für max

Mittels geschachtelter bedingter Ausdrücke und anonymer λ-Abstraktion:

```
max :: Int -> Int -> Int -> Int
max = \p q r -> if p>=q then (if p>=r then p else r)
                        else (if q>=r then q else r)
```

Mittels geschachtelter bedingter Ausdrücke:

```
max :: Int -> Int -> Int -> Int
max p q r = if (p>=q) && (p>=r) then p
            else if (q>=p) && (q>=r) then q else r
```

Mittels bewachter Ausdrücke:

```
max :: Int -> Int -> Int -> Int
max p q r
 | (p>=q) && (p>=r)  = p
 | (q>=p) && (q>=r)  = q
 | otherwise         = r
```

Richtschnur

Programme können grundsätzlich
auf zwei Arten geschrieben werden:
So einfach, dass sie offensichtlich keinen Fehler enthalten;
so kompliziert, dass sie keinen offensichtlichen Fehler enthalten.

C.A.R. 'Tony' Hoare (* 1934)
Turing Award Preisträger 1980

Gut gewählte Sprachkonstrukte und gut gewähltes Layout

- unterstützen dabei, Programme einfach und offensichtlich fehlerfrei zu schreiben (vgl. Kap. 3.6)!

In Haskell heißt das

- 'schönes' Einrücken und zumeist die Verwendung bewachter Ausdrücke und Muster anstelle (geschachtelter) bedingter Ausdrücke (vgl. Kap. 3.1).

Kapitel 3.8

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 3 (1)

- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 3, Funktionen und Operatoren; Kapitel 4, Rekursion als Entwurfstechnik)
- Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 2, Expressions, types and values)
- Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 1, Elemente funktionaler Programmierung)
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 3.5, Function types; Kapitel 3.6, Curried functions; Kapitel 4, Defining functions; Kapitel 6, Recursive functions)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 3 (2)

- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 3, Syntax in Functions; Kapitel 4, Hello Recursion!)
- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 4, Functional Programming - Partial Function Application and Currying)
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 6, Ein bisschen syntaktischer Zucker)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 7, Defining functions over lists)

Kapitel 4

Typsynonyme, Neue Typen, Typklassen

Kapitel 4.1

Typsynonyme (`type`)

Kapitel 4.1.1

Motivation

Was bedeuten unsere Daten?

Werte und ihre Typinformation allein erlauben i.a. nur wenig oder keinen Aufschluss darüber, was für Daten sie modellieren bzw. in der äußeren Welt repräsentieren. Betrachte:

```
('A',True)  :: (Char,Bool)
('Z',False) :: (Char,Bool)

("Fun",3)    :: (String,Int)
("Hello",5) :: (String,Int)

(5.0,8.0,6.8) :: (Float,Float,Float)
(7.2,9.7,8.7) :: (Float,Float,Float)

[(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
                   :: [(Float,Float,Float)]
[(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7)],
 (6.3,7.8,7.2)] :: [(Float,Float,Float)]
```

Sprechende Funktionsnamen

...können helfen, die äußere Semantik der modellierten Daten in Anwendungen offen zu legen:

```
erstesZeichenGrossvokal :: String -> (Char,Bool)
erstesZeichenGrossvokal "" = error "Fehler: Leeres Arg."
erstesZeichenGrossvokal (c:_) =
                          (c, elem c ['A','E','I','O','U'])

erstesZeichenGrossvokal "Alpha" ->> ('A',True)
erstesZeichenGrossvokal "Zeta"  ->> ('Z',False)

echoLaenge :: String -> (String,Int)
echoLaenge s = (s,length s)

echoLaenge "Fun"   ->> ("Fun",3)
echoLaenge "Hello" ->> ("Hello",5)
```

Aber nicht immer

...zumindest nicht immer vollständig oder zweifelsfrei:

```
auswertung :: (Float,Float) -> (Float,Float,Float)
auswertung (x,y) = (x,y,geglaettet)
 where geglaettet = (4*x+6*y)/10

auswertung (5.0,8.0) ->> (5.0,8.0,6.8)
auswertung (7.2,9.7) ->> (7.2,9.2,8.7)

reihenausw :: [(Float,Float)] -> [(Float,Float,Float)]
reihenausw [] = []
reihenausw ((x,y) : xys)
              = (auswertung (x,y)) : reihenausw xys

reihenausw [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)]
  ->> [(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
reihenausw [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)],(6.3,7.8)]
  ->> [(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7),
       (6.3,7.8,7.2)]
```

Die äußere Semantik der Gleitkommatupel bleibt verborgen.

Was bedeuten also unsere Daten?

Wofür stehen Gleitkommapaare und -tripel wie

```
(5.0,8.0)
(7.2,9.7)
```

```
(5.0,8.0,6.8)
(7.2,9.7,8.7)
```

...und wofür Listen solcher Paare und Tripel?

```
[(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)]
```

```
[(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7),
 (6.3,7.8,7.2)]
```

Für Aktienkurse, für Pegelstände, für Positionsdaten?

Kapitel 4.1.2

Typsynonyme

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Aktienkurse

```
type Kurs               = Float
type Niedrigst          = Kurs
type Hoechst            = Kurs
type Bewertet           = Kurs
type Kursausschlag      = (Niedrigst,Hoechst)
type Ausschlagsanalyse  = (Niedrigst,Hoechst,Bewertet)
type Kursverlauf        = [Kursausschlag]
type Verlaufsanalyse    = [Ausschlagsanalyse]
```

Typsynonymverw. führt jetzt zu sprechenderen Funktionsdef.:

```
auswertung :: Kursausschlag -> Ausschlagsanalyse
auswertung (x,y) = (x,y,geglaettet) -- Moderat risiko-
 where geglaettet = (4*x+6*y)/10    -- freud. Investor

reihenausw :: Kursverlauf -> Verlaufsanalyse
reihenausw [] = []
reihenausw ((x,y) : xys)
             = (auswertung (x,y)) : reihenausw xys
```

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Aktienkurse

...und Anwendungsaufrufen:

```
ausschlag1 = (5.0,8.0) :: Kursausschlag
ausschlag2 = (7.2,9.7) :: Kursausschlag

auswertung ausschlag1 ->> (5.0,8.0,6.8) :: Ausschlagsanalyse
auswertung ausschlag2 ->> (7.2,9.7,8.7) :: Ausschlagsanalyse

verlauf1 = [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)] :: Kursverlauf
verlauf2 = [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)] :: Kursverlauf

reihenausw verlauf1
 ->> [(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
                                        :: Verlaufsanalyse
reihenausw verlauf2
 ->> [(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7)]
                   :: Verlaufsanalyse
```

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Pegelstände

```
type Pegelstand         = Float
type Niedrig            = Pegelstand
type Hoch               = Pegelstand
type Mittel             = Pegelstand
type Messung            = (Niedrig,Hoch)
type Auswertung         = (Niedrig,Hoch,Mittel)
type Messreihe          = [Messung]
type Auswertungsreihe = [Auswertung]
```

Typsynonymverw. ermöglicht jetzt folgende Funktionsdefinitionen:

```
auswertung' :: Messung -> Auswertung
auswertung' (x,y) = (x,y,geglaettet)
 where geglaettet = (x+y)/2        -- Rechn. Mittelwert

reihenausw' :: Messreihe -> Auswertungsreihe
reihenausw' [] = []
reihenausw' ((x,y) : xys)
               = (auswertung' (x,y)) : reihenausw' xys
```

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Pegelstände

...und Anwendungsaufrufe:

```
mess1 = (5.0,8.0) :: Messung
mess2 = (7.2,9.7) :: Messung

auswertung' mess1 ->> (5.0,8.0,6.5) :: Auswertung
auswertung' mess2 ->> (7.2,9.7,8.45) :: Auswertung

messreihe1 = [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)] :: Messreihe
messreihe2 = [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)] :: Messreihe

reihenausw' messreihe1
 ->> [(5.0,8.0,6.5),(7.2,9.7,8.45),(2.1,4.6,3.75)]
                                         :: Auswertungsreihe
reihenausw' messreihe2
 ->> [(2.4,7.9,5.15),(3.2,5.7,4.45),(2.8,9.3,6.05)]
                                         :: Auswertungsreihe
```

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Positionsdaten

```
type Koordinate  = Float
type X           = Koordinate
type Y           = Koordinate
type Z           = Koordinate
type Ebenenpunkt = (X,Y)
type Raumpunkt   = (X,Y,Z)
type Flaeche     = [Ebenenpunkt]
type Koerper     = [Raumpunkt]
```

Typsynonymverw. ermöglicht folgende Funktionsdefinitionen:

```
auswertung'' :: Ebenenpunkt -> Raumpunkt
auswertung'' (x,y) = (x,y,geglaettet)
 where geglaettet = x+y    -- Summe als Z-Koord.-Wert

reihenausw'' :: Flaeche -> Koerper
reihenausw'' [] = []
reihenausw'' ((x,y) : xys)
                 = (auswertung'' (x,y)) : reihenausw'' xys
```

Typsynonyme schaffen Abhilfe: Positionsdaten

...und Anwendungsaufrufe:

```
xy1 = (5.0,8.0) :: Ebenenpunkt
xy2 = (7.2,9.7) :: Ebenenpunkt

auswertung'' xy1 ->> (5.0,8.0,13.0) :: Raumpunkt
auswertung'' xy2 ->> (7.2,9.7,16.9) :: Raumpunkt

flaeche1 = [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)] :: Flaeche
flaeche2 = [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)] :: Flaeche

reihenausw'' flaeche1
 ->> [(5.0,8.0,13.0),(7.2,9.7,16.9),(2.1,4.6,6.7)] :: Koerper
reihenausw'' flaeche2
 ->> [(2.4,7.9,10.3),(3.2,5.7,8.9),(2.8,9.3,12.1)] :: Koerper
```

Kapitel 4.1.3

Tupeltypsynonyme und Selektorfunktionen

Selektorfunktionen für Tupeltypen

...oder kurz Selektoren für Tupeltypen wie `Kursausschlag`, `Ausschlagsanalyse`, `Messung`, `Auswertung`, `Ebenenpunkt`, `Raumpunkt` sind in Haskell

- vordefiniert für Paartypen (`fst`, `snd`) (s. Kap. 2.2.1)
- selbst zu definieren für höherstellige Tupeltypen.

Generell gilt: Musterbasierte Definitionen sind für Selektoren meist am zweckmäßigsten.

Selektoren für Wertpapierdaten

...in musterbasierter Definitionsweise:

```
ndgstKurs :: Kursausschlag -> Niedrigst
ndgstKurs (ndgst,_) = ndgst

hchstKurs :: Kursausschlag -> Hoechst
hchstKurs (_,hchst) = hchst

ndgstKursA :: Ausschlagsanalyse -> Niedrigst
ndgstKursA (ndgst,_,_) = ndgst

hchstKursA :: Ausschlagsanalyse -> Hoechst
hchstKursA (_,hchst,_) = hchst

bwKursA :: Ausschlagsanalyse -> Bewertet
bwKursA (_,_,bwk) = bwk
```

In gleicher Weise

...lassen sich Selektoren für

- Pegelstandsdaten
- Positionsdaten

definieren.

Selektoren für Pegelstandsdaten

...in musterbasierter Definitionsweise:

```
nPglM :: Messung -> Niedrig
nPglM (n,_) = n

hPglM :: Messung -> Hoch
hPglM (_,h) = h

nPglA :: Auswertung -> Niedrig
nPglA (n,_,_) = n

hPglA :: Auswertung -> Hoch
hPglA (_,h,_) = h

mPglA :: Auswertung -> Mittel
mPglA (_,_,m) = m
```

Selektoren für Positionsdaten

...in musterbasierter Definitionsweise:

```
xE :: Ebenenpunkt -> X
xE (x,_) = x

yE :: Ebenenpunkt -> Y
yE (_,y) = y

xR :: Raumpunkt -> X
xR (x,_,_) = x

yR :: Raumpunkt -> Y
yR (_,y,_) = y

zR :: Raumpunkt -> Z
zR (_,_,z) = z
```

Die Selektoren

...für Kursverläufe, Messungen und Ebenenpunkte alternativ (punktfrei) auf die vordefinierten Paarselektoren abgestützt:

```
ndgstKurs :: Kursausschlag -> Niedrigst
ndgstKurs = fst

hchstKurs :: Kursausschlag -> Hoechst
hchstKurs = snd

nPglM :: Messung -> Niedrig
nPglM = fst

hPglM :: Messung -> Hoch
hPglM = snd

xE :: Ebenenpunkt -> X
xE = fst

yE :: Ebenenpunkt -> Y
yE = snd
```

Kapitel 4.1.4

Weitere Beispiele

Zwei weitere Beispiele

...für Tupeltypsynonyme und zugehörige Selektoren:

- Studentendaten
- Buchhandelsdaten

mit Präfixverwendung der Tupelkonstruktoren (, , ,) und (, , , ,) zur Kreierung von Vier- und Fünftupeln.

Typsynonyme u. Selektoren f. Studentendaten

```
type Vorname          = String
type Nachname         = String
type Email            = String
type Studienkennzahl = Int
type Skz              = Studienkennzahl
type Student          = (Vorname,Nachname,Email,Skz)

(,,,) "Max Muster" "e123456@stud.tuwien.ac.at" 534
 ->> ("Max","Muster","e123456@stud.tuwien.ac.at",534)
                                           :: Student

vorname :: Student -> Vorname                (Ausschließlich
vorname (v,n,e,k) = v                      Variablenmuster)

nachname :: Student -> Nachname
nachname (v,n,e,k) = n

email :: Student -> Email
email (v,n,e,k) = e

skz :: Student -> Studienkennzahl
skz (v,n,e,k) = k
```

Typsynonyme u. Selektoren f. Buchhandelsdat.

```
type Autor   = String
type Titel   = String
type Auflage = Int
type Jahr    = Int
type Lagernd = Bool
type Buch    = (Autor,Titel,Auflage,Jahr,Lagernd)
```

```
(,,,,) "Simon Thompson" "Haskell" 3 2011 True
 ->> ("Simon Thompson","Haskell",3,2011,True) :: Buch
```

```
autor :: Buch -> Autor                          (Variablenmuster
autor (a,_,_,_,_) = a                           und ‘wild card’)

titel :: Buch -> Titel
titel (_,t,_,_,_) = t

auflage :: Buch -> Auflage
auflage (_,_,a,_,_) = a

erschienen :: Buch -> Jahr
erschienen (_,_,_,j,_) = j

lagernd :: Buch -> Lagernd
lagernd (_,_,_,_,l) = l
```

Kapitel 4.1.5

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Typsynonyme

- erlauben die äußere Semantik von Datentypen durch Wahl eines guten und sprechenden Namens offenzulegen und mitzuteilen.
- ermöglichen damit aussagekräftigere und sprechendere Funktionssignaturen.
- erhöhen dadurch die Lesbarkeit, Verständlichkeit und Transparenz von und in Programmen.

Aber: Typsynonyme

- führen keine neuen Typen ein, sondern ausschließlich neue Namen für bereits existierende Typen, sog. Alias-Namen oder Synonyme.
- leisten daher keinen Beitrag zu mehr Typsicherheit.

Dazu mehr in Kapitel 4.2 und Kapitel 5.

Kapitel 4.2

Neue Typen (`newtype`)

Kapitel 4.2.1

Motivation

Neue Typen

Typsynonyme

- führen keine neuen Typen ein, sondern neue Namen für bereits existierende Typen, sog. Aliasnamen oder Synonyme.
- leisten daher keinen Beitrag zu mehr Typsicherheit.

Warum?

Neue Typen

Typsynonyme

- dürfen überall dort stehen und verwendet werden, wo auch ihre jeweiligen Grundtypen stehen dürfen und umgekehrt.

In anderen Worten:

Typsynonyme und ihre jeweiligen Grundtypen

- dürfen sich ohne Einschränkung wechselweise vertreten.

Datenzusammengehörigkeit

...im Sinn intendierter Typbedeutung ist vertikal ausgedrückt:

Grundtyp	Durch Typsynonym intendierter Typ		
	Wertpapierdaten	Pegeldaten	Positionsdaten
`Float`	Kurs Niedrigst Hoechst Bewertet	Pegelstand Niedrig Hoch Mittel	Koordinate X Y Z
`(Float,Float)`	Kursausschlag (ndgst,hchst)	Messung (ndg,hch)	Ebenenpunkt (x,y)
`(Float,Float,Float)`	Ausschlagsanalyse (ndgst,hchst,gg)	Auswertung (ndg,hch,mtt)	Raumpunkt (x,y,z)
`[(Float,Float)]`	Kursverlauf Kursausschlag-L.	Messreihe Mess'gen-L.	Fläche E'punkt-Liste
`[(Float,Float,Float)]`	Verlaufsanalyse Ausschlagsa'yse-L.	Ausw'gsreihe Ausw'gs-L.	Körper R'punkt-Liste

Datenzusammengehörigkeit

...im Sinn tatsächlicher Typbedeutung ist horizontal ausgedrückt:

Die (jeweils gleichfarbigen) Typ (-bezeichner)

- `Float` mit seinen Aliasen
  `Kurs`, `Niedrigst`, `Hoechst`, `Bewertet`,
  `Pegelstand`, `Niedrig`, `Hoch`, `Mittel`,
  `Koordinate`, `X`, `Y`, `Z`
- `(Float,Float)` mit seinen Aliasen
  `Kursausschlag`, `Messung`, `Ebenenpunkt`
- `(Float,Float,Float)` mit seinen Aliasen
  `Ausschlagsanalyse`, `Auswertung`, `Raumpunkt`
- [(Float,Float)] mit seinen Aliasen
  Kursverlauf, Messreihe, Flaeche
- [(Float,Float,Float)] mit seinen Aliasen
  Verlaufsanalyse, Auswertungsreihe, Koerper

...dürfen einander (im Widerspruch zu ihrer intendierten Bedeutung) wechselweise vertreten.

Typisierung aus Haskell-Sicht (1)

...für die Typisierung gilt deshalb (trotz/wegen der Verwendung von Typsynoymen):

```
Kurs, Niedrigst, Hoechst, Bewertet,
Pegelstand, Hoch, Niedrig, Mittel,
Koordinate, X, Y, Z                          :: Float

Kursausschlag, Messung, Ebenenpunkt  :: (Float,Float)

Ausschlagsanalyse, Auswertung, Raumpunkt
                               :: (Float,Float,Float)

Kursverlauf, Messreihe, Flaeche :: [(Float,Float)]

Verlaufsanalyse, Auswertungsreihe, Koerper
                             :: [(Float,Float,Float)]
```

Typisierung aus Haskell-Sicht (2)

...sowie für die darauf aufbauenden Verarbeitungsfunktionen:

Wertpapierdaten:

```
auswertung :: (Float,Float) -> (Float,Float,Float)
reihenausw :: [(Float,Float)] -> [(Float,Float,Float)]
```

Wasserstandsdaten:

```
auswertung' :: (Float,Float) -> (Float,Float,Float)
reihenausw' :: [(Float,Float)] -> [(Float,Float,Float)]
```

Positionsdaten:

```
auswertung'' :: (Float,Float) -> (Float,Float,Float)
reihenausw'' :: [(Float,Float)] -> [(Float,Float,Float)]
```

Konsequenz (1)

...aufgrund der jeweiligen wechselweisen Typgleichheiten von

- `auswertung`, `auswertung`′, `auswertung`″
- `reihenausw`, `reihenausw`′, `reihenausw`″

und der jeweiligen wechselweisen Typgleichheiten von

- `Kursausschlag`, `Messung`, `Ebenenpunkt`
- `Kursverlauf`, `Messreihe`, `Flaeche`

Konsequenz (2)

...arbeiten die Funktionen

- `auswertung`, `auswertung'`, `auswertung''`

typfehlerfrei auf jedem Wert der Typen

- `Kursausschlag`, `Messung`, `Ebenenpunkt`

Ebenso typfehlerfrei arbeiten die Funktionen

- `reihenausw`, `reihenausw'`, `reihenausw''`

auf jedem Wert der Typen

- `Kursverlauf`, `Messreihe`, `Flaeche`

Daten können so Argument von Funktionen werden, für die das gemäß der mit den Typsynonymen ausgedrückten intendierten Semantik nicht möglich sein sollte.

Typsicherheit sieht anders aus (1)

Die Funktionen zur Wertpapierdatenverarbeitung sind typfehlerfrei auch auf Wasserstands- und Positionsdaten anwendbar:

Wasserstandsdaten

```
auswertung mess1 ->> (5.0,8.0,6.8)
auswertung mess2 ->> (7.2,9.7,8.7)

reihenausw messreihe1
 ->> [(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
reihenausw messreihe2
 ->> [(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7)]
```

Positionsdaten

```
auswertung xy1 ->> (5.0,8.0,6.8)
auswertung xy2 ->> (7.2,9.7,8.7)

reihenausw flaeche1
 ->> [(5.0,8.0,6.8),(7.2,9.7,8.7),(2.1,4.6,3.6)]
reihenausw flaeche2
 ->> [(2.4,7.9,5.7),(3.2,5.7,4.7),(2.8,9.3,6.7)]
```

Typsicherheit sieht anders aus (2)

Die Funktionen zur Wasserstandsdatenverarbeitung sind typfehlerfrei auch auf Wertpapier- und Positionsdaten anwendbar:

Wertpapierdaten

```
auswertung' ausschlag1 ->> (5.0,8.0,6.5)
auswertung' ausschlag2 ->> (7.2,9.7,8.45)

reihenausw' verlauf1
 ->> [(5.0,8.0,6.5),(7.2,9.7,8.45),(2.1,4.6,3.35)]
reihenausw' verlauf2
->> [(2.4,7.9,5.15),(3.2,5.7,4.45),(2.8,9.3,6.05)]
```

Porsitonsdaten

```
auswertung' xy1 ->> (5.0,8.0,6.5)
auswertung' xy2 ->> (7.2,9.7,8.45)

reihenausw' flaeche1
 ->> [(5.0,8.0,6.5),(7.2,9.7,8.45),(2.1,4.6,3.35)]
reihenausw' flaeche2
 ->> [(2.4,7.9,5.15),(3.2,5.7,4.45),(2.8,9.3,6.05)]
```

Typsicherheit sieht anders aus (3)

Die Funktionen zur Positionsdatenverarbeitung sind typfehlerfrei auch auf Wertpapier- und Wasserstandsdaten anwendbar:

Wertpapierdaten

```
auswertung″ ausschlag1  ->> (5.0,8.0,13.0)
auswertung″ ausschlag2 ->> (7.2,9.7,16.9)

reihenausw″ verlauf1
 ->> [(5.0,8.0,13.0),(7.2,9.7,16.9),(2.1,4.6,6.7)]
reihenausw″ verlauf2
->> [(2.4,7.9,10.3),(3.2,5.7,8.9),(2.8,9.3,12.1)]
```

Wasserstandsdaten

```
auswertung″ mess1 ->> (5.0,8.0,13.0)
auswertung″ mess2 ->> (7.2,9.7,16.9)

reihenausw″ messreihe1
 ->> [(5.0,8.0,13.0),(7.2,9.7,16.9),(2.1,4.6,6.7)]
reihenausw″ messreihe2
 ->> [(2.4,7.9,10.3),(3.2,5.7,8.9),(2.8,9.3,12.1)]
```

Weit reichende Folgen fehlender Typsicherheit

Was mit der Verarbeitung von

- Wertpapierdaten, Wasserständen, Positionsdaten

möglich ist, ist auch mit Werten anderer Typsynonyme möglich, z.B. für:

- Meilen/Kilometer, Pferdestärken/Kilowatt, Kraftpfund (engl. pound-force, lb, lbf))/Newton, etc.

```
type Meile     = Float
type Kilometer = Float
type PS        = Float
...
```

Eine Petitesse? Fragen Sie die NASA!

Marssonde ‘Climate Orbiter’

Ereignis

- Totalverlust der Sonde Mars Climate Orbiter am 23.09.1998 beim Versuch in die Marsatmosphäre einzutauchen.

Ursache

- Widersprüchliche Verwendung metrischer und nichtmetrischer Daten zwischen Lockheed Martin Astronautics und NASA-Labor Jet Propulsion Laboratory (JPL):

  Pound-force vs. Newton und weiterer metrischer und SI-Einheiten.

Schadenssumme

- Rd. 125 Millionen US$.

Marssondendebakel, Hintergrundmaterial

NASA-Datenbank 'Lessons Learned':

http://www-bcf.usc.edu/∼meshkati/fea03/appendix_html/
Mars%20Climate%20Orbiter%20NASA%20LLIS%Database.htm

NASA-Berichte zu Sondenverlust (...0930) und Ursache (...1110):

http://mars.nasa.gov/msp98/news/mco990930.html

http://mars.nasa.gov/msp98/news/mco991110.html

Weitere zusammenfassende Berichte (...0052) und über ignorierte Warnhinweise in der Anflugphase (...report/):

http://www.sciencedirect.com/science/article/
pii/S0263786309000052

https://www.wired.com/2010/11/
1110mars-climate-observer-report/

Typsynonyme (1)

...verhindern nicht, die sprichwörtlichen Äpfel und Birnen

```
type Apfel = String
type Birne = String

jonathan = "Jonathan" :: Apfel
williams = "Williams" :: Birne

apfel    = "Williams" :: Apfel
birne    = "Jonathan" :: Birne
```

...'erfolgreich' miteinander zu vergleichen:

```
[apfel,jonathan] == [williams,birne] ->> True
```

Typsynonyme (2)

...erlauben intendierte Typ- und Wertbenutzungen anzuzeigen,

- nicht aber durchzusetzen.

Typsynomyme können deshalb nicht verhindern, Funktionen

- dezidiert zur Verarbeitung von z.B. Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten

versehentlich, irrtümlich oder auch absichtlich auf

- ungeeignete und nicht dafür vorgesehene Daten

anzuwenden.

Übertragen auf unser durchgehendes Beispiel

...zwischen Aktienkursen, Pegelständen und Positionsangaben

- besteht kein innerer oder sonstiger bedeutungsmäßiger Zusammenhang.
- Es gibt keinen vernünftigen Grund, Funktionen für Wertpapierdaten auf Wasserstandsdaten oder Positionsdaten anzuwenden und umgekehrt.
- Eine gute Programmiersprache sollte es ermöglichen, ungeeignete Verwendung auszuschließen:
  - Das programmiersprachliche Mittel dazu: Typsysteme!
  - Im Typsystem von Haskell: Neue Typen (und als Verallgemeinerung algebraische Datentypen, siehe Kap. 5).

Kapitel 4.2.2

Neue Typen

Neue Typen, newtype-Deklarationen

Wir ersetzen Typsynonym-Deklarationen:

```
type Kurs       = Float
type Pegelstand = Float
type Koordinate = Float
```

durch newtype-Deklarationen:

$$\texttt{newtype}\ \underbrace{\texttt{Kurs}}_{\text{Typname}}\ = \underbrace{\texttt{K}\ \overbrace{\texttt{Float}}^{\text{Nutzdatentyp}}}_{\text{Datenkonstruktorname}}$$

```
newtype Pegelstand        = Pgl Float
newtype Koordinate        = Koordinate Float
```

Beachte: Typname und Datenkonstruktorname dürfen übereinstimmen; sie sind durch den Anwendungskontext unterscheidbar.

Alles andere bleibt (syntaktisch) gleich

...am Beispiel für Wertpapierdaten:

```
newtype Kurs              = K Float
type Niedrigst            = Kurs
type Hoechst              = Kurs
type Bewertet             = Kurs
type Kursausschlag        = (Niedrigst,Hoechst)
type Ausschlagsanalyse    = (Niedrigst,Hoechst,Bewertet)
type Kursverlauf          = [Kursausschlag]
type Verlaufsanalyse      = [Ausschlagsanalyse]
```

Beachte allerdings:

- Wie Kurs sind auch Niedrigst, Hoechst und Bewertet keine Synonyme mehr für `Float`, sondern für den neuen Typ Kurs.
- In gleicher Weise sind auch Kursausschlag, Ausschlagsanalyse, Kursverlauf und Verlaufsanalyse keine Synonyme mehr für `Float`-Paare, `Float`-Tripel und Listen von `Float`-Paaren und `Float`-Tripeln.

Anpassung der Funktionsdefinitionen

..Konstruktoren in Argumentmustern, alles andere (syntaktisch) gleich:

```
auswertung :: Kursausschlag -> Ausschlagsanalyse
 auswertung  (K x,K y) = (K x,K y,K geglaettet)
  where geglaettet = (4*x+6*y)/10

 reihenausw :: Kursverlauf -> Verlaufsanalyse
 reihenausw [] = []
 reihenausw ((K x,K y)) : xys)
               = (auswertung (K x, K y)) : reihenausw xys
```

statt (wie mit Typsynonymen in Kapitel 4.1):

```
 auswertung :: Kursausschlag -> Ausschlagsanalyse
 auswertung (x,y) = (x,y,geglaettet)
  where geglaettet = (4*x+6*y) / 10

 reihenausw :: Kursverlauf -> Verlaufsanalyse
 reihenausw [] = []
 reihenausw ((x,y) : xys)
               = (auswertung (x,y)) : reihenausw xys
```

Analog für Wasserstandsdaten

Modifizierte Typdeklarationen:

```
newtype Pegelstand    = Pgl Float
type Niedrig          = Pegelstand
type Hoch             = Pegelstand
type Mittel           = Pegelstand
type Messung          = (Niedrig,Hoch)
type Auswertung       = (Niedrig,Hoch,Mittel)
type Messreihe        = [Messung]
type Auswertungsreihe = [Auswertung]
```

Angepasste Funktionsdefinitionen:

```
auswertung' :: Messung -> Auswertung
auswertung' (Pgl x,Pgl y) = (Pgl x,Pgl y,Pgl geglaettet)
 where geglaettet = (x+y)/2

reihenausw' :: Messreihe -> Auswertungsreihe
reihenausw' [] = []
reihenausw' ((Pgl x,Pgl y) : xys)
              = (auswertung' (Pgl x,Pgl y)) : reihenausw' xys
```

Analog für Positionsdaten

Modifizierte Typdeklarationen:

```
newtype Koordinate = Koordinate Float
type X             = Koordinate
type Y             = Koordinate
type Z             = Koordinate
type Ebenenpunkt   = (X,Y)
type Raumpunkt     = (X,Y,Z)
type Flaeche       = [Ebenenpunkt]
type Koerper       = [Raumpunkt]
```

Angepasste Funktionsdefinitionen:

```
auswertung'' :: Ebenenpunkt -> Raumpunkt
auswertung'' (Koordinate x,Koordinate y)
  = (Koordinate x,Koordinate y,Koordinate geglaettet)
    where geglaettet = x+y

reihenausw'' :: Flaeche -> Koerper
reihenausw'' [] = []
reihenausw'' ((Koordinate x,Koordinate y) : xys)
 = (auswertung'' (Koordinate x,Koordinate y)) : reihenausw'' xys
```

Kapitel 4.2.3

Typsicherheit erreicht

Typsicherheit erreicht!

...die (Nutz-) Daten, die Gleitkommawerte, liegen jetzt geschützt hinter Datenkonstruktoren:

Wertpapierdaten:

```
ausschlag = (K 5.0,K 8.0)
verlauf   = [(K 5.0,K 8.0),(K 7.2,K 9.7),(K 2.1,K 4.6)]
```

Wasserstandsdaten:

```
messung   = (Pgl 5.0,Pgl 8.0)
messreihe = [(Pgl 5.0,Pgl 8.0),(Pgl 7.2,Pgl 9.7),
              (Pgl 2.1,Pgl 4.6)]
```

Positionsdaten:

```
ebenenpunkt = (Koordinate 5.0,Koordinate 8.0)
flaeche     = [(Koordinate 5.0,Koordinate 8.0),
               (Koordinate 7.2,Koordinate 9.7),
               (Koordinate 2.1,Koordinate 4.6)]
```

Wertpapierdaten typgesichert typsicher!

Wertpapierdatenverarbeitungsfunktionen:

```
auswertung :: Kursausschlag  -> Ausschlagsanalyse
reihenausw :: Kursverlauf -> Verlaufsanalyse
```

Anwendbarkeit auf Wertpapierdaten wie gewünscht:

```
auswertung ausschlag ->>  (K 5.0,K 8.0,K 6.8)
reihenausw verlauf   ->> [(K 5.0,K 8.0,K 6.8),
                          (K 7.2,K 9.7,K 8.7),
                          (K 2.1,K 4.6,K 3.6)]
```

Keine Anwendbarkeit auf Wasserstands-, Positionsdaten oder Gleitkommazahlen:

```
auswertung messung      ->> "Fehler: Typen passen nicht."
reihenausw messreihe    ->> "Fehler: Typen passen nicht."

auswertung ebenenpunkt ->> "Fehler: Typen passen nicht."
reihenausw flaeche      ->> "Fehler: Typen passen nicht."

auswertung (5.0,8.0)    ->> "Fehler: Typen passen nicht."
reihenausw [5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)]
                        ->> "Fehler: Typen passen nicht."
```

In gleicher Weise jetzt auch

...Wasserstands- und Positionsdaten jetzt typgesichert typsicher!

Wasserstandsdaten:

```
auswertung'  :: Messung    -> Auswertung
reihenausw'  :: Messreihe  -> Auswertungsreihe
```

Positionsdaten:

```
auswertung'' :: Ebenenpunkt -> Raumpunkt
reihenausw'' :: Flaeche -> Koerper
```

Mission erfüllt: Typsicherheit erreicht!

Das Konzept neuer Typen, Nutzdaten hinter Datenkonstruktoren zu verbergen und schützen, erlaubt

- zusätzlich zum Anzeigen intendierter Typ- und Wertbenutzungen

diese auch durchzusetzen und (Nutz-) Daten so vor

- versehentlicher wie absichtlicher oder böswilliger Verarbeitung durch nicht dafür vorgesehene Funktionen

wirksam zu schützen.

Kapitel 4.3

Typklassen (`class`)

Kapitel 4.3.1

Motivation

Typsicherheit erreicht. Mission erfüllt? (1)

Betrachte folgende Wertpapierdaten:

- Typgesichert (`newtype Kurs = K Float`):

```
gs_kurs1       =  K 5.0
gs_kurs2       =  K 7.2
gs_ausschlag1 = (K 5.0,K 8.0)
gs_ausschlag2 = (K 7.2,K 9.7)
gs_verlauf1    = [(K 5.0,K 8.0),(K 7.2,K 9.7),
                  (K 2.1,K 4.6)]
gs_verlauf2    = [(K 2.4,K 7.9),(K 3.2,K 5.7),
                  (K 2.8,K 9.3)]
```

- Typungesichert (`type Kurs = Float`):

```
ugs_kurs1       = 5.0
ugs_kurs2       = 7.2
ugs_ausschlag1 = (5.0,8.0)
ugs_ausschlag2 = (7.2,9.7)
ugs_verlauf1    = [(5.0,8.0),(7.2,9.7),(2.1,4.6)]
ugs_verlauf2    = [(2.4,7.9),(3.2,5.7),(2.8,9.3)]
```

Typsicherheit erreicht. Mission erfüllt? (2)

...und die Ergebnisse folgender Ausdrucksvergleiche:

```
ugs_kurs1 == ugs_kurs1 ->> True
ugs_kurs1 /= ugs_kurs2 ->> True

gs_kurs1  == gs_kurs1  ->> "Fehler: (==) unbekannt"
gs_kurs1  /= gs_kurs2  ->> "Fehler: (/=) unbekannt"

ugs_ausschlag1 == ugs_ausschlag1 ->> True
ugs_ausschlag1 /= ugs_ausschlag2 ->> True

gs_ausschlag1  == gs_ausschlag1  ->> "Fehler: (==) unbekannt"
gs_ausschlag1  /= gs_ausschlag2  ->> "Fehler: (/=) unbekannt"

ugs_verlauf1 == ugs_verlauf1 ->> True
ugs_verlauf1 /= ugs_verlauf2 ->> True

gs_verlauf1  == gs_verlauf1  ->> "Fehler: (==) unbekannt"
gs_verlauf1  /= gs_verlauf2  ->> "Fehler: (/=) unbekannt"
```

Schutz vor missbräuchlicher Nutzung überschießend? Auch definitiv gewollte Zugriffe und Verarbeitung jetzt nicht mehr möglich?

Ad hoc Abhilfe (1)

Definiere Gleichheitstests für Kurse, Kursausschläge, Kursverläufe:

```
k_eq :: Kurs -> Kurs -> Bool
(K k1) `k_eq` (K k2) = k1==k2

k_neq :: Kurs -> Kurs -> Bool
k1 `k_neq` k2 = not (k1 `k_eq` k2)

ka_eq :: Kursausschlag -> Kursausschlag -> Bool
(K k1,K k2) `ka_eq` (K k3,K k4) = (k1,k2)==(k3,k4)

ka_neq :: Kursausschlag -> Kursausschlag -> Bool
ka1 `ka_neq` ka2 = not (ka1 `ka_eq` ka2)

kv_eq :: Kursverlauf -> Kursverlauf -> Bool
[] `kv_eq` [] = True
(ka:kas) `kve_q` (la:las) = ka `ka_eq` la && kas `kv_eq` las
_ `kv_eq` _ = False

kv_neq :: Kursverlauf -> Kursverlauf -> Bool
kv1 `kv_neq` kv2 = not (kv1 `kv_eq` kv2)
```

Ad hoc Abhilfe (2)

Damit ergeben sich folgende Vergleichsergebnisse:

```
gs_kurs1      `k_eq`   gs_kurs1      ->> True
gs_kurs1      `k_neq`  gs_kurs2      ->> True
gs_ausschlag1 `ka_eq`  gs_ausschlag1 ->> True
gs_ausschlag1 `ka_neq` gs_ausschlag2 ->> True
gs_verlauf1   `kv_eq`  gs_verlauf1   ->> True
gs_verlauf1   `kv_neq` gs_verlauf2   ->> True
```

$\leadsto$ *Ad hoc* Abhilfe erfüllt den Zweck.

Ad hoc Abhilfe generalisierbar?

Gleichheits- und Ungleichheitstests

- könnten jetzt in gleicher Weise für Wasserstands- und Positionsdaten definiert werden.

Jedoch wäre dies:

- Aufwändig, unpraktisch, wenig elegant (allein die Wahl der vielen Namen wäre bereits in hohem Maß unschön und mühsam).

Haskell bietet ein zweckmäßigeres und schlagkräftigeres Sprachmittel an:

- Typklassen (vordefiniert und selbstdefiniert)

Kapitel 4.3.2

Vordefinierte Typklassen

Typklassen in Haskell

Typklassen (gleich ob vor- oder selbstdefiniert)

- haben Typen als Elemente.
- legen eine Menge von Operationen und Relationen fest, die auf den Werten ihrer Elemente implementiert sein müssen.
- können für diese Operationen und Relationen bereits vollständige Standardimplementierungen oder noch zu vervollständigende Protoimplementierungen vorsehen.

Typen

- werden durch Instanzbildung zu Elementen bzw. Instanzen einer Typklasse.

Beispiel 1: Vordefinierte Typklasse Eq

...für Typen, deren Werte absolut verglichen werden können, d.h. auf Gleichheit, Ungleichheit:

```
class Eq a where
 (==), (/=) :: a -> a -> Bool
 x /= y = not (x==y)   -- Protoimplementierungen
 x == y = not (x/=y)   -- für (/=) und (==)
```

Die Typklasse Eq

- verlangt von Instanzen die Implementierung von zwei Wahrheitswertfunktionen (oder Prädikaten): (==), (/=).
- stellt für beide Wahrheitswertfunktion eine Protoimplementierung zur Verfügung.

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Eq:

- Implementierung von entweder (==) oder (/=).

Bemerkung

Die Protoimplementierungen für sich allein sind

- unvollständig und nicht ausreichend, da sie sich wechselweise aufeinander abstützen.

Dennoch ergibt sich folgender Vorteil aus ihrer Angabe:

- Bei Instanzbildungen reicht es, entweder eine Implementierung für (==) oder für (/=) anzugeben und deren Protoimplementierung dadurch zu überschreiben. Für den jeweils anderen Operator ist seine Protoimplementierung dadurch automatisch vollständig.
- Auch für beide Funktionen können bei der Instanzbildung Implementierungen angegeben werden. In diesem Fall werden beide Protoimplementierungen überschrieben.

Instanzbildungen für die Typklasse Eq (1)

...am Beispiel des Typs Bool der Wahrheitswerte:

```
instance Eq Bool where
 True  == True  = True     -- Überschreiben der
 False == False = True     -- Proto-Impl. von (==)
     _ == _     = False
```

Alternativ, gleichwertig:

```
instance Eq Bool where
 True  /= True  = False    -- Überschreiben der
 False /= False = False    -- Proto-Impl. von (/=)
     _ /= _     = True
```

Instanzbildungen für die Typklasse Eq (2)

...am Beispiel eines Typs Punkt für Punkte in der reellwertigen (x,y)-Ebene:

```
type X_Koord  = Float
type Y_Koord  = Float
newtype Punkt = Pkt (X_Koord,Y_Koord)

instance Eq Punkt where
 (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v')) = (u==u') && (v==v')
```

...Punkte sind 'gleich', wenn sie in x- **und** y-Koordinate übereinstimmen, d.h. gleich sind.

Beachte:

- Gleichheit von Punkt-Werten wird zurückgeführt auf Gleichheit von Float-Werten.
- Sprechweise: Das Relatorsymbol (==) wird (durch die Instanzbildung) überladen.

Instanzbildungen für die Typklasse Eq (3)

Auch andere Auffassungen von ‘Gleichheit’ von Punkten wären möglich, z.B. folgende schwächere Gleichheitsauffassung:

```
instance Eq Punkt where
  (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v')) = (u==u') || (v==v')
```

...Punkte sind ‘gleich’, wenn sie in x- **oder** y-Koordinate übereinstimmen, d.h. auf derselben Parallele zur y- oder x-Achse liegen.

Beispiel 2: Vordefinierte Typklasse Ord

...für Typen, deren Werte relativ verglichen werden können:

```
class Eq a => Ord a where
 compare                :: a -> a -> Ordering
 (<), (<=), (>), (>=)   :: a -> a -> Bool
 max, min               :: a -> a -> a

 compare x y                      -- Protoimplementierungen
  | x == y    = EQ
  | x <= y    = LT
  | otherwise = GT
 x <= y       = compare x y /= GT
 x < y        = compare x y == LT
 x >= y       = compare x y /= LT
 x > y        = compare x y == GT
```

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Vergleiche auf Ordering-Werten}}$

```
 max x y
  | x <= y    = y
  | otherwise = x
 min x y
  | x <= y    = x
  | otherwise = y
```

Bemerkung

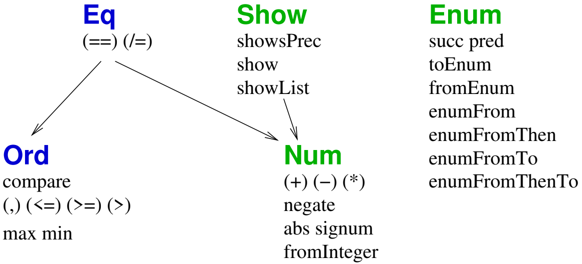
Die Typklasse `Ord`

- verlangt von Instanzen die Implementierung der Funktionen `compare`, `max` und `min` sowie der Prädikate `(<)`, `(<=)`, `(>=)`, `(>)`.
- stellt für alle diese Funktionen und Prädikate Protoimplementierungen zur Verfügung.

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für `Ord`:

- Implementierung von entweder `compare` oder `(<=)`.

Typklassen in Haskell bilden eine Hierarchie



Quelle: Fethi Rabhi, Guy Lapalme. Algorithms - A Functional Approach. Addison-Wesley, 1999, Abb. 2.4 (Ausschnitt).

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
4.1
4.2
4.3
4.3.1
4.3.2
4.3.3
4.3.4
4.3.5
4.3.6
4.4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9

Informelle Beschreibung

...der Typklasse:

- `Eq`: Werte von `Eq`-Typen müssen auf Gleichheit und Ungleichheit vergleichbar sein.
- `Ord`: Werte von `Ord`-Typen müssen über Gleichheit und Ungleichheit hinaus bezüglich ihrer relativen Größe vergleichbar sein.
- `Show`: Werte von `Show`-Typen müssen eine Darstellung als Zeichenreihe besitzen.
- `Num`: Werte von `Num`-Typen müssen mit ausgewählten numerischen Operationen verknüpfbar sein, d.h. addiert, multipliziert, subtrahiert, etc. werden können.
- `Enum`: Werte von `Enum`-Typen müssen aufzählbar sein, d.h. einen Vorgänger- und Nachfolgerwert innerhalb des Typs besitzen.

Beispiel 3: Vordefinierte Typklasse Show

...für Typen, deren Werte als Zeichenreihe dargestellt werden können:

```
type ShowS = String -> String

class Show a where
 showsPrec :: Int -> a -> ShowS
 show :: a -> String
 showList :: [a] -> ShowS

 showsPrec _ x s = show x ++ s      -- Protoimplementierungen
 show x = showsPrec 0 x ""
 showList [] = showString "[]"
 showList (x:xs) = showChar '[' . shows x . showl xs
                   where showl []     =  showChar ']'
                         showl (x:xs) =
                          showChar ',' . shows x . showl xs
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Show:

- Implementierung von entweder show oder showsPrec.

Instanzbildungen für die Typklasse Show

...am Beispiel der Typen Punkt und (My)-Bool:

```
instance Show Punkt where
 show (Pkt (u,v))
  = "(" ++ show u ++ "," ++ show v ++ ") Punkt"
      ++ (if v==0 then " " else " nicht ")
      ++ "auf x-Achse."
```

```
show (Pkt (42,4711)) ->> "(42.0,4711.0) Punkt nicht auf x-Achse"
show (Pkt (42,0))    ->> "(42.0,0.0) Punkt auf x-Achse"
```

```
newtype MyBool = MB Bool
```

```
instance Show MyBool where
 show (MB True)  = "Wahr"
 show (MB False) = "Falsch"
```

```
show (MB True)  ->> "Wahr"
show (MB False) ->> "Falsch"
```

Anmerkung: Bool ist bereits vordefiniert als Instanz von Show (show True ->> "True", show False ->> "False") und kann deshalb nicht erneut zur Instanz gemacht werden.

Beispiel 4: Vordefinierte Typklasse Read

...für Typen, deren Werte aus einer Zeichenreihe abgeleitet werden können:

```
type ReadS a = String -> [(a,String)]

class Read a where
 readsPrec :: Int -> ReadS a
 readList  :: ReadS [a]
 readList = ...       -- Protoimpl., hier weggelassen
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Read:

- Implementierung von readsPrec.

...siehe Standard-Präludium und Sprachbericht für hier nicht angegebene Hilfsfunktionen von Read (und Show).

Beispiel 5: Vordefinierte Typklasse Enum

...für Typen, deren Werte aufgezählt werden können:

```
class Enum a where                        -- Informelle Bedeutung:
 succ, pred     :: a -> a    -- Vorgänger-, Nachfolgerwert
 toEnum         :: Int -> a               -- Typkonversion
 fromEnum       :: a -> Int               -- Typkonversion
 enumFrom       :: a -> [a]                    -- [n..]
 enumFromThen   :: a -> a -> [a]               -- [n,n'..]
 enumFromTo     :: a -> a -> [a]               -- [n..m]
 enumFromThenTo :: a -> a -> a -> [a]          -- [n,n'..m]
 succ             = toEnum . (+1) . fromEnum  -- Protoimpl.
 pred             = toEnum . (subtract 1) . fromEnum
 enumFrom x       = map toEnum [fromEnum x ..]
 enumFromTo x     = map toEnum [fromEnum x .. fromEnum y]
 enumFromThen x y =
  map toEnum [fromEnum x, fromEnum y .. fromEnum]
 enumFromThenTo x y z =
  map toEnum [fromEnum x, fromEnum y .. fromEnum z]
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Enum:

- Implementierung von toEnum und fromEnum.

Beispiel 6: Vordefinierte Typklasse Num

...für Typen, deren Werte numerisch behandelt werden können:

```
class (Eq a, Show a) => Num a where
 (+), (-), (*) :: a -> a -> a
 negate :: a -> a
 abs, signum :: a -> a
 fromInteger :: Integer -> a
 x - y    = x + negate y          -- Protoimplemen-
 negate x = 0 - x                 -- tierungen
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für Num:

- Implementierung aller Funktionen mit Ausnahme von entweder negate oder (-).

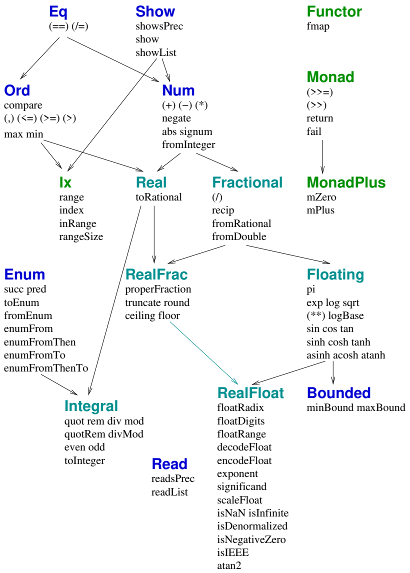
Weitere numerische Typklassen

...neben bzw. als Erweiterung von `Num` und `Enum`:

```
class (Num a, Ord a)   => Real a where...
class (Real a, Enum a) => Integral a where...
class (Num a)          => Fractional a where...
class (Fractional a)            => Floating a where...
class (Real a, Fractional a)    => RealFrac a where...
class (RealFrac a, Floating a) => RealFloat a where...
```

...siehe Standard-Präludium und Sprachbericht für Einzelheiten.

Die result. Typklassenhierarchie im Überblick



Quelle: Fethi Rabhi, Guy Lapalme. Algorithms - A Functional Approach. Addison-Wesley, 1999, Abb. 2.4.

Beschreibung ausgewählter Typklassen

Typklasse

- 'Gleichheit' `Eq`: Klasse der Typen mit Gleichheits- `(==)` und Ungleichheitsrelation `(/=)`.
- 'Ordnung' `Ord`: Klasse der Typen mit Ordnungsrelationen ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, etc.).
- 'Numerisch' `Num`: Klasse der Typen, deren Werte sich numerisch verhalten (Bsp.: `Int`, `Integer`, `Float`, `Double`)
- 'Aufzählung' `Enum`: Klasse der Typen, deren Werte aufgezählt werden können (Bsp.: `[2,4..29] :: Int`).
- 'Ausgabe' `Show`: Klasse der Typen, deren Werte als Zeichenreihen dargestellt werden können (Bsp.: `Bool`, `Int`, `Integer`, `[Int]`, `(Bool,Int)`,...)
- 'Eingabe' `Read`: Klasse der Typen, deren Werte aus Zeichenreihen herleitbar sind (Bsp.: `Bool`, `Int`, `Float`, `[Float]`, `[(Bool,Float)]`,...)
- ...

Kapitel 4.3.3

Instanzbildung für Typklassen

Instanzbildung für die Typklasse Eq

...mache Typ Kurs zu einem Element von Eq:

```
newtype Kurs = K Float
instance Eq Kurs where
 K k1 == K k2 = k1 == k2
```

Beachte: (==) ist der in Haskell vordefinierte Vergleich auf Werten vom Typ Float:

```
(==) :: Float -> Float -> Bool
```

wohingegen (==) der in der Instanzdeklaration selbstdefinierte Vergleich auf Werten vom Typ Kurs ist:

```
(==) :: Kurs -> Kurs -> Bool
```

dessen Definition sich auf den Vergleich (==) abstützt.

Anwendungen von Kurs als Eq-Typ

...mit der Eq-Instanzbildung für Kurs unmittelbar möglich:

```
gs_kurs1       == gs_kurs1       ->> True
gs_kurs1       /= gs_kurs2       ->> True

gs_ausschlag1 == gs_ausschlag1 ->> True
gs_ausschlag1 /= gs_ausschlag2 ->> True

gs_verlauf1    == gs_verlauf1    ->> True
gs_verlauf1    /= gs_verlauf2    ->> True
```

Instanzbildung für die Typklasse `Ord`

...mache Typ `Kurs` zu einem Element von `Ord`:

```
newtype Kurs = K Float

instance Ord Kurs where
  K k1 <= K k2 = k1 <= k2
```

Beachte: `(<=)` ist der in Haskell vordefinierte Vergleich auf Werten vom Typ `Float`:

```
(<=) :: Float -> Float -> Bool
```

wohingegen `(<=)` der in der Instanzdeklaration selbstdefinierte Vergleich auf Werten vom Typ `Kurs` ist:

```
(<=) :: Kurs -> Kurs -> Bool
```

dessen Definition sich auf den Vergleich `(<=)` abstützt.

Anwendungen von Kurs als Ord-Typ

...mit der Ord-Instanzbildung für Kurs unmittelbar möglich:

```
gs_kurs1 <= gs_kurs1 ->> True
gs_kurs1 > gs_kurs2 ->> False

gs_ausschlag1 >= gs_ausschlag2 ->> False
gs_ausschlag1 `max` gs_ausschlag2 ->> (K 7.2,K 9.7)

gs_verlauf1 `min` gs_verlauf2
   ->> [(K 2.4,K 7.9),(K 3.2,K 5.7),(K 2.8,K 9.3)]
gs_verlauf1 `compare` gs_verlauf2 ->> GT
```

Übungsaufgabe 4.3.3.1

Mache die neuen Typen

- `Pegelstand`
- `Positionsdaten`

aus Kapitel 4.2.2 zu Instanzen der Typklassen

1. `Eq` auf zwei alternative, gleichwertige Weisen durch Definition von:
   1.1 `(==)`
   1.2 `(/=)`
2. `Ord` auf zwei alternative, gleichwertige Weisen durch Definition von:
   2.1 `(<=)`
   2.2 `compare`

Kapitel 4.3.4

Automatische Instanzbildung

Automatische Instanzbildungen

Für ausgewählte Typklassen können explizite Instanzbildungen wie hier für Pegelstand und Koordinate für Typklasse Eq:

```
newtype Pegelstand = Pgl Float

instance Eq Pegelstand where
 Pgl p1 == Pgl p2 = p1 == p2

newtype Koordinate = Koordinate Float

instance Eq Koordinate where
 Koordinate k1 /= Koordinate k2 = k1 /= k2
```

bedeutungsgleich durch automatische Instanzbildungen mittels einer deriving-Klause ersetzt werden:

```
newtype Pegelstand = Pgl Float deriving Eq
newtype Koordinate = Koordinate Float deriving Eq
```

Automatische Instanzbildungen

...sind möglich (ausschließlich!) für die vordefinierten Typklassen Eq, Ord, Enum, Bounded, Show und Read (s. Kap. 11.4.3).

Für unser durchgehendes Beispiel liefern die automatischen Instanzbildungen das gewünschte Verhalten und sind deshalb am bequemsten:

```
newtype Kurs        = K Float
                          deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Pegelstand = Pgl Float
                          deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Koordinate = Koordinate Float
                          deriving (Eq,Ord,Show)
```

Ist ein anderes als das automatisch erzeugte 'offensichtliche' Verhalten gewünscht, muss die Instanzbildung explizit mit einer instance-Deklaration erfolgen (s. Kap. 11.4.3).

Beispiel anhand des Typs Punkt (1)

...die Deklaration mit deriving-Klausel:

```
type X_Koord  = Float
type Y_Koord  = Float
newtype Punkt = Pkt (X_Koord,Y_Koord) deriving Eq
```

ist äquivalent zur Instanz-Deklaration:

$$\texttt{instance Eq Punkt where}$$
$$\texttt{(Pkt }\underbrace{\texttt{(u,v)) == (Pkt}}_{\texttt{(==) auf Punkt}}\texttt{ (u}'\texttt{,v}'\texttt{)) = }\underbrace{\texttt{(u==u}'\texttt{) \&\&}}_{\texttt{(==) auf Float}}\texttt{ (v==v}'\texttt{)}$$

Ist 'Gleichheit' von Punkten anders gewünscht, etwa Gleichheit bereits bei übereinstimmender x- oder y-Koordinate, so ist eine Instanz-Deklaration unumgänglich:

```
instance Eq Punkt where
  (Pkt (u,v)) == (Pkt (u′,v′)) = (u==u′) || (v==v′)
```

Beispiel anhand des Typs Punkt (2)

...oder bei:

'Gleichheit' als 'nicht zu weit voneinander entfernt', d.h. innerhalb eines Quadrats mit Seitenlänge $\varepsilon > 0$ umeinander:

```
instance Eq Punkt where
 (Pkt (u,v)) == (Pkt (u′,v′))
   = (abs (u-u′) <= epsilon/2) &&
     (abs (v-v′) <= epsilon/2) where epsilon = 0.1
```

'Gleichheit' als 'gleich weit vom Ursprung $(0, 0)$ entfernt', d.h. auf derselben Kreislinie um den Ursprung:

```
instance Eq Punkt where
 (Pkt (u,v)) == (Pkt (u′,v′))
   = sqrt (u*u +v*v) == sqrt (u′*u′ + v′*v′)
```

oder...

Antibeispiel anhand des Typs Punkt (1)

Beachte: Folgender Instanzbildungsversuch schlüge fehl:

```
newtype Temperatur = Tmp Float
newtype Regenmenge = Rmg Float
```

```
instance Eq Punkt where
 (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v'))
  = (Tmp u == Tmp u')  ||  (Rmg v == Rmg v')
```

$\underbrace{\texttt{(Tmp u == Tmp u')}}_{\texttt{(==) auf Temperatur, nicht auf Float}} \;||\; \underbrace{\texttt{(Rmg v == Rmg v')}}_{\texttt{(==) auf Regenmenge, nicht auf Float}}$

...da Temperatur und Regenmenge selbst noch keine Instanzen von Eq sind und das Relationssymbol (==) deshalb für Temperatur- und Regenmenge-Werte noch keine Bedeutung hat (abgesehen vom zweifelhaften semantischen Zusammenhang von Orts-, Temperatur- und Regenmengendaten).

Antibeispiel anhand des Typs Punkt (2)

Beachte: Folgende Instanzbildung wäre syntaktisch möglich, aber semantisch kontraintuitiv: Punkte würden durch diese Instanzbildung als

- gleich angesehen, wenn sie sich in x- oder/und y-Koordinate unterscheiden.
- ungleich angesehen, wenn sie in x- und y-Koordinate übereinstimmen.

```
instance Eq Punkt where
 (Pkt (u,v)) == (Pkt (u',v')) = (u/=u') || (v/=v')
 (Pkt (u,v)) /= (Pkt (u',v')) = (u==u') && (v==v')
```

...in der Anwendung wäre diese kontraintuitive Festlegung der Bedeutung der Relatorsymbole (==) und (/=) für Punktwerte Quelle vielfacher Programmierfehler und daher abzulehnen.

Kapitel 4.3.5

Selbstdefinierte Typklassen

Selbstdefinierte Typklassen, Wiederverwendung

...auf Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten sind Operationen zur Auswertung einzelner Ereignisse und Ereignisfolgen anwendbar.

Alle diese Funktionen haben ähnliche Funktionalität und ähnliche Namen:

- `auswertung`, `auswertung'`, `auswertung''`
- `reihenausw`, `reihenausw'`, `reihenausw''`

Es bietet sich deshalb an,

- diese Operationen in einer selbstdefinierten neuen Typklasse zu bündeln,
- so Namen einzusparen und wiederzuverwenden,
- die Verwendungsähnlichkeit der Typen für Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten auszudrücken.

Bsp. 1: Selbstdef. Typklasse Analysierbar

Wir bündeln die Auswertungsfunktionen auf Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten in der selbstdefinierten neuen Typklasse Analysierbar:

```
class (Ord a, Fractional a) => Analysierbar a where
 auswertung :: (a,a) -> (a,a,a)
 reihenausw :: [(a,a)] -> [(a,a,a)]
 geglaettet :: a -> a -> a

 reihenausw [] = []             -- Protoimplementierung
 reihenausw ((x,y) : xys)       -- für reihenausw
  = (auswertung (x,y)) : reihenausw xys
 geglaettet x y = (x+y)/2       -- Vollst. Implementierung
                                -- für geglaettet
```

Minimalvervollst. bei Instanzbildungen für Analysierbar:

- Implementierung von auswertung

Vorbereitungen

Die Instanzbildungen für `Kurs`, `Pegelstand` und `Koordinate`:

```
newtype Kurs       = K Float
                              deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Pegelstand = Pgl Float
                              deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Koordinate = Koordinate Float
                              deriving (Eq,Ord,Show)
```

für die Typklasse `Analysierbar` setzen folgende (hier als Übungsaufgabe gelassene) nicht automatisch ableitbare Instanzbildungen für die Typklasse `Num` voraus (Typ `Float` ist vordefinierte Instanz von `Num`):

```
instance Num Kurs where...  -- Vervollständigung:
instance Num Pegelstand where... -- Übungsaufgabe
instance Num Koordinate where...
```

Instanzbildungen für Typklasse Analysierbar

...für die Typen Float, Kurs, Pegelstand und Koordinate:

```
instance Analysierbar Float where
 auswertung (f1,f2) = (f1,f2,geglaettet f1 f2)

instance Analysierbar Kurs where
 auswertung (K k1,K k2)
  = (K k1,K k2,K (geglaettet k1 k2))
 geglaettet k k' = (4*k+6*k')/10     -- überschrieben!

instance Analysierbar Pegelstand where
 auswertung (Pgl p1,Pgl p2)
  = (Pgl p1,Pgl p2,Pgl (geglaettet p1 p2))

instance Analysierbar Koordinate where
 auswertung (Koordinate k1,Koordinate k2)
  = (Koordinate k1,Koordinate k2,
      Koordinate (geglaettet k1 k2))
 geglaettet k k' = k+k'              -- überschrieben!
```

Bsp. 2: Selbstdefinierte Typklasse Warnung

...die Auswertung von Wertpapier- und Wasserstandsdaten mag vorteilhafte oder gefährliche Situationen erkennen lassen, die entsprechende 'Warnungen' ermöglichen sollte.

Wir bündeln diese Funktionen in einer weiteren neuen Typklasse `Warnung`, die sich auf `Analysierbar` abstützt:

```
class (Analysierbar a) => Warnung a where
 warnung   ::  (a,a)  -> String
 warnreihe :: [(a,a)] -> String
 warnreihe xys = warnung (wr xys (0,0)) -- Proto-
  where wr [] pq = pq              -- implementierung
        wr ((x,y) : xys) (p,q) = wr xys (x+p,y+q)
```

Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen für `Warnung`:

- Implementierung von `warnung`

Instanzbildungen für Typklasse Warnung (1)

...für Typ Kurs:

```
instance Warnung Kurs where
 warnung (K k1,K k2)
  | k2 > 9*k1 = "Verkaufen! Aktie zu spekulativ."
  | k2 > 6*k1 = "Halten! Aktie an Spekulationsschwelle."
  | k2 > 3*k1 = "Zukaufen! Aktie hat Phantasie."
  | otherwise = "Verkaufen! Aktie ohne Phantasie."

 -- Für Kurs passt uns die Protoimplementierung von
 -- warnreihe, so dass nichts weiter für uns zu tun ist.
```

Instanzbildungen für Typklasse Warnung (2)

...für Typ Pegelstand:

```
instance Warnung Pegelstand where
 warnung (Pgl p1,Pgl p2)
  | p2 >= 100 = "Evakuieren! Deich kurz vor Bruch."
  | p2 >=  80 = "Achtung! Deich an Belastungsgrenze."
  | p1 <=  20 = "Sperrwerk öffnen! Pegel zu niedrig."
  | otherwise = "Pegel im Normalbereich."

 -- Für Pegelstand passt uns die Protoimplementierung von
 -- warnreihe nicht. Wir überschreiben sie daher:
 warnreihe pgs = meldung anteil
  where anzahlEreignisse = length pgs
        anzahlGefahrEreignisse
         = length [max | (Pgl min,Pgl max) <- pgs, max >= 100]
        anteil = (anzahlGefahrEreignisse * 100)
                     `div` anzahlEreignisse
        meldung n
         | n >= 30   = "Anteil Gefahrereignisse hoch"
         | n >= 10   = "Anteil Gefahrereignisse moderat"
         | otherwise = "Anteil Gefahrereignisse gering"
```

Instanzbildungen für Typklasse `Warnung` (3)

...für Typ `Koordinate`.

Für Positionsdaten als Punkte im zwei- bzw. dreidimensionalen mathematischen Raum besteht

- kein Grund

Warnungen auszugeben. Deshalb ist eine Instanzbildung von `Koordinate` für die Typklasse `Warnung` unnötig und wird

- unterlassen.

Vordefinierte Instanzen von Typklassen

Viele Typen, inbesondere

- Elementartypen (`Bool`, `Char`, `Int`,...)
- Tupel von Elementartypen
- Listen von Elementartypen (speziell Zeichenreihen)
- ...

sind bereits vordefinierte Instanzen der passenden Typklassen.

Deshalb sind wir damit ausgekommen, Instanzbildungen für

- `Kurs`, `Pegelstand` und `Koordinate` vorzunehmen.

Auf die darauf aufbauenden Tupel- und Listentypen wie `Kursausschlag`, `Kursverlauf`, etc., haben sich die Eigenschaften automatisch übertragen.

Typsicherheit bleibt gewahrt!

Beachte: Die Funktionen

- `auswertung`, `reihenausw` der Typklasse `Analysierbar` sind überladen und auf
  - Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten anwendbar.
- `warnung`, `warnreihe` der Typklasse `Warnung` sind überladen und auf
  - Wertpapier- und Wasserstandsdaten anwendbar.

Dabei gilt: Typsicherheit wird nicht korrumpiert:

- Alle Aufrufe der überladenen Funktionen erfolgen (wg. der jeweiligen Instanzbildungen) mit typspezifischem Code!

Die Typsicherheit bleibt deshalb in vollem Umfang gewahrt.

Anwendungsszenario für selbstdef. Typklassen

...statt Standardoperatoren oder -relatoren mit einer Nichtstandardbedeutung zu unterlegen wie in:

```
instance Eq Punkt where
 (Pkt (u,v)) == (Pkt (u′,v′))
   = sqrt (u*u +v*v) == sqrt (u′*u′ + v′*v′)
```

besser eine neue Typklasse einführen mit sprechend(er)en Namen:

```
class Aehnlich a where
 aehnlich :: a -> a -> Bool

instance Aehnlich Punkt where
 aehnlich (Pkt (u,v)) (Pkt (u′,v′))
   = sqrt (u*u +v*v) == sqrt (u′*u′ + v′*v′)
```

Anwendungsszenario für selbstdef. Typklassen

...eingebettet in einen größeren Kontext:

```
type X_Koord  = Float
type Y_Koord  = Float
newtype Punkt = Pkt (X_Koord,Y_Koord) deriving Eq

class Aehnlich a where              -- Jeder Typ kann Instanz
 aehnlich :: a -> a -> Bool         -- von Aehnlich werden.

instance Aehnlich Punkt where
 aehnlich (Pkt (u,v)) (Pkt (u',v'))
   = sqrt (u*u +v*v) == sqrt (u'*u' + v'*v')

class (Eq a) => Aehnlich' a where  -- Nur Eq-Instanzen können
 aehnlich' :: a -> a -> Bool       -- Inst. v. Aehnlich' werden.

instance Aehnlich' Punkt where
 aehnlich' (Pkt (u,v)) (Pkt (u',v')) = (u==u') || (v==v')
```

...wobei für `(==)`, `(/=)` die 'erwartete' Standardbedeutung für `Punkt`-Werte bewahrt wird, zugew. d. die `deriving`-Klausel.

Kapitel 4.3.6

Zusammenfassung

Haskells Philosophie zu Typen und Typklassen

...als Faustregel formuliert: Bei Einführung eines neuen Typs:

- Überlege, welche Operationen und Relationen auf Werte dieses Typs anwendbar sein sollen und möglicherweise in bereits existierenden Typklassen konzeptuell enthalten sind.
- Mache den neuen Typ zu einer Instanz all derjenigen Typklassen, zu denen diese Operationen und Relationen gehören; oft reicht dafür eine `deriving`-Klausel aus.
- Sind auf die Werte des neuen Typs Operationen und Relationen anwendbar, die noch nicht in dieser oder vergleichbarer Form in einer Typklasse gebündelt sind, so
  - führe eine neue Typklasse mit diesen Operationen und Relationen ein; ggf. zusammen mit vollständigen Implementierungen oder zu vervollständigenden Protoimplementierungen, wo passend

  wenn zu erwarten ist, dass sie konzeptuell auch für weitere erst noch zu definierende Datentypen relevant sind.

Typklassen vs. objektorientierte Klassen

Haskells Typklassenkonzept unterscheidet sich wesentlich vom Klassenkonzept objektorientierter Sprachen.

Objektorientiert: Klassen

- dienen der Strukturierung von Programmen.
- liefern Blaupausen zur Generierung von Werten.

In Haskell: Typklassen

- sind Sammlungen von Typen, deren Werte in 'ähnlicher' Weise verarbeitet werden können.
- erhalten Typen als Elemente explizit durch Instanzbildung oder implizit durch automatische Instanzbildung (`deriving`-Klausel) zugewiesen.
- dienen nicht der Strukturierung von Programmen; liefern keine Blaupausen zur Generierung von Werten.

Ausblick

...wir kommen auf

- Typdefinitionen
- Typklassen

im Zusammenhang mit

- algebraischen Datentypdeklarationen (Kap. 5)
- *Ad hoc* Polymorphie, Überladung (Kap. 11)

noch einmal zurück.

Übungsaufgabe 4.3.6.1

Vergleiche das Typklassenkonzept aus Haskell mit dem Schnittstellenkonzept aus Java.

Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede fallen auf?

Kapitel 4.4

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 4 (1)

- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 7.1, Typsynonyme mit type; Kapitel 7.2, Einfache algebraische Typen mit data und newtype; Kapitel 7.4, Automatische Instanzen von Typklassen; Kapitel 7.8, Eigene Klassen definieren)
- Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 2, Expressions, types and values; Kapitel 3, Numbers)
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 3, Types and classes; Kapitel 8, Declaring types and classes)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 4 (2)

- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 2, Believe the Type)
- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 3, Defining Types, Streamlining Functions; Kapitel 6, Using Typeclasses)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 13.4, A tour of the built-in Haskell classes)

Kapitel 5

Datentypdeklarationen

Kapitel 5.1

Überblick, Orientierung

Grundlegende Datentypstrukturen

...in Programmiersprachen sind:

- Aufzählungstypen
- Produkttypen
- Summentypen

Charakterisierung und typische Beispiele

Aufzählungstypen

- Typen mit jeweils endlich vielen Werten.

  Beispiel: Typ `Jahreszeiten` mit Werten `Fruehling`, `Sommer`, `Herbst` und `Winter`.

Produkttypen (oder Verbundtypen (engl. record types))

- Typen mit möglicherweise unendlich vielen (Tupel-) Werten.

  Beispiel: Typ `Mensch` mit Werten `(Adam,Riese,männlich)`, `(Ada,Lovelace,weiblich)`, etc.

Summentypen (oder Vereinigungstypen)

- Typen mit Werten, die sich aus der Vereinigung der Werte verschiedener Typen mit jeweils möglicherweise unendlich vielen Werten ergeben.

  Beispiel: Typ `Sammelsurium` als Vereinigung der (Werte der) Typen `Buch`, `KFZ`, `Haustier`, etc.

Bereits besprochen: Typsynonyme, neue Typen

...mittels:

- type-Deklarationen zur Definition von Typsynonymen, d.h. neue Namen für existierende Typen, Typaliase:

```
type Kurs = Float          type Pegelstand = Float          type Koordinate = Float
type Niedrigst = Kurs      type Niedrig = Pegelstand        type X = Koordinate
type Hoechst = Kurs        type Hoch = Pegelstand           type Y = Koordinate
type Kursauschlag          type Messung = (Niedrig,Hoch)    type Ebenenpunkt = (X,Y)
 = (Niedrigst,Hoechst)
```

  ...keine zusätzliche Typsicherheit; unterstützen Transparenz.

- newtype-Deklarationen zur Definition von Typidentitäten:

```
newtype Kurs = K Float     newtype Pegelstand = Pgl Float   newtype Koordinate = Koordinate Float
type Niedrigst = Kurs      type Niedrig = Pegelstand        type X = Koordinate
type Hoechst = Kurs        type Hoch = Pegelstand           type Y = Koordinate
type Kursauschlag          type Messung = (Niedrig,Hoch)    type Ebenenpunkt = (X,Y)
 = (Niedrigst,Hoechst)
```

  ...Typsicherheit durch (Datenwert-) Konstruktoren.

  Allerdings: Beschränkt auf 1 Konstruktor mit 1 (Daten-) Feld.

Neu: Algebraische Datentypen

...mittels:

- data-Deklarationen zur Definition originär neuer Typen, von Aufzählungs-, Produkt- und Summentypen.
  - Aufzählungstypen

```
data Jahreszeiten = Fruehling | Sommer
                  | Herbst | Winter
data Geschlecht   = Maennlich | Weiblich
```

  - Produkttypen

```
type Vorname  = String
type Nachname = String
data Mensch   = M Vorname Nachname Geschlecht
```

  - Summentypen

```
data Baum = Blatt Int | Wurzel Baum Int Baum
```

Damit

...Datentypdeklarationen in Haskell mittels dreier Sprachkonstrukte:

- `type` (Kap. 4.1)
- `newtype` (Kap. 4.2)
- `data` (Kap. 5.2)

Anschließend:

- Funktionen auf algebraischen Datentypen (Kap. 5.3)
- Feldsyntax für algebraische Datentypen (Kap. 5.4)
- Anwendungshinweise (Kap. 5.5)
- Literaturhinweise (Kap. 5.6)

Kapitel 5.2

Algebraische Datentypen (`data`)

Kapitel 5.2.1

Aufzählungstypen

Beispiele vordefinierter Aufzählungstypen

Typ der Ordnungswerte, 3 Werte:

```
data Ordering = LT | EQ | GT deriving (Eq,Ord,
                                        Bounded,
                                        Enum, Read,
                                        Show)
```

Typ der Wahrheitswerte, 2 Werte:

```
data Bool = False | True deriving (Eq,Ord,Bounded,
                                   Enum,Read,Show)
```

Trivialer Typ (oder Nulltupeltyp), 1 Wert:

```
data () = () deriving (Eq,Ord,Bounded,Enum,Read,
                       Show)
```

...Nulltupeltyp und einziger (def.) Wert ident bezeichnet: ().

Beispiele selbstdefinierter Aufzählungstypen

```
data Jahreszeiten = Fruehling | Sommer
                    | Herbst | Winter
                    deriving (Eq,Ord,Bounded,
                              Enum,Read,Show)

data Spielfarbe   = Karo | Herz | Pik | Kreuz
                    deriving (Eq,Ord,Bounded,
                             Enum,Read,Show)

data Werktage     = Montag | Dienstag | Mittwoch
                    | Donnerstag | Freitag
                    deriving (Eq,Ord,Bounded,
                              Enum,Read,Show)

data Wochenende   = Samstag | Sonntag
                    deriving (Eq,Ord,Bounded,
                              Enum,Read,Show)
```

Kapitel 5.2.2

Produkttypen

Beispiele selbstdefinierter Produkttypen

```
type Vornam    = String          -- Personendaten
```

Kapitel 5.2.3

Summentypen

Beispiele vordefinierter Summentypen

Listen

```
data [a] = []
         | a : [a] deriving (Eq,Ord)
                        -- Kein gültiges Haskell;
                         -- nur zur Illustration!
```

Der Möglicherweise-Typ

```
data Maybe a = Nothing
             | Just a deriving (Eq,Ord,Read,Show)
```

Der Entweder/Oder-Typ

```
data Either a b = Left a
                | Right b deriving (Eq,Ord,Read,
                                    Show)
```

Beispiele selbstdefinierter Summentypen (1)

```
type Autor            = String          -- Buch-/E-Buchdaten
type Titel            = String
type Verlag           = String
type Auflage          = Int
type Lieferbar        = Bool
type LizenzBisJahr    = Int
type Hauptdarsteller = [String]                 -- Filmdaten
type Regisseur        = String
type Sprachen         = [String]
type Kuenstler        = String        -- Musikaufnahmedaten
type Std              = Int
type Min              = Int
type Sek              = Int
type Spieldauer       = (Std,Min,Sek)

data BildSchriftUndTontraeger =
      Buch Autor Titel Verlag Auflage Lieferbar
      | E_Buch Autor Titel Verlag LizenzBisJahr
      | DVD Titel Hauptdarsteller Regisseur Sprachen
      | CD Kuenstler Titel Spieldauer deriving (Eq,Show)
```

Beispiele selbstdefinierter Summentypen (2)

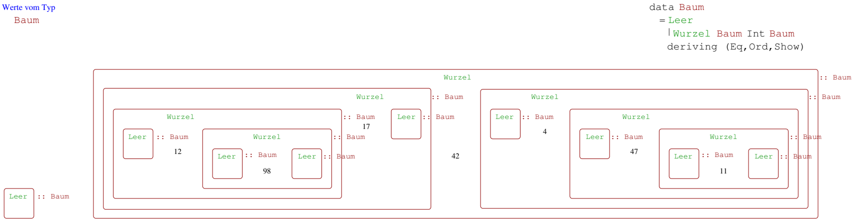
```haskell
type Autor         = String             -- Buch-/E-Buchdaten
type Titel         = String
type Verlag        = String
type Auflage       = Int
type Lieferbar     = Bool
data Kategorie     = PKW | LKW | Bus | Cabrio | SUV
                     deriving (Eq,Show)    -- Fahrzeugdaten
type Marke         = String
type Listenpreis   = Float
data Tierart       = Hund | Katze | Maus | Kanarienvogel
                     deriving (Eq,Show)    -- Haustierdaten
type Rufname       = String
type Gewicht_in_kg = Float
type Vielfrass     = Bool

data Sammelsurium =
      Buch Autor Titel Verlag Auflage Lieferbar
      | KFZ Kategorie Marke Listenpreis
      | Haustier Tierart Rufname Gewicht_in_kg Vielfrass
      deriving (Eq,Show)
```

Beispiele rekursiver Summentypen (1)

Zweistellige Bäume (oder Binärbäume)

```
data Baum = Leer
          | Wurzel Baum Int Baum
          deriving (Eq,Ord,Show)
```

Veranschaulichung: Werte vom Typ Baum:

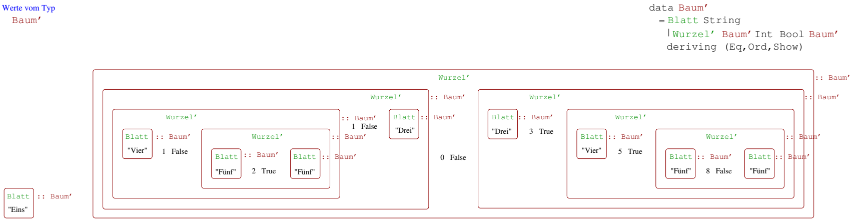


Beispiele rekursiver Summentypen (2)

Zweistellige Bäume (oder Binärbäume)

```haskell
data Baum' = Blatt String
           | Wurzel' Baum' Int Bool Baum'
           deriving (Eq,Ord,Show)
```

Veranschaulichung: Werte vom Typ Baum':

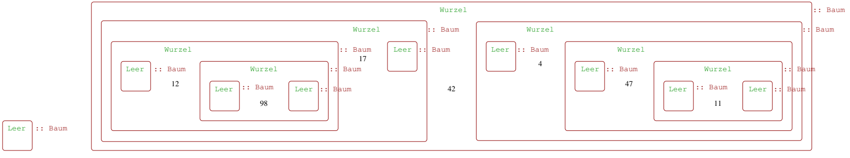


Beispiele rekursiver Summentypen (3)

Werte der Typen Baum und Baum′, zum Vergleich auf einer Seite:

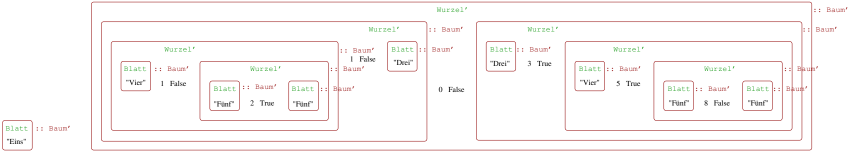
Werte vom Typ Baum

```
data Baum
  = Leer
   | Wurzel Baum Int Baum
   deriving (Eq,Ord,Show)
```



Werte vom Typ Baum′

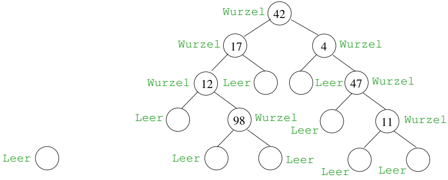
```
data Baum'
  = Blatt String
   | Wurzel' Baum' Int Bool Baum'
   deriving (Eq,Ord,Show)
```



Beispiele rekursiver Summentypen (4)

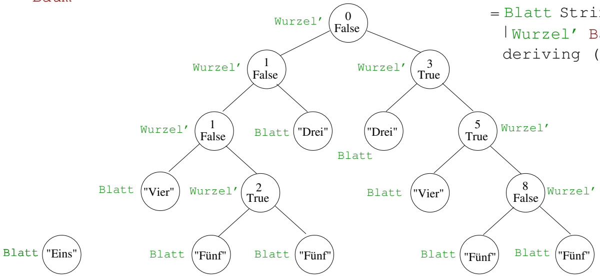
Werte d. Typen Baum und Baum′: ‘Konventionelle’ Darstellung

Zwei Werte vom Typ
Baum




```
data Baum
  = Leer
  | Wurzel Baum Int Baum
  deriving (Eq,Ord,Show)
```

Zwei Werte vom Typ
Baum′




```
data Baum'
  = Blatt String
  | Wurzel' Baum' Int Bool Baum'
  deriving (Eq,Ord,Show)
```

Beispiele rekursiver Summentypen (5)

Dreistellige Bäume (oder Trinärbäume)

```
data TBaum = Nichts
           | Gabel Person TBaum TBaum TBaum
           deriving (Eq,Ord,Show)

data TBaum' = Laub Person [Anschrift]
            | Gabel' Person [Anschrift]
                     TBaum' TBaum' Tbaum'
            deriving (Eq,Ord,Show)
```

n-stellige Bäume

```
data NBaum     = NB Int [NBaum]
                 deriving (Eq,Ord,Show)

data NBaum'    = NB' (Person,[Anschrift]) [NBaum']
                 deriving (Eq,Ord,Show)

data Nadelbaum = Nb String Int Char Baum TBaum
                    [Nadelbaum] deriving...
```

Beispiele rekursiver Summentypen (6)

Suchbäume

```
type Schluessel  = Int
type Information = String
data Suchbaum    = Sb Schluessel Information
                   | Sk Schluessel Information
                          Suchbaum Suchbaum
                   deriving (Eq,Ord,Show)
```

Beispiele rekursiver Summentypen (7)

Kartei

```
type Soz_Vers_Nr = Int
type Schluessel  = Soz_Vers_Nr
type Str         = Strasse
type Hnr         = Hausnr
type Info        = (Person,
                     (Land -> Gemeinde -> [(Str,Hnr)]))

data Kartei = Kb Schluessel Info
              | Kk Schluessel Info Kartei Kartei
              deriving (Eq,Ord,Show)
                          -- Kb für Karteiblatt.
                          -- Kk für Karteikasten.
```

Beispiele wechselw. rekursiver Summentypen

Bürgernetzwerk von Freunden und verwandten und bekannten Nachbarn

```
type Verwandt = Bool
type Bekannt  = Bool
data Wohnform = EFH | ZFH | MFH | DH | RH | HH | PH
                deriving (Eq,Show)

data Buerger  = B Person Wohnform Nachbarn Freunde
                deriving (Eq,Show)
data Nachbarn = N [(Buerger,Verwandt,Bekannt)]
                deriving (Eq,Show)
data Freunde  = F [Buerger]
                deriving (Eq,Show)
```

Kapitel 5.2.4

Allgemeines Muster

Allgemeines Muster

...algebraischer Datentypdefinitionen:

```
data Typename = Con_1 t_11 ... t_1k_1
              | Con_2 t_21 ... t_2k_2
                ...
              | Con_n t_n1 ... t_nk_n
```

Sprechweisen:

- `Typename`: Freigewählter frischer Typname
- `Con_i`: Freigewählte frische (Datenwert-) Konstruktornamen
- `k_i`: Stelligkeit des Konstruktors `Con_i`
- `t_ij`: Namen existierender Typen

Beachte: Typname und Konstruktoren müssen stets mit einem Großbuchstaben beginnen (siehe z.B. `Bool`, `True`, `False`)!

(Datenwert-) Konstruktoren

...können als Funktionsdefinitionen gelesen werden:

```
Con_i t_i1 ... t_ik_i -> Typename
```

Die Konstruktion von Werten eines algebraischen Datentyps erfolgt durch Anwendung eines Konstruktors auf Werte 'passenden' Typs:

```
v_i1 :: t_i1 ... v_ik_i :: t_ik_i
Con_i v_i1 ... v_ik_i :: Typename
```

Beispiele:

```
P "Adam" "Riese" Maennlich :: Person
A "Wien" "Karlsplatz" 13 "Austria" :: Anschrift
E_Buch "Simon Thompson" "Haskell" "Pearson" 2018
                         :: BildSchriftUndTontraeger
Haustier Katze "Garfield" 3.14 True :: Sammelsurium
```

Kapitel 5.2.5

Zusammenfassung

Art u. Anzahl der (Datenwert-) Konstruktoren

...algebraischer Datentypen liefern in Haskell den Schlüssel zu

- Aufzählungstypen
- Produkttypen
- Summentypen

Hinweis: Die Bezeichnungen Produkt- und Summentyp sind Grund in der Gesamtheit von algebraischen Datentypen zu sprechen.

Kategorisierung

Aufzählungstypen gekennzeichnet durch

- ausschließlich nullstellige Konstruktoren.

Produkttypen gekennzeichnet durch

- genau einen Konstruktor, der nicht nullstellig ist.

Summentypen gekennzeichnet durch

- mehrere Konstruktoren, von denen mindestens einer nicht nullstellig ist.

Aufzählungstypen

...gekennzeichnet durch ausschließlich 0-stellige Konstruktoren:

Beispiele:

```
data ()          = ()                -- Ein 0-st. Kon.
data Bool        = False | True      -- Zwei 0-st. Kon.
data Ordering    = LT | EQ | GT      -- Drei 0-st. Kon.
data Spielfarbe  = Karo | Herz
                   | Pik | Kreuz     -- Vier 0-st. Kon.
data Werktage    = Montag | Dienstag
                   | Mittwoch | Donnerstag
                   | Freitag         -- Fünf 0-st. Kon.
```

Wertbeispiele:

- `()` einziger (def.) Wert des Typs `()`.
- `False`, `True` einzige (def.) Werte des Typs `Bool`.
- `LT`, `EQ`, `GT` einzige (def.) Werte des Typs `Ordering`.
- ...

Produkttypen

...gekennzeichnet durch genau einen nicht 0-stelligen Konstruktor:

Beispiele:

```
data Person     = P Vorname Nachname Geschlecht
data Anschrift  = A Gemeinde Strasse Hausnr Land
data Einwohner  = E Land Gemeinde [Person]
data Wohnsitze  = W Land (Person -> [Anschrift])
data Gemeldet   = G (Land -> Gemeinde -> Strasse
                        -> Hausnr -> [Person])
```

Wertbeispiele:

```
adam = P "Adam" "Riese" Maennlich  :: Person
ada  = P "Ada" "Lovelace" Weiblich :: Person
E "Austria" "Wien" [adam,ada] :: Einwohner
W "Australia" ws :: Wohnsitze
ws = \p -> case p of
            adam -> [A "Perth" "Main St" 42 "Australia"]
            ada  -> [A "Sydney" "High St" 1 "Australia",
                     A "Adelaide" "1st Ave" 10 "Australia"]
```

Summentypen

...gekennzeichnet durch mehrere Konstruktoren, davon mindestens einer nicht 0-stellig:

Beispiele:

```
data [a]          = []            -- Kein gültiges Haskell;
                    | a : [a]      -- nur zur Illustration!
data Maybe a      = Nothing
                    | Just a
data Either a b = Left a
                    | Right b
```

Wertbeispiele:

```
[] :: []; [1,2,3] :: [Int]; [True,False,True] :: [Bool]
Nothing   :: Maybe a;    Just 42  :: Maybe Int
Just 'a'  :: Maybe Char, Just ada :: Maybe Person
Left 42   :: Either Int Char, Right 'a' :: Either Int Char
Left adam :: Either Person (Person -> [Anschrift])
Right ws  :: Either Person (Person -> [Anschrift])
```

Summentypen (fgs.)

Beispiel:

```
data BildSchriftUndTontraeger =
        Buch Autor Titel Verlag Auflage Lieferbar
        | E_Buch Autor Titel Verlag LizenzBisJahr
        | DVD Titel Hauptdarsteller Regisseur Sprachen
        | CD Kuenstler Titel Spieldauer
```

Wertbeispiele:

```
Buch "Richard Bird" "Thinking Functionally"
     "Cambridge University Press" 1 True
  :: BildSchriftUndTontraeger
E_Buch "Simon Thompson" "Haskell" "Pearson" 2018
  :: BildSchriftUndTontraeger
DVD "Der Pate" ["Marlon Brando","Al Pacino"]
    "Francis Ford Coppola" ["Englisch","Deutsch","Italienisch"]
  :: BildSchriftUndTontraeger
CD "Angelika Nebel" "Klaviersonaten" (1,1,48)
  :: BildSchriftUndTontraeger
```

Summentypen (fgs.)

Beispiel:

```
data Baum = Leer
          | Wurzel Baum Int Baum
          deriving (Eq,Ord,Show)

data TBaum' = Laub Person [Anschrift]
            | Gabel' Person [Anschrift]
                     TBaum' TBaum' Tbaum'
```

Wertbeispiele:

```
Leer :: Baum
Wurzel Leer 42 Leer :: Baum
Wurzel (Wurzel Leer 17 Leer) 42 Leer :: Baum

adrs = [A "Sydney" "High St" 1 "Australia",
        A "Adelaide" "1st Ave" 10 "Australia"] :: [Anschrift]
t1 = Laub ada adrs :: TBaum'
t2 = Laub adam [A "Perth" "Main St" 42 "Australia"] :: TBaum'
t3 = Gabel' (P "Haskell" "Curry" Maennlich) [] t1 t2 t1 :: TBaum'
t4 = Gabel' ada adrs t2 t3 t4 :: TBaum'      -- nicht endlich!
```

Zusammenfassung

...mit `data` ein einheitliches Sprachkonstrukt in Haskell für

- Aufzählungstypen, Produkttypen, Summentypen als Ausprägungen algebraischer Datentypen.
- oft unterschiedliche Sprachkonstrukte in anderen Sprachen, z.B. drei in Pascal (siehe Anhang D).

Aufzählungs- und Produkttypen auffassbar als

- Randfall oder Spezialfall von Summentypen.

Algebraische Datentypdeklarationen können

- rekursiv (z.B. `Baum`, `TBaum'`) und wechselweise rekursiv (z.B. `Buerger`, `Nachbarn`) aufeinander Bezug nehmen.
- rekursive Typen ermöglichen es, Werte potentiell nicht beschränkter Größe (z.B. `t4 :: TBaum'`) zu konstruieren.

Kapitel 5.3

Funktionen auf algebraischen Datentypen

Funktionen auf algebraischen Datentypen

...werden üblicherweise mittels Musterpassung (engl. pattern matching) definiert.

In der Folge betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel einer Funktion

...auf BildSchriftUndTonTraeger-Daten, die Selektorfunktion titel:

```
titel :: BildSchriftUndTonTraeger -> Titel
titel (Buch   aut tit verl aufl lieferb) = tit
titel (E_Buch aut tit verl lizenz)       = tit
titel (DVD t _ _ _) = t
titel (CD  _ t _)   = t
```

```
titel (Buch "Richard Bird" "Thinking Functionally"
     "Cambridge University Press" 1 True)
 ->> "Thinking Functionally" :: Titel
```

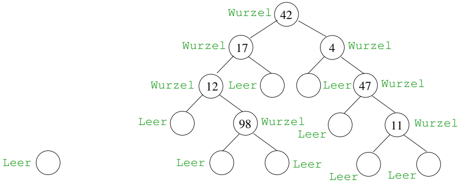
Aufrufbeispiele:

```
titel (E_Buch "Simon Thompson" "Haskell" "Pearson" 2018)
 ->> "Haskell" :: Titel
titel (DVD "Der Pate" ["Marlon Brando","Al Pacino"]
    "Francis Ford Coppola" ["Englisch","Deutsch","Italienisch"])
 ->> "Der Pate" :: Titel
titel (CD "Angelika Nebel" "Klaviersonaten" (1,1,48))
 ->> "Klaviersonaten" :: Titel
```

Binärbaumwerte: Konventionelle Darstellung

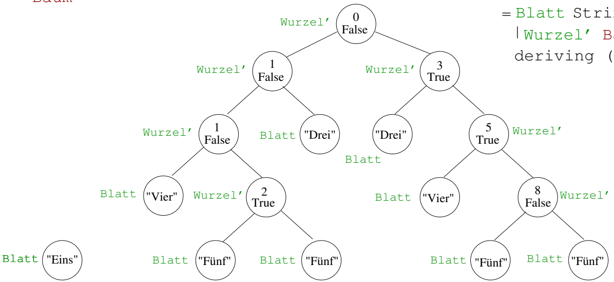
Erinnerung:

Zwei Werte vom Typ
Baum




```
data Baum
  = Leer
  | Wurzel Baum Int Baum
  deriving (Eq,Ord,Show)
```

Zwei Werte vom Typ
Baum'




```
data Baum'
  = Blatt String
  | Wurzel' Baum' Int Bool Baum'
  deriving (Eq,Ord,Show)
```

Beispiele für Funktionen auf Binärbäumen

...die Summenfkt. `summeMarken` und die Tiefenfkt. `tiefe`:

```
summeMarken :: Baum -> Int
summeMarken Leer = 0
summeMarken (Wurzel ltb n rtb)
     = n + summeMarken ltb + summeMarken rtb

tiefe :: Baum' -> Int
tiefe (Blatt _) = 1
tiefe (Wurzel' ltb _ _ rtb)
    = 1 + max (tiefe ltb) (tiefe rtb)
```

Aufrufbeispiele:

```
summeMarken Leer ->>  0
summeMarken (Wurzel Leer 2 (Wurzel Leer 3 Leer)) ->> 5
tiefe (Blatt "Fun")  ->> 1
tiefe (Wurzel' (Blatt "Fun") 4 False
       (Wurzel' (Blatt "Prog") 11 True (Blatt ""))) ->> 3
```

Beispiele von Funktionen auf

...Bürgernetzwerkdaten, die Funktionen verwandteNachbarn und verwandteNachbarnNamen:

```
type Verwandt = Bool
type Bekannt  = Bool
data Wohnform = EFH | ZFH | MFH | DH | RH | HH | PH
                deriving (Eq,Ord,Show)

data Buerger  = B Person Wohnform Nachbarn Freunde
                deriving (Eq,Ord,Show)
data Nachbarn = N [(Buerger,Verwandt,Bekannt)]
                deriving (Eq,Ord,Show)
data Freunde  = F [Buerger]
                deriving (Eq,Ord,Show)

verwandteNachbarn :: Buerger -> [Person]
verwandteNachbarn (B _ _ (N ls) _)
 = [p | (B p _ _ _,verwandt,_) <- ls, verwandt == True]

verwandteNachbarnNamen :: Buerger -> [(Nachname,Vorname)]
verwandteNachbarnNamen (B _ _ (N ls) _)
 = [(nn,vn) | (B (P vn nn _) _ _ _,vw,_) <- ls, vw == True]
```

Kapitel 5.4

Feldsyntax

Transparente, sprechende Typdeklarationen

...drei Möglichkeiten bieten sich an, transparente und sprechende Datentypdeklarationen in Haskell zu erreichen:

- Kommentierung
- Typsynonyme
- Feldsyntax (Verbundtypsyntax)

  ...mit dem Zusatzvorteil

  - 'geschenkter' Selektorfunktionen
  - wesentlich vereinfachter weiterer Verarbeitungsfkt.

Transparente, sprechende Typdeklarationen

...mittels Kommentierung:

```
newtype Gb        = Gb (String,String,String)
                       deriving (Eq,Ord,Show)
data G            = M | W deriving (Eq,Ord,Show)

data Meldedaten = Md String   -- Vorname
                     String   -- Nachname
                     Gb       -- Geboren (tt,mm,jjjj)
                     G        -- Geschlecht (m/w)
                     String   -- Gemeinde
                     String   -- Strasse
                     Int      -- Hausnummer
                     Int      -- PLZ
                     String   -- Land
                   deriving (Eq,Ord,Show)
```

Transparente, sprechende Typdeklarationen

...mittels Typsynonymen:

```
type Vorname       = String
type Nachname      = String
type Ziffernfolge  = String
type Zf            = Ziffernfolge
newtype Gb         = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)
type Geboren       = Gb
data G             = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
type Geschlecht    = G
type Gemeinde      = String
type Strasse       = String
type Hausnummer    = Int
type PLZ           = Int
type Land          = String

data Meldedaten    = Md Vorname Nachname Geboren
                        Geschlecht Gemeinde Strasse
                        Hausnummer PLZ Land deriving (Eq,Ord,Show)
```

Transparente, sprechende Typdeklarationen

...mittels Feldsyntax (oder Verbundtypsyntax):

```
type Ziffernfolge   = String
type Zf             = Ziffernfolge
data G              = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Gb          = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)

data Meldedaten     = Md { vorname    :: String,
                           nachname   :: String,
                           geboren    :: Gb
                           geschlecht :: G,
                           gemeinde   :: String,
                           strasse    :: String,
                           hausnummer :: Int,
                           plz        :: Int,
                           land       :: String
                         } deriving (Eq,Ord,Show)
```

Transparente, sprechende Typdeklarationen

...typgleiche Felder können in der Feldsyntax durch Beistrich getrennt zusammengefasst werden:

```
type Ziffernfolge = String
type Zf           = Ziffernfolge
data G            = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Gb        = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)

data PersDaten = PD { vorname,
                      nachname,
                      gemeinde,
                      strasse,
                      land         :: String,
                      geboren      :: Gb,
                      geschlecht   :: G,
                      hausnummer,
                      plz          :: Int
                    } deriving (Eq,Ord,Show)
```

Transparente, sprechende Typdeklarationen

...Feldnamen in Alternativen dürfen wiederholt werden, wenn ihr Typ für alle Vorkommen ident ist:

```
type Ziffernfolge = String
type Zf           = Ziffernfolge
data G            = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Gb        = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)

data Meldedaten   = Md { vorname,
                         nachname,
                         gemeinde,
                         strasse,
                         land          :: String,
                         geboren       :: Gb
                         geschlecht    :: G,
                         hausnummer,
                         plz           :: Int
                       }
                  | KurzMd { vorname,
                             nachname :: String
                           } deriving (Eq,Ord,Show)
```

Transparente, sprechende Typdeklarationen

...mittels Kommentar, Typsynonymen und Feldsyntax:

```
type Vorname      = String
type Nachname     = String
type Ziffernfolge = String
type Zf           = Ziffernfolge
newtype Gb        = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)
type Geboren      = Gb
data G            = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
type Geschlecht   = G
type Gemeinde     = String
type Strasse      = String
type Hausnummer   = Int
type PLZ          = Int
type Land         = String
```

```
data Meldedaten = Md { vorname    :: Vorname,
                       nachname   :: Nachname,
                       geboren    :: Geboren, -- (tt,mm,jjjj)
                       geschlecht :: Geschlecht,
                       gemeinde   :: Gemeinde,
                       strasse    :: Strasse,
                       hausnummer :: Hausnummer,
                       plz        :: PLZ,
                       land       :: Land
                     } deriving (Eq,Ord,Show)
```

Selektorfunktionen

...über Kommentierung bzw. Typsynonyme definierte Typen erfordern üblicherweise musterbasiert-definierte Selektor-, Wertsetzungs- und Werterzeugungsfunktionen:

```
gibVorname :: Meldedaten -> Vorname
gibVorname (Md vn _ _ _ _ _ _ _ _)  = vn

gibNachname :: Meldedaten -> Nachname
gibNachname (Md _ nn _ _ _ _ _ _ _) = nn

...

gibPLZ :: Meldedaten -> PLZ
gibPLZ (Md _ _ _ _ _ _ _ plz _) = hsnr

gibLand :: Meldedaten -> Land
gibLand (Md _ _ _ _ _ _ _ _ land)   = land
```

...für Meldedaten sind auf diese Weise 9 Selektorfunktionen separat zu schreiben.

Wertsetzungsfunktionen

...in gleicher Weise gilt dies für Wertsetzungsfunktionen:

```
setzeVorname :: Vorname -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeVorname vn (Md _ nn geb gs gem str hsnr plz land)
 = Md vn nn geb gs gem str hsnr plz land

setzeNachname :: Nachname -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeNachname nn (Md vn _ geb gs gem str hsnr plz land)
 = Md vn nn geb gs gem str hsnr plz land

...

setzePLZ :: PLZ -> Meldedaten -> Meldedaten
setzePLZ plz (Md vn nn geb gs gem str hsnr _ land)
 = Md vn nn geb gs gem str hsnr plz land

setzeLand :: Land -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeLand land (Md vn nn geb gs gem str hsnr plz _)
 = Md vn nn geb gs gem str hsnr plz land
```

...9 Wertsetzungsfunktionen für Meldedaten.

Werterzeugungsfunktionen

...ebenso für Werterzeugungsfunktionen:

```
undefiniert = undefiniert -- Auswertung terminiert nicht!

erzeugeMdMitVorname :: Vorname -> Meldedaten
erzeugeMdMitVorname vorname
 = Md vorname undefiniert undefiniert undefiniert
      undefiniert undefiniert undefiniert undefiniert
      undefiniert

...

erzeugeMdMitLand :: Land -> Meldedaten
erzeugeMdMitVorname land
 = Md undefiniert undefiniert undefiniert undefiniert
      undefiniert undefiniert undefiniert undefiniert
      land)
```

...9 Werterzeugungsfunktionen für Meldedaten.

Selektorfunktionen bei Feldnamenverwendung

...die Selektorfunktionen sind durch die Feldnamen gegeben und damit 'geschenkt':

```
gibVorname :: Meldedaten -> Vorname
gibVorname = vorname

gibNachname :: Meldedaten -> Nachname
gibNachname = nachname

...

gibPLZ :: Meldedaten -> PLZ
gibPLZ = plz

gibLand :: Meldedaten -> Land
gibLand = land
```

Anmerkung: Die Funktionen `gibVorname`, `gibNachname`, etc., sind *de facto* nur Synonyme bzw. Aliase der Feldnamen `vorname`, `nachname`, etc.; ihre Einführung deshalb im Grunde obsolet.

Wertsetzungsfkt. bei Feldnamenverwendung

...Feldnamen erlauben eine wesentlich knappere Schreibweise der Wertsetzungsfunktionen:

```
setzeVorname :: Vorname -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeVorname vn md = md {vorname = vn}

setzeNachname :: Nachname -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeNachname nn md = md {nachname = nn}

...

setzePLZ :: PLZ -> Meldedaten -> Meldedaten
setzePLZ p md = md {plz = p}

setzeLand :: Land -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeLand ld md = md {land = ld}
```

Werterzeugungsfkt. bei Feldnamenverwendung

...dies gilt vergleichbar auch für Werterzeugungsfunktionen:

```
erzeugeMdMitVorname :: Vorname -> Meldedaten
erzeugeMdMitVorname vn = Md {vorname = vn}

erzeugeMdMitNachname :: Nachname -> Meldedaten
erzeugeMdMitNachname nn = Md {nachname = nn}

...

erzeugeMdMitPLZ :: PLZ -> Meldedaten
erzeugeMdMitPLZ p = Md {plz = p}

erzeugeMdMitLand :: Land -> Meldedaten
erzeugeMdMitLand ld = Md {land = ld}
```

...nicht genannte Felder werden automatisch*) 'undefiniert' gesetzt.

*) Sprachimplementierungsabhängig: 'Gute' Übersetzer und Interpretierer sollten das jedenfalls tun.

Setzen oder initialisieren mehrerer Felder

...auch mehrere Felder können gesetzt werden:

```
setzeVorundNachname :: Vorname -> Nachname
                       -> Meldedaten -> Meldedaten
setzeVorundNachname vn nn md
 = md {vorname=vn, nachname=nn}
            -- Nicht genannte Felder behalten ihren Wert.
...

erzeugeMdMitVorundNachname :: Vorname -> Nachname
                              -> Meldedaten
erzeugeMdMitVorundNachname vn nn
 = Md {vorname=vn, nachname=nn}
    -- Nicht genannte Felder werden ‘undefiniert’ gesetzt.
```

Weitere Beispiele von Feldnamenverwendungen

...liefere Vor- und Nachnamen, getrennt durch ein Leerzeichen:

```
gibVollerName :: Meldedaten -> String
gibVollerName md
  = vorname md ++ " " ++ nachname md
```

```
gibVollerName' :: Meldedaten -> String
gibVollerName' (Md {vorname = vn, nachname = nn})
  = vn ++ " " ++ nn
```

Gleichwertig ohne Feldnamenverwendung:

```
gibVollerName'' :: Meldedaten -> String
gibVollerName'' (Md vn nn _ _ _ _ _ _ _)
  = vn ++ " " ++ nn
```

doch weniger bequem, da

- die Zahl der Unterstriche exakt stimmen muss.
- änderungsaufwändig bei Hinzu-/Wegnahme von Feldkomponenten (alle Aufrufstellen müssen angepasst werden!)

Ausblick

...in Kapitel 10 werden wir über

- monomorphe (Daten-) Typen und Funktionen

hinausgehend

- polymorphe (Daten-) Typen

und

- polymorphe und überladene Operationen und Funktionen

besprechen.

Kapitel 5.5

Anwendungshinweise

Kapitel 5.5.1

Produkttypen vs. Tupeltypen

Produkttypen vs. Tupeltypen

...am Beispiel des Typs Person als Produkt- und als Tupeltyp:

Produkttyp

```
data Person = P Vorname Nachname Geschlecht
  -- Produkttyp im engeren Sinn: Konstruktor P mehrstellig
data Person = P (Vorname,Nachname,Geschlecht)
  -- Produkttyp im weiteren Sinn: Konstruktor P einstellig
newtype Person = P (Vorname,Nachname,Geschlecht)
   -- Kein Produkttyp im strengen Sinn: newtype statt data
```

Tupeltyp

```
type Person = (Vorname, Nachname, Geschlecht)
```

Offensichtlicher Unterschied: Kein Konstruktor im Tupeltyp von Person wie im entsprechenden Produkttyp, hier P.

Vorteile von Produkt- gegenüber Tupeltypen

...zusammengefasst in einem Wort: Typsicherheit.

- Werte des Produkttyps sind typgesichert, da sie mit dem mit dem Konstruktor 'markiert' sind.
- 'Zufällig' passende Werte sind deshalb nicht irrtümlich, versehentlich oder absichtlich als Wert des Produkttyps manipulierbar: Typsicherheit! (Vgl. frühere Beispiele zu Wertpapier-, Wasserstands- und Positionsdaten).
- Aussagekräftigere (Typ-) Fehlermeldungen; Typsynonyme können wg. Expansion in Fehlermeldungen fehlen.

Vorteile von Tupel- gegenüber Produkttypen

...zusammengefasst in einem Wort: Anwendungskomfort.

- Auf den Grundtypen (von Typsynonymen) und Tupeln vordefinierte Funktionen stehen ohne Einschränkung zur Verfügung (z.B. `fst, snd, (+), (*),...`).
- Tupelwerte erfordern keine Konstruktoren und sind deshalb (geringfügig) kompakter (weniger Schreibaufwand für den Programmquelltext).
- (Geringfügig) höhere Ausführungsperformanz, da 'ein-' und 'auspacken' von Tupelwerten entfällt.

  Hinweis: Bei einstelligen Produkttypen ist statt einer `data`- auch eine `newtype`-Deklaration möglich; hier kein Effizienzverlust, da der Konstruktor nur zur Übersetzungszeit für die Überprüfung der Typkorrektheit benötigt wird.

Beispiel: Telefonbuch

...mittels type-Deklarationen ausschließlich:

```
type Vorname     = String
type Nachname    = String
type Spitzname   = String
type Name        = (Vorname,Nachname)
type Telefonnr   = Int
type Telefonbuch = [(Name,Telefonnr)]

gibTelnr :: Name -> Telefonbuch -> Telefonnr
gibTelnr name ((name',tnr):tb_rest)
 | name == name' = tnr
 | otherwise     = gibTelnr name tb_rest
gibTelnr _ []    = error "Telefonnummer unbekannt"

gibSpitzname :: Telefonnr -> Telefonbuch -> Spitzname
gibSpitzname tnr (((vn,_),tnr'):tb_rest)
 | tnr == tnr'    = vn++"ilein"
 | otherwise      = gibSpitzname tnr tb_rest
gibSpitzname _ [] = error "Spitzname unbekannt"
```

Beispiel: Telefonbuch

...mittels newtype-Deklarationen ausschließlich:

```
newtype Vorname     = Vn String deriving (Eq,Show)
newtype Nachname    = Nn String deriving (Eq,Show)
newtype Spitzname   = Sn String deriving (Eq,Show)
newtype Name        = N (Vorname,Nachname) deriving (Eq,Show)
newtype Telefonnr   = T Int deriving (Eq,Show)
newtype Telefonbuch = Tb [(Name,Telefonnr)] deriving (Eq,Show)

gibTelnr :: Name -> Telefonbuch -> Telefonnr
gibTelnr (N name) (Tb ((N name',T tnr):tb_rest))
 | name == name'    = T tnr
 | otherwise        = gibTelnr (N name) (Tb tb_rest)
gibTelnr _ (Tb []) = error "Telefonnummer unbekannt"

gibSpitzname :: Telefonnr -> Telefonbuch -> Spitzname
gibSpitzname (T tnr) (Tb ((N (Vn vn,_),T tnr'):tb_rest))
 | tnr == tnr'          = Sn (vn++"ilein")
 | otherwise            = gibSpitzname (T tnr) (Tb tb_rest)
gibSpitzname _ (Tb []) = error "Spitzname unbekannt"
```

Vergleich der `type`- und `newtype`-Varianten

`type`-Deklarationen:

- Die 'eigentlichen' Werte (der Typen `String`, `Int`) liegen frei zutage und können direkt in Mustern bezeichnet werden.
- Ergebnisse können unmittelbar zurückgegeben werden.

`newtype`-Deklarationen:

- Typkonstruktoren (`Vn`, `Nn`, `Sn`, `N`, `T`, `Tb`) sind integraler Bestandteil von Werten und müssen deshalb explizit in Argumentmustern angegeben werden, um die 'eigentlichen' Werte (der Typen `String`, `Int`) freizulegen und bezeichnen zu können.
- Bei der Rückgabe von Ergebnissen muss der 'eigentliche' Wert (der Typen `String`, `Int`) in den passenden Konstruktor 'eingepackt' werden (in `gibTelnr`: '`T tnr`' statt '`tnr`'; in `gibSpitzname`: '`Sn vn++"ilein"`' statt '`vn++"ilein"`').

Kapitel 5.5.2

Typsynonyme vs. neue Typen

Eigenschaften von `newtype`-Deklarationen

`newtype`-Deklarationen entsprechen im Hinblick auf

- Typsicherheit `data`-Deklarationen:
  Datenwerte liegen geschützt und markiert hinter `newtype`-Datenkonstruktoren.
- Performanz `type`-Deklarationen:
  `newtype`-Datenkonstruktoren werden ausschließlich zur Übersetzungszeit für die Typprüfung benötigt; nicht zur Laufzeit.

`newtype`-Deklarationen vereinen somit die

- besten Eigenschaften von `data`- und `type`-Deklarationen.

Aber: Typsicherheit ohne Zusatzaufwand zur Laufzeit hat einen Preis!

Beschränkungen von newtype-Deklarationen

newtype-Deklarationen sind beschränkt auf Deklarationen mit

- genau einem (Datenwert-) Konstruktor mit genau einem (Daten-) Feld ('there is no free lunch!').

Beispiele:

```
                                 1 Feld
newtype Person = P (Vorname, Nachname, Geboren)
     1 1-stelliger Konstruktor          -- Zulässig!
```

```
                              3 Felder
newtype Person = P Vorname Nachname Geboren
     1 3-stelliger Konstruktor -- Nicht zulässig!
```

Kapitel 5.5.3

Faustregel zur Wahl von `type`, `newtype`, `data`

Faustregel zur Wahl von `type`-Deklarationen

`type`-Deklarationen führen einen

- neuen Namen für einen existierenden Typ ein.

Sind sinnvoll, wenn

- durch ‘sprechendere’ Typnamen die Transparenz und Verständlichkeit von Signaturen erhöht werden soll.
- auf den Komfort, die auf dem Grundtyp definierten Funktionen weiterzubenutzen, nicht verzichtet werden soll.

Allerdings:

- Keine höhere Typsicherheit.

Faustregel z. Wahl v. `newtype`-Deklarationen

`newtype`-Deklarationen führen einen

- neuen Typ für einen existierenden Typ ein.

Sind sinnvoll, wenn

- zusätzlich zu 'sprechenderen' Typnamen auch Typsicherheit erreicht werden soll.
- 'Erhöhte' Laufzeitkosten algebraischer Typen vermieden werden sollen (und `newtype` anwendbar ist (s.u.)).
- Typen zu Instanzen von Typklassen gemacht werden sollen (siehe Kap. 4.3 und Kap. 11.4).

Allerdings:

- Eingeschränkte Anwendungsmöglichkeit. Nur möglich für Typen mit genau einem Datenwertkonstruktor und genau einem Datenfeld.

Faustregel zur Wahl von data-Deklarationen

data-Deklarationen erlauben in freier Weise

- neue Typen zu kreieren.

Sind sinnvoll (bzw. nötig), wenn

- Typsicherheit benötigt wird.
- eine newtype-Deklaration ausscheidet, weil ein neuer bislang nicht existierender Typ mit mehr als einem Konstruktor oder mehr als einem Datenfeld benötigt wird.

Allerdings:

- Leicht erhöhte Verarbeitungskosten gegenüber newtype-Deklarationen durch Konstruktorbehandlung nicht nur zur Übersetzungs-, sondern auch zur Laufzeit.

Summa summarum

`type`- vs. `newtype`- und `data`-Deklarationen:

...`type`-Deklarationen

- wo 'angemessen' und 'ausreichend', zusätzliche Typsicherheit nicht erforderlich ist.
- `newtype`- und `data`-Deklarationen, wo zusätzliche Typsicherheit nötig und unverzichtbar ist.

`newtype`- vs. `data`-Deklarationen:

...`newtype`-Deklarationen

- wo möglich; `data`-Deklarationen, wo nötig.

Kapitel 5.6

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 5 (1)

- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 7, Eigene Typen und Typklassen definieren)
- Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 8, Benutzerdefinierte Datentypen)
- Ernst-Erich Doberkat. *Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte*. Oldenbourg Verlag, 2012. (Kapitel 4, Algebraische Datentypen)
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 8.1, Type declarations; Kapitel 8.2, Data declarations; Kapitel 8.3, Newtype declarations; Kapitel 8.4, Recursive types)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 5 (2)

- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 7, Making our own Types and Type Classes; Kapitel 12, Monoids – Wrapping an Existing Type into a New Type)
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 12, Konstruktion von Datenstrukturen)
- Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung: Sprachdesign und Programmiertechnik*. Springer-V., 2006. (Kapitel 6, Typen; Kapitel 8, Polymorphe und abhängige Typen; Kapitel 9, Spezifikationen und Typklassen)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 5 (3)

- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 2, Types and Functions; Kapitel 3, Defining Types, Streamlining Functions – Defining a New Data Type, Type Synonyms, Algebraic Data Types)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 14, Algebraic types)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 14, Algebraic types)

Kapitel 6

Muster und mehr

Muster und mehr

Muster, Musterpassung (Kap. 6.1)

- Elementare Datentypen
- Tupeltypen
- Listentypen
  - `[]`-Muster
  - `(p:ps)`-Muster, `(p:(q:qs))`-Muster, etc.
  - als-Muster (engl. as pattern)
- Algebraische Datentypen

Listenkomprehension (Kap. 6.2)

Konstruktoren, Operatoren (Kap. 6.3)

- Begriffsbestimmung und Vergleich am Beispiel von Listen

Kapitel 6.1

Muster, Musterpassung

Muster, Musterpassung

Muster sind

- (syntaktische) Ausdrücke zur Beschreibung der Struktur von Werten.

Musterpassung (engl. pattern matching) erlaubt

- in Funktionsdefinitionen mithilfe einer Folge von Mustern Alternativen auszuwählen. Dabei werden die Muster in einer festen Reihenfolge (von oben nach unten) durchprobiert; passt die Struktur eines (Argument-) Werts auf ein Muster, wird diese Alternative ausgewählt.

Kapitel 6.1.1

Muster für Werte elementarer Datentypen

Muster für Werte elementarer Datentypen (1)

...am Beispiel von Funktionen auf Wahrheitswerten:

Konstanten und Joker als Muster:

```
nicht :: Bool -> Bool
nicht True  = False
nicht _     = True

und :: Bool -> Bool -> Bool
und True True = True
und _ _       = False

oder :: Bool -> Bool -> Bool
oder False False = False
oder _ _         = True
```

Muster für Werte elementarer Datentypen (2)

Konstanten, Variablen und Joker als Muster:

```
nund :: Bool -> Bool -> Bool
nund True True = False
nund _ _       = True

noder :: Bool -> Bool -> Bool
noder False False = True
noder _ _         = False

xoder :: Bool -> Bool -> Bool
xoder a b = a /= b

wennDannSonst :: Bool -> a -> a -> a
wennDannSonst True  t _ = t
wennDannSonst False _ e = e
```

Muster für Werte elementarer Datentypen (3)

...am Beispiel von Funktionen auf ganzen Zahlen:

Konstanten, Variablen und Joker als Muster:

```
mult :: Int -> Int -> Int
mult _ 0 = 0
mult 0 _ = 0
mult m 1 = m
mult 1 n = n
mult m n = m * n
```

```
potenz :: Integer -> Integer -> Integer
potenz _ 0 = 1
potenz m n = m * potenz m (n-1)
```

Zusammenfassung

Muster für Werte elementarer Datentypen sind:

- Konstanten: `0`, `42`, `3.14`, `'c'`, `True`,...
  $\rightsquigarrow$ ein Wert passt auf das Muster, wenn es eine Konstante vom entsprechenden Wert ist.
- Variablen: `b`, `m`, `n`, `t`, `e`,...
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (und ist rechtsseitig verwendbar).
- Joker (eng. wild card): `_`
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (aber ist rechtsseitig nicht verwendbar).

Kapitel 6.1.2

Muster für Werte von Tupeltypen

Muster für Werte von Tupeltypen

...am Beispiel von polymorphen Funktionen und Funktionen auf ganzen Zahlen:

Konstanten, Variablen und Joker als Muster:

```
fst' :: (a,b,c) -> a
fst' (x,_,_) = x

snd' :: (a,b,c) -> b
snd' (_,y,_) = y

thd' :: (a,b,c) -> c
thd' (_,_,z) = z

binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k)
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise    = binom' (n-1,k-1) + binom'(n-1,k)
```

Zusammenfassung

Muster für Werte von Tupeltypen sind:

- Konstanten: `(0,0)`, `(0,"Null")`, `(3.14,"pi",True)`,...
  ⇝ ein Wert passt auf das Muster, wenn es eine Konstante vom entsprechenden Wert ist.
- Variablen: `t`, `t1`,...
  ⇝ jeder Wert passt (und ist rechtsseitig verwendbar).
- Joker (eng. wild card): `_`
  ⇝ jeder Wert passt (aber ist rechtsseitig nicht verwendbar).
- Kombinationen aus Konstanten, Variablen, Jokern:
  `(m,n)`, `(True,n,_)`, `(_,(m,_,n),3.14,k,_)`,...
  ⇝ ein Wert passt, wenn er strukturell mit dem Muster übereinstimmt.

Kapitel 6.1.3

Muster für Werte von Listentypen

Muster für Werte von Listentypen (1)

Konstanten als Muster; Konstruktormuster mit Konstanten, Variablen und Jokern:

```
sum :: [Int] -> Int
sum []      = 0
sum (0:xs) = sum xs
sum (x:xs) = x + sum xs

mult :: [Int] -> Int
mult []     = 1
mult (0:_)  = 0
mult (1:xs) = mult xs
mult (x:xs) = x * mult xs
```

Muster für Werte von Listentypen (2)

Konstanten, Variablen und Joker als Muster; Konstruktormuster mit Jokern:

```
kopf :: [a] -> a
kopf (x:_)  =  x

rest :: [a] -> [a]
rest (_:xs) = xs

leer :: [a] -> Bool
leer []     = True
leer _      = False

verbinde :: [a] -> [a] -> [a] -> [a]
verbinde ps qs rs = ps ++ qs ++ rs
```

Muster für Werte von Listentypen (3)

Konstanten und Joker als Muster; Konstruktormuster mit Variablen und Jokern:

```
nimm :: Int -> [a] -> [a]   -- entspricht vordef.
nimm m ys = case (m,ys) of             -- Fkt. take
             (0,_)       -> []
             (_,[])      -> []
             (n,(x:xs)) -> x : nimm (n - 1) xs

streiche :: Int -> [a] -> [a] -- entspricht vordef.
streiche m ys = case (m,ys) of         -- Fkt. drop
             (0,_)       -> ys
             (_,[])      -> []
             (n,(_:xs)) -> streiche (n - 1) xs
```

Muster für Werte von Listentypen (4)

Konstruktormuster erlauben auch, 'endlich tief' in eine Liste hineinzusehen:

```
maxElem :: Ord a => [a] -> a
maxElem []          = error "Ungueltige Eingabe"
maxElem (y:[])      = y
maxElem (x:y:ys)    = maxElem ((max x y) : ys)

length' :: [a] -> Int
length' [] = 0
length' (u:v:w:x:y:z:zs) = 6 + length' zs
length' (v:w:x:y:z:zs) = 5 + length' zs
length' (w:x:y:z:zs) = 4 + length' zs
length' (x:y:z:zs) = 3 + length' zs
length' (y:z:zs) = 2 + length' zs
length' _ = 1
```

Muster für Werte von Listentypen (5)

Konstanten, Variablen und Joker als Muster für Zeichenreihenwerte; Konstruktormuster mit Variablen für Zeichenreihen:

```
anfuegen :: String -> String -> String
anfuegen "" t = t
anfuegen s "" = s
anfuegen s t  = s ++ t

istPrefix :: String -> String -> Bool
istPrefix "" _          = True
istPrefix (c:_) ""      = False
istPrefix (c:cs) (d:ds) = (c==d) && istPrefix cs ds
```

Zusammenfassung (1)

Muster für Werte von Listentypen, speziell Zeichenreihen, sind:

- Konstanten: `[]`, `""`, `[1,2,3]`, `[1..50]`, `['a'..'z']`, `[True,False,True,True]`, `"aeiou"`,...
  $\rightsquigarrow$ ein Wert passt auf das Muster, wenn es eine Konstante vom entsprechenden Wert ist.
- Variablen: `p`, `q`, `ps`, `qs`...
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (und ist rechtsseitig verwendbar).
- Joker (eng. wild card): `_`
  $\rightsquigarrow$ jeder Wert passt (aber ist rechtsseitig nicht verwendbar).

Zusammenfassung (2)

- Konstruktormuster:
  `(⟨muster_listenkopf⟩:⟨muster_listenrest⟩)`,
  `(p:ps)`, `(p:q:qs)`,...
  ⇝ ein Listenwert *ls* passt auf das Konstruktormuster `(⟨muster_listenkopf⟩:⟨muster_listenrest⟩)`, wenn `⟨muster_listenkopf⟩` und `⟨muster_listenrest⟩` gültige Musterausdrücke für Listenköpfe und Listenreste sind, *ls* nicht leer ist, der Kopf von *ls* strukturell mit `⟨muster_listenkopf⟩` übereinstimmt und der Rest von *ls* mit `⟨muster_listenrest⟩`.

  ls passt strukturell auf das Konstruktormuster `(p:ps)` bzw. `(p:q:qs)` mit `p`, `ps`, `q`, `qs` Variablenmuster, wenn *ls* nicht leer ist bzw. mindestens 2 Elemente enthält.

Kapitel 6.1.4

Muster für Werte algebraischer Datentypen

Muster für Werte algebraischer Datentypen (1)

Konstanten entsprechend 0-stelliger Konstruktoren als Muster:

```
type Zeichenreihe = [Char]
data Jahreszeiten = Fruehling | Sommer
                  | Herbst | Winter

wetter :: Jahreszeiten -> Zeichenreihe
wetter Fruehling = "Launisch"
wetter Sommer    = "Sonnig"
wetter Herbst    = "Windig"
wetter Winter    = "Frostig"
```

Muster für Werte algebraischer Datentypen (2)

Konstruktormuster mit Variablen:

```
type Zett = Int
data Ausdruck = Opd Zett
              | Add Ausdruck Ausdruck
              | Sub Ausdruck Ausdruck
              | Quad Ausdruck

eval :: Ausdruck -> Zett
eval (Opd n)      = n
eval (Add e1 e2) = (eval e1) + (eval e2)
eval (Sub e1 e2) = (eval e1) - (eval e2)
eval (Quad e)     = (eval e)^2
```

Muster für Werte algebraischer Datentypen (3)

Konstanten als Muster; Konstruktormuster mit Variablen und Jokern:

```
type Zett = Int
data Baum a b = Blatt a
              | Wurzel b (Baum a b) (Baum a b)

tiefe :: (Baum a b) -> Zett
tiefe (Blatt _)       = 1
tiefe (Wurzel _ l r) = 1 + max (tiefe l) (tiefe r)

data Liste a = Leer | Kopf a (Liste a)

listenLaenge :: Liste a -> Zett
listenLaenge Leer          = 0
listenLaenge (Kopf _ xs) = 1 + listenLaenge xs
```

Muster für Werte algebraischer Datentypen (4)

Konstruktormuster erlauben wie für Listen auch in Werte algebraischer Datentypen 'endlich tief' hineinzusehen:

```
type Zett = Int
data Baum = Blatt Zett
          | Gabel Zett Baum Baum

putzig :: Baum -> Zett
putzig (Blatt 7) = 42
putzig (Blatt n) = n*n
putzig (Gabel n (Blatt m) (Gabel p (Blatt q) (Blatt r)))
                 = n+m+p+q+r
putzig (Gabel n (Gabel _ (Blatt q) (Blatt r)) (Blatt _))
                 = n*(q+r)
putzig _         = 0
```

Zusammenfassung

Muster für Werte algebraischer Typen sind:

- Konstanten: `Sommer`, `Winter`, `Empty`,...
  $\leadsto$ ein Wert passt auf das Muster, wenn es eine Konstante vom entsprechenden Wert ist.
- Variablen: `e`, `e1`, `e2`, `t`,...
  $\leadsto$jeder Wert passt (und ist rechtsseitig verwendbar).
- Joker (eng. wild card): `_`
  $\leadsto$ jeder Wert passt (aber ist rechtsseitig nicht verwendbar).
- Konstruktormuster: `(Opd e)`, `(Add e1 e2)`, `(Blatt' 7)`, `(Blatt' n)`, `(Blatt' _)`, `(Gabel 42 l r)`, (Kopf _ hs),...
  $\leadsto$ ein Wert passt strukturell auf das Konstruktormuster, wenn seine Struktur mit der des Musters übereinstimmt.

Kapitel 6.1.5

Das als-Muster

Das als-Muster (1)

Oft sehr nützlich ist das sog. als-Muster (engl. as pattern).

Betrachte folgendes Beispiel:

```
nichtleerePostfixe :: String -> [String]
nichtleerePostfixe (c:cs)
  = (c:cs) : nichtleerePostfixe cs
nichtleerePostfixe _ = []

nichtleerePostfixe "Curry"
  ->> ["Curry","urry","rry","ry","y"]
```

Die rechte Seite der ersten definierenden Gleichung nimmt Bezug auf

- das gesamte strukturierte Argument: `(c:cs)`
- einen Teil des strukturierten Arguments: `cs`

Das als-Muster (2)

Das als-Muster erlaubt dies einfacher auszudrücken:

```
nichtleerePostfixe :: String -> [String]
nichtleerePostfixe s@(_:cs)
                        = s : nichtleerePostfixe cs
nichtleerePostfixe _ = []
```

Das als-Muster `s@(_:cs)` (`@` gelesen als 'als' (engl. 'as')) bietet je einen Namen an für

- das gesamte Argument, in diesem Beispiel: `s`
- für die relevanten strukturellen Komponenten des Arguments, in diesem Beispiel für den Rest der Liste, wenn die Argumentliste nicht leer ist: `cs`

- Auch möglich: Alle Strukturkomponenten namentlich zu bezeichnen, z.B. `s@(c:cs)`

Vorteile aus der Verwendung des als-Musters

...anhand des Beispiels der Funktion `nichtleerePostfixe`:

- Mittels `s` lässt sich auf das gesamte Argument Bezug nehmen; mittels `cs` auf die strukturelle Komponente des Listenrests, wenn die Argumentliste nicht leer ist.
- Die Verwendung des als-Musters führt deshalb wie in diesem Beispiel meist zu einfacheren und übersichtlicheren Definitionen.

Zum Vergleich

...beide Definitionen noch einmal gegenübergestellt:

- Mit als-Muster:

```
nichtleerePostfixe :: String -> [String]
nichtleerePostfixe s@(_:cs)
 = s : nichtleerePostfixe cs
nichtleerePostfixe _ = []
```

- Ohne als-Muster:

```
nichtleerePostfixe :: String -> [String]
nichtleerePostfixe (c:cs)
 = (c:cs) : nichtleerePostfixe cs
nichtleerePostfixe _ = []
```

Weitere Beispiele (1)

...Listen und als-Muster.

Die Funktion `listTransform` mit `als`-Muster:

```
listTransform :: [a] -> [a]
listTransform ys@(x:xs) = (x : ys) ++ xs
```

Zum Vergleich `listTransform` ohne `als`-Muster:

```
listTransform :: [a] -> [a]
listTransform (x:xs) = (x : (x : xs)) ++ xs
```

Weitere Beispiele (2)

...Tupel und als-Muster.

Die Funktion tausche mit als-Muster:

```
tausche :: Eq a => (a,a) -> (a,a)
tausche paar@(x,y)
  | x /= y    = (y,x)
  | otherwise = paar
```

Zum Vergleich tausche ohne als-Muster:

```
tausche :: Eq a => (a,a) -> (a,a)
tausche (x,y)
  | x /= y    = (y,x)
  | otherwise = (x,y)
```

Weitere Beispiele (3)

...Tupel und als-Muster.

Die Funktion `tauscheBedingt` mit `als`-Muster:

```
tauscheBedingt :: (a,Bool,a) -> (a,Bool,a)
tauscheBedingt tripel@(x,b,y)
 | b     = (y,b,x)
 | not b = tripel
```

Zum Vergleich `tauscheBedingt` ohne `als`-Muster:

```
tauscheBedingt :: (a,Bool,a) -> (a,Bool,a)
tauscheBedingt (x,b,y)
 | b     = (y,b,x)
 | not b = (x,b,y)
```

Generell

...ist das als-Muster

- über Listen und Tupel hinaus

allgemein für

- algebraische Datentypen mit strukturierten Werten

nützlich.

Kapitel 6.1.6

Zusammenfassung

Vorteile musterbasierter Funktionsdefinitionen

Musterbasierte Funktionsdefinitionen

- sind elegant.
- führen (i.a.) zu knappen, gut lesbaren Spezifikationen.

Zur Illustration: Die Funktion binom′ mit Mustern sowie ohne Muster mittels Standardselektoren:

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' (n,k)      -- mit Mustern
 | k==0 || n==k = 1
 | otherwise    = binom' (n-1,k-1) + binom' (n-1,k)
```

```
binom' :: (Integer,Integer) -> Integer
binom' p          -- ohne Muster mit Std.-Selektoren
  | snd(p)==0 || snd(p)==fst(p) = 1
  | otherwise = binom' (fst(p)-1,snd(p)-1)
                + binom' (fst(p)-1,snd(p))
```

Allerdings

...musterbasierte Funktionsdefinitionen können

- zu subtilen Fehlern führen.
- Programmänderungen/-weiterentwicklungen erschweren, ‘bis hin zur Tortur’, etwa beim Hinzukommen eines oder mehrerer weiterer Parameter.

  (siehe dazu: Peter Pepper. Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2003, S. 164.)

Kapitel 6.2

Listenkomprehension

Listenkomprehension (1)

...ein charakteristisches, elegantes und ausdruckskräftiges Sprachmittel

- funktionaler Programmiersprachen

das die Mengenbildungsoperation aus der Mathematik auf Listen nachbildet und ohne Parallele in Sprachen anderer Paradigmen ist.

Listenkomprehension (2)

...erlaubt Listen auf eine Weise zu beschreiben, in der ihre Elemente durch

- filtern, testen, transformieren der Elemente anderer Listen

erzeugt werden.

Zur Illustration: Eine Reihe von Beispielen zur Verwendung von Listenkomprehension in

- Ausdrücken
- Funktionsdefinitionen
- Zeichenreihen (als speziellen Listen)

Listenkomprehension in Ausdrücken (1)

Zwei Listen:

```
ns1 = [1,2,3,4]
ns2 = [1,2,4,7,8,11,12,42]
```

Ein Generator, eine Transformation:

```
[ 3 * n | n <- ns1 ]
 ->> [3,6,9,12]

[ square n | n <- ns2 ]
 ->> [1,4,16,49,64,121,144,1764]

[ isPrime n | n <- ns2 ]
 ->> [False,True,False,True,False,True,False,False]
```

Listenkomprehension in Ausdrücken (2)

Ein Generator, ein bzw. zwei Tests, eine Transformation:

```
[ fac n | n <- ns2, isPowOfTwo n ]
  ->> [1,2,24,40320]

[ id n | n <- ns2, isPowOfTwo n, n>=5 ]      -- ","
  ->> [8]                                     -- steht für "und"
```

Zwei Generatoren, ein Filter, zwei Tests, eine Transformation:

```
[ ((m,n),m+n) | m <- ns1, n <- tail ns2,
                m<=2, n<=7 ]
  ->> [((1,2),3),((1,4),5),((1,7),8),
       ((2,2),4),((2,4),6),((2,7),9)]
```

Listenkomprehension in Ausdrücken (3)

Zwei Generatoren, zwei Filter, ein Test, eine Transformation:

```
[ fib ((+) m n) | m <- take 3 ns1, n <- drop 5 ns2,
                  (odd (m+n) || (m*n)>100) ]
 ->> [ fib ((+) m n) | m <- [1,2,3], n <- [11,12,42],
                       (odd (m+n) || (m*n)>100) ]
 ->> [fib (1+12),fib (1+42),
      fib (2+11),
      fib (3+12),fib (3+42)]
 ->> [fib 13, fib 43, fib 13, fib 15, fib 45]
 ->> ...
```

Listenkomprehension in Fkt.-Definitionen (1)

Abstandsberechnung vom Ursprung einer Liste von Punkten:

```
type Point = (Float,Float)

distanceFromOrigin :: [Point] -> [Float]
distanceFromOrigin ps
      = [ sqrt (squ x + squ y) | (x,y) <- ps ]

distanceFromOrigin [(3.0,4.0),(1.0,1.0),(-1.0,3.0)]
 ->> [5.0,1.414,3.1623]
```

Test auf Ungradheit und Gradheit aller Listenelemente:

```
allOdd :: [Integer] -> Bool
allOdd ns = ([ n | n <- ns, isOdd n ] == ns)

allOdd [2..22] ->> False

allEven :: [Integer] -> Bool
allEven ns = ([ n | n <- ns, isOdd n ] == [])

allEven [2,4..22] ->> True
```

Listenkomprehension in Fkt.-Definitionen (2)

```
grabCapVowels :: String -> String
grabCapVowels cs = [ c | c <- cs, isCapVowel c ]

isCapVowel :: Char -> Bool
isCapVowel 'A' = True
isCapVowel 'E' = True
isCapVowel 'I' = True
isCapVowel 'O' = True
isCapVowel 'U' = True
isCapVowel  _  = False

grabCapVowels "Alles Eint Informatik Ohne Unterschied!"
                ->> "AEIOU"
```

Listenkomprehension in Fkt.-Definitionen (3)

QuickSort:

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) = quickSort [ m | m <- ns, m <= n ]
                   ++ [n]
                   ++ quickSort [ m | m <- ns, m > n ]
```

Anmerkung: Funktionsanwendung bindet stärker als Listenkonstruktion; deshalb Klammerung des Musters `(n:ns)` in der zweiten definierenden Gleichung `quickSort (n:ns) = ...`

Listenkomprehension und Zeichenreihen

...Zeichenreihen sind in Haskell ein Typsynonym für Listen von Zeichen:

```
type String = [Char]
```

Beispiel:

```
"Haskell" == ['H','a','s','k','e','l','l']
```

Für Zeichenreihen als spezielle Listen stehen deshalb dieselben

- Funktionen
- Komprehensionsmechanismen

zur Verfügung wie für allgemeine Listen.

Listenfunktionen für Zeichenreihen

Beispiele für Funktionen auf Zeichenreihen als Listen:

```
"Haskell"!!3 ->> 'k'

(!!) "Haskell" 3 ->> 'k'

take 5 "Haskell" ->> "Haske"

drop 5 "Haskell" ->> "ll"

length "Haskell" ->> 7

zip "Haskell" [1,2,3] ->> [('H',1),('a',2),('s',3)]

"Haskell" `zip` [1,2,3] ->> [('H',1),('a',2),('s',3)]
```

Listenkomprehension für Zeichenreihen

Zählen der Kleinbuchen in einer Zeichenreihe:

```
lowers :: String -> Int
lowers cs = length [ c | c <- cs, isLower c ]
```

```
lowers "Haskell" ->> 6
```

Zählen der Vorkommen eines bestimmten Zeichens in einer Zeichenreihe:

```
count :: Char -> String -> Int
count c cs = length [ c | d <- cs, d == c ]
```

```
count ‘s‘ "Mississippi" ->> 4
```

Kapitel 6.3

Konstruktoren, Operatoren

Konstruktoren vs. Operatoren

Konstruktoren führen zu eindeutigen Darstellungen von Werten, Operatoren nicht.

Beispiel:

- (:) ist (einziger) Konstruktor für Listen.
- (++) ist (einer von vielen) Operator(en) auf Listen.

Betrachte:

```
[42,17,4] == (42:(17:(4:[])))   -- Eindeutige Dar-
                               -- stellung von [42,17,4]
                        -- mittels des Konstruktors (:).

[42,17,4] == [42,17] ++ [] ++ [4]   -- Viele Darstel-
          == [42] ++ [17,4] ++ []          -- lungen von
          == [42] ++ [] ++ [17,4]           -- [42,17,4]
          == ...                          -- mittels des
                                   -- Operators (++).
```

Bemerkungen

- Die Darstellung `(42:(17:(4:[])))` deutet an, dass eine Liste ein Objekt ist; erzwungen durch die Typstruktur.
- Anders in imperativen/objektorientierten Sprachen: Listen sind dort nur indirekt existent, nämlich bei 'geeigneter' Verbindung von Elementen durch Zeiger.

Muster, Konstruktoren und Operatoren

...Operatoren (wie z.B. $(++)$ für Listen) implizieren keine Zerlegungseindeutigkeit von Werten und dürfen deshalb

- nicht in Mustern

verwendet werden. In Mustern dürfen ausschließlich

- Konstruktoren

verwendet werden, die diese Zerlegungseindeutigkeit (über Listen hinaus generell für algebraische Datentypen) garantieren.

Veranschaulichung

```
deleteTwo :: (Char,Char) -> String -> String
deleteTwo _ ""      = ""
deleteTwo _ (s:[]) = [s]
deleteTwo (c,d) (s:(t:ts))
 | [c,d] == [s,t]  = deleteTwo (c,d) ts
 | otherwise       = s : deleteTwo (c,d) (t:ts)
```

...ist sinnvoll und zulässig, weil das Muster `(s:(t:ts))` die Struktur 'passender' Argumentwerte und damit das Resultat eindeutig festlegt.

```
deleteTwo :: (Char,Char) -> String -> String
deleteTwo _ ""      = ""
deleteTwo _ (s:[]) = [s]
deleteTwo (c,d) s@([s1]++[s2])
 | [c,d] == [s1]   = deleteTwo (c,d) s2
 | otherwise       = head s : deleteTwo (c,d) (tail s)
```

...ist nicht sinnvoll und unzulässig, weil das 'Muster `([s1]++[s2])`' die Wahl von `[s1]` und `[s2]` zur Zerlegung von `s` nicht eindeutig festlegt und sich je nach Zerlegung ein anderes Resultat ergäbe.

Kapitel 6.4

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 6 (1)

- Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Prentice Hall, 2. Auflage, 1998. (Kapitel 4.2, List operations)
- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 5.1.4, Automatische Erzeugung von Listen)
- Antonie J. T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 7.4, List comprehensions)
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 4.4, Pattern matching; Kapitel 5, List comprehensions)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 6 (2)

- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 3, Syntax in Functions – Pattern Matching)
- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 12, Barcode Recognition – List Comprehensions)
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 13, Mehr syntaktischer Zucker)
- Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 2.4, Lists; Kapitel 4.1, Lists)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 6 (3)

- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 5.4, Lists in Haskell; Kapitel 5.5, List comprehensions; Kapitel 7.1, Pattern matching revisited; Kapitel 7.2, Lists and list patterns; Kapitel 9.1, Patterns of computation over lists; Kapitel 17.3, List comprehensions revisited)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 5.5, Lists in Haskell; Kapitel 5.6, List comprehensions; Kapitel 7.1, Pattern matching revisited; Kapitel 7.2, Lists and list patterns; Kapitel 10.1, Patterns of computation over lists; Kapitel 17.3, List comprehensions revisited)

Teil III

Applikative Programmierung

Applikatives Programmieren

...im strengen Sinn:

- Applikatives Programmieren ist ein Programmieren auf dem Niveau von elementaren Werten.
- Mit Konstanten, Variablen und Funktionsapplikationen werden Ausdrücke gebildet, deren Werte stets elementar sind.
- Durch explizite Abstraktion nach gewissen Variablen erhält man Funktionen.

Damit:

- Tragendes Konzept applikativer Programmierung zur Programmerstellung ist die Funktionsapplikation, d.h. die Anwendung von Funktionen auf (elementare) Werte.

Wolfram-Manfred Lippe. Funktionale und Applikative Programmierung. eXamen.press, 2009, Kapitel 1.

Funktionales Programmieren

...im strengen Sinn:

- Funktionales Programmieren ist ein Programmieren auf Funktionsniveau.
- Ausgehend von Funktionen werden mit Hilfe von Funktionen höherer Ordnung neue Funktionen gebildet.
- Es treten im Programm keine Applikationen von Funktionen auf elementare Werte auf.

Damit:

- Tragendes Konzept funktionaler Programmierung zur Programmerstellung ist die Bildung neuer Funktionen aus gegebenen Funktionen mit Hilfe von Funktionen höherer Ordnung.

Wolfram-Manfred Lippe. Funktionale und Applikative Programmierung. eXamen.press, 2009, Kapitel 1.

Kapitel 7

Rekursion

Kapitel 7.1

Motivation

Rekursion

...zentrales Mittel funktionaler Sprachen

- Wiederholungen auszudrücken (Beachte: Wir haben keine Anweisungen und deshalb auch keine Schleifen in funktionalen Sprachen).

Rekursives Vorgehen

- führt oft auf sehr elegante Lösungen, die konzeptuell wesentlich einfacher und intuitiver sind als schleifenbasierte imperative Lösungen (Typische Beispiele: Quicksort, Türme von Hanoi).

Rekursion insgesamt so wichtig, dass eine

- Klassifizierung von Rekursionstypen zweckmäßig ist.

...eine solche Klassifizierung nehmen wir in der Folge vor.

Quicksort, Türme von Hanoi

...zwei Beispiele, für die rekursives Vorgehen auf besonders

- intuitive, einfache und elegante Lösungen

führt:

- Quicksort: Schnelles Sortieren.
- Türme von Hanoi: Umschichten eines Turms aus 50 goldenen Scheiben nach bestimmten Regeln, womit nach einer hinterindischen Sage eine Gruppe von Mönchen seit dem Anbeginn der Zeit betraut ist.*

* Die Sage berichtet, dass das Ende der Welt gekommen ist, wenn die Mönche ihre Aufgabe vollendet haben.

Kapitel 7.1.1

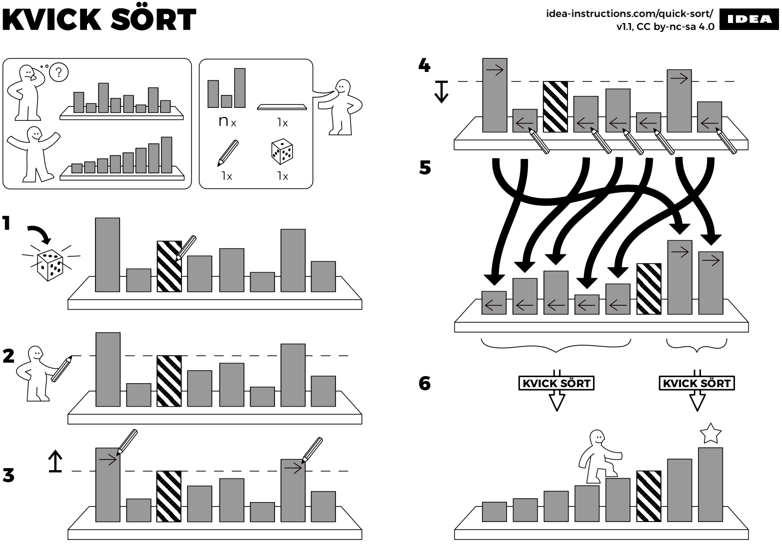
Schnelles Sortieren, Quicksort

Quicksort

...bereits besprochen (vgl. Kap. 1.2.1):

```
quickSort :: [Integer] -> [Integer]
quickSort []     = []
quickSort (n:ns) =
 -- Elem. aus ns kleiner n nach links & rekursiv sortiert:
 quickSort smaller
 -- n selbst steht automatisch sortiert in der ‘Mitte’:
 ++ [n]
 -- Elem. aus ns grösser n nach rechts & rekursiv sort.:
 ++ quickSort larger
  where smaller = [m | m<-ns, m <= n]
        larger  = [m | m<-ns, m > n]
```

Veranschaulichung im I~~K~~DEA-Stil



http://idea-instructions.com/quick-sort v.1.1, CC by-cs-sa 4.0

Kapitel 7.1.1

Türme von Hanoi

Türme von Hanoi

...Aufgabe und Regelwerk:

Ausgangssituation:

Gegeben sind drei Stapelplätze A, B und C. Auf Platz A liegt ein Stapel paarweise verschieden großer goldener Scheiben, die mit von unten nach oben abnehmender Größe übereinander geschichtet sind.

Aufgabe:

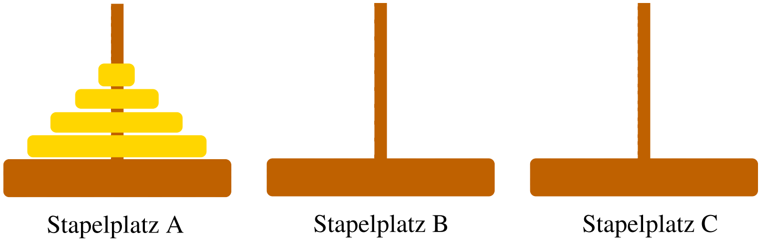
Schichte den Scheibenstapel von Platz A auf Platz C um unter Ausnutzung von Platz B als Zwischenablage.

Regelwerk:

Bei jedem Umschichtungszug darf stets nur eine Scheibe bewegt werden; nie darf eine größere Scheibe oberhalb einer kleineren Scheibe auf einem der drei Plätze zu liegen kommen.

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (1)

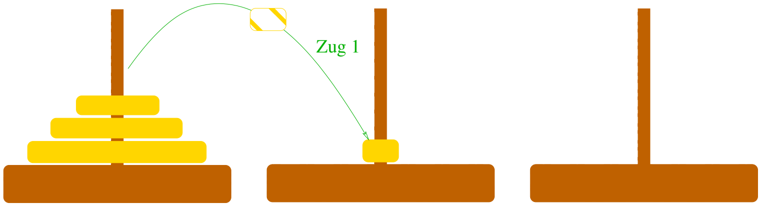
Ausgangssituation:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (2)

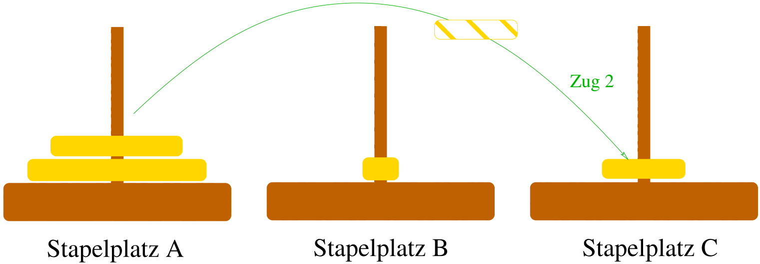
Nach einem Zug:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (3)

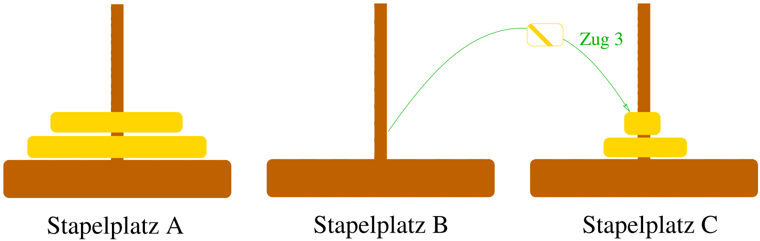
Nach zwei Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (4)

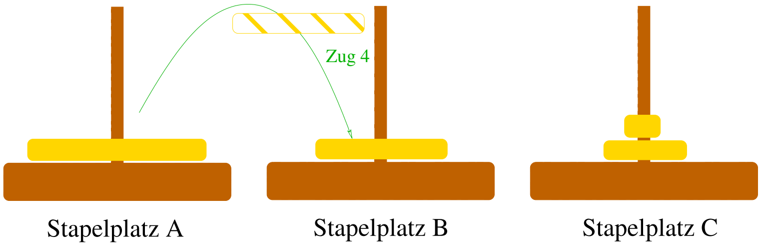
Nach drei Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (5)

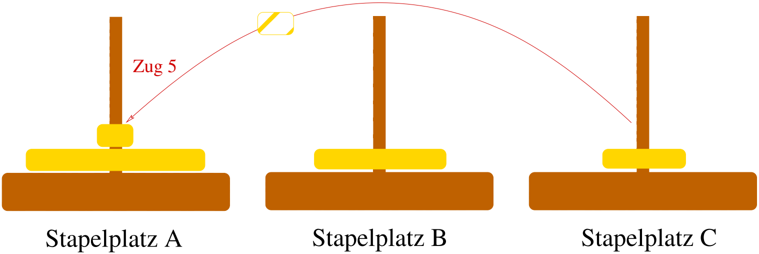
Nach vier Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (6)

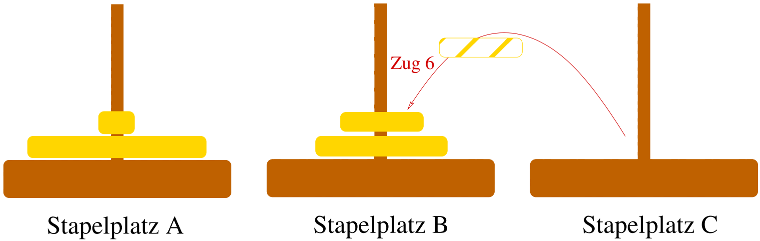
Nach fünf Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (7)

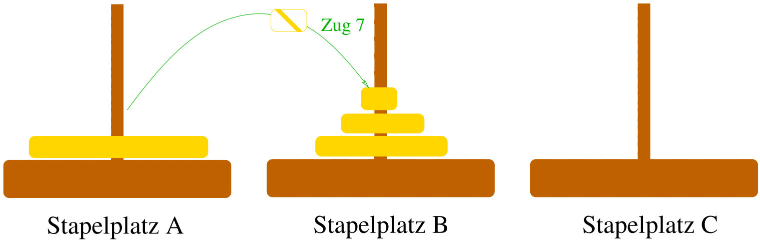
Nach sechs Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (8)

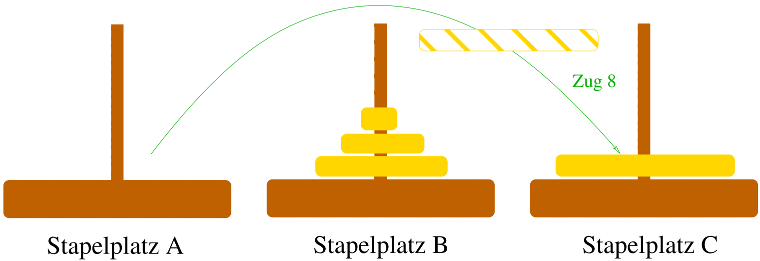
Nach sieben Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (9)

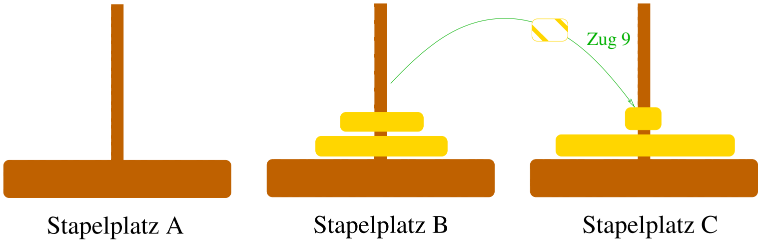
Nach acht Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (10)

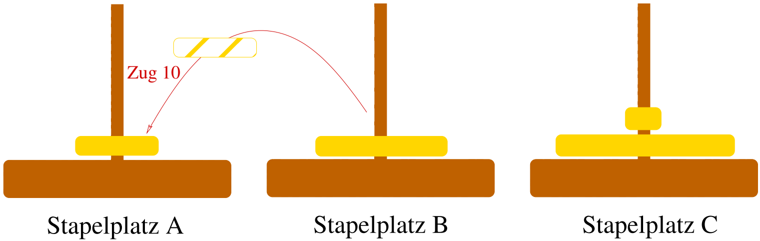
Nach neun Zügen:



Ausgangsstapel   Zwischenablage   Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (11)

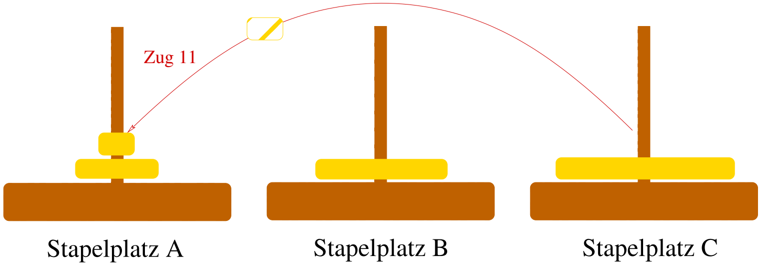
Nach zehn Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (12)

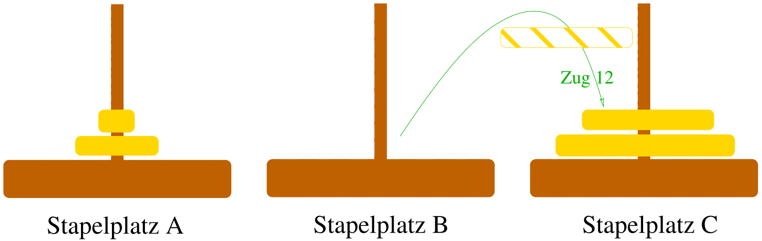
Nach elf Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (13)

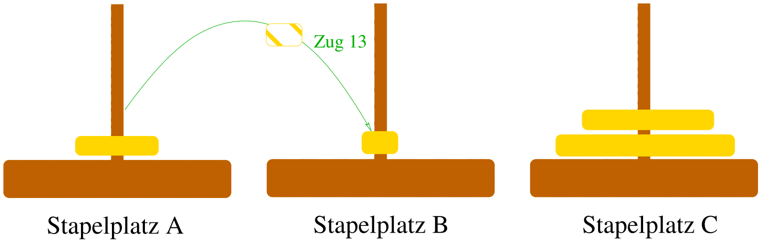
Nach zwölf Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (14)

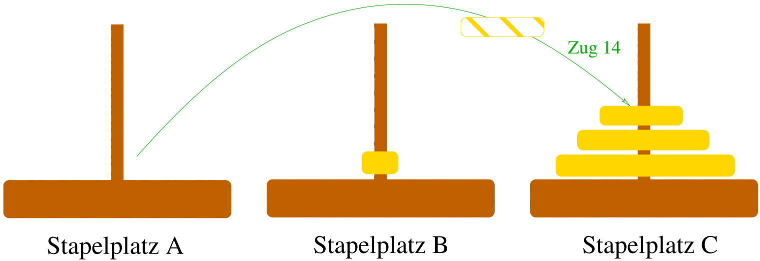
Nach dreizehn Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (15)

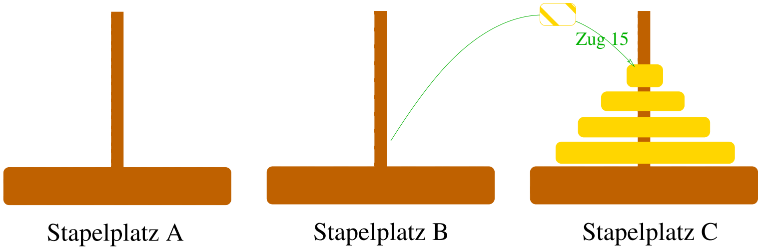
Nach vierzehn Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung: Türme von Hanoi (16)

Nach fünfzehn Zügen:



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung der Rekursionsidee (1)

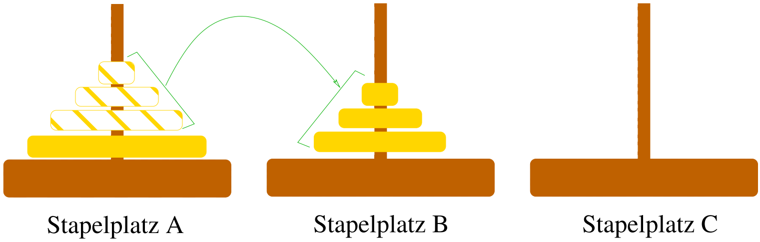
Aufgabe: Schichte Turm $[1, 2, \ldots, N]$ von Ausgangsstapel A auf Zielstapel C um unter Verwendung von Stapelplatz B als Zwischenablage.

Stapelplatz A | Stapelplatz B | Stapelplatz C

Ausgangsstapel | Zwischenablage | Zielstapel

Veranschaulichung der Rekursionsidee (2)

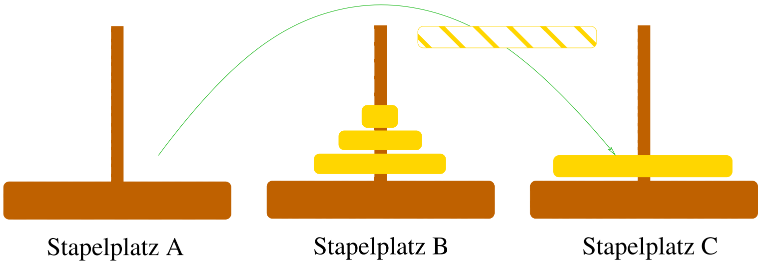
Schritt 1 – Scheibe N freispielen:
Schichte Turm $[1, 2, \ldots, N-1]$ (rekursiv) von Ausgangsstapel A auf Zwischenablage B als temporärer Zielstapel unter Ausnutzung von Stapelplatz C als temporäre Zwischenablage um.



Ausgangsstapel Zielstapel Zwischenablage

Veranschaulichung der Rekursionsidee (3)

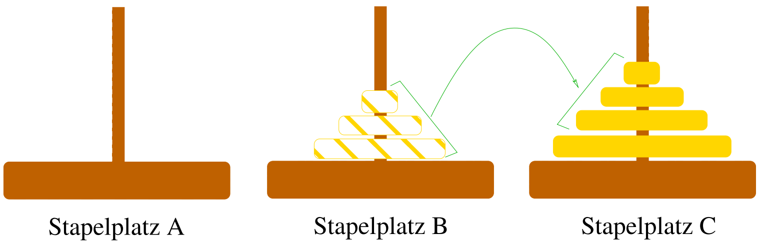
Schritt 2 – Scheibe N spielen:
Verschiebe Scheibe N von Ausgangsstapel A auf Zielstapel C.



Ausgangsstapel Zwischenablage Zielstapel

Veranschaulichung der Rekursionsidee (4)

Schritt 3 – Verbleibenden Turm umschichten:
Schichte Turm $[1, 2, \ldots, N-1]$ (rekursiv) von Stapel B als temporärer Ausgangsstapel auf Zielstapel C unter Ausnutzung von Stapelplatz A als temporärer Zwischenablage um.



Zwischenablage | Ausgangsstapel | Zielstapel

Beachte: A, B und C tauschen für Schritt 3 gegenüber Schritt 1 ihre Rollen als Ausgangs-, Ziel- und Hilfsstapelplatz.

Zusammenfassung der Rekursionsidee

...für das Problem der Türme von Hanoi:

Der N-scheibige Turm $[1, 2, \ldots, N-1, N]$ mit in zunehmender Größe von 1 bis N benannten Scheiben wird von Ausgangsstapel A auf Zielstapel C unter Zuhilfenahme von Stapelplatz B als Zwischenablage wie folgt umgeschichtet:

1) Schichte den $(N-1)$-scheibigen Turm $[1, 2, \ldots, N-1]$ rekursiv von Platz A auf Platz B unter Zuhilfenahme von Platz C als Zwischenablage um.
2) Verschiebe (die dadurch jetzt frei liegende unterste und größte) Scheibe N von Platz A auf Platz C.
3) Schichte den $(N-1)$-scheibigen Turm $[1, 2, \ldots, N-1]$ rekursiv von Platz B auf Platz C unter Zuhilfenahme von Platz A als Zwischenablage um.

Türme von Hanoi: Modellierung in Haskell

Modellierung:

```
type Turmhoehe = Int        -- Anzahl Scheiben
type Scheibe   = Int        -- Scheibenidentifikator

data Stapel    = A | B | C deriving Show

type A_Stapel  = Stapel    -- Ausgangsstapel A
type Z_Stapel  = Stapel    -- Zielstapel Z
type H_Stapel  = Stapel    -- Hilfsstapel H
type Von       = Stapel    -- Stapelbezeichner
type Nach      = Stapel    -- Stapelbezeichner

hanoi :: Turmhoehe -> A_Stapel -> Z_Stapel -> H_Stapel
                              -> [(Scheibe,Von,Nach)]

hanoi n a z h = <Code, der einen n-scheibigen Turm
                 vom Platz a auf den Platz z um-
                 schichtet unter Ausnutzung von
                 Hilfplatz h als Zwischenablage>
```

Türme von Hanoi: Implementierung in Haskell

Implementierung:

```
hanoi :: Turmhoehe -> A_Stapel -> Z_Stapel -> H_Stapel
                                    -> [(Scheibe,Von,Nach)]
hanoi n a z h
 | n == 0    = [] -- Fertig, Turm ist umgeschichtet!
 | otherwise =
    {- Schritt 1: Verschiebe (n-1)-Turm rek. von
       Platz a auf Platz h über z als Hilfsplatz -}
   (hanoi (n-1) a h z)
    {- Schritt 2: Verschiebe Scheibe n von Platz a
       auf Platz z -}
   ++ [(n,a,z)]
    {- Schritt 3: Verschiebe (n-1)-Turm rek. von
       Platz h nach Platz z über a als Hilfsplatz -}
   ++ (hanoi (n-1) h z a)
```

Türme von Hanoi: Aufrufe der Funktion hanoi

```
Main>hanoi 1 A C B
[(1,A,C)]                          (1 Zug für Schritt 2)

Main>hanoi 2 A C B
[(1,A,B),                          (1 Zug für Schritt 1)
 (2,A,C),                          (1 Zug für Schritt 2)
 (1,B,C)]                          (1 Zug für Schritt 3)

Main>hanoi 3 A C B
[(1,A,C),(2,A,B),(1,C,B),         (3 Züge für Schritt 1)
 (3,A,C),                          (1 Zug für Schritt 2)
 (1,B,A),(2,B,C),(1,A,C)]         (3 Züge für Schritt 1)

Main>hanoi 4 A C B
[(1,A,B),(2,A,C),(1,B,C),         (7 Züge für Schritt 1)
 (3,A,B),(1,C,A),(2,C,B),(1,A,B),
 (4,A,C),                          (1 Zug für Schritt 2)
 (1,B,C),(2,B,A),(1,C,A),         (7 Züge für Schritt 3)
 (3,B,C),(1,A,B),(2,A,C),(1,B,C)]
```

Kapitel 7.2

Rekursionstypen

Klassifikation der Rekursionstypen

Eine Rechenvorschrift heißt rekursiv, wenn sie

- in ihrem Rumpf (direkt oder indirekt) aufgerufen wird.

Wir unterscheiden zwischen Rekursion auf

- mikroskopischer Ebene
  ...betrachtet einzelne Rechenvorschriften und die syntaktische Gestalt der rekursiven Aufrufe.
- makroskopischer Ebene
  ...betrachtet Systeme von Rechenvorschriften und ihre wechselseitigen Aufrufe.

Kapitel 7.2.1

Mikroskopische Ebene

Rekursion auf mikroskopischer Ebene (1)

...folgende Unterscheidungen und Sprechweisen sind üblich:

1. Repetitive (schlichte, endständige) Rekursion
   $\rightsquigarrow$ pro Zweig höchstens ein rekursiver Aufruf und diesen stets als äußerste Operation.

   Beispiel:

```
ggt :: Integer -> Integer -> Integer
ggt m n
 | n == 0 = m                       -- Zweig 1
 | m >= n = ggt (m-n) n             -- Zweig 2
 | m < n  = ggt (n-m) m             -- Zweig 3
```

Rekursion auf mikroskopischer Ebene (2)

2. Lineare Rekursion
   $\rightsquigarrow$ pro Zweig höchstens ein rekursiver Aufruf, davon mindestens einer nicht als äußerste Operation.

   Beispiel:

```
powerThree :: Integer -> Integer
powerThree n
 | n == 0 = 1                           -- Zweig 1
 | n > 0  = 3 * powerThree (n-1)        -- Zweig 2
```

   Beachte: In Zweig 2, $n > 0$, ist "$*$" die äußerste Operation, nicht `powerThree`!

Rekursion auf mikroskopischer Ebene (3)

3. Baumartige (kaskadenartige) Rekursion
   ⇝ pro Zweig können mehrere rekursive Aufrufe nebeneinander vorkommen.

   Beispiel:

```
binom :: Integer -> Integer -> Integer
binom n k
 | k == 0 || n == k = 1                    -- Zweig 1
 | otherwise =
    binom (n-1) (k-1) + binom (n-1) k -- Zweig 2
```

Rekursion auf mikroskopischer Ebene (4)

4. Geschachtelte Rekursion
   $\leadsto$ rekursive Aufrufe enthalten rekursive Aufrufe als Argumente.

   Beispiel:

```
fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
 | n >  100 = n - 10
 | n <= 100 = fun91 (fun91 (n+11))
```

   Übungsaufgabe: Warum heißt die Funktion wohl `fun91`?

Zusammenfassung

...auf mikroskopischer Ebene sprechen wir von

- direkter (oder unmittelbarer) Rekursion

und unterscheiden genauer:

- Repetitive (oder schlichte oder endständige) Rekursion
- Lineare Rekursion
- Baumartige (oder kaskadenartige) Rekursion
- Geschachtelte Rekursion

Übungsaufgabe 7.2.1.1

Von welchem Rekursionstyp sind die Implementierungen

- `quickSort` (Kap. 7.1.1)
- `hanoi` (Kap. 7.1.2)
- `binom`, `binom'`, `binom''` (Kap. 1.1.1)
- `zip` (Kap. 1.1.1)
- `ggt` (Kap. 1.1.1)
- `mod` (Kap. 1.1.1)

aus Kapitel 7.1 bzw. Kapitel 1.1.1?

Kapitel 7.2.2

Makroskopische Ebene

Rekursion auf makroskopischer Ebene

...folgende Sprechweise ist üblich:

- Indirekte (verschränkte, wechselweise) Rekursion
  $\rightsquigarrow$ zwei oder mehr Funktionen rufen sich wechselweise auf.

Beispiel:

```
isOdd :: Integer -> Bool
isOdd n
 | n == 0 = False
 | n > 0  = isEven (n-1)

isEven :: Integer -> Bool
isEven n
 | n == 0 = True
 | n > 0  = isOdd (n-1)
```

Kapitel 7.2.3

Eleganz und Effizienz, Effizienzfallen

Eleganz, Effizienz, Effizienzfallen

Viele Probleme sind rekursiv besonders

- elegant lösbar (z.B. Quicksort, Türme von Hanoi)
- jedoch nicht immer unmittelbar effizient ($\neq$ effektiv!) (z.B. die naive Berechnung der Fibonacci-Zahlen)
  - Gefahr: (Unnötige) Mehrfachberechnungen
  - Besonders anfällig: Baum-/kaskadenartige Rekursion

Aus Implementierungssicht ist (s.a. Anh. E)

- repetitive Rekursion am (kosten-) günstigsten.
- geschachtelte Rekursion am ungünstigsten.

Die Folge der Fibonacci-Zahlen

...die unendliche Folge der Fibonacci-Zahlen $(f_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist folgendermaßen definiert:

$$f_0 = 0, \;\; f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

Anfang der Folge der Fibonacci-Zahlen:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (1)

Die naheliegende, unmittelbar an die Definition angelehnte naive Implementierung mit baumartiger Rekursion zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen:

```
fib :: Integer -> Integer
fib n
 | n == 0      = 0
 | n == 1      = 1
 | otherwise   = fib (n-2) + fib (n-1)
```

...ist sehr, seeehr laaangsaaaaaaaam (ausprobieren!)

Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (2)

Veranschaulichung der durch die Mehrfachberechnung von Werten verursachten Ineffizienz durch manuelle Auswertung:

```
fib 0 ->> 0                        --  1 Aufrufe von fib

fib 1 ->> 1                        --  1 Aufrufe von fib

fib 2 ->> fib 0 + fib 1
      ->> 0 + 1
      ->> 1                        --  3 Aufrufe von fib

fib 3 ->> fib 1 + fib 2
      ->> 1 + (fib 1 + fib 0)
      ->> 1 + (1 + 0)
      ->> 2                        --  5 Aufrufe von fib
```

Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (3)

```
fib 4 ->> fib 2 + fib 3
      ->> (fib 0 + fib 1) + (fib 1 + fib 2)
      ->> (0 + 1) + (1 + (fib 0 + fib 1))
      ->> (0 + 1) + (1 + (0 + 1))
      ->> 3                    --  9 Aufrufe von fib

fib 5 ->> fib 3 + fib 4
      ->> (fib 1 + fib 2) + (fib 2 + fib 3)
      ->> (1 + (fib 0 + fib 1)) +
             ((fib 0 + fib 1) + (fib 1 + fib 2))
      ->> (1 + (0 + 1)) +
             ((0 + 1) + (1 + (fib 0 + fib 1))
      ->> (1 + (0 + 1)) + ((0 + 1) + (1 + (0 + 1)))
      ->> 5                    -- 15 Aufrufe von fib
```

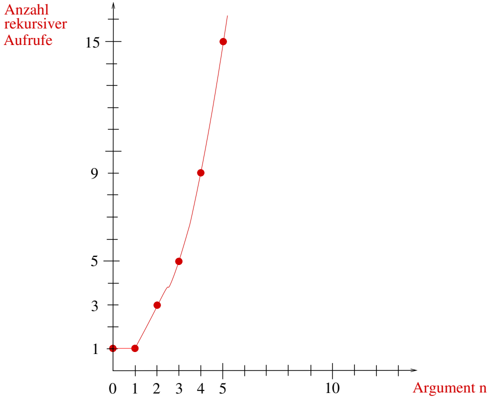
Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (4)

```
fib 8 ->> fib 6 + fib 7
      ->> + (fib 4 + fib 5) + (fib 5 + fib 6)
      ->> ((fib 2 + fib 3) + (fib 3 + fib 4))
          + ((fib 3 + fib 4) + (fib 4 + fib 5))
      ->> (((fib 0 + fib 1) + (fib 1 + fib 2))
           + (fib 1 + fib 2) + (fib 2 + fib 3)))
          + (((fib 1 + fib 2) + (fib 2 + fib 3))
           + ((fib 2 + fib 3) + (fib 3 + fib 4)))
      ->> ...
      ->> 21                    -- 60 Aufrufe von fib
```

Naive Implementierung der Fibonacci-Fkt. (5)

...die naive baumartig-rekursive Berechnung der Fibonacci-Zahlen führt zu äußerst vielen Mehrfachberechnungen.

Der Berechnungsaufwand wächst dabei exponentiell!



Lsg. 1: Effiziente Berechnung der Fibonacci-Z.

Fibonacci-Zahlen lassen sich auf viele Arten effizient berechnen, z.B. durch:

- Rechnen auf Parameterposition!

```
fib :: Integer -> Integer
fib n = fib′ n 0 1
 where
  fib′ :: Integer -> Integer -> Integer -> Integer
  fib′ 0 a b = a
  fib′ n a b = fib′ (n-1) b (a+b)
```

Lsg. 2: Effiziente Berechnung der Fibonacci-Z.

...die i.w. gleiche Idee verteilt auf mehrere Funktionen realisiert das System von Rechenvorschriften aus:

- fibSchritt, fibPaar und fib.

```
fibSchritt :: (Integer,Integer) -> (Integer,Integer)
fibSchritt (m,n) = (n,m+n)

fibPaar :: Integer -> (Integer,Integer)
fibPaar n
 | n == 0    = (0,1)
 | otherwise = fibSchritt (fibPaar (n-1))

fib :: Integer -> Integer
fib n = fst (fibPaar n)
```

Lsg. 3: Effiziente Berechnung der Fibonacci-Z.

...sog. Memo-Funktionen führen ebenfalls zu einer effizienten Implementierung, eine Idee, die zurückgeht auf:

- Donald Michie. 'Memo' Functions and Machine Learning. Nature 218:19-22, 1968.

```
memo_fib :: [Int]
memo_fib = [fib n | n <- [0..]]      -- Memo-Liste

fib :: Int -> Int
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = memo_fib !! (n-2) + memo_fib !! (n-1)
```

Hinweis: Die Listenelementzugriffsfunktion `(!!)` hat den Typ `(!!) :: [a] -> Int -> a`; deshalb ist `fib` hier über `Int` definiert, nicht über `Integer`.

Übungsaufgabe 7.2.3.1

Werte die effizienten Funktionen `fib` aus

- Lsg. 1
- Lsg. 2
- Lsg. 3

händisch für jeweils einige Werte aus, um zu sehen, wie diese Implementierungen die Berechnung der Fibonacci-Zahlen vornehmen.

Abhilfe bei ungünstigem Rekursionsverhalten

...oft ist folgende Verbesserung möglich:

- Ersetzung ungünstiger durch günstigere Rekursionsmuster!

  Z.B. Rückführung linearer auf repetitive Rekursion (s.a. Anh. E).

Rückführung linearer auf repetitive Rek. (1)

...am Beispiel der Fakultätsfunktion:

Naheliegende Implementierung mittels linearer Rekursion:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
 | n == 0    = 1
 | otherwise = n * fac (n-1)
```

Rückführung linearer auf repetitive Rek. (2)

Günstigere Formulierung mittels repetitiver Rekursion durch

- Rechnen auf Parameterposition.

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = fac_repetitiv n 1

fac_repetitiv :: Integer -> Integer -> Integer
fac_repetitiv n resultat
 | n == 0    = resultat
 | otherwise = fac_repetitiv (n - 1) (n * resultat)
```

Beachte: Überlagerungen mit anderen Effekten sind möglich, so dass sich möglicherweise kein Effizienzgewinn realisiert!

Weitere Möglichkeiten zur Verbesserung

...bieten spezielle Programmiertechniken wie

- Dynamische Programmierung
- Memoization

Zentrale Idee:

- Speicherung und Wiederverwendung statt Wiederberechnung bereits berechneter (Teil-) Ergebnisse.

  (Siehe etwa die effiziente Berechnung der Fibonacci-Zahlen mithilfe einer Memo-Liste)

Hinweis: Dynamische Programmierung und Memoization werden in der LVA 185.A05 Fortgeschrittene funktionale Programmierung ausführlich behandelt.

Kapitel 7.3

Aufrufgraphen

Struktur von Programmen

Programme funktionaler Programmiersprachen (auch Haskell-Programme) sind i.a.

- Systeme (wechselweiser) rekursiver Rechenvorschriften, die sich hierarchisch oder/und wechselweise aufeinander abstützen.

Aufrufgraphen erleichtern es, sich über die

- Struktur von Systemen von Rechenvorschriften

Klarheit zu verschaffen.

Aufrufgraphen

...sei S ein System von Rechenvorschriften.

Definition 7.3.1 (Aufrufgraph)

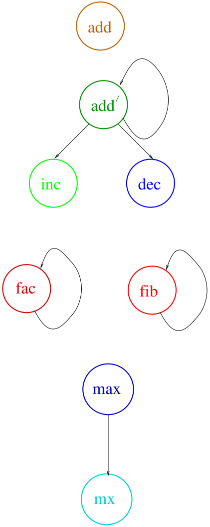
Der Aufrufgraph von S ist ein Graph, der

- für jede in S deklarierte Rechenvorschrift einen Knoten mit dem Namen der Rechenvorschrift als Beschriftung enthält,
- eine gerichtete Kante vom Knoten f zum Knoten g genau dann enthält, wenn im Rumpf der zu f gehörigen Rechenvorschrift die zu g gehörige Rechenvorschrift aufgerufen wird.

Beispiel: Aufrufgraphen (1)

...der Rechenvorschriften bzw. Systeme von Rechenvorschriften add, add′, fac, fib, max und mx:

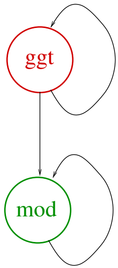
```
add :: Int -> Int -> Int
add m n = (+) m n

add'  :: Int -> Int -> Int
add' m n | n == 0    = m
         | n >0      = add' (inc m) (dec n)
         | otherwise = add' (dec m) (inc n)
 where inc :: Int -> Int
       inc n = n+1
       dec :: Int -> Int
       dec n = n-1

fac :: Integer -> Integer
fac n | n == 0    = 1
      | otherwise = n * fac (n-1)

fib :: Integer -> Integer
fib n | n == 0    = 0
      | n == 1    = 1
      | otherwise = fib (n-1) + fib (n-2)

max :: Int -> Int -> Int -> Int
max p q r
 | (mx p q == p) && (p `mx` r == p) = p
 | (mx p q == q) && (q `mx` r == q) = q
 | otherwise                        = r
 where mx :: Int -> Int -> Int
       mx p q | p >= q    = p
              | otherwise = q
```



Beispiel: Aufrufgraphen (2)

...des Systems hierarchischer Rechenvorschriften der Funktionen ggt und mod:

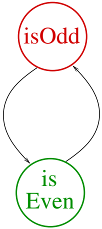
```
ggt :: Int -> Int -> Int
ggt m n
 | n == 0 = m
 | n > 0  = ggt n (mod m n)

mod :: Int -> Int -> Int
mod m n
 | m < n  = m
 | m >= n = mod (m-n) n
```



Beispiel: Aufrufgraphen (3)

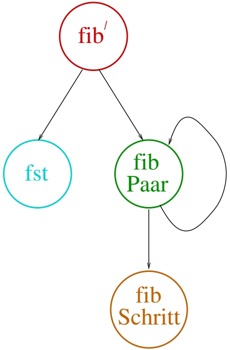
...des Systems wechselweise rekursiver Rechenvorschriften der Funktionen isOdd und isEven:

```
isOdd :: Integer -> Bool
isOdd n
 | n == 0 = False
 | n > 0  = isEven (n-1)

isEven :: Integer -> Bool
isEven n
 | n == 0 = True
 | n > 0  = isOdd (n-1)
```



...des Systems hierarchischer Rechenvorschriften der Funktionen fib, fibPaar, fibSchritt und fst:

```
fibSchritt :: (Integer,Integer) -> (Integer,Integer)
fibSchritt (m,n) = (n,m+n)

fibPaar :: Integer -> (Integer,Integer)
fibPaar n =
 | n == 0    = (0,1)
 | otherwise = fibSchritt (fibPaar (n-1))

fib′ :: Integer -> Integer
fib′ n = fst (fibPaar n)

fst :: (a,b) -> a
fst (x,y) = x
```



Interpretation von Aufrufgraphen (1)

Aus den Aufrufgraphen eines Systems von Rechenvorschriften ist u.a. ablesbar:

- Direkte Rekursivität einer Funktion: 'Selbstkringel'.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `fac` und `fib`)
- Wechselweise Rekursivität zweier Funktionen: Kreise mit zwei Kanten.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `isOdd` und `isEven`)
- Direkte hierarchische Abstützung einer Funktion auf eine andere: Es gibt eine Kante von Knoten f zu Knoten g, aber nicht umgekehrt.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `max` und `mx`)

Interpretation von Aufrufgraphen (2)

- Indirekte hierarchische Abstützung einer Funktion auf eine andere: Knoten g ist von Knoten f über eine Folge von Kanten erreichbar, aber nicht umgekehrt.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `fib'`, `fibPaar` und `fibSchritt`)
- Indirekte wechselweise Abstützung: Knoten g ist von Knoten f über eine Folge von Kanten erreichbar und umgekehrt (Kreise mit mehr als zwei Kanten).
- Unabhängigkeit/Isolation einer Funktion: Knoten f hat (ggf. mit Ausnahme eines Selbstkringels) weder ein- noch ausgehende Kanten.
  (z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `add`, `fac` und `fib`)
- ...

Übungsaufgabe 7.3.1

Gib ein System von Rechenvorschriften an, in dem sich zwei Funktionen `f` und `g` indirekt wechselweise aufeinander abstützen.

Kapitel 7.4

Komplexität, Komplexitätsklassen

Rechenaufwand von Algorithmen

...als Anzahl elementarer Operationen zu (angenommenen) Einheitskosten einer imaginären Maschine.

Sei

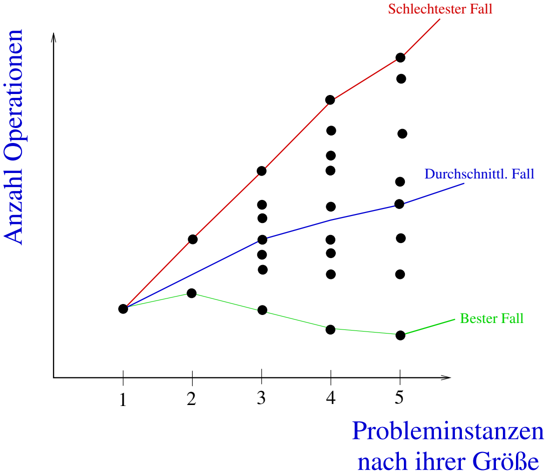
- $\mathcal{A} : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$ ein Algorithmus, der Probleminstanzen p aus einer Menge $\mathcal{P}$ auf Lösungsinstanzen l aus einer Menge $\mathcal{L}$ abbildet.
- $f_{\mathcal{A}} : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die für jede Probleminstanz $p \in \mathcal{P}$ die Zahl elementarer Operationen angibt, die $\mathcal{A}$ zur Lösung von p benötigt.
- $\gamma : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die jeder Probleminstanz $p \in \mathcal{P}$ eine natürliche Zahl als Größe zuordnet.

Beispiel: Sortieren

- $\mathcal{P}$: Menge aller Listen über ganzen Zahlen.
- $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$: Menge aller aufsteigend sortierten Listen.
- $\mathcal{A}$: Quicksort
- $\gamma(p)$, $p \in \mathcal{P}$: Länge von p, d.h. Anzahl Elemente in p.

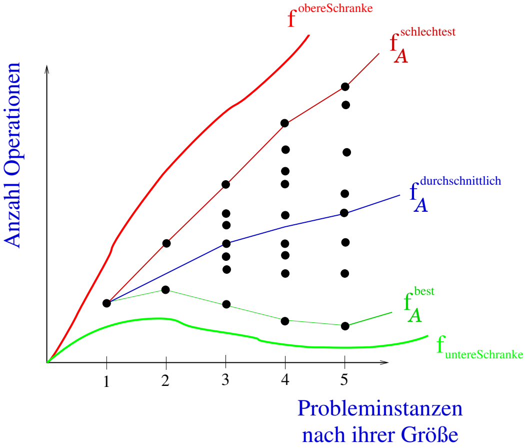
Aufwand in Abhängigkeit der Problemgröße

...von Algorithmus $\mathcal{A}$, wobei • Probleminstanzen darstellen:



Aus Gründen der Praktikabilität

...betrachtet man i.a nicht die (meist schwer beschreibbaren) Aufwandsfunktionen $f_{\mathcal{A}}^{schlechtest}$, $f_{\mathcal{A}}^{durchschnittlich}$ und $f_{\mathcal{A}}^{best}$ direkt, sondern konzentriert sich auf Funktionen $f^{obereSchranke}$ und $f_{untereSchranke}$, die $f_{\mathcal{A}}^{schlechtest}$ und $f_{\mathcal{A}}^{best}$ beschränken:



Obere, untere, einhüllende Schranken

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+$ zwei Funktionen von den natürlichen in die positiven reellen Zahlen (einschl. 0 jeweils; sonst $\mathbb{N}$, $I\!R^+$).

Definition 7.4.1 (Obere, untere, einhüll. Schranke)

g heißt asymptotische

- obere Schranke von f gdw.
  $\exists k \in I\!R^+.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}_0.\ \forall n \in \mathbb{N}_0.\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ f(n) \leq k * g(n)$
  In diesem Fall schreiben wir: $f \in O(g)$ (oder $f = O(g)$).
- untere Schranke von f gdw.
  $\exists k \in I\!R^+.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}_0.\ \forall n \in \mathbb{N}_0.\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ f(n) \geq k * g(n)$
  In diesem Fall schreiben wir: $f \in \Omega(g)$ (oder $f = \Omega(g)$).
- einhüllende Schranke von f gdw. g ist obere und untere Schranke von f: $f \in O(g) \land f \in \Omega(g)$.
  In diesem Fall schreiben wir: $f \in \Theta(g)$ (oder $f = \Theta(g)$).

Asymptotische einhüllende Schranke

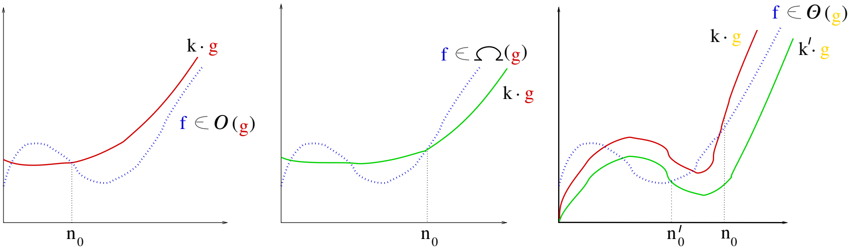
Es gilt:

Proposition 7.4.2

Folgende Aussagen sind logisch äquivalent:

1. g ist einhüllende Schranke von f.
2. $\exists\, k, k' \in IR^+.\ \exists\, n_0, n_0' \in \mathbb{N}_0.$
   $(\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ f(n) \leq k * g(n)) \wedge$
   $(\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\ n \geq n_0' \ \Rightarrow\ f(n) \geq k' * g(n))$
3. $\exists\, k, k' \in IR^+.\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}_0.$
   $\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ (f(n) \leq k*g(n) \wedge f(n) \geq k'*g(n))$

Asymptotische Schranken: Veranschaulichung



Obere Schranke

Untere Schranke

Einhüllende Schranke

- $O(g) = \{f \mid g$ asympt. obere Schranke von $f\}$
- $\Omega(g) = \{f \mid g$ asympt. untere Schranke von $f\}$
- $\Theta(g) = \{f \mid g$ asympt. obere u. untere Schranke von $f\}$

Sprechweisen (für $f, g : \mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+$)

Man sagt, Funktion f

- ist
  (a) höchstens
  (b) mindestens
  (c) genau

  von der Größenordnung g
- wächst von der Größenordnung (oder größenordnungsmäßig)
  (a) höchstens
  (b) mindestens
  (c) genau

  so schnell wie g, wenn gilt:

  (a) $f \in O(g)$
  (b) $f \in \Omega(g)$
  (c) $f \in \Theta(g)$

Reflexivität, Transitivität, Symmetrie

Lemma 7.4.3 (Reflexivität)

$$f \in O(f),\ f \in \Omega(f),\ f \in \Theta(f)$$

Lemma 7.4.4 (Transitivität)

1. $f \in O(g) \wedge g \in O(h) \ \Rightarrow\ f \in O(h)$
2. $f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(h) \ \Rightarrow\ f \in \Omega(h)$
3. $f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) \ \Rightarrow\ f \in \Theta(h)$

Lemma 7.4.5 (Symmetrie)

$$f \in \Theta(g) \iff g \in \Theta(f)$$

Lemma 7.4.6 (Austauschsymmetrie)

$$f \in O(g) \iff g \in \Omega(f)$$

Beachte

Die Schreibweise '$=$' für '$\in$', z.B. $f = O(g)$ für $f \in O(g)$ ist nützlich und verbreitet, aber ungenau, da '$=$' in diesem Kontext weder symmetrisch noch 'transitiv' gelesen werden kann:

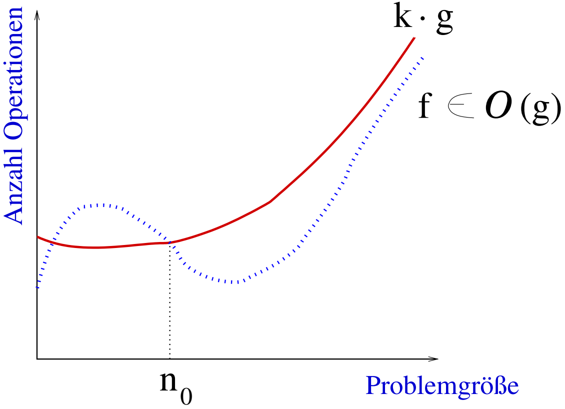
- Lesen wir $f = O(g)$ gleichbedeutend mit $f \in O(g)$, so ist die Schreibweise $O(g) = f$ sinnlos und ohne Bedeutung.
- Aus $f = O(g)$ und $h = O(g)$ kann nicht geschlossen werden: $f = h$.

Das bedeutet:

- In Kontexten wie $f = O(g)$, $f = \Omega(g)$, $f = \Theta(g)$ ist '$=$' als Einweggleichung ausschließlich und nicht umkehrbar von links nach rechts zu lesen.

In der Praxis bes. wichtig: Asymp. obere Schr.

...sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die die max. Zahl elementarer Operationen eines Algorithmus $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit der durch eine natürliche Zahl beschriebenen Problemgröße angibt:



Einige Rechengesetze für Groß-O (1)

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+$ zwei Funktionen von den natürlichen in die positiven reellen Zahlen und seien $a, b \in I\!R_0^+$ zwei positive Konstanten.

Lemma 7.4.7

1. $a > 0 \;\Rightarrow\; O(af + b) = O(f)$
2. $g \in O(f) \;\Rightarrow\; O(f + g) = O(f)$
3. Ist g streng monoton wachsend ($\forall\, n, n' \in \mathbb{N}_0.\ n < n' \Rightarrow g(n) < g(n')$) oder monoton wachsend ($\forall\, n, n' \in \mathbb{N}_0.\ n < n' \Rightarrow g(n) \leq g(n')$) und nicht beschränkt ($\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\ \exists\, n' \in \mathbb{N}_0.\ g(n') > n$), so gilt:

$$O(f) \overset{\subseteq}{\neq} O(f \cdot g)$$

Einige Rechengesetze für Groß-O (2)

Lemma 7.4.8

Sind f, g polynomiale Funktionen mit

$$f(n) =_{df} \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot n^i, \quad g(n) =_{df} \sum_{j=1}^{l} b_i \cdot n^j$$

wobei $a_i, b_j \in IR_0^+$ für alle i, j und $a_k, b_l > 0$, so gilt:

1. $O(f) = O(g) \;\Leftrightarrow\; k = l$
2. $O(f) \subsetneq O(g) \;\Leftrightarrow\; k < l$

Einige Rechengesetze für Groß-O (3)

Für alle Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to I\!R_0^+$ gilt:

Lemma 7.4.9 (Umkehrinklusion)

$$O(f) \subseteq O(g) \iff \Omega(f) \supseteq \Omega(g)$$

Lemma 7.4.10 (Äquivalenzcharakterisierung)

Folgende Aussagen sind logisch äquivalent:

1. $f \in \Theta(g)$
2. $f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)$
3. $\Theta(f) = \Theta(g)$
4. $g \in O(f) \wedge g \in \Omega(f)$
5. $g \in \Theta(f)$

Lemma 7.4.11 (Quotientenfolgencharakterisierung)

Existiert $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ mit $0 < c \in I\!R^+$, so gilt: $f \in \Theta(g)$.

Einige Rechengesetze für Groß-O (4)

Aus Lemma 7.4.10 folgen als Korollare:

Korollar 7.4.12 (Äquivalenzrelation)

Die Relation 'ist genau von der Größenordnung' ist eine Äquivalenzrelation (d.h. reflexive, transitive, antisymmetrische Relation) auf der Menge $\mathcal{F} =_{df} [\mathbb{N}_0 \to IR_0^+]$ aller Funktionen von den natürlichen in die positiven reellen Zahlen.

Da Äquivalenzrelationen eine Partitionierung der Grundmenge induzieren (d.h. Äquivalenzklassen paarweise verschieden, Vereinigung aller Äquivalenzklassen gleich Grundmenge) und umgekehrt, erhalten wir weiters:

Korollar 7.4.13 (Partitionierung)

Die Äquivalenzklassen der Relation 'ist genau von der Größenordnung' bilden eine Partitionierung von $\mathcal{F} =_{df} [\mathbb{N}_0 \to IR_0^+]$.

Beispiele

...in der Praxis häufig auftretender Kostenfunktionen:

Kürzel	Aufwand	Intuition: *Vertausendfachte Eingabe heißt...*
$O(c)$	konstant	gleiche Arbeit
$O(log_2\, n)$	logarithmisch	nur zehnfache Arbeit
$O(n)$	linear	auch vertausendfachte Arbeit
$O(n\, log_2\, n)$	quasi-linear	zehntausendfache Arbeit
$O(n^2)$	quadratisch	millionenfache Arbeit
$O(n^3)$	kubisch	milliardenfache Arbeit
$O(n^c)$	polynomiell	gigantisch viel Arbeit (f. großes c)
$O(2^n)$	exponentiell	hoffnungslos

Peter Pepper. Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer. Springer-V., 2. Auflage, 2003, Kap. 11.

Anm.: Die Angabe der Basis bei (quasi-) logarithm. Komplexität entfällt üblicherw. (auch bei Pepper), da sie als Konstante in d. O-Not. aufgeht.

Veranschaulichung über Skalierbarkeit

...was das Wachstum von Probleminstanzen für die reale Ausführungszeit bedeutet (Annahme: Jede Elementarop. benötigt $1\ \mu s$; $f(n)$ Zahl max. benötigter Elementarop. für Instanzen d. Größe n):

Grösse n	Linear $f(n) = n$	Quadratisch $f(n) = n^2$	Kubisch $f(n) = n^3$	Exponentiell $f(n) = 2^n$
1	1 μs	1 μs	1 μs	2 μs
10	10 μs	100 μs	1 ms	1 ms
20	20 μs	400 μs	8 ms	1 s
30	30 μs	900 μs	27 ms	18 min
40	40 μs	2 ms	64 ms	13 Tage
50	50 μs	3 ms	125 ms	36 Jahre
60	60 μs	4 ms	216 ms	36 560 Jahre
100	100 μs	10 ms	1 sec	$4 * 10^{16}$ Jahre
1000	1 ms	1 sec	17 min	sehr, sehr lange...

Peter Pepper. Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer. Springer-V., 2. Auflage, 2003, Kap. 11.

Veransch. über handhabbare Problemgröße (1)

...mit folgender umgekehrter Fragestellung:

- Probleminstanzen welcher Größe können gerade noch gelöst werden, so dass das Ergebnis 'gefühlt sofort', ohne merklich wahrnehmbare Berechnungsverzögerung vorliegt?

Dafür nehmen wir an:

- Ein Ergebnis liegt 'gefühlt sofort' vor, wenn die Berechnungszeit bz nicht wesentlich mehr als eine Hundertstelsekunde beträgt, d.h. wenn für die Berechnungszeit $bz(p)$ einer Probleminstanz p gilt:

$$bz(p) < (10.000 + \varepsilon)\,\mu s = (10 + \varepsilon)\,ns = (0,01 + \varepsilon)\,s$$

- Eine Elementaroperation benötigt $1\,\mu s$.

Veransch. über handhabbare Problemgröße (2)

Gegeben seien:

- Sechs unterschiedliche Lösungsalgorithmen mit
  - exponentieller ($\mathcal{A}_1$) $f_{\mathcal{A}_1} \in O(2^n)$
  - kubischer ($\mathcal{A}_2$) $f_{\mathcal{A}_2} \in O(n^3)$
  - quadratischer ($\mathcal{A}_3$) $f_{\mathcal{A}_3} \in O(n^2)$
  - quasi-linearer ($\mathcal{A}_4$) $f_{\mathcal{A}_4} \in O(n\, log_2\, n)$
  - linearer ($\mathcal{A}_5$) $f_{\mathcal{A}_5} \in O(n)$
  - logarithmischer ($\mathcal{A}_6$) $f_{\mathcal{A}_6} \in O(log_2\, n)$

  Laufzeit.
- Funktionen $f_{\mathcal{A}_i} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 6$, die für jeden Algorithmus angeben, wieviele Elementaroperationen $\mathcal{A}_i$ für die Lösung einer Probleminstanz der Größe n, $n \in \mathbb{N}$, höchstens benötigt.

  Informell: $f_{\mathcal{A}_i}$ übersetzt Problemgröße in (bis auf konstanten Faktor) max. Anzahl der von $\mathcal{A}_i$ benötigten Elementaroperationen zu je $1\,\mu s$.

Veransch. über handhabbare Problemgröße (3)

Algorithmus	Zeitbudget $(10.000 + \varepsilon)\,\mu s$	Handhabbare Problemgröße im Zeitbudget
Exponentiell $f_{\mathcal{A}_1}(n) = 2^n$	$f_{\mathcal{A}_1}(13) = 8.192$ $f_{\mathcal{A}_1}(14) = 16.384$	14
Kubisch $f_{\mathcal{A}_2}(n) = n^3$	$f_{\mathcal{A}_2}(21) = 9.261$ $f_{\mathcal{A}_2}(22) = 10.648$ $f_{\mathcal{A}_2}(26) = 17.576$	26
Quadratisch $f_{\mathcal{A}_3}(n) = n^2$	$f_{\mathcal{A}_3}(100) = 10.000$	100
Quasi-linear $f_{\mathcal{A}_4}(n) = n\,log_2 n$	$f_{\mathcal{A}_4}(1.000) \approx 10.000$	1.000
Linear $f_{\mathcal{A}_5}(n) = n$	$f_{\mathcal{A}_5}(10.000) = 10.000$	10.000
Logarithmisch $f_{\mathcal{A}_6}(n) = log_2 n$	$f_{\mathcal{A}_6}(2^{10.000}) = 10.000$	$2^{10.000}$

Wachstum informell gedeutet

- Exponentiell: Die Zahl der Operationen wächst im Vergleich zur Problemgröße äußerst schnell:

Problemgröße n	Anzahl Operationen 2^n
1	2
14	16.384
1.000	$2^{1.000}$
n	2^n

- Logarithmisch: Die Zahl der Operationen wächst im Vergleich zur Problemgröße äußerst langsam:

Problemgröße 2^n	Anzahl Operationen n
1	0
$16 \approx 14$	4
$1.024 \approx 1.000$	10
$2^{16.384}$	16.384
2^{2^n}	2^n

Lohnt der Kauf eines schnelleren Rechners?

Algorithmus	Alter Rechner	Neuer schneller Rechner 10x	100x	1.000x
Exponentiell $f_{\mathcal{A}_1}(n) = 2^n$	14 ($2^{14} = 16.384$)	17 ($2^{17} = 131.072$)	20 ($2^{20} = 1.048.576$)	24 ($2^{24} = 16.777.216$)
Kubisch $f_{\mathcal{A}_2}(n) = n^3$	26 ($26^3 = 17.576$)	47 ($47^3 = 103.823$)	100 ($100^3 = 1.000.000$)	216 ($216^3 = 10.077.696$)
Quadratisch $f_{\mathcal{A}_3}(n) = n^2$	100 ($100^2 = 10.000$)	317 ($317^2 = 100.489$)	1.000 ($1.000^2 = 1.000.000$)	3.163 ($3.163^2 = 10.004.569$)
Quasi-linear $f_{\mathcal{A}_4}(n) = n\,log_2 n$	1.000 ($10^3\,log_2 10^3 \approx 10^3 * 10 = 10.000$)	9.000 ($9.000\,log_2 9.000 \approx 9.000 * 13 = 117.000$)	65.000 ($65.000\,log_2 65.000 \approx 65.000 * 16 = 1.040.000$)	530.000 ($530.000\,log_2 530.000 \approx 530.000 * 19 = 10.070.000$)
Linear $f_{\mathcal{A}_5}(n) = n$	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
Logarithmisch $f_{\mathcal{A}_6}(n) = log_2 n$	$2^{10.000}$ ($log_2 2^{10^4} = 10.000$)	$2^{100.000}$ ($log_2 2^{10^5} = 100.000$)	$2^{1.000.000}$ ($log_2 2^{10^6} = 1.000.000$)	$2^{10.000.000}$ ($log_2 2^{10^7} = 10.000.000$)

Beobachtung

Der Kauf eines neuen, schnelleren Rechners bringt verglichen mit dem Finden und Wechsel zu einem asymptotisch besseren Algorithmus fast nichts.

- Exponentieller Algorithmus, Rechner um Faktor 1.000 schneller, im Bsp. wächst handhabbar von 14 auf 24:

  $\rightsquigarrow$ bedeutungslos, weil noch immer weit zu wenig.

- Logarithmischer Algorithmus, Rechner um Faktor 1.000 schneller, im Bsp. wächst handbabbar von $2^{10.000}$ auf $2^{10.000.000}$:

  $\rightsquigarrow$ bedeutungslos, weil schon $2^{10.000}$ riesig (genug) ist.

Kein Königsweg:

- Das Finden eines asymptotisch besseren Algorithmus ist kein Selbstläufer; möglicherweise gibt es auch keinen.

Interpretation, Folgerungen

- Einem asymptotisch schlechten Algorithmus hat auch ein schneller(er) Rechner nichts entgegenzusetzen:

  Selbst ein 100.000-fach schnellerer Rechner mit 1.000.000.000 Operationen pro $0,01\,\mathrm{s}$ erlaubte bei exponentiellem Algorithmus ohne Verlängerung der erlaubten Antwortzeit lediglich Probleme bis zur Größe 30 zu lösen: $2^{30} = 1.073.741.824$.
- Ein asymp. schlechter Algorithmus verhält sich schlecht, auch wenn er auf einen schnelleren Rechner portiert wird.
- Asymp. schlechtes Alg.-Verhalten ist portierungsinvariant.

Faustregel:

- Ein langsamer Rechner mit asymptotisch gutem Algorithmus gewinnt gegen einen schnellen Rechner mit asymptotisch schlechtem oder auch nur schlechterem Algorithmus bei Probleminstanzen nichttrivialer Größe immer!

Abschließend

Die Beispiele und Überlegungen dieses Abschnitts machen deutlich:

- Rekursionsmuster beeinflussen (auch) die Effizienz einer Implementierung (siehe die naive baumartig-rekursive Implementierung der Fibonacci-Funktion).
- Die Wahl eines zweckmäßigen und zweckmäßig eingesetzten Rekursionsmusters ist deshalb wichtig.

WICHTIG: Nicht bestimmte Rekursionsmuster an sich sind

- problematisch, sondern ihr unzweckmäßiger Einsatz, wenn etwa wie im Fall der Fibonacci-Funktion baumartige Rekursion zu (unnötigen) Vielfachberechnungen von Werten führt!

Zweckmäßig eingesetzt bietet z.B. baumartige Rekursion viele Vorteile, darunter zur Parallelisierung! *Stichwort*: Teile und herrsche (oder divide et impera oder divide and conquer)!

Übungsaufgabe 7.4.14

Vervollständige jede Spalte so weit bis d. Ausführungszeiten f. praktische Berechnungen gänzlich nutzlose Werte annehmen:

Grösse n	$f(n) = log_{10}\, n$	$f(n) = log_2\, n$	$f(n) = n$	$f(n) = n\, log_{10}\, n$	$f(n) = n\, log_2\, n$	$f(n) = n!$
1			1 μs			
10			10 μs			
20			20 μs			
30			30 μs			
40			40 μs			
50			50 μs			
60			60 μs			
100			100 μs			
1.000			1 ms			
10.000			10 ms			
100.000			100 ms			
1.000.000			1 s			

Übungsaufgabe 7.4.15

Angenommen, ein Rechner einer neuen Generation benötigt für jede Elementaroperation nur noch $1ns$ statt einer $1\mu s$.

1. Wie ändern sich die Werte in den beiden Tabellen aus Abschnitt 7.4 und Übungsaufgabe 7.4.14?
2. Bis zu jeweils welcher Problemgröße können Algorithmen der verschiedenen Komplexitätsklassen unter praktischen Gesichtspunkten eingesetzt werden, d.h. wie lange sind wir willens, auf ein Ergebnis zu warten? (Am Bsp. der Tabelle aus Abschnitt 7.4: 18 Minuten, vermutlich ja; 13 Tage, möglicherweise noch; 36 Jahre, eher nicht).
3. Ist für Algorithmen mit logarithmischer Komplexität ($log\ n$, $n\ log\ n$) der Unterschied zur Basis 10 oder zur Basis 2 unter praktischen Gesichtspunkten (d.h. im Sinn der vorherigen Teilaufgabe) bedeutsam oder vernachlässigbar?

Übungsaufgabe 7.4.16 (1)

Manchmal, z.B. weil man keine asymptotische Schranke kennt oder findet, betrachtet man starke (oder nicht-scharfe) asymptotische Schranken.

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to IR_0^+$ zwei Funktionen von den natürlichen in die positiven reellen Zahlen.

Definition 7.4.17 (Starke obere, untere Schranke)

g heißt starke (oder nicht-scharfe) asymptotische

- obere Schranke von f gdw.
  $\forall k \in IR^+ .\ \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 .\ \forall n \in \mathbb{N}_0 .\ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ f(n) \leq k * g(n)$
  In diesem Fall schreiben wir: $f \in o(g)$ (oder $f = o(g)$).
- untere Schranke von f gdw.
  $\forall k \in IR^+ .\ \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 .\ \forall n \in \mathbb{N}_0 .\ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ f(n) \geq k * g(n)$
  In diesem Fall schreiben wir: $f \in \omega(g)$ (oder $f = \omega(g)$).

Übungsaufgabe 7.4.16 (2)

Lemma 7.4.18 (Quotientenfolgencharakterisierung)

1. Ist $f \in o(g)$, so gilt:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad (\wedge \ \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$ wenn ex.)
2. Ist $f \in \omega(g)$, so gilt:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \quad (\wedge \ \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ wenn ex.)

Informell:

- Gilt $f \in o(g)$, so sind für große n die Werte von $f(n)$ unbedeutend gegenüber denen von $g(n)$.
- Gilt $f \in \omega(g)$, so sind für große n die Werte von $g(n)$ unbedeutend gegenüber denen von $f(n)$.

Übungsaufgabe 7.4.16 (3)

Welche folgender Aussagen gelten? Beweis oder Gegenbeispiel.

1. Reflexivität:
   1.1 $f \in o(f)$
   1.2 $f \in \omega(f)$
2. Transitivität:
   2.1 $f \in o(g) \wedge g \in o(h) \;\Rightarrow\; f \in 0(h)$
   2.2 $f \in \omega(g) \wedge g \in \omega(h) \;\Rightarrow\; f \in \omega(h)$
3. Symmetrie:
   3.1 $f \in o(g) \iff g \in o(f)$
   3.2 $f \in \omega(g) \iff g \in \omega(f)$
4. Austauschsymmetrie: $f \in o(g) \iff g \in \omega(f)$
5. Umkehrinklusion: $o(f) \subseteq o(g) \iff \omega(f) \supseteq \omega(g)$
6. Schnitt:
   6.1 $O(g) \cap \omega(g) = \emptyset$
   6.2 $o(g) \cap \Omega(g) = \emptyset$
   6.3 $o(g) \cap \omega(g) = \emptyset$

Übungsaufgabe 7.4.16 (4)

Gilt $f \in O(g)$ ($f \in \Omega(g)$), so kann g asymptotisch scharfe obere (untere) Schranke von f sein oder nicht.

Gib je ein Beispiel für Funktionen f und g an, so dass gilt:

1. $f \in O(g)$ und g ist
   1.1 scharfe
   1.2 nicht-scharfe

   asymptotische obere Schranke von f.
2. $f \in \Omega(g)$ und g ist
   2.1 scharfe
   2.2 nicht-scharfe

   asymptotische untere Schranke von f.

Landausche Symbole

Die Symbole O, Ω, Θ, o und ω heißen Landausche Symbole und gehen zurück auf Arbeiten von:

- Edmund Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Band I und II, B. G. Teubner, 1909. (o-Notation)
- Paul Bachmann. Die Analytische Zahlentheorie. Zahlentheorie, B. G. Teubner, 1894. (O-Notation)
- Godfrey H. Hardy, John E. Littlewood. Some Problems of Diophantine Approximation. Acta Mathematica 37:155-238, 1914. (Ω-Notation; mit vom heutigen Gebrauch abweichender Bedeutung von Ω als 'o-Negation')

Für einen genaueren historischen Abriss siehe die Arbeit:

- Donald E. Knuth. Big Omicron and Big Omega and Big Theta. ACM SIGACT News 8(2):18-24, 1976.

...der für die Verwendung der Landauschen Symbole in ihrer heutigen Bedeutung maßgeblicher Einfluss zukommt.

Kapitel 7.5

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 7 (1)

- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 4, Rekursion als Entwurfstechnik; Kapitel 9, Laufzeitanalyse von Algorithmen; Kapitel 9.2, Landau-Symbole)
- Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 11, Software-Komplexität)
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald Rivest, Clifford Stein. *Algorithmen – Eine Einführung*. Oldenbourg Verlag, 2004. Kapitel 3, Wachstum von Funktionen; Kapitel 3.1, Asymptotische Notation (Θ, O, Ω, o, ω); Kapitel 3.2, Standardnotationen und Standardfunktionen)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 7 (2)

- Ben Goldreich. *Invitation to Complexity Theory*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):18-22, 2012.
- Neil D. Jones. *Constant Time Factors do Matter*. In Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'93), 602-611, 1993.
- Donald E. Knuth. *Big Omicron and Big Omega and Big Theta*. ACM SIGACT News 8(2):18-24, 1976.
(s.a. Nachdruck unter gleichem Titel in: Donald E. Knuth. *Selected Papers on Analysis of Algorithms*. CSLI Lecture Notes Number 102, CSLI Publications, 35-41, 2012.)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 7 (3)

- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 5, Rekursion; Kapitel 11, Formalismen 3: Aufwand und Terminierung)
- Steven S. Skiena. *The Algorithm Design Manual*. Springer-V., 1998. (Kapitel 1.3.2, Best, Worst, and Average-Case Complexity; Kapitel 1.4, The Big Oh Notation)
- Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik. Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014. (Kapitel 4.1.3, Induktiv definierte Algorithmen. Türme von Hanoi)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 7 (4)

- Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018. (Kapitel 4.1.3, Inductively defined Algorithms. Towers of Hanoi)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 20, Time and space behaviour)
- Ingo Wegener. *Komplexität*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 119-144, 2006. (Kapitel 5.1, Größenordnungen und die $\mathcal{O}$-Notation)

Kapitel 8

Auswertung von Ausdrücken

Auswertung

...einfacher und einfacher funktionaler Ausdrücke.

Zentral: Die Organisation des Zusammenspiels von

- Expandieren ($\rightsquigarrow$ Funktionsaufrufe)
- Simplifizieren ($\rightsquigarrow$ einfache Ausdrücke)

um einen Ausdruck soweit zu vereinfachen wie möglich.

Kapitel 8.1

Auswertung einfacher Ausdrücke

Auswerten einfacher Ausdrücke

Viele (Simplifikations-) Wege führen zum (selben!) Ziel, hier zum Wert 42, der Semantik (oder Bedeutung) des Ausdrucks `3*(9+5)`:

Simplifikations-Weg 1:

```
          3 * (9+5)
(S) ->> 3 * 14
(S) ->> 42
```

S-Weg 2:

```
          3 * (9+5)
(S) ->> 3*9 + 3*5
(S) ->> 27 + 3*5
(S) ->> 27 + 15
(S) ->> 42
```

S-Weg 3:

```
          3 * (9+5)
(S) ->> 3*9 + 3*5
(S) ->> 3*9 + 15
(S) ->> 27 + 15
(S) ->> 42
```

Kapitel 8.2

Auswertung einfacher funktionaler Ausdrücke

Bsp. 1: Auswerten von Funktionsaufrufen

```
simple x y z :: Int -> Int -> Int -> Int
simple x y z = (x + z) * (y + z)
```

Der Ausdruck `simple 2 3 4` hat als Semantik (oder Bedeutung) den Wert 42:

ES-Weg 1:

```
                    simple 2 3 4
(Expandieren)   ->> (2 + 4) * (3 + 4)
(Simplifizieren) ->> 6 * (3 + 4)
             (S) ->> 6 * 7
             (S) ->> 42
```

ES-Weg 2:

```
                    simple 2 3 4
             (E) ->> (2 + 4) * (3 + 4)
             (S) ->> (2 + 4) * 7
             (S) ->> 6 * 7
             (S) ->> 42
```

...und viele weitere ES-Wege; alle zur selben Bedeutung: 42.

Bsp. 2: Auswerten von Funktionsaufrufen

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip _ []           = []
zip [] _           = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs y
```

Der Ausdruck `zip [1,3,5] [2,4,6,8,10]` hat als Semantik (oder Bedeutung) den Wert `[(1,2),(3,4),(5,6)]`:

```
          zip [1,3,5] [2,4,6,8,10]
          -- Syntakt. Zucker der Listennotation auflösen
      ->> zip (1:(3:(5:[]))) (2:(4:(6:(8:(10:[])))))
(E/S) ->> (1,2) : zip (3:(5:[])) (4:(6:(8:(10:[]))))
(E/S) ->> (1,2) : ((3,4) : zip (5:[]) (6:(8:(10:[]))))
(E/S) ->> (1,2) : ((3,4) : ((5,6) : zip [] (8:(10:[]))))
(E/S) ->> (1,2) : ((3,4) : ((5,6) : []))
          -- Syntakt. Zucker für Listennotation einführen
      ->> [(1,2),(3,4),(5,6)]
```

Bsp. 3: Auswerten von Funktionsaufrufen (1)

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))
```

Der Ausdruck `fac 2` hat als Semantik (oder Bedeutung) den Wert 2:

```
fac 2
  (Expandieren)    ->> if 2 == 0 then 1
                       else (2 * fac (2 - 1))
  (Simplifizieren) ->> 2 * fac (2 - 1)
```

Für die Fortführung der Berechnung

- gibt es Freiheitsgrade und damit verschiedene Möglichkeiten.

Zwei dieser Möglichkeiten führen wir in der Folge genauer aus.

Bsp. 3: Auswerten von Funktionsaufrufen (2)

Variante a)

```
                    2 * fac (2 - 1)
(Simplifizieren) ->> 2 * fac 1
(Expandieren)    ->> 2 * (if 1 == 0 then 1
                             else (1 * fac (1-1)))
                 ->> ... in diesem Stil fortfahren
```

Variante b)

```
                    2 * fac (2 - 1)
(Expandieren)    ->> 2 * (if (2-1) == 0 then 1
                       else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(Simplifizieren) ->> 2 * ((2-1) * fac ((2-1)-1))
                 ->> ... in diesem Stil fortfahren
```

Bsp. 3: Auswertung gemäß Variante a)

```
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))

         fac 2
  (E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2 - 1))
  (S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2 - 1))
  (S) ->> (2 * fac (2 - 1))
  (S) ->> 2 * fac 1
  (E) ->> 2 * (if 1 == 0 then 1 else (1 * fac (1 - 1)))
  (S) ->> 2 * (if False then 1 else (1 * fac (1 - 1)))
  (S) ->> 2 * ((1 * fac (1 - 1)))
  (S) ->> 2 * (1 * fac 0)
  (E) ->> 2 * (1 * (if 0 == 0 then 1
                     else (0 * fac (0 - 1))))
  (S) ->> 2 * (1 * (if True then 1
                     else (0 * fac (0 - 1))))
  (S) ->> 2 * (1 * 1)
  (S) ->> 2 * 1
  (S) ->> 2
```

⇝ sog. applikativer Auswertungsstil.

Bsp. 3: Auswertung gemäß Variante b)

```
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))

          fac 2
  (E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2 - 1))
  (S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2 - 1))
  (S) ->> (2 * fac (2 - 1))
  (E) ->> 2 * (if (2-1) == 0 then 1
                 else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
 (2S) ->> 2 * (if False then 1
                 else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
  (S) ->> 2 * (((2-1) * fac ((2-1)-1)))
  (S) ->> 2 * (1 * fac ((2-1)-1))
  (E) ->> 2 * (1 * (if ((2-1)-1) == 0 then 1
                else ((2-1)-1) * fac (((2-1)-1)-1)))
  (E) ->> 2 * (1 * (if True then 1
                else ((2-1)-1) * fac (((2-1)-1)-1)))
 (3S) ->> 2 * (1 * 1)
 (2S) ->> 2
```

$\rightsquigarrow$ sog. normaler Auswertungsstil.

Bsp. 3: Applikative Auswertung von fac 3

```
         fac 3
(E) ->> if 3 == 0 then 1 else (3 * fac (3-1))
(S) ->> if False then 1 else (3 * fac (3-1))
(S) ->> (3 * fac (3-1))
(S) ->> 3 * fac 2
(E) ->> 3 * (if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2-1)))
(S) ->> 3 * (if False then 1 else (2 * fac (2-1)))
(S) ->> 3 * ((2 * fac (2-1)))
(S) ->> 3 * (2 * fac 1)
(E) ->> 3 * (2 * (if 1 == 0 then 1 else (1 * fac (1-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (if False then 1 else (1 * fac (1-1))))
(S) ->> 3 * (2 * ((1 * fac (1-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * fac 0))
(E) ->> 3 * (2 * (1 * (if 0 == 0 then 1 else (0 * fac (0-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * (if True then 1 else (0 * fac (0-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * (1)))
(S) ->> 3 * (2 * 1)
(S) ->> 3 * 2
(S) ->> 6
```

Bsp. 3: Normale Auswertung von fac 3 (1)

```
         fac 3
(E) ->> if 3 == 0 then 1 else (3 * fac (3-1))
(S) ->> if False then 1 else (3 * fac (3-1))
(S) ->> (3 * fac (3-1))
(E) ->> 3 * (if (3-1) == 0 then 1 else ((3-1) * fac ((3-1)-1)))
(S) ->> 3 * (if 2 == 0 then 1 else ((3-1) * fac ((3-1)-1)))
(S) ->> 3 * (if False then 1 else ((3-1) * fac ((3-1)-1)))
(S) ->> 3 * (((3-1) * fac ((3-1)-1)))
(S) ->> 3 * (2 * fac ((3-1)-1))
(E) ->> 3 * (2 * (if ((3-1)-1) == 0 then 1
                    else (((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (if (2-1) == 0 then 1
                    else (((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (if 1 == 0 then 1
                    else (((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1))))
(S) ->> 3 * (2 * (if False then 1
                    else (((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1))))
```

Bsp. 3: Normale Auswertung von fac 3 (2)

```
(S) ->> 3 * (2 * ((((3-1)-1) * fac (((3-1)-1)-1))))
(S) ->> 3 * (2 * ((2-1) * fac (((3-1)-1)-1)))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * fac (((3-1)-1)-1)))
(E) ->> 3 * (2 * (1 *
         (if (((3-1)-1)-1) == 0 then 1
          else ((((3-1)-1)-1) * fac ((((3-1)-1)-1)-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 *
         (if ((2-1)-1) == 0 then 1
          else ((((3-1)-1)-1) * fac ((((3-1)-1)-1)-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 *
         (if (1-1) == 0 then 1
          else ((((3-1)-1)-1) * fac ((((3-1)-1)-1)-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 *
         (if 0 == 0 then 1
          else ((((3-1)-1)-1) * fac ((((3-1)-1)-1)-1)))))
(S) ->> 3 * (2 * (1 *
         (if True then 1
          else ((((3-1)-1)-1) * fac ((((3-1)-1)-1)-1)))))
```

Bsp. 3: Normale Auswertung von fac 3 (3)

```
(S) ->> 3 * (2 * (1 * (1)))
(S) ->> 3 * (2 * (1 * 1))
(S) ->> 3 * (2 * 1)
(S) ->> 3 * 2
(S) ->> 6
```

Bsp. 4: Applikative Auswertung von natSum 3

```
natSum n = if n == 0 then 0 else natSum (n-1) + n
```

```
          natSum 3
(E) ->> if 3 == 0 then 0 else natSum (3-1) + 3
(S) ->> if False then 0 else natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum 2 + 3
(E) ->> (if 2 == 0 then 0 else natSum (2-1) + 2) + 3
(S) ->> (if False then 0 else natSum (2-1) + 2) + 3
(S) ->> (natSum (2-1) + 2) + 3
(S) ->> (natSum 1 + 2) + 3
(E) ->> ...
    ...
(S) ->> 6
```

Übungsaufgabe 8.2.1: Vervollständige die obige Auswertung.

Bsp. 4: Normale Auswertung von natSum 3

```
natSum n = if n == 0 then 0 else natSum (n-1) + n
```

```
         natSum 3
(E) ->> if 3 == 0 then 0 else natSum (3-1) + 3
(S) ->> if False then 0 else natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum (3-1) + 3
(E) ->> (if (3-1) == 0 then 0 else natSum ((3-1)-1) + (3-1)) + 3
(S) ->> (if 2 == 0 then 0 else natSum ((3-1)-1) + (3-1)) + 3
(S) ->> (if False then 0 else natSum ((3-1)-1) + (3-1)) + 3
(S) ->> natSum ((3-1)-1) + (3-1) + 3
(E) ->> (if ((3-1)-1) == 0 then 0 else ... ) + (3-1) + 3
    ...
(S) ->> 6
```

Übungsaufgabe 8.2.2: Vervollständige die obige Auswertung.

Ü-Aufgabe 8.2.3: Vervollst. d. applikat. Ausw.

```
natSum n
 | n == 0    = 0
 | otherwise = natSum (n-1) + n
```

```
          natSum 3
(E) ->> | 3 == 0    = 0
        | otherwise = natSum (3-1) + 3
(S) ->> | False = 0
        | True  = natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum 2 + 3
(E) ->> | 2 == 0    = 0
        | otherwise = natSum (2-1) + 2 + 3
(S) ->> | False = 0
        | True  = natSum (2-1) + 2 + 3
(S) ->> natSum (2-1) + 2 + 3
(S) ->> natSum 1 + 2 + 3
(E) ->> ...
    ...
(S) ->> 6
```

Ü-Aufgabe 8.2.4: Vervollst. d. normale Ausw.

```
natSum n
 | n == 0    = 0
 | otherwise = natSum (n-1) + n

       natSum 3
(E) ->> | 3 == 0    = 0
        | otherwise = natSum (3-1) + 3
(S))->> | False = 0
        | True  = natSum (3-1) + 3
(S) ->> natSum (3-1) + 3
(E) ->> | (3-1) == 0 = 0
        | otherwise  = natSum ((3-1)-1) + (3-1) + 3
(S) ->> | False = 0
        | True  = natSum ((3-1)-1) + (3-1) + 3
(S) ->> natSum ((3-1)-1) + (3-1) + 3
(E) ->> | ((3-1)-1) == 0 = 0
        | otherwise      = ...
    ...
(S) ->> 6
```

Übungsaufgabe 8.2.5

Betrachte die Deklaration der Funktion fac:

```
fac n
 | n == 0    = 1
 | otherwise = n * fac (n-1)
```

Werte den Aufruf `fac 3`

1. applikativ
2. nomal

aus.

Übungsaufgabe 8.2.6

Betrachte die Deklaration der Funktionen fun91 und fun91′:

```
fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
 | n >  100 = n - 10
 | n <= 100 = fun91 (fun91 (n+11))
```

```
fun91' :: Integer -> Integer
fun91' n =
 if n > 100 then n - 10 else fun91' (fun91' (n+11))
```

Werte die Aufrufe (fun91 101) und (fun91 100) sowie (fun91′ 101) und (fun91′ 100) für jeweils eine Handvoll Expansionsschritte

1. applikativ
2. nomal

aus.

Übungsaufgabe 8.2.7

Betrachte noch einmal die Deklaration der Funktion zip aus Beispiel 2:

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip _ []            = []
zip [] _            = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs y
```

Löse die in Beispiel 2 kombinierten Expansions-/Simplifikations-Schritte in Einzelschritte auf, wobei $\pi(\cdot,\cdot)$ für Musterpassung stehe:

```
       zip (1:(3:(5:[]))) (2:(4:(6:(8:(10:[])))))
(E) ->>|π(1:(3:(5:[])),_) π(2:(4:(6:(8:(10:[])))),[]) = []
       |π(1:(3:(5:[])),[]) π(2:(4:(6:(8:(10:[])))),_) = []
       |π(1:(3:(5:[])),x:xs) π(2:(4:(6:(8:(10:[])))),y:ys)
         = (x,y) : zip xs ys
(S) ->>| Failed  = []
       | Failed  = []
       | Matched = (1,2) : zip (3:(5:[])) (4:(6:(8:(10:[]))))
(S) ->> (1,2) : zip (3:(5:[])) (4:(6:(8:(10:[]))))
    ->> ... ->> (1,2) : ((3,4) : ((5,6) : []))
```

Vervollständige die begonnene Auswertung.

Kapitel 8.3

Zusammenfassung

Rückblick

...in Kapitel 8.1 und 8.2 haben wir anhand von Beispielen die Auswertung

- einfacher Ausdrücke (ohne Funktionsaufrufe)
- isolierter Funktionsaufrufe (ohne Einbettung in komplexe Ausdrücke) im
  - applikativen
  - normalen

  Auswertungsstil

als maximale (d.h. nicht mehr verlängerbare) Folgen von Simplifikations- und Expansions-Schritten betrachtet.

Für alle Beispiele hat gegolten, dass die konkret gewählte Folge von Expansions- und Simplifikations-Schritten keinen Einfluss auf den Wert des jeweiligen Ausdrucks gehabt hat.

Ausblick

In Kapitel 12 und 13 werden wir zeigen, dass dies kein Zufall ist, sondern stets gilt, auch wenn z.B.

- Funktionsaufrufe in komplexe Ausdrücke eingebettet sind
- applikativer und normaler Auswertungsstil gemischt werden
- in irgendeiner, weder applikativen noch normalen, terminierenden Reihenfolge ausgewertet wird.

Dieses für die Wohldefinierbarkeit der Semantik funktionaler Programmiersprachen zentrale Resultat geht auf Alonzo Church und John Barkley Rosser zurück, das wir hier im Vorgriff auf Kap. 12.3.4 und Kap. 13 anführen:

Theorem 8.4.1 (Church/Rosser, 1936)

Jede maximale terminierende Folge von Expansions- und Simplifikations-Schritten endet mit demselben Wert.

Kapitel 8.4

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 8 (1)

- Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 1, Problem Solving, Programming, and Calculation)
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007. (Kapitel 1, Introduction)
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 9, Formalismen 1: Zur Semantik von Funktionen)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 8 (2)

- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 1, Introducing functional programming)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 1, Introducing functional programming)

Kapitel 9

Programmentwicklung, Programmverstehen

Kapitel 9.1

Programmentwicklung

Exercitatio artem parat.
Übung verschafft Geschicklichkeit.

Tacitus (um 55 - um 120 n.Chr.)
röm. Geschichtsschreiber

Systematischer Programmentwurf

Grundsätzlich gilt:

- Das Finden eines algorithmischen Lösungsverfahrens
  - ist ein kreativer Prozess
  - kann (deshalb) nicht vollständig automatisiert werden

Dennoch gibt es

- Vorgehensweisen und Faustregeln

die die Aussicht, erfolgreich zu sein, erhöhen.

Eine Vorgehensweise für die

- systematische Entwicklung rekursiver Programme

wollen wir in der Folge betrachten.

Systematische Programmentwicklung

...für rekursive Programme in einem 5-schrittigen Prozess.

5-schrittiger Entwurfsprozess (Graham Hutton, 2007):

1. Lege die (Daten-) Typen fest.
2. Führe alle relevanten Fälle auf.
3. Lege die Lösung für die einfachen (Basis-) Fälle fest.
4. Lege die Lösung für die übrigen Fälle fest.
5. Verallgemeinere und vereinfache das Lösungsverfahren.

Dieses Vorgehen werden wir an drei Beispielen demonstrieren.

Repetitio est mater studiorum.
Wiederholung ist die Mutter der Studien.

lat., sprichwörtl.

Bsp. 1: Aufsummieren

...der Elemente einer Liste ganzer Zahlen.

- Schritt 1: Lege die (Daten-) Typen fest

```
sum :: [Integer] -> Integer
```

- Schritt 2: Führe alle relevanten Fälle auf

```
sum []     =
sum (n:ns) =
```

- Schritt 3: Lege die Lösung für die Basisfälle fest

```
sum []     = 0
sum (n:ns) =
```

Bsp. 1: Aufsummieren (fgs.)

- Schritt 4: Lege die Lösung für die übrigen Fälle fest

```
sum []     = 0
sum (n:ns) = n + sum ns
```

- Schritt 5: Verallgemeinere u. vereinfache das Lösungsverf.

```
5a) sum :: Num a => [a] -> a

5b) sum = foldr (+) 0
```

Gesamtlösung nach Schritt 5:

```
sum :: Num a => [a] -> a
sum = foldr (+) 0
```

Bsp. 2: Streichen

...der ersten n Elemente einer Liste beliebigen Elementtyps.

- Schritt 1: Lege die (Daten-) Typen fest

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
```

- Schritt 2: Führe alle relevanten Fälle auf

```
drop 0 []          =
drop 0 (x:xs)      =
drop (n+1) []      =
drop (n+1) (x:xs)  =
```

- Schritt 3: Lege die Lösung für die Basisfälle fest

```
drop 0 []          = []
drop 0 (x:xs)      = x:xs
drop (n+1) []      = []
drop (n+1) (x:xs)  =
```

Bsp. 2: Streichen (fgs.)

- Schritt 4: Lege die Lösung für die übrigen Fälle fest

```
drop 0 []           = []
drop 0 (x:xs)       = x:xs
drop (n+1) []       = []
drop (n+1) (x:xs) = drop n xs
```

- Schritt 5: Verallgemeinere u. vereinfache das Lösungsv.

```
5a) drop :: Integral b => b -> [a] -> [a]

5b) drop 0 xs           = xs
    drop (n+1) []       = []
    drop (n+1) (x:xs) = drop n xs

5c) drop 0 xs           = xs
    drop _ []           = []
    drop (n+1) (_:xs) = drop n xs
```

Bsp. 2: Streichen (fgs.)

Gesamtlösung nach Schritt 5:

```
drop :: Integral b => b -> [a] -> [a]
drop 0 xs           = xs
drop _ []           = []
drop (n+1) (_:xs) = drop n xs
```

Hinweis:

- Muster der Form `(n+1)` werden von neueren Haskell-Versionen nicht mehr unterstützt. Deshalb:

```
drop :: Integral b => b -> [a] -> [a]
drop 0 xs     = xs
drop _ []     = []
drop n (_:xs) = drop (n-1) xs
```

Bsp. 3: Entfernen

... des letzten Elements einer nichtleeren Liste beliebigen Elementtyps.

- Schritt 1: Lege die (Daten-) Typen fest

```
rmLast :: [a] -> [a]
```

- Schritt 2: Führe alle relevanten Fälle auf

```
rmLast (x:xs) =
```

- Schritt 3: Lege die Lösung für die Basisfälle fest

```
rmLast (x:xs) | null xs   = []
              | otherwise =
```

Bsp. 3: Entfernen (fgs.)

- Schritt 4: Lege die Lösung für die übrigen Fälle fest

```
rmLast (x:xs) | null xs   = []
              | otherwise = x : rmLast xs
```

- Schritt 5: Verallgemeinere u. vereinfache das Lösungsverf.

```
5a) rmLast :: [a] -> [a] -- keine Verallg. moegl.
5b) rmLast [_]    = []
    rmLast (x:xs) = x : rmLast xs
```

Gesamtlösung nach Schritt 5:

```
rmLast :: [a] -> [a]
rmLast [_]    = []
rmLast (x:xs) = x : rmLast xs
```

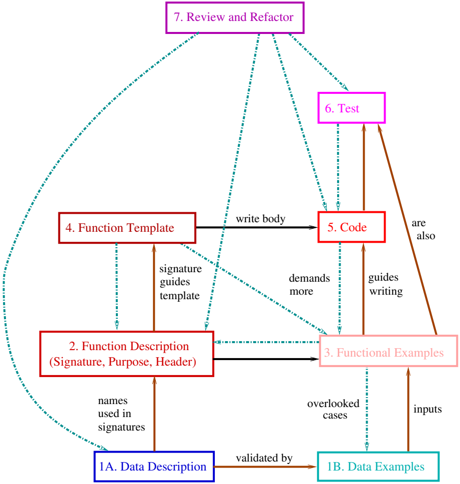
Verfeinerter Entwurfsprozess

Norman Ramsey (2014) schlägt einen vergleichbaren 7- bzw. 8-schrittigen Entwurfsprozess vor, der einen Vorschlag von Matthias Felleisen et al. (2001) verfeinert:

1. A.&B. Beschreibe die Daten, die die Funktion benutzt.
2. Beschreibe mithilfe der Signatur, einer Kopfzeile und eine Aufgabenbeschreibung, was die Funktion leistet.
3. Gib Beispiele an, die veranschaulichen und zeigen, was die Funktion leistet.
4. Schreibe ein Skelett (eine Definition mit noch auszufüllenden Lücken) der Funktion (engl. template).
5. Vervollständige das Skelett zu einer vollständigen Funktionsimplementierung (engl. code).
6. Teste die Funktion.
7. Beurteile die Funktion und refaktorisiere sie bei Bedarf.

Graphische Darstellung

...des Entwurfsprozesses nach Ramsey:



Solid arrows: show initial design
Dotted arrows: show feedback

Norman Ramsey.
On Teaching How to Design Programs.
In Proceedings ICFP 2014, Figure 1, p. 154.

Kapitel 9.2

Programmverstehen

Exercitatio optimus magister.
Übung ist der beste Lehrmeistert.

lat., sprichwörtl.

Motivation

...eine Binsenweisheit:

- Programme werden häufiger gelesen als geschrieben!

Deshalb ist es wichtig

- Strategien

zu besitzen, die durch geeignete Vorgehensweisen und Fragen an ein Programm helfen, Programme

- zu lesen und zu verstehen, besonders fremde Programme.

Vier Vorgehensweisen

...im Überblick:

1) Lesen des Programmtexts.
2) Nachdenken über das Programm, Ziehen von Schlussfolgerungen (z.B. Verhaltenshypothesen).

Zur Überprüfung von Verhaltenshypothesen, aber auch zu deren Auffinden kann hilfreich sein:

3) Gedankliche und/oder 'Papier- und Bleistift'-Programmausführung.

Auf einer konzeptuell anderen Ebene kann das Verständnis des Ressourcenbedarfs helfen, ein Programm zu verstehen:

4) Analyse des Zeit- und Speicherplatzverhaltens eines Programms.

Ein Beispiel

...zur Illustration:

```
mapWhile :: (a -> b) -> (a -> Bool) -> [a] -> [b]
mapWhile f p [] = []                            (mW1)
mapWhile f p (x:xs)
 | p x       = f x : mapWhile f p xs            (mW2)
 | otherwise = []                               (mW3)
```

(1) Lesen des Programmtexts

Lesen der Funktionssignatur liefert bereits Einsichten in Art und Typ von Argumenten und Resultat. Im Beispiel:

- `mapWhile` erwartet als Argumente eine
  - Funktion `f` eines nicht weiter eingeschränkten Typs `(a -> b)`
  - Eigenschaft `p` von Objekten vom Typ `a`, genauer ein Prädikat (oder Wahrheitswertfunktion) vom Typ `(a -> Bool)`
  - Liste `l` von Elementen vom Typ `a`

  `mapWhile` liefert als Resultat
  - eine Liste l' von Elementen vom Typ `b`

...Lesen zusätzlich eingestreuter Programmkommentare, möglicherweise auch in Form von Vor- und Nachbedingungen ermöglicht (hoffentlich)

- weitere und tiefergehende Einsichten.

(1) Lesen des Programmtexts (fgs.)

Lesen der Funktionsdefinition liefert erste weitere Einsichten in Verhalten und Bedeutung des Programms. Im Beispiel:

- Angewendet auf die leere Liste `[]`, ist gemäß (mW1) das Resultat die leere Liste `[]`.
- Angewendet auf eine nichtleere Liste, deren Kopfelement `x` Eigenschaft `p` erfüllt, ist gemäß (mW2) das Element `(f x)` vom Typ `b` das Kopfelement der Resultatliste, deren Rest sich durch den rekursiven Aufruf auf die Restliste `xs` ergibt.
- Erfüllt Kopfelement `x` die Eigenschaft `p` nicht, bricht gemäß (mW3) die Berechnung ab und liefert als Resultat die leere Liste `[]` zurück.

(2) Nachdenken über das Programm

Nachdenken liefert tiefere Einsichten über Programmverhalten und -bedeutung, auch durch den Beweis von Eigenschaften, die das Programm besitzt. Im Beispiel:

- Für alle Funktionen `f`, Prädikate `p` und endliche Listen `xs` können wir folgende Gleichheiten beweisen:

  ```
  mapWhile f p xs = map f (takeWhile p xs)   (mW4)
  mapWhile f (const True) xs = map f xs      (mW5)
  mapWhile id p xs = takeWhile p xs          (mW6)
  ```

  wobei (mW5) und (mW6) Folgerungen aus (mW4) sind.

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
9.1
9.2
9.3
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V

(3) Gedankliche, Papier- u. Bleistiftausführung

...hilft, Verhaltenshypothesen zu validieren oder zu generieren durch Berechnung der Funktionswerte für ausgewählte Argumente. Im Beispiel:

```
mapWhile (+1) (>=7) [8,12,7,3,16]
 ->> (8+1) : mapWhile (+1) (>=7) [12,7,3,16]    wg. (mW2)
 ->> 9 : (12+1) : mapWhile (+1) (>=7) [7,3,16]  wg. (mW2)
 ->> 9 : 13 : (7+1) : mapWhile (+1) (>=7) [3,16] wg. (mW2)
 ->> 9 : 13 : 8 : []                             wg. (mW3)
 ->> [9,13,8]

mapWhile (+1) (>=0) [8,12,7,3,16]
 ->> ...
 ->> [9,13,8,4,17]
```

(4) Analyse des Ressourcenverbrauchs

...des Programms liefert:

- Für das Zeitverhalten: Unter der Annahme, dass `f` und `p` jeweils in konstanter Zeit ausgewertet werden können, ist die Auswertung von `mapWhile` linear in der Länge der Argumentliste, da im schlechtesten Fall die gesamte Liste durchgegangen wird.
- Für das Speicherverhalten: Der Platzbedarf ist konstant, da das Kopfelement stets schon ‘ausgegeben’ werden kann, sobald es berechnet ist (siehe unterstrichene Resultatteile):

```
mapWhile (+1) (>=7) [8,12,7,3,16]
 ->> (8+1) : mapWhile (+1) (>=7) [12,7,3,16]
 ->> 9 : (12+1) : mapWhile (+1) (>=7) [7,3,16]
 ->> 9 : 13 : (7+1) : mapWhile (+1) (>=7) [3,16]
 ->> 9 : 13 : 8 : []
 ->> [9,13,8]
```

Zusammenfassung (1)

...jede der vorgestellten 4 Vorgangsweisen

- bietet einen anderen Zugang zum Verstehen eines Programms.
- liefert für sich einen Mosaikstein zu seinem Verstehen, aus denen sich durch Zusammensetzen ein vollständig(er)es Gesamtbild ergibt.
- kann 'von unten nach oben' auch auf Systeme von auf sich wechselweise abstützenden Funktionen angewendet werden.
- bietet mit Vorgangsweise (3) der gedanklichen oder Papier- und Bleistiftausführung eines Programms einen stets anwendbaren (Erst-) Zugang zum Erschließen der Programmbedeutung an.

Zusammenfassung (2)

Lesbarkeit und Verständlichkeit eines Programms sollten

- immer schon beim Schreiben des Programms bedacht werden

...nicht zuletzt im eigenen Interesse!

Programme können grundsätzlich
auf zwei Arten geschrieben werden:
So einfach, dass sie offensichtlich keinen Fehler enthalten;
so kompliziert, dass sie keinen offensichtlichen Fehler enthalten.

C.A.R. 'Tony' Hoare (* 1934)

Turing Award Preisträger 1980

Kapitel 9.3

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 9 (1)

- Matthias Felleisen, Rober B. Findler, Matthew Flatt, Shriram Krishnamurthi. *How to Design Programs: An Introduction to Programming and Computing*. MIT Press, 2001.
- Hugh Glaser, Pieter H. Hartel, Paul W. Garrat. *Programming by Numbers: A Programming Method for Novices*. The Computer Journal 43(4):252-265, 2000.
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007. (Kapitel 6.6, Advice on Recursion)
- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 10, Functionally Solving Problems)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 9 (2)

- Norman Ramsey. *On Teaching How to Design Programs*. In Proceedings of the 19th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2014), 153-166, 2014.
- Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik. Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014. (Kapitel 4, Induktives Definieren)
- Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018. (Kapitel 4, Inductive Definitions)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 9 (3)

- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 7.4, Finding primitive recursive definitions; Kapitel 14, Designing and writing programs; Kapitel 11, Program development; Anhang D, Understanding programs)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 4, Designing and writing programs; Kapitel 7.4, Finding primitive recursive definitions; Kapitel 9.1, Understanding definitions; Kapitel 12.7, Understanding programs)

Teil IV

Funktionale Programmierung

Kapitel 10

Funktionen höherer Ordnung

Kapitel 10.1

Motivation

Funktionen höherer Ordnung

...Bezeichnung für Funktionen, unter deren Argumenten oder Resultaten Funktionen sind.

Damit gilt:

Funktionen höherer Ordnung (oder kurz Funktionale) sind

- spezielle Funktionen.

Kapitel 10.1.1

Beispiele vordefinierter Funktionale

Beispiele vordefinierter Funktionale in Haskell

Funktionen mit funktionalen Resultaten:

```
(+) :: Num a => a -> (a -> a)
((+) 1) :: Num a => (a -> a)                     -- Inkrementfkt.
splitAt :: Int -> ([a] -> ([a],[a]))
(splitAt 42) :: ([a] -> ([a],[a]))   -- Listenteilungsfkt.
```

Funktionen mit funktionalen Argumenten und Resultaten:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> (b -> c))
(curry binom') :: (Integer -> (Integer -> Integer))
                                                   -- binom-Fkt.
uncurry :: (a -> (b -> c)) -> ((a,b) -> c)
(uncurry binom) :: ((Integer,Integer) -> Integer)
                                                  -- binom'-Fkt.
zipWith :: (a -> (b -> c)) -> ([a] -> ([b] -> [c]))
(zipWith (&&)) :: ([Bool] -> ([Bool] -> [Bool]))
                                     -- 'Elementweise-und'-Fkt.
```

Kapitel 10.1.2

Beispiele selbstdefinierter Funktionale

Beispiele selbstdef. Funktionale in Haskell

Funktionen mit funktionalen Argumenten (und nichtfunktionalen Resultaten):

```
f :: ((a -> b),a) -> b
f (g,x) = g x

f (fac,5) = 120 :: Integer
f (reverse,"stressed") = "desserts" :: String
f (concat,[['a','b','c'],['d','e'],[],['f']])
 = ['a','b','c','d','e','f'] :: [Char]
...

h :: ((a -> b -> c),a,b) -> c
h (g,x,y) = g x y

h (binom,49,6) = 13.983.816 :: Integer
h ((++),"Hallo"," Welt!") = "Hallo Welt!" :: String
h (zip,['a','b','c'],[True,False])
 = ([('a',True),('b',False)] :: [(Char,Bool)]
...
```

Bemerkung

...funktionale Programmiersprachen und Programmierung haben eine Präferenz für curryfizierte Funktionsdefinitionen.

Das erklärt die

- Abwesenheit vordefinierter Funktionale mit funktionalen Argumenten ohne funktionale Resultate

in Haskell.

Die Eingangsbeispiele

...zeigen:

Funktionen höherer Ordnung kommen in funktionalen Sprachen

- völlig beiläufig und natürlich daher.

So beiläufig, dass sie in funktionaler Programmierung

- der Regelfall, nicht die Ausnahme

sind.

Kapitel 10.1.3

Beispiele aus der Mathematik

Funktionen höherer Ordnung

...in der Mathematik, z.B. in der Analysis:

- Differentialrechnung:

  $\frac{df(x)}{dx}$ $\rightsquigarrow$ `ableitung f x`

  ...Steigung der Funktion `f` an der Stelle `x`.

- Integralrechnung:

  $\int_a^b f(x)\,dx$ $\rightsquigarrow$ `integral f a b`

  ...Fläche unterhalb d. Fkt. `f` zwischen `a` und `b`.

- Stetigkeitstheorem:

  Die Komposition zweier stetiger Funktionen ist eine stetige Funktion, d.h. die Komposition der Funktionen $f, g : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$, $(f \circ g) : (\mathrm{IR} \to \mathrm{IR}) \times (\mathrm{IR} \to \mathrm{IR}) \to (\mathrm{IR} \to \mathrm{IR})$, mit $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ist stetig, wenn f und g stetig sind.

Kapitel 10.1.4

Beispiele aus anderen Informatikbereichen

Funktionen höherer Ordnung

...in anderen Informatikbereichen, z.B. der Semantik von Programmiersprachen:

- Die Bedeutung der while-Schleife im denotationellen Stil

$$[\![\texttt{while b do } \pi \texttt{ od}]\!]_{ds} : \Sigma \to \Sigma$$

...als kleinster Fixpunkt der Funktion höherer Ordnung *FIX* auf der Menge der Zustandstransformationen mit

  - V: Menge der Programmvariablen; D: Datenbereich.
  - $\Sigma =_{df} \{ \sigma \mid \sigma : V \to D \}$: Menge der (Prg.-) Zustände.
  - $ZT = [\Sigma \to \Sigma] =_{df} \{ zt \mid zt : \Sigma \to \Sigma \}$
    $= \{ zt \mid zt : (V \to D) \to (V \to D) \}$:
    Menge der (Prg.-) Zustandstransformationen.
  - $FIX : ((\Sigma \to \Sigma) \to (\Sigma \to \Sigma)) \to (\Sigma \to \Sigma)$: Fixpunktzustandstransformationsfunktional, das den kleinsten Fixpunkt des Argumentfunktionals liefert.

(siehe z.B. VU 185.278 Theoretische Informatik und Logik)

Die aufgefaltete Signatur

...des Fixpunktzustandstransformationsfunktionals:

$$FIX : (((V \to D) \to (V \to D)) \to ((V \to D) \to (V \to D)))$$

$$\to ((V \to D) \to (V \to D))$$

$$\underbrace{FIX : \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}} \to \underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}})}_{\text{Zustandstransf.-fkt.}} \to \underbrace{(\underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}} \to \underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}})}_{\text{Zustandstransf.-fkt.}})}_{\text{Zustandstransformationsfunktionenfunktion}} \to \underbrace{(\underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}} \to \underbrace{(V \to D)}_{\text{Zustandsfkt.}})}_{\text{Zustandstransformationsfunktion}}}_{\text{Zustandsfunktionentransformationsfunktionenfunktionenfixpunktfunktion}}$$

Funktionen erster und höherer Ordnung

...am Beispiel von *FIX*:

- Zustandsfunktion:
  $(V \to D)$
  Funktion 1. Ordnung: Elementare Werte werden auf elementare Werte abgebildet.
- Zustandsfunktionentransformationsfunktion:
  $(V \to D) \to (V \to D)$
  Funktion höherer Ordnung 1. Stufe: Funktionen 1. Ordnung werden auf Funktionen 1. Ordnung abgebildet.
- Zustandsfunktionentransformationsfunktionenfunktion:
  $((V \to D) \to (V \to D)) \to ((V \to D) \to (V \to D))$
  Funktion höherer Ordnung 2. Stufe: Funktionen höherer Ordnung 1. Stufe werden auf Funktionen höherer Ordnung 1. Stufe abgebildet.

Funktionen erster und höherer Ordnung (fgs.)

- Zustandsfunktionentransformationsfunktionenfunktionen-fixpunktfunktion:

$$(((V \to D) \to (V \to D)) \to ((V \to D) \to (V \to D))) \to ((V \to D) \to (V \to D))$$

Funktion höherer Ordnung 3. Stufe: Funktionen höherer Ordnung 2. Stufe werden auf Funktionen höherer Ordnung 1. Stufe abgebildet.

...oder kürzer:

Fixpunktzustandstransformationsfunktional!

Funktionen höherer Ordnung

...können dennoch überraschen oder gar verstören:

"The functions I grew up with, such as the sine, the cosine, the square root, and the logarithm were almost exclusively real functions of a real argument. [...] I was really ill-equipped to appreciate functional programming when I encountered it: I was, for instance, totally baffled by the shocking suggestion that the value of a function could be another function." $^{(*)}$

Edsger W. Dijkstra (1930-2002)
Turing Award Preisträger 1972

$^{(*)}$ Zitat aus: Introducing a course on calculi. Ankündigung einer Lehrveranstaltung an der University of Texas, Austin, 1995.

Mit Funktionen höherer Ordnung

...machen wir den Schritt von applikativer zu funktionaler Programmierung!

Frei nach Hegel:

Der Mensch
wird erst durch Arbeit
zum Menschen.

Georg W.F. Hegel (1770-1831)
dt. Philosoph

...auf den Punkt gebracht:

Die funktionale Programmierung
wird erst durch Funktionen höherer Ordnung
zu funktionaler Programmierung.

Mit Fug und Recht

...die vollumfängliche Integration von Funktionen höherer Ordnung als erstrangige Elemente (engl. first-class citizens)

- ist charakteristisch und kennzeichnend für funktionale Programmierung.
- hebt funktionale Programmierung von anderen Programmierparadigmen ab.
- ist wesentliches sprachliches Mittel funktionaler Sprachen für extrem ausdruckskräftige, elegante und flexible Programmiermethoden, insbesondere zur Unterstützung von Wiederverwendung.

Kapitel 10.2

Funktionale Abstraktion

Abstraktionsprinzipien

Kennzeichnendes Strukturierungsprinzip für

- Prozedurale Sprachen: Prozedurale Abstraktion
  - Operanden werden zu Parametern von Prozeduren.
- Funktionale Sprachen: Funktionale Abstraktion
  - 1-ter Stufe: Funktionen

    $\rightsquigarrow$ Nichtfunktionale Operanden werden zu Parametern von Funktionen (funktionales Analogon zu prozeduraler Abstraktion).
  - Höherer Stufe: Funktionen höherer Ordnung

    $\rightsquigarrow$ Verknüpfungsvorschriften werden zu funktionalen Parametern von Funktionen höherer Ordnung.

Kapitel 10.2.1

Funktionale Abstraktion 1. Stufe

Funktionale Abstraktion 1-ter Stufe (1)

Idee: Operanden werden zu Parametern von Funktionen.

Beispiel: Statt viele strukturell gleiche Ausdrücke wie

```
(5 * 37 + 13) * (37 + 5 * 13)
(15 * 7 + 12) * (7 + 15 * 12)
(25 * 3 + 10) * (3 + 25 * 10)
...
```

...immer wieder von vorn hinzuschreiben und auszuwerten, führe eine funktionale Abstraktion durch, d.h. schreibe eine Funktion, die die Operanden des Ausdrucksmusters als Parameter erhält:

```
f :: (Int,Int,Int) -> Int
f (a,b,c) = (a * b + c) * (b + a * c)
```

und mit den ursprünglichen Ausdrucksoperanden(werten) aufgerufen wird.

Funktionale Abstraktion 1-ter Stufe (2)

Beispiel (fgs.): Die Funktion `f` erlaubt uns die gemeinsame Berechnungsvorschrift `(a * b + c) * (b + a * c)` der strukturell gleichen Ausdrücke wiederzuverwenden:

```
f (5,37,13) ->> 20.196
f (15,7,12) ->> 21.879
f (25,3,10) ->> 21.930
...
```

Gewinn: Wiederverwendung der gemeinsamen Berechnungsvorschrift durch

- funktionale Abstraktion.

Kapitel 10.2.1

Funktionale Abstraktion höherer Stufe

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (1)

Idee: Verknüpfungsvorschriften werden zu funktionalen Parametern einer Funktion höherer Ordnung.

Beispiel: (siehe Fethi Rabhi, Guy Lapalme. Algorithms - A Functional Approach, Addison-Wesley, 1999, S. 7f.):

- Fakultätsfunktion:

```
fac n | n==0    = 1
      | n>0     = n * fac (n-1)
```

- Summe der n ersten natürlichen Zahlen:

```
natSum n | n==0   = 0
         | n>0    = n + natSum (n-1)
```

- Summe der n ersten natürlichen Quadratzahlen:

```
natQuSum n | n==0   = 0
           | n>0    = n*n + natQuSum (n-1)
```

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (2)

Beobachtung:

- Die Definitionen von `fac`, `natSum` und `natQuSum` folgen demselben Rekursionsschema und der strukturell selben Verknüpfungsvorschrift ihrer Argumente.

Dieses gemeinsame Rekursionsschema und die Verknüpfungsvorschrift sind gekennzeichnet durch die Festlegung von im

- Basisfall: eines Basiswerts.
- Rekursionsfall: einer Verknüpfungsvorschrift des Argumentwerts `n` und des Funktionswerts für `(n-1)`.

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (3)

Diese Gemeinsamkeit legt es nahe

- Rekursionsschema
- Verknüpfungsvorschrift
- Basiswert

herauszuziehen, zu abstrahieren; eine Abstraktion höherer Stufe.

Das ergibt folgendes Rekursionsschema:

```
rekSchema :: Int -> (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int
rekSchema basiswert verknuepfe n
 | n==0 = basiswert
 | n>0  = verknuepfe n (rekSchema basiswert verknuepfe (n-1))
```

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (4)

...diese funktionale Abstraktion höherer Stufe erlaubt nun, die Implementierungen von

- `fac`, `natSum` und `natQuSum`

zu ersetzen durch passende Aufrufe der

- Funktion höherer Ordnung `rekSchema`

der die Verknüpfungsvorschriften von `fac`, `natSum` und `natQuSum` über den funktionalen Parameter `verknuepfe` übergeben werden.

Funktionale Abstraktion höherer Stufe (5)

Redefinition der Funktionen mittels `rekSchema`:

```
fac      = rekSchema 1 (*)
natSum   = rekSchema 0 (+)
natQuSum = rekSchema 0 (\x y -> x*x + y)
```

...alternativ argumentbehaftet:

```
fac n      = rekSchema 1 (*) n
natSum n   = rekSchema 0 (+) n
natQuSum n = rekSchema 0 (\x y -> x*x + y) n
```

Gewinn: Wiederverwendung des gemeinsamen Strukturmusters der Funktionen `fac`, `natSum` und `natQuSum` durch

- funktionale Abstraktion höherer Stufe.

Zusammenfassung d. rekSchema-Beispiels (1)

...die Signatur zeigt, dass rekSchema eine Funktion höherer Ordnung ist, die als ein Argument eine Funktion erwartet:

```
rekSchema :: Int -> (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int
```

Beachte: Streng genommen, ist rekSchema eine einstellige Funktion, die aufgerufen mit einem ganzzahligen Argument z eine Funktion höherer Ordnung als Resultat liefert, nämlich den Wert des Funktionsterms (rekSchema z) vom Typ

```
(rekSchema z) :: (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int
```

Die uncurryfizierte Version von rekSchema bzw. mit getauschter Argumentfolge macht deutlicher, dass das Rekursionsschema (u.a.) eine Funktion als Argument erwartet:

```
rekSchema'  :: (Int,(Int -> Int -> Int),Int) -> Int
rekSchema'' :: (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int -> Int
```

Zusammenfassung d. `rekSchema`-Beispiels (2)

Für die Anwendungsbeispiele von `rekSchema` gilt:

	Basiswert	Verknüpfungsvorschrift
`fac`	1	`(*)`
`natSum`	0	`(+)`
`natQuSum`	0	`\x y -> x*x + y`

Übungsaufgabe 10.2.2.1

Ergänze die Deklarationen von

```
rekSchema' :: (Int,(Int -> Int -> Int),Int) -> Int
rekSchema'' :: (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int -> Int
```

zu vollständigen Implementierungen und teste sie mit geeigneten Argumenten.

Zurück zum u. weiter mit d. Eingangsbsp. (1)

- Funktionale Abstraktion 1. Stufe führt von Ausdrücken
  `(5*37+13)*(37+5*13), (15*7+12)*(7+15*12),...`
  zu Funktionen:

```
f:: (Int,Int,Int) -> Int
f (a,b,c) = (a * b + c) * (b + a * c)
```

  Aufrufbeispiele:

```
f (5,37,13) ->> 20.196
f (15,7,12) ->> 21.879
 ...
```

- Funktionale Abstraktion höherer Stufe führt von Funktionen zu Funktionen höherer Ordnung:

```
fho :: (((Int,Int,Int)->Int),Int,Int,Int) -> Int
fho (g,a,b,c) = g (a,b,c)
```

  Aufrufbeispiele:

```
fho (f,5,37,13) ->> 20.196
fho (f,15,7,12) ->> 21.879
...
```

...zusätzlich zur

- freien Wahl der elementaren Argumentwerte

(wie `f`) erlaubt die Funktion höherer Ordnung `fho` auch die

- freie Wahl der Vorschrift sie zu verknüpfen.

Beispiele:

```
f :: Int -> Int -> Int -> Int
f a b c = (a * b + c) * (b + a * c)

g :: Int -> Int -> Int -> Int
g a b c = a^b `div` c

h :: Int -> Int -> Int -> Int
h a b c = if (a `mod` 2 == 0) then b else c
```

Zurück zum u. weiter mit d. Eingangsbsp. (3)

Aufrufbeispiele:

```
fho (f,2,3,5) ->> f 2 3 5
              ->> (2*3+5)*(3+2*5)
              ->> (6+5)*(3+10)
              ->> 11*13
              ->> 143

fho (g,2,3,5) ->> g 2 3 5
              ->> 2^3 `div` 5
              ->> 8 `div` 5
              ->> 1

fho (h,2,3,5) ->> h 2 3 5
              ->> if (2 `mod` 2 == 0) then 3 else 5
              ->> if (0 == 0) then 3 else 5
              ->> if True then 3 else 5
              ->> 3
```

Kapitel 10.2.3

Zusammenfassung

Zusammenfassung

...Gewinn durch funktionale Abstraktion:

- Wiederverwendung

und dadurch kürzerer, verlässlicherer, wartungsfreundlicherer Code.

Zwingend erforderlich für erfolgreiches Gelingen:

- Funktionen höherer Ordnung (oder kurz Funktionale).

Als Abschluss:

- Der allgemeinste Typ des Funktionals rekSchema (s.a. Kap. 11 und Kap. 14) ist:

```
rekSchema :: (Num a, Ord a) =>
                  b -> (a -> b -> b) -> a -> b
```

Kapitel 10.3

Funktionen als Argument

Kapitel 10.3.1

Beispiele

Funktionen als Argument: 1-tes Beispiel (1)

Betrachte die spezialisierten Vergleichsfunktionen `min`, `max`:

```
min :: Ord a => a -> a -> a
min x y
  | x < y      = x
  | otherwise = y

max :: Ord a => a -> a -> a
max x y
  | x > y      = x
  | otherwise = y
```

...Abstraktion höherer Stufe und herausziehen der Vergleichsoperation erlaubt die Vergleichsfunktionen zu generalisieren...

Funktionen als Argument: 1-tes Beispiel (2)

...zu einer mit einer Wahrheitswertfunktion parametrisierten Funktion höherer Ordnung `extreme`, die `min`, `max` zu redefinieren erlaubt:

```
extreme :: Ord a => (a -> a -> Bool) -> a -> a -> a
extreme wwf m n
 | wwf m n   = m
 | otherwise = n
```

```
min = extreme (<)                   -- argumentfrei
max = extreme (>)
```

```
min x y = extreme (<) x y       -- argumentbehaftet
max x y = extreme (>) x y
```

...oder auch gänzlich (durch Aufrufe v. `extreme`) zu ersetzen:

```
max 17 4 ->> extreme (>) 17 4 ->> 17
min 17 4 ->> extreme (<) 17 4 ->> 4
```

Funktionen als Argument: 2-tes Beispiel (1)

Betrachte die Funktion `zip`:

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
zip  _      _     = []
```

...und die Funktion höherer Ordnung `zipWith`:

```
zipWith :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
zipWith f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith f xs ys
zipWith f  _      _     = []
```

`zipWith` erlaubt `zip` zu implementieren (und zu ersetzen):

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip xs ys  = zipWith v xs ys
               where v :: a -> b -> (a,b)
                     v = (,)  -- (,) Paarbildungsop.
 -- v x y = (x,y) gleichbedeutend zu: v x y = (,) x y
```

Funktionen als Argument: 2-tes Beispiel (2)

...aufgrund der Parametrisierung leistet `zipWith` mehr als `zip` zu implementieren (und ist in diesem Sinn genereller).

Betrachte dazu etwa folgende Beispiele:

```
f :: a -> b -> (a,b)
f x y = (x,y)

g :: a -> a -> [a]
g x y = [x,y]

h :: Num a => a -> a -> a
h x y = x+y

k :: Ord a => a -> a -> Bool
k x y = x > y

zipWith f ['a','b'] [1,2,3] ->> [('a',1),('b',2)]
zipWith g [1,2,3] [5,6,7,8] ->> [[1,5],[2,6],[3,7]]
zipWith h [1,2,3] [10,20,30,40] ->> [11,22,33]
zipWith k [10,20,30] [5,15,35,85] ->> [True,True,False]
```

Funktionen als Argument: 3-tes Beispiel

Transformation der Marken eines benannten Baums bzw. Herausfiltern der Marken mit einer bestimmten Eigenschaft:

```
data Baum a = Leer | Wurzel a (Baum a) (Baum a)

map_Baum :: (a -> a) -> Baum a -> Baum a
map_Baum _ Leer = Leer
map_Baum tf (Wurzel marke ltb rtb) =
 Wurzel (tf marke) (map_Baum tf ltb) (map_Baum tf rtb)

filter_Baum :: (a -> Bool) -> Baum a -> [a]
filter_Baum _ Leer = []
filter_Baum wwf (Wurzel marke ltb rtb)
  | wwf marke = marke : ((filter_Baum wwf ltb)
                ++ (filter_Baum wwf rtb))
  | otherwise = (filter_Baum wwf ltb)
                ++ (filter_Baum wwf rtb)
```

...mithilfe zweier Funktionen höherer Ordnung, die parametrisiert sind in Transformationsfunktion bzw. Wahrheitswertfunktion.

Kapitel 10.3.2

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Funktionen als Argument

- erhöhen die Ausdruckskraft.
- unterstützen Wiederverwendung.
- sind charakteristisch für funktionale Programmierung.

Kapitel 10.4

Funktionen als Resultat

Kapitel 10.4.1

Beispiele

Funktionen als Resultat (1)

...der Regelfall, nicht die Ausnahme in funktionalen Sprachen.

Betrachte zum Beispiel:

```
(+) :: Num a => a -> a -> a
binom :: Integer -> Integer -> Integer
rekSchema :: (Num a, Ord a) =>
               b -> (a -> b -> b) -> a -> b
...
```

Klammerung hebt die funktionalen Resultate besonders hervor:

```
(+) :: Num a => a -> (a -> a)
binom :: Integer -> (Integer -> Integer)
rekSchema :: (Num a, Ord a) =>
               b -> ((a -> b -> b) -> (a -> b))
...
```

Funktionen als Resultat (2)

Wiederholtes Anwenden:

```
iterate :: Int -> (a -> a) -> (a -> a)
iterate n f
 | n > 0     = f . iterate (n-1) f  -- (.) Funktions-
                                    -- komposition
 | otherwise = id
 where
  id :: a -> a            -- Typvariable und Parameter
  id a = a                -- dürfen gleichbenannt sein.
```

```
(iterate 3 square) 2
  ->> (square . square . square . id) 2 ->> 256
```

Vertauschen von Argumenten:

```
flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
flip f x y = f y x
```

```
flip (-) 3 5  ->> (-) 5 3 ->> 2
(flip . flip) ->> id
```

Kapitel 10.4.2

Methoden 1 bis 6

Funktionen als Resultat: Methode 1 (1)

...explizites Ausprogrammieren:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
iterate :: Int -> (a -> a) -> (a -> a)
extreme :: Ord a => (a -> a -> Bool) -> (a -> a -> a)

addFuns :: Num a => (a -> a) -> (a -> a) -> (a -> a)
addFuns f g = \x -> f x + g x

funny :: (Ord a, Num a) => (a -> a) -> (a -> a)
                                     -> (a -> a)
funny f g = \x -> if x >= 0 then (g . f) x
                  else addFuns f g (x+1)
```

Funktionen als Resultat: Methode 1 (2)

Vergleiche die Definitionen von addFuns und addFuns′:

```
addFuns :: Num a => (a -> a) -> (a -> a) -> (a -> a)
addFuns f g = \x -> f x + g x
addFuns' :: Num a => (a -> a) -> (a -> a) -> (a -> a)
addFuns' f g x = f x + g x
```

...und die Typen der zugehörigen definierenden Gleichungen:

```
addFuns f g = \x -> f x + g x :: a -> a (funktional)
addFuns' f g x = f x + g x :: a    (nicht-funktional)
```

Funktionen als Resultat: Methode 2

...partielle Auswertung curryfizierter Funktionen:

```
((+) 1) :: Num a => a -> a
(binom 45) :: Integer -> Integer
(rekSchema 0) :: (Num a, Ord a, Num b) =>
                    (a -> b -> b) -> (a -> b)
(rekSchema 0 (+)) :: (Num a, Ord a) => a -> b
(extreme (<)) :: Ord a => a -> a -> a
(extreme (<) 5) :: (Num a, Ord a) => a -> a
(iterate 5) :: (a -> a) -> (a -> a)
(iterate 5 fac) :: Integer -> Integer
(flip (-)) :: Num a => a -> a -> a
addFuns fac fac :: Integer -> Integer
funny fac fac :: Integer -> Integer
...
```

Funktionen als Resultat: Methode 3

...Operatorabschnitte (als Spezialfall partieller Auswertung für binäre Operatoren und Funktionen):

```
(+1) :: Num a => a -> a           -- Inkrementieren
(1-) :: Num a => a -> a               -- Eins_minus
(+(-1)) :: Num a => a -> a        -- Dekrementieren
(2*) :: Num a => a -> a               -- Verdoppeln
(<2) :: (Num a, Ord a) => a -> a      -- Kleiner 2?
(== True) :: Bool -> Bool                  -- Wahr?
(True &&) :: Bool -> Bool                  -- Wahr?
(42:) :: Num a => a -> [a] -> [a]
                         -- 42 als neuer Listenkopf
(45 `binom`) :: Integer -> Integer     -- 45 über k
(47 `(extreme (<))`) :: (Num a, Ord a) => a -> a
                            -- Minimum aus 47 und x
...
```

Funktionen als Resultat: Methode 4

...Bildung konstanter Funktionen (engl. λ-Lifting):

```
lifting :: a -> (b -> a)
lifting a_const = \x -> a_const
```

Anwendungsbeispiele:

```
lifting 42 "Aller Fragen Antwort"       ->> 42
lifting iterate flip                    ->> iterate
lifting (iterate (+) 3 (\x->x*x)) 42 2 ->> 256
```

Funktionen als Resultat: Methode 5

...als Abänderungen gegebener Funktionen:

```
fac :: Integer -> Integer
fac 0 = 1
fac n = n * fac (n-1)

fac_1 :: Integer -> Integer
fac_1 =
 \n -> if n >= 0
         then fac n          -- Verhalten wie fac
         else (-1)       -- Abweich. Verh. zu fac

fac_2 :: Integer -> Integer
fac_2 =
 \n -> if n >= 0
         then fac n          -- Verhalten wie fac
         else fac (abs n)    -- Abw. Verh. zu fac
```

Funktionen als Resultat: Methode 6

...Komposition von Funktionen:

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)
(f . g) x = f (g x)
```

Wichtige Eigenschaft von (.): Assoziativität

```
(f . (g . h)) = ((f . g) . h) = (f . g . h)
```

Beachte: Funktionskomposition und Funktionsapplikation sind grundverschieden und auseinanderzuhalten:

- Komposition: `(f . g) x = f (g x) = f(g(x))`
- Applikation: `(f g) x = (f g) x = (f(g))(x)`

Übungsaufgabe 10.4.2.1

Überprüfe und teste die unterschiedliche Wirkung von Komposition und Applikation

- Komposition: `(f . g) x = f (g x) = f(g(x))`
- Applikation: `(f g) x = (f g) x = (f(g))(x)`

anhand geeigneter Beispiele für `f`, `g` und `x`.

Beachte, dass sich eine Funktion `f`, die sich mit einer Funktion `g` komponieren lässt, nicht notwendig auf `g` applizieren lässt und umgekehrt.

Gibt es Beispiele für `f`, `g` und `x`, so dass sowohl

```
(f . g) x
```

als auch

```
(f  g) x
```

gültige Ausdrücke sind?

Funktionskomposition: Anwendungsbsp. (1)

Das 4-te Element einer Liste:

```
gib_4tes_Element :: [a] -> a
gib_4tes_Element = head . dreimal_rest

dreimal_rest :: [a] -> [a]
dreimal_rest = tail . tail . tail
```

Das n-te Element einer Liste:

```
gib_ntes_Element :: Int -> [a] -> a
gib_ntes_Element n = (head . (iterate (n-1) tail))
```

...Funktionskomposition ermöglicht Funktionsdefinitionen auf dem (Abstraktions-) Niveau von Funktionen statt von (elementaren) Werten.

Funktionskomposition: Anwendungsbsp. (2)

...Definitionen auf Funktionsniveau sind kürzer und meist einfacher zu verstehen als ihre argumentbehafteten Gegenstücke.

Zum Vergleich einige argumentfreie und argumentbehaftete Implementierungen:

```
gib_4tes_Element :: [a] -> a
gib_4tes_Element = head . dreimal_rest

gib_4tes_Element ls = (head . dreimal_rest) ls
gib_4tes_Element ls = head (dreimal_rest ls)

gib_ntes_Element :: Int -> [a] -> a
gib_ntes_Element = head . (iterate tail)

gib_ntes_Element n = (head . (iterate tail)) n
gib_ntes_Element n lst
 = (head . (iterate tail) n) lst
```

Kapitel 10.4.3

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Funktionen als Resultat

- erhöhen die Ausdruckskraft.
- unterstützen Wiederverwendung.
- sind kennzeichnend für funktionale Programmierung.

Insgesamt: Funktionen gleichberechtigt zu elementaren Werten als Argument und Resultat von Funktionen zuzulassen

- ist maßgeblich für Ausdruckskraft, Eleganz und Prägnanz funktionaler Programmierung.
- zeichnet funktionale Programmierung signifikant vor anderen Programmierparadigmen aus.

Kapitel 10.5

Vordefinierte Funktionale auf Listen

Funktionale auf Listen

...ein wichtiger Spezialfall.

Vordefinierte Listenfunktionale für häufige Problemstellungen in Haskell (und anderen funktionalen Programmiersprachen):

- Transformieren aller Listenelemente mittels einer Abbildungsvorschrift:
  ```
  map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
  ```
- Herausfiltern aller Listenelemente mit einer bestimmten Eigenschaft:
  ```
  filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
  ```
- Aggregieren aller Listenelemente mittels einer Verknüpfungsoperation:
  ```
  foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
  foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
  ```
- ...

Kapitel 10.5.1

Transformieren: Das Funktional `map`

Transformieren: Das Funktional map (1)

Signatur:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
```

Implementierung mittels (expliziter) Rekursion:

```
map f []     = []
map f (l:ls) = (f l) : map f ls
```

Implementierung mittels Listenkomprehension:

```
map f ls = [ f l | l <- ls ]
```

Anwendungsbeispiele:

```
map square [2,4..10] ->> [4,16,36,64,100]
map length ["abc","abcde","ab"] ->> [3,5,2]
map (>0) [4,(-3),2,(-1),0,2]
    ->> [True,False,True,False,False,True]
```

Transformieren: Das Funktional map (2)

Anwendungsbeispiele (fgs.):

```
map (*) [2,4..10]
 ->> [(2*),(4*),(6*),(8*),(10*)] :: [Int -> Int]
map (-) [2,4..10]
 ->> [(2-),(4-),(6-),(8-),(10-)] :: [Int -> Int]
map (>) [2,4..10]
 ->> [(2>),(4>),(6>),(8>),(10>)] :: [Int -> Bool]

[ f 10 | f <- map (*) [2,4..10] ]
   ->> [20,40,60,80,100]
[ f 100 | f <- map (-) [2,4..10] ]
   ->> [-98,-96,-94,-92,-90]
[ f 5 | f <- map (>) [2,4..10] ]
   ->> [False,False,True,True,True]
```

Transformieren: Das Funktional map (3)

Einige Eigenschaften von map:

- Für alle Abbildungsvorschriften f, g gilt:

```
map (\x -> x)       = \x -> x
map (f . g)         = map f . map g
map f . tail        = tail . map f
map f . reverse     = reverse . map f
map f . concat      = concat . map (map f)
map f (xs ++ ys)    = map f xs ++ map f ys
```

- Für strikte (s. Def. 13.4.1) Abbildungsvorschriften f gilt:

```
f . head  =  head . (map f)
```

Kapitel 10.5.2

Filtern: Das Funktional `filter`

Filtern: Das Funktional `filter`

Signatur:

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
```

Implementierung mittels (expliziter) Rekursion:

```
filter p []       = []
filter p (l:ls)
 | p l            = l : filter p ls
 | otherwise      = filter p ls
```

Implementierung mittels Listenkomprehension:

```
filter p ls = [ l | l <- ls, p l ]
```

Anwendungsbeispiel:

```
filter istZweierPotenz [2,4..100] ->> [2,4,8,16,32,64]
```

Kapitel 10.5.3

Aggregieren: Die Funktionale `foldl`, `foldr`

Aggregieren, Falten von Listen: Motivation

Aufgabe: Berechne die Summe der Elemente einer Liste:

```
sum [1,2,3,4,5] ->> 15
```

Zwei Rechenweisen sind naheliegend zur Aufgabenlösung:

- Summieren (bzw. aggregieren, falten) von rechts:
```
(1+(2+(3+(4+5)))) ->> (1+(2+(3+9)))
                  ->> (1+(2+12))
                  ->> (1+14) ->> 15
```
- Summieren (bzw. aggregieren, falten) von links:
```
((((1+2)+3)+4)+5) ->> (((3+3)+4)+5)
                  ->> ((6+4)+5)
                  ->> (10+5) ->> 15
```

...die Funktionale `foldr` und `foldl` systematisieren diese Rechenweisen.

Aggregieren: Das Funktional `foldr` (1)

Signatur (`foldr`: falten, zusammenfassen von rechts):

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

Implementierung mittels (expliziter) Rekursion:

```
foldr f e []     = e
```

$$\texttt{foldr f e (l:ls)} = \underbrace{\texttt{f}\ \underbrace{\texttt{l}}_{\texttt{:: a}}\ \underbrace{\texttt{(foldr f e ls)}}_{\texttt{:: b}}}_{\texttt{:: b}}$$

Es bedeuten:

- `f`: Faltungsvorschrift.
- `e`: Auffangwert, Vorgabewert für leere Argumentliste.
- `[]`, `(l:ls)`: Liste zu aggregierender Werte.

Aggregieren: Das Funktional foldr (2)

Anwendungsbeispiele:

```
foldr (+) 0 [] ->> 0

foldr (+) 0 [2,4..10]
 ->> ((+) 2 ((+) 4 ((+) 6 ((+) 8 ((+) 10 0)))))
 ->> (2 + (4 + (6 + (8 + (10 + 0))))) ->> 30

foldr (*) 1 [] ->> 1

foldr (*) 1 [2,4..10]
 ->> ((*) 2 ((*) 4 ((*) 6 ((*) 8 ((*) 10 1)))))
 ->> (2 * (4 * (6 * (8 * (10 * 1))))) ->> 3.840

foldr (||) False [] ->> False

foldr (||) False [True,False,False]
->> ((||) True ((||) False ((||) False False)))
->> (True || (False || (False || False))) ->> True
```

Aggregieren: Das Funktional foldr (3)

Anwendungsbeispiele (fgs.): Definition einiger Standardfunktionen in Haskell mittels `foldr`:

```
sum :: Num a => [a] -> a
sum ns = foldr (+) 0 ns

prod :: Num a => [a] -> a
prod ns = foldr (*) 1 ns

and :: [Bool] -> Bool
and bs = foldr (&&) True bs

or :: [Bool] -> Bool
or bs = foldr (||) False bs

concat :: [[a]] -> [a]
concat xss = foldr (++) [] xss
```

Aggregieren: Das Funktional `foldl` (1)

Signatur (`foldl`: falten, zusammenfassen von links):

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
```

Implementierung mittels (expliziter) Rekursion:

```
foldl f e []     = e
foldl f e (l:ls) = foldl f (f e  l)  ls
```

$$\underbrace{\texttt{foldl f } \underbrace{(\texttt{f } \underbrace{\texttt{e}}_{::\,a}\ \underbrace{\texttt{l}}_{::\,b})}_{::\,a}\ \underbrace{\texttt{ls}}_{::\,[b]}}_{::\,a}$$

Es bedeuten:

- `f`: Faltungsvorschrift.
- `e`: Auffangwert, Vorgabewert für leere Argumentliste.
- `[]`, `(l:ls)`: Liste zu aggregierender Werte.

Aggregieren: Das Funktional foldl (2)

Anwendungsbeispiele:

```
foldl (+) 0 [] ->> 0

foldl (+) 0 [2,4..10]
 ->> ((+) ((+) ((+) ((+) ((+) 0 2) 4) 6) 8) 10)
 ->> (((((0 + 2) + 4) + 6) + 8) + 10) ->> 30

foldl (*) 1 [] ->> 1

foldl (*) 1 [2,4..10]
 ->> ((*) ((*) ((*) ((*) ((*) 1 2) 4) 6) 8) 10)
 ->> (((((1 * 2) * 4) * 6) * 8) * 10) ->> 3.840

foldl (||) False [] ->> False

foldl (||) False [True,False,False]
 ->> ((||) ((||) ((||) False True) False) False)
 ->> (((False || True) || False) || False) ->> True
```

Aggregieren: Das Funktional `foldl` (3)

Anwendungsbeispiele (fgs.): Alternative Definitionen einiger Standardfunktionen in Haskell mittels `foldl`:

```
sum :: Num a => [a] -> a
sum ns = foldl (+) 0 ns
prod :: Num a => [a] -> a
prod ns = foldl (*) 1 ns

and :: [Bool] -> Bool
and bs = foldl (&&) True bs
or :: [Bool] -> Bool
or bs = foldl (||) False bs

concat :: [[a]] -> [a]
concat xss = foldl (++) [] xss
```

foldr, foldl im Vergleich

foldr: Falten, zusammenfassen von rechts:

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f e []     = e
foldr f e (l:ls) = f l (foldr f e ls)

foldr f e [a1,a2,...,an]
->> a1 `f` (a2 `f`...`f` (an-1 `f` (an `f` e))...)
```

foldl: Falten, zusammenfassen von links:

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl f e []     = e
foldl f e (l:ls) = foldl f (f e l) ls

foldl f e [b1,b2,...,bn]
->> (...((e `f` b1) `f` b2) `f`...`f` bn-1) `f` bn
```

Warum zwei Faltungsfunktionale?

...die Funktionale `foldr` und `foldl` unterscheiden sich in

- Anwendbarkeit
- Effizienz

abhängig vom Anwendungskontext.

Zur Illustration betrachten wir die Implementierungen der Funktionen `reverse` und `concat` aus dem Präludium:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse = foldl (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x

concat :: [[a]] -> [a]
concat = foldr (++) []
```

Zur Anwendbarkeit von `foldl`, `foldr`

Die Implementierung von `reverse` aus dem Präludium:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse = foldl (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x
```

...leistet die gewünschte Listenumkehrung; sie hat dieselbe Bedeutung wie folgende rekursive Implementierung:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse []     = []
reverse (l:ls) = (reverse ls) ++ [l]
```

```
reverse []      ->> []
reverse [1,2,3] ->> [3,2,1]
```

Zur Wirkung von foldl

...im Zusammenspiel mit der Funktion reverse:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse = foldl (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x
```

...für die Argumentlisten [] und [1,2,3]:

```
reverse [] ->> foldl (flip (:)) [] [] ->> []

reverse [1,2,3]
 ->> foldl (flip (:)) [] [1,2,3]
 ->> ((flip (:)) ((flip (:)) ((flip (:)) [] 1) 2) 3)
 ->> ((([] `flip (:)` 1) `flip (:)` 2) `flip (:)` 3)
 ->> (((1 : []) `flip (:)` 2) `flip (:)` 3)
 ->> ((2 : (1 : [])) `flip (:)` 3)
 ->> (3 : (2 : (1 : [])))
 ->> [3,2,1]
```

Zur Wirkung von foldr

..im Zusammenspiel mit der Funktion reverse:

```
rev_untauglich :: [a] -> [a]
rev_untauglich = foldr (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x
```

...für die Argumentlisten [] und [1,2,3]:

```
rev_untauglich [] ->> foldr (flip (:)) [] [] ->> []

rev_untauglich [1,2,3]
 ->> foldr (flip (:)) [] [1,2,3]
 ->> ((flip (:)) 1 ((flip (:)) 2 ((flip (:)) 3 [])))
 ->> (1 `flip (:)` (2 `flip (:)` (3 `flip (:)` [])))
 ->> (1 `flip (:)` (2 `flip (:)` (3 `flip (:)` [])))
 ->> (1 `flip (:)` (2 `flip (:)` ([] : 3)))
 ->> Typunverträglichkeit d. Operanden im Term ([] : 3).
     Auswertungsversuch von rev_untauglich scheitert!
```

Übungsaufgabe 10.5.3.1: (:) statt (flip (:))

Vollziehe ebenfalls mit Papier und Bleistift nach (z.B. für die Argumentliste [1,2,3]), dass sich die Faltungsfunktionale foldl und foldr auch bezüglich (:) als Faltungsoperation unterschiedlich verhalten. Zeige dazu, dass folgender Versuch

- untauglich ist: Auswertungsversuche für nichtleere Listen scheitern aufgrund von Operandenunverträglichkeiten:

```
rev_untauglich' :: [a] -> [a]
rev_untauglich' = foldl (:) []
```

- die Identität auf Listen liefert:

```
rev_id :: [a] -> [a]
rev_id = foldr (:) []
```

  d.h. für alle Listen xs gilt: rev_id xs ->> xs

Zur Effizienz von concat, slow_concat (1)

Vergleiche die Effizienz, Performanz von:

- concat wie im Präludium mittels foldr definiert:

```
concat :: [[a]] -> [a]
concat = foldr (++) []
```

...mit derjenigen von:

- slow_concat mittels foldl definiert:

```
slow_concat :: [[a]] -> [a]
slow_concat = foldl (++) []
```

Zur Effizienz von `concat`, `slow_concat` (2)

...seien (vereinfachend) alle Listen `xsi` v. gleicher Länge l.

Dann hängen die (Kopier-) Kosten der Berechnung von

- ```
  concat [xs1,xs2,...,xsn]
   ->> foldr (++) [] [xs1,xs2,...,xsn]
   ->> xs1 ++ (xs2 ++ (... (xsn ++ [])) ...)
  ```

linear von der Anzahl n der Listen `xsi` ab: $n * l$ (jedes Konkatenieren erfolgt an eine Präfixliste der Länge l); die von

- ```
  slow_concat [xs1,xs2,...,xsn]
   ->> foldl (++) [] [xs1,xs2,...,xsn]
   ->> (... (([] ++ xs1) ++ xs2) ...) ++ xsn
  ```

hingegen quadratisch: $n * (n-1) * l$ (das Konkatenieren erfolgt an sukzessive länger werdende Präfixlisten: $0, l, (l+l)$, $(l+l+l), \ldots, (n-1) * l$.

Zur Effizienz von `concat`, `slow_concat` (3)

...wobei $n * (n-1) * l$ Abschätzung ist der Summe:

$$
\begin{aligned}
& 0 \\
& + \; l \\
& + \; (l + l) \\
& + \; (l + l +) \\
& \ldots \\
& + \; \underbrace{(l + l + \ldots + l)}_{(n-1)\text{-mal}} \\
& = \sum_{i=1}^{n-1} i * l \\
& = \Big(\sum_{i=1}^{n-1} i \Big) * l \\
& = \frac{n * (n-1)}{2} * l
\end{aligned}
$$

Übungsaufgabe 10.5.3.2

Untersuche und vergleiche auch die Effizienz und Performanz der rekursiven Implementierung von reverse:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse []       = []
reverse (l:ls) = (reverse ls) ++ [l]
```

...mit der Effizienz und Performanz der Implementierung aus dem Präludium:

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse = foldl (flip (:)) []
 where flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
       flip f x y = f y x
```

Zusammenfassung

...die Beispiele zeigen, dass sich die Faltungsfunktionale `foldr` und `foldl` unterscheiden können hinsichtlich

- Anwendbarkeit (`foldr`, `foldl` mit Faltungsfunktionen `(flip (:))`, `(:)`)
- Effizienz (`foldr`, `foldl` mit Faltungsfunktion `(++)`)

...Eignung und Wahl von `foldr` und `foldl` sind deshalb problem- und kontextabhängig festzustellen und zu treffen!

Kapitel 10.6

Beispiel: Rechnen mit Funktionen

Rechnen mit Funktionen

...am Beispiel des Algorithmus' von Euklid zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen.

Der Algorithmus von Euklid zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_1$ ist wie folgt:

- Wähle x gleich m und y gleich n.
- Ziehe wiederholt den kleineren der Werte von x und y vom größeren ab.
- Höre auf, wenn x und y denselben Wert haben. Dieser Wert ist der größte gemeinsame Teiler von m und n.

Herkömmlich: Rechnen mit element. Werten

```
type Nat1 = Integer

ggt_euklid_hk :: Nat1 -> Nat1 -> Nat1
ggt_euklid_hk x y
 | x > y  = ggt_euklid_hk (x-y) y
 | x < y  = ggt_euklid_hk x (y-x)
 | x == y = x
```

Zwei Aufrufbeispiele zur Illustration der Arbeitsweise von ggt_euklid_hk:

```
m = 18; n = 12
ggt_euklid_hk m n ->> ggt_euklid_hk 18 12
                  ->> ggt_euklid_hk 6 12 (≙ 18-12 12)
                  ->> ggt_euklid_hk 6 6 (≙ 6 12-6) ->> 6
m′ = 20; n′ = 35
ggt_euklid_hk m′ n′ ->> ggt_euklid_hk 20 35
                    ->> ggt_euklid_hk 20 15 (≙ 20 35-20)
                    ->> ggt_euklid_hk 5 15 (≙ 20-15 15)
                    ->> ggt_euklid_hk 5 10 (≙ 5 15-5)
                    ->> ggt_euklid_hk 5 5 (≙ 5 10-5) ->> 5
```

Funktional: Rechnen mit Funktionen (1)

```
type Nat1      = Integer
data Variable  = X | Y deriving (Eq,Show)
type Variablen = Variable
type Zustand   = (Variablen -> Nat1)
type Sigma     = Zustand

ggt_euklid_fkt :: Sigma -> Sigma
-- ggt_euklid_fkt :: (Variablen -> Nat1) -> (Variablen -> Nat1)
ggt_euklid_fkt sigma
 | sigma X > sigma Y
    = ggt_euklid_fkt (\z -> if z==X then sigma X - sigma Y
                                     else sigma Y)
 | sigma X < sigma Y
    = ggt_euklid_fkt (\z -> if z==X then sigma X
                                     else sigma Y - sigma X)
 | sigma X == sigma Y = sigma

ggt :: Nat1 -> Nat1 -> Nat1
ggt m n = (ggt_euklid_fkt (\z -> if z==X then m else n)) X
```

Funktional: Rechnen mit Funktionen (2)

Zwei Aufrufbeispiele zur Illustation der Arbeitsweise von ggt und ggt_euklid_fkt:

```
m = 18
n = 12
ggt m n
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma1) X
       where sigma1 X = 18
             sigma1 Y = 12
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma2) X
       where sigma2 X = 6  (≙ sigma1 X - sigma1 Y ->> 18-12 ->> 6)
             sigma2 Y = 12 (≙ sigma1 Y ->> 12)
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma3) X
      where sigma3 X = 6 (≙ sigma2 X ->> 6)
            sigma3 Y = 6 (≙ sigma2 Y - sigma2 X ->> 12-6 ->> 6)
 ->> sigma3 X
 ->> 6
```

Funktional: Rechnen mit Funktionen (3)

```
m′ = 20
n′ = 35
ggt m′ n′
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma1) X
       where sigma1 X = 20
             sigma1 Y = 35
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma2) X
       where sigma2 X = 20 (≙ sigma1 X ->> 20)
             sigma2 Y = 15 (≙ sigma1 Y - sigma1 X ->> 35-20 ->> 15)
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma3) X
       where sigma3 X = 5  (≙ sigma2 X - sigma2 Y ->> 20-15 ->> 5)
             sigma3 Y = 15 (≙ sigma2 Y ->> 15)
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma4) X
       where sigma4 X = 5  (≙ sigma3 X ->> 5)
             sigma4 Y = 10 (≙ sigma3 Y - sigma3 X ->> 15-5 ->> 10)
 ->> (ggt_euklid_fkt sigma5) X
       where sigma5 X = 5  (≙ sigma4 X ->> 5)
             sigma5 Y = 5  (≙ sigma4 Y - sigma4 X ->> 10-5 ->> 5)
 ->> sigma5 X
 ->> 5
```

Beachte

...formal argumentiert ist auch die Funktion ggt_euklid_hk eine Funktion, die eine Funktion als Ergebnis hat und insofern mit 'Funktionen rechnet':

```
ggt_euklid_hk :: Nat1 -> (Nat1 -> Nat1)
```

wie die explizite Klammerung der Typsignatur und die Einführung von ggt_euklid_hk′ verdeutlichen:

```
ggt_euklid_hk′ :: (Nat1,Nat1) -> Nat1
ggt_euklid_hk′ (m,n) = ggt_euklid_hk m n
```

Im Unterschied dazu ist ggt_euklid_fkt eine Funktion, die im wahren Sinn mit 'Funktionen rechnet', nämlich Funktionen auf Funktionen abbildet:

```
ggt_euklid_fkt :: (Variablen -> Nat1) -> (Variablen -> Nat1)
```

wie die Expansion der Typsignatur verdeutlicht.

Kapitel 10.7

Zusammenfassung

Zusammenfassung

...Programmierung mit Funktionalen macht

- das Wesen funktionaler Programmierung aus.

...unterstützt insbesondere

- Wiederverwendung von Programmcode.
- Kürzere und meist einfacher zu verstehende Programme.
- Einfachere Herleitung, einfacherer Beweis von Programmeigenschaften (Stichwort: Programmverifikation).
- ...

...vordefinierte Funktionale auf Listen leisten einen wesentlichen Beitrag hierzu.

Kapitel 10.8

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 10 (1)

- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 6, Funktionen höherer Ordnung)
- Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 5, Listen und Funktionen höherer Ordnung)
- Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 5, Polymorphic and Higher-Order Functions; Kapitel 9, More about Higher-Order Functions)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 10 (2)

- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 7, Higher-order functions)
- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 5, Higher-order Functions)
- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 4, Functional Programming)
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 8, Funktionen höherer Ordnung)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 10 (3)

- Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 2.5, Higher-order functional programming techniques)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 9.2, Higher-order functions: functions as arguments; Kapitel 10, Functions as values; Kapitel 19.5, Folding revisited)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 11, Higher-order functions; Kapitel 12, Developing higher-order programs; Kapitel 20.5, Folding revisited)

Kapitel 11

Polymorphie

Polymorphie

Grundbedeutung lt. Duden:

- Vielgestaltigkeit, Verschiedengestaltigkeit

...mit verschiedenen fachspezifischen Bedeutungsausprägungen:

- Chemie: Vorkommen mancher Mineralien in unterschiedlicher Form, mit unterschiedlichen Eigenschaften, aber gleicher chemischer Zusammensetzung.
- Biologie: Vielgestaltigkeit der Blätter oder der Blüte einer Pflanze.
- Sprachwissenschaft: Vorhandensein mehrerer sprachlicher Formen für den gleichen Inhalt, die gleiche Funktion (z.B. verschiedenartige Pluralbildungen in: die Tiere, die Felder, die Wiesen, die Pontons).
- Informatik, speziell Theorie der Programmiersprachen: Vieltypigkeit.

Kapitel 11.1

Motivation

Im programmiersprachlichen Kontext

...unterscheiden wir Polymorphie auf:

- Datentypen (Kap. 11.2)
  - Algebraische Datentypen, `data`
  - Neue Typen, `newtype`
  - Typsynonyme, `type`

  ⇝ Sprachmittel: Typvariablen, Typklassen.
- Funktionen (Kap. 11.3, 11.4)
  - Parametrische Polymorphie (oder echte Polymorphie)
    ⇝ Sprachmittel: Typvariablen.
  - *Ad hoc* Polymorphie (oder unechte Polymorphie, Überladung)
    ⇝ Haskell-spezifisches Sprachmittel: Typklassen.

Typvariablen, Typklassen in Haskell

Typvariablen: Freiwählbare Identifikatoren als Bezeichnungen

- beginnend mit einem Kleinbuchstaben, üblicherweise vom Anfang des Alphabets gewählt (z.B.: `a`, `b`, `fp185A03`,...)
- mit Typen als Wert.

Typklassen: Freiwählbare Identifikatoren als Bezeichnungen

- beginnend mit einem Großbuchstaben (z.B.: `Eq`, `Ord`, `Analysierbar`, `Warnung`,...)
- mit Typen als Instanzen.

Bem: Bezeichnungen für Typnamen, Typ- und Datenwertkonstruktoren sind in Haskell ebenfalls freiwählbare Identifikatoren, die wie die von Typklassen mit einem

- Großbuchstaben beginnen müssen (z.B.: `A`, `B`, `True`, `False`, `String`, `Blatt`, `Wurzel`, `FP185A03`,...).

Kapitel 11.2

Polymorphie auf Datentypen

Polymorphe Datentypen

Definition 11.2.1 (Polymorpher Datentyp)

Ein algebraischer (Daten-) Typ, neuer Typ oder Typsynonym T heißt polymorph, wenn einer oder mehrere Grundtypen der Werte von T in Form einer oder mehrerer Typvariablen als Typparameter angegeben werden.

Beispiele polymorpher Datentyp(deklaration)en:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

newtype Paartripel a b c d = Pt ((a,b),(b,c),(c,d))

type Assoziationsliste a b = [(a,b)]
```

Kapitel 11.2.1

Polymorphe algebraische Datentypen

Bsp. polymorpher algebraischer Datentypen

...Listen, Bäume, Graphen, gewichtete Graphen:

```
type Gewicht = Int

-- Ohne Kontexteinschränkung:

data Liste a = Leer
             | Kopf a (Liste a)

data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

data Graph a = Gph (a -> [a])

data GewichteterGraph a = GGph (a -> [(a,Gewicht)])

-- Mit Kontexteinschränkung:

data Eq a => Liste′ a = Leer′
                      | Kopf′ a (Liste′ a)

data (Eq a, Ord b, Ord c, Num c) => Baum′ a b c
 = Blatt′ a b
   | Wurzel′ (Baum′ a b c) c (Baum′ a b c)
```

Beispiele gültiger Listen- und Baumwerte

```
-- Listenwerte:
Leer :: Liste a

Kopf 17 (Kopf 4 (Kopf (17+4) Leer)) :: Liste Int
Kopf 'a' (Kopf 'e' (Kopf 'i' (Kopf 'o' (Kopf 'u' Leer))))
                                                 :: Liste Char
Kopf True (Kopf (True&&False) (Kopf ((odd . fib) 42) Leer))
                                                 :: Liste Bool

-- Baumwerte:
Blatt "Fun Prog" 8 :: Baum [Char] Int c
Blatt True 3.14 :: Baum Bool Float c
Blatt 'a' 'z' :: Baum Char Char c

Wurzel (Blatt "Fun" 3) True (Blatt "Prog" 4)
                                      :: Baum [Char] Int Bool
Wurzel (Blatt "Fun" 3) (Kopf 42 Leer) (Blatt "Prog" 4)
                               :: Baum [Char] Int (Liste Int)
Wurzel (Blatt "Fun" 3) Leer (Blatt "Prog" 4)
                                 :: Baum [Char] Int (Liste a)
```

Beispiele gültiger Graph- und gew. Graphwerte

```
-- Graphwerte:
data Knoten = K1 | K2 | K3 deriving (Eq,Show)
g :: Knoten -> [Knoten]
g K1 = [K1,K2,K3]
g K2 = [K2,K3]
g K3 = []
g' :: Int -> [Int]
g' = \n -> [n..2*n]          -- gleichbed.: g' n = [n..2*n]
Gph g  :: Graph Knoten
Gph g' :: Graph Int
-- Gewichtete Graphwerte:
gg :: Knoten -> [(Knoten,Gewicht)]
gg K1 = [(K1,0),(K2,17),(K3,4)]
gg K2 = [(K2,0),(K3,42)]
gg K3 = []
gg' :: Int -> [(Int,Gewicht)]
gg' = \n -> [(m,m+1) | m <- [n..2*n]]
GGph gg  :: GewichteterGraph Knoten
GGph gg' :: GewichteterGraph Int
```

Kapitel 11.2.2

Polymorphe neue Typen

Beispiele polymorpher neuer Typen

...Paare, Tripel, Graphen, Relationen, Funktionen u.a.:

```
-- Ohne Kontexteinschränkung:
newtype Unverwechselbar_mit_Typ_a a = Uvb a
newtype Paar a = P (a,a)
newtype Tripelpaar a b c d = TP ((a,b),(b,c),(c,d))
newtype Graph' a = Gph' (a -> [a])
newtype Relation a b = R [(a,b)]
newtype Funktion a b = F (a->b)
-- Mit Kontexteinschränkung:
newtype Ord a => Paar' a = P' (a,a)
newtype (Ord a, Ord b) => Relation' a b = R' [(a,b)]
```

Beispiele gültiger Paar- und Tripelpaarwerte

```
-- Unverwechselbare Werte:
Uvb 4711 :: Unverwechselbar_mit_Typ_a Int
Uvb Leer :: Unverwechselbar_mit_Typ_a (Liste a)
Uvb sqrt :: Unverwechselbar_mit_Typ_a (Float -> Float)

-- Paarwerte:
P (17,4)    :: Paar Int
P ([],[42]) :: Paar [Int]
P ([],[])   :: Paar [a]

-- Tripelpaarwerte:
TP (("Fun",3),(4,odd(length "Prog"),(True,'T'))
   :: Unverwechselbar_mit_Typ_a [Char] Int Bool Char
TP ((fac,'a'),('z',""),("Hallo, Welt!",id) )
   :: Unverwechselbar_mit_Typ_a (Integer -> Integer)
                                Char [Char] (a -> a)
```

Beispiele gültiger Relations-, Funktionswerte

```
-- Graphwerte:

Gph' (\c -> ['a'..c]) :: Graph' Char
Gph' (\n -> [0..n])   :: Graph' Int
Gph' (\b -> [not b]) :: Graph' Bool

-- Relationswerte:

R [(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)] :: Relation Int Int
R [(Leer,42)] :: Relation (Liste a) Int
R [] :: Relation a b

-- Funktionswerte:

F fac :: Funktion Integer Integer
F id  :: Funktion a a
F (\x->(\y->(x > length y))) :: Funktion Int ([a] -> Bool)
```

Kapitel 11.2.3

Polymorphe Typsynonyme

Beispiele polymorpher Typsynonyme

...Sequenzen, Assoziationslisten u.a.:

```
-- Ohne Kontexteinschränkung:
type Sequenz a = [a]
type Ass_Liste a b = [(a,b)]
type MeinTyp a = Unverwechselbar_mit_Typ_a a
type MeinBaum a b c = Baum a b c
type MeinPaar a b = (Funktion a b,Relation a b)
```

...Einschränkungen durch Kontexte für Typaliase nicht erlaubt.

Beispiele gültiger Sequenz-, Ass.-Listenwerte

```
-- Sequenzwerte
leereSequenz = [] :: Sequenz a
intSequenz = [1,2,3,4,6,12] :: Sequenz Int
fktSequenz = [fac,fib,(+1)] :: Sequenz (Integer -> Integer)

Main>:t leereSequenz ->> [a]
Main>:t intSequenz  ->> [Int]
Main>:t fktSequenz  ->> [Integer -> Integer]

-- Assoziationslistenwerte
leereAssListe = [] :: Ass_Liste a b
al = [("Hallo,",6),(" ",1),("Welt!",5)]
                                   :: Ass_Liste String Int
al' =[(fac,"fac"),(fib,"fib"),((+1),"inc")]
                    :: Ass_Liste (Integer -> Integer) String

Main>:t leereAssListe ->> [(a,b)]
Main>:t al ->> [([Char],Int)]
Main>:t al' ->> [(Integer -> Integer,[Char])]
```

Beachte: Die Typen werden zum Grund-, nicht zum Aliastyp aufgelöst (z.B. für `intSequenz` Typ `[Int]` statt Typ `Sequenz Int`).

Beispiele gültiger Mein-‘xy’-Werte

```
-- MeinTyp-Werte
zahlwert = Uvbmta 4711 :: MeinTyp Int
lst_wert = Uvbmta Leer :: MeinTyp (Liste a)
fkt_wert = Uvbmta sqrt :: MeinTyp (Float -> Float)
Main>:t zahlwert ->> Unverwechselbar_mit_Typ_a Int
Main>:t lst_wert ->> Unverwechselbar_mit_Typ_a (Liste a)
Main>:t fkt_wert
      ->> Unverwechselbar_mit_Typ_a (Float -> Float)
-- MeinBaum-Wert
baumwert = Blatt "Fun Prog" 8 :: MeinBaum [Char] Int Bool
Main>:t baumwert ->> Baum [Char] Int c
-- MeinPaar-Wert
paarwert = (F (+1),R []) :: MeinPaar Int Int
Main>:t paarwert ->> (Funktion Int Int,Relation Int Int)
```

Beachte wieder die Auflösung zum Grund-, nicht zum Aliastyp.

Kapitel 11.2.4

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Polymorphie auf Datentypen erlaubt Wiederverwendung von

- Datenstrukturnamen (Typ- und Konstruktornamen) (Gute Namen sind knapp!)

deren Werte strukturell gleich aufgebaut sind und sich nur die Typen ihrer Wertbenennungen unterscheiden.

So sind die drei Baumtypen:

```
Baum Int Int Int
Baum Int Char String
Baum (a->c) (b->c) (a->b)
```

deren Werte sich nur durch die Wertbenennung unterscheiden, alle Instanzen desselben polymorphen Typs:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)
```

Übungsaufgabe 11.2.4.1

Ergänze Beispiele gültiger Werte für folgende Typen:

- Kapitel 11.2.1:

  `Liste' a`
  `Baum' a b c`

- Kapitel 11.2.2:

  `Paar' a`
  `Relation' a b`

- Kapitel 11.2.1, 11.2.2 und 11.2.3:

  `MeinBaum' a b c`
  `MeinPaar' a b`

  mit

```
type MeinBaum' a b c = Baum' a b c
type MeinPaar' a b = Paar' a b
```

Kapitel 11.3

Parametrische Polymorphie auf Funktionen

Parametrisch polymorphe Funktionen

Definition 11.3.1 (Parametrisch polymorphe Fkt.)

Eine Funktion heißt parametrisch polymorph (oder echt polymorph), wenn die Typen eines oder mehrerer ihrer Parameter angegeben durch Typvariablen Werte beliebiger Typen als Argument zulassen.

Beispiele parametrisch polymorpher Funktionen:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)

fst :: (a,b) -> a)
fst (x,_) = x

length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (_:xs) = 1 + length xs

splitAt :: Int -> [a] -> ([a],[a])
splitAt n xs = (take n xs,drop n xs)
```

Parametrische Polymorphie auf Funktionen

...tritt in funktionalen Sprachen beiläufig und ubiquitär auf wie das Beispiel vieler vordefinierter Funktionen zeigt:

- Die Funktionale `curry`, `uncurry`, `flip` und `id`.
- Die Funktionale `map`, `filter`, `foldl` und `foldr`.
- Die Funktionen `fst` und `snd`.
- Die Funktionen `length`, `head` und `tail`.
- ...

Kapitel 11.3.1

Vordefinierte parametrisch polymorphe Funktionen

Die parametrisch polymorphen Funktionale

...curry, uncurry, flip und id auf beliebigen Typen:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry g (x,y) = g x y

flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
flip f x y = f y x

id :: a -> a
id x = x
```

Anwendungsbeispiele:

```
id 3 ->> 3
id ["abc","def"] ->> ["abc","def"]
id fac 5 ->> (id fac) 5 ->> fac 5 ->> 120
```

Die parametrisch polymorphen Funktionale

...map, filter, foldl und foldr auf beliebigen Listentypen:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f xs = [ f x | x <- xs ]

filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter p xs = [ x | x <- xs, p x ]

foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f e []     = e
foldr f e (x:xs) = f l (foldr f e xs)

foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl f e []     = e
foldl f e (x:xs) = foldl f (f e x) xs
```

Die parametrisch polymorphen Funktionen

...fst und snd auf beliebigen Paartypen:

```
fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x

snd :: (a,b) -> b
snd(_,y) = y
```

Die parametrisch polymorphen Funktionen

...length, head und tail auf beliebigen Listentypen:

```
length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (_:xs) = 1 + length xs

head :: [a] -> a
head (x:_) = x

tail :: [a] -> [a]
tail (_:xs) = xs
```

Die parametrisch polymorphen Funktionale

...zip und unzip (‘Reißverschlussfunktionen’) auf beliebigen Listentypen:

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
zip _ _           = []

zip [3,4,5] ['a','b','c','d'] ->> [(3,'a'),(4,'b'),(5,'c')]
zip ["abc","def","geh"] [(3,4),(5,4)]
                          ->> [("abc",(3,4)),("def",(5,4))]

unzip :: [(a,b)] -> ([a],[b])
unzip []          = ([],[])
unzip ((x,y):ps)  = (x:xs,y:ys)
                    where
                    (xs,ys) = unzip ps

unzip [(3,'a'),(4,'b'),(5,'c')] ->> ([3,4,5],['a','b','c'])
unzip [("abc",(3,4)),("def",(5,4))]
                          ->> (["abc","def"],[(3,4),(5,4)])
```

Weitere vordefinierte parametrisch polymorphe

...Funktionale und Funktionen auf beliebigen Listentypen:

`(:)`	`::`	`a->[a]->[a]`	Listenkonstruktor (rechtsassoziativ)
`(!!)`	`::`	`[a]->Int->a`	Projektion auf i-te Komp., Infixop.
`length`	`::`	`[a]->Int`	Länge der Liste
`(++)`	`::`	`[a]->[a]->[a]`	Konkat. zweier Listen
`concat`	`::`	`[[a]]->[a]`	Konkat. mehrerer Listen
`head`	`::`	`[a]->a`	Listenkopf
`last`	`::`	`[a]->a`	Listenendelement
`tail`	`::`	`[a]->[a]`	Liste ohne Listenkopf
`init`	`::`	`[a]->[a]`	Liste ohne Endelement
`splitAt`	`::`	`Int->[a]->([a],[a])`	Aufspalten einer Liste an Position i
`reverse`	`::`	`[a]->[a]`	Umkehren einer Liste

...

Kapitel 11.3.2

Selbstdefinierte parametrisch polymorphe Funktionen

Parametrisch polymorphe Funktionen

...auf (selbstdefinierten) algebraischen Datentypen:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

tiefe :: (Baum a b c) -> Int
tiefe (Blatt _ _) = 0
tiefe (Wurzel ltb _ rtb) = 1 + max (tiefe ltb) (tiefe rtb)

gen_assliste :: (Baum a b c) -> Ass_Liste a b
gen_assliste (Blatt x y)          = [(x,y)]
gen_assliste (Wurzel ltb _ rtb) = (gen_assliste ltb)
                                   ++ (gen_assliste rtb)

plaetten :: (a -> b -> c) -> (Baum a b c) -> (Sequenz c)
plaetten f (Blatt x y)          = [f x y]
plaetten f (Wurzel ltb z rtb) = (plaetten f ltb)
                                 ++ [z]
                                 ++ (plaetten f rtb)
```

Einschränkung parametrischer Polymorphie

...durch Typkontexte bei der Funktionsdefinition:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

wurzelsumme :: Num c => (Baum a b c) -> c
wurzelsumme (Blatt _ _) = 0
wurzelsumme (Wurzel ltb z rtb)
 = z + wurzelsumme ltb + wurzelsumme rtb
```

...bereits bei der Datentypdeklaration:

```
data Num c => Baum' a b c = Blatt' a b
                | Wurzel' (Baum' a b c) c (Baum' a b c)

wurzelsumme' :: Num c => (Baum' a b c) -> c
wurzelsumme' (Blatt' _ _) = 0
wurzelsumme' (Wurzel' ltb z rtb)
 = z + wurzelsumme' ltb + wurzelsumme' rtb
```

wobei der Kontext (`Num c`) auch bei `wurzelsumme'` nötig ist.

Bemerkungen zur Typkontexteinschränkung

Die Einschränkung parametrischer Polymorphie auf numerische Typen als zulässige Instanzen der Typvariable `c` in der Signatur der Funktionen

- `wurzelsumme`, `wurzelsumme'`

ist nötig, weil sich

- beide Funktionen auf die (überladene) Funktion `(+)` abstützen, die ausschließlich für Werte numerischer Typen definiert ist, d.h. für Werte von Typen, die Element der Typklasse `Num` sind (siehe auch Kap. 11.4).

  (Bem.: Ohne Kontext wird in `wurzelsumme'` der Typ `Integer` als Typ für `c` inferiert, nicht dass `c` ein Typ in `Num` ist.)

Kapitel 11.3.3

Zusammenfassung

Zusammenfassung

Parametrische Polymorphie auf Funktionen ermöglicht Wiederverwendung von

- Funktionsnamen (Gute Namen sind knapp!)
- Funktionsrümpfen (Implementierungen sind aufwändig!)

für beliebige Typen.

Veranschaulichung von Wiederverwendung (1)

...anhand der Funktion `length` auf beliebigen Listentypen:

```
length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (_:xs) = 1 + length xs
```

Dank parametrischer Polymorphie sind Aufrufe mit Listen über beliebigen Listenelementtypen unmittelbar möglich, z.B.:

```
length [2,4,23,2,53,4] ->> 6

length ["Enjoy","Functional","Programming"] ->> 3

length [(3.14,42.0),(56.1,51.3),(1.12,2.22)] ->> 3

length [[2,4,23,2,5],[3,4],[],[56,7,6,12]] ->> 4

length [(Blatt 17 4), (Blatt 21 21),
        (Wurzel (Blatt 47 11) fac (Blatt 42 0))] ->> 3

length [fac,fib,fun91,(binom 45),(+1),(*2)] ->> 6
```

Veranschaulichung von Wiederverwendung (2)

Ohne parametrische Polymorphie wäre für jeden Listentyp eine eigene Implementierung unter eigenem Namen nötig, die sich einzig in Namen und Typsignatur unterschieden:

```
length_Ganzzahlliste :: [Int] -> Int
length_Ganzzahlliste []     = 0
length_Ganzzahlliste (_:xs) = 1 + length_Ganzzahlliste t xs

length_Zeichenreihenliste :: [String] -> Int
length_Zeichenreihenliste [] = 0
length_Zeichenreihenliste (_:xs)
 = 1 + length_Zeichenreihenliste xs

...

length_Baumliste :: [Baum] -> Int
length_Baumliste []     = 0
length_Baumliste (_:xs) = 1 + length_Baumliste xs

length_Funktionsliste :: [(Integer -> Integer)] -> Int
length_Funktionsliste []     = 0
length_Funktionsliste (_:xs) = 1 + length_Funktionsliste xs
```

Veranschaulichung von Wiederverwendung (3)

...und argumenttypspezifische Funktionsaufrufe erforderten:

```
length_Ganzzahlliste [2,4,23,2,53,4] ->> 6

length_Zeichenreihenliste
 ["Enjoy","Functional","Programming"] ->> 3

length_Gleitkommazahlpaarliste
  [(3.14,42.0),(56.1,51.3),(1.12,2.22)] ->> 3

length_Ganzzahllistenliste
  [[2,4,23,2,5],[3,4],[],[56,7,6,12]] ->> 4

length_Baumliste
 [(Blatt 17 4), (Blatt 21 21),
  (Wurzel (Blatt 47 11) fac (Blatt 42 0))] ->> 3

length_Funktionsliste
 [fac,fib,fun91,(binom 45),(+1),(*2)] ->> 6
```

Sprechweisen: Monomorphie vs. Polymorphie

Rechenvorschriften

- der Form:
  - `length_Ganzzahlliste :: [Int] -> Int`
  - `length_Zeichenreihenliste :: [String] -> Int`
  - `length_Gleitkommazahlpaarliste :: [(Float,Float)] -> Int`
  - `length_Ganzzahllistenliste :: [[Int]] -> Int`
  - `length_Baumliste :: [Baum] -> Int`
  - `length_Funktionsliste :: [(Integer -> Integer)] -> Int`

  heißen monomorph (definiert für genau einen Typ).
- der Form:
  - `length :: [a] -> Int`

  heißen parametisch polymorph (oder echt polymorph) (definiert für alle Typen).

Sprechweisen: Typinstanz, allgemeinster Typ

...illustriert anhand der Typsignatur der Funktion `length`:

```
length :: [a] -> Int
```

Sprechweisen:

- Typen wie

  ```
  [Int] -> Int
  [String] -> Int
  [(Float,Float)] -> Int
  [(Integer -> Integer)] -> Int
  ...
  ```

  heißen Instanzen des Typs `([a] -> Int)`
- Der Typ `([a] -> Int)` heißt allgemeinster Typ der Typen `[Int] -> Int`, `[String] -> Int`, `[(Float,Float)] -> Int`, etc. (s. Kap. 14).

Das Hugs-Kommando `:t`

...liefert stets den (eindeutig bestimmten) allgemeinsten Typ eines wohlgeformten Haskell-Ausdrucks, wobei Typsynonyme zum Grundtyp hin aufgelöst werden (z.B. `[(a,b)]` und `[c]` statt `(Ass_Liste a b)` und `(Sequenz c)`):

Beispiele:

```
Main>:t length
length :: [a] -> Int

Main>:t curry
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)

Main>:t flip
flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)

Main>:t gen_assliste
gen_assliste :: (Baum a b c) -> [(a,b)]

Main>:t plaetten
plaetten :: (a -> b -> c) -> (Baum a b c) -> [c]
```

Kapitel 11.4

Ad hoc Polymorphie auf Funktionen

Ad hoc Polymorphie

...eine schwächere, weniger generelle Form von Polymorphie mit folgenden Synonymen:

- Unechte Polymorphie.
- Überladen, Überladung (engl. Overloading).

Definition 11.4.1 (*Ad hoc* polym. Fkt. in Haskell)

Eine Funktion in Haskell heißt *ad hoc* polymorph (oder unecht polymorph oder überladen), wenn die Typen eines oder mehrerer ihrer Parameter angegeben durch Typvariablen durch Typkontexte eingeschränkt Werte aller durch den Typkontext zugelassenen Typen als Argument zulassen.

Beispiele *ad hoc* polymorpher Funktionen:

```
(+)  :: Num a => a -> a -> a
(==) :: Eq a  => a -> a -> Bool
(>)  :: Ord a => a -> a -> Bool
```

Ad hoc Polymorphie auf Funktionen

...tritt in funktionalen wie nichtfunktionalen Sprachen ebenso beiläufig und ubiquitär auf wie parametrische Polymorphie in funktionalen Sprachen wie das Beispiel vieler vordefinierter überladener Funktionen zeigt:

- Die arithmetischen Funktionale `(+)`, `(*)`, `(-)`, etc.
- Die Booleschen Relatoren `(==)`, `(/=)`, `(>)`, `(>=)`, etc.
- Die Zeige-Funktion `show` (Haskell-spezifisch)
- ...

Wir unterscheiden genauer

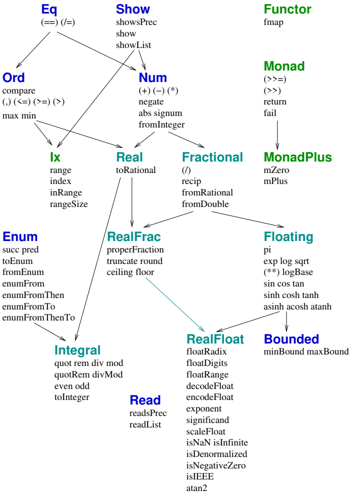
...zwischen direkt und indirekt überladenen Funktionen:

- (Direkt) überladene Funktionen
  - vordefinierter Typklassen: Alle in einer vordefinierten Typklasse angegebenen Funktionen (z.B. `(==)`, `(/=)` aus `Eq`, `(<)`, `(>)` aus `Ord`, `(+)`, `(*)` aus `Num`, etc.)
  - selbstdefinierter Typklassen: Alle in einer selbstdefinierten Typklasse angegebenen Funktionen (z.B. `auswertung`, `reihenausw`, `geglaettet` aus `Analysierbar`; `warnung`, `warnreihe` aus `Warnung` (vgl. Kap. 4.3.5))
- Indirekt überladene Funktionen: Alle Funktionen, die sich auf eine überladene Funktion abstützen ohne selbst in einer Typklasse eingeführt zu sein, z.B.:

```
sum :: Num a => [a] -> a
sum []     = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

Auswahl vor- und selbstdefinierterTypklassen

...zusammen mit den Namen der in ihnen eingeführten überladenen Funktionen:



Quelle: Fethi Rabhi, Guy Lapalme. Algorithms - A Functional Approach. Addison-Wesley, 1999, Abb. 2.4.

Kapitel 11.4.1

Überladene Funktionen vordefinierter Typklassen

Überladene Funktionen vordef. Typklassen

...am Beispiel der Typklassen (Eq a) und (Num a):

```
class Eq a where
 (==), (/=) :: a -> a -> Bool      -- Signaturen über-
                                  -- ladener Funktionen
                                     -- in Typklasse Eq

 x /= y = not (x==y)                  -- Protoimplemen-
 x == y = not (x/=y)                       -- tierungen

class (Eq a,Show a) => Num a where
 (+), (-), (*) :: a -> a -> a      -- Signaturen über-
 negate :: a -> a                -- ladener Funktionen
 abs, signum :: a -> a             -- in Typklasse Num
 fromInteger :: Integer -> a
 x - y    = x + negate y              -- Protoimplemen-
 negate x = 0 - x                          -- tierungen
```

Weitere Bsp. überlad. Fkt. vordef. Typklassen

...die arithmetischen Funktionale und Funktionen:

```
(+) :: Num a        => a -> a -> a
(*) :: Num a        => a -> a -> a
(/) :: Fractional a => a -> a -> a
div :: Integral a   => a -> a
```

...die Booleschen Relatoren:

```
(==) :: Eq a  => a -> a -> Bool
(/=) :: Eq a  => a -> a -> Bool
(>)  :: Ord a => a -> a -> Bool
(>=) :: Ord a => a -> a -> Bool
(<)  :: Ord a => a -> a -> Bool
(<=) :: Ord a => a -> a -> Bool
```

...die Operatoren und Relatoren:

```
min     :: Ord a => a -> a -> a
max     :: Ord a => a -> a -> a
compare :: Ord a => a -> a -> Ordering
```

Kapitel 11.4.2

Überladene Funktionen selbstdefinierter Typklassen

Allgemeines Muster

...einer Typklassendefinition (vereinfacht):

```
class Name' tv => Name tv where
  f_1 :: ...          -- Signaturen der Typklassen-
  f_2 :: ...          -- funktionen f_1,...,f_k
  ...                 -- über tv und anderen Typen.
  f_k :: ...
  f_i = ...              -- Protoimplementierungen
  ...                    -- für null oder mehr der
  f_j = ...              -- Funktionen f_1,...,f_k.
```

Dabei:

- Name': Name einer existierenden Typklasse als Kontext.
- Name: Freigewählter Name als Identifikator der Klasse.
- tv: Typvariable.

Überladene Funktionen in selbstdef. Typklassen

...am Beispiel der Typklassen Info und Groesse:

```
class Info a where
 wert_beispiele  :: [a]           -- Signaturen überla-
 zu_zeichenreihe :: a -> String   -- dener Funktionen
                                  -- in Typklasse Info

 wert_beispiele    = []           -- Protoimplemen-
 zu_zeichenreihe _ = ""                -- tierungen
          -- entspricht: zu_zeichenreihe = \_ -> ""

class Info a => Groesse a where
 groesse :: a -> Int                  -- Signatur über-
                                    -- ladener Funktion
                                -- in Typklasse Groesse

 groesse = (length . zu_zeichenreihe)   -- Protoimple-
                                        -- mentierung
```

Instanzbildungen für die Typen Char und Bool

...für die Typklassen Info und Groesse:

```
instance Info Char where
 wert_beispiele  = ['a','A','z','Z','0','9']
 zu_zeichenreihe = \c -> [c] (entspr.: zu_z. c = [c])

instance Groesse Char where
-- Die Protoimplementierung passte; nichts wäre zu
-- tun Aus Effizienzgründen geben wir dennoch an:
groesse = \_ -> 1         (entspr.: groesse _ = 1)

instance Info Bool where
 wert_beispiele          = [True,False]
 zu_zeichenreihe True  = "Wahr"
 zu_zeichenreihe False = "Falsch"

instance Groesse Bool where
 groesse True  = 4    -- length (zu_zeichenreihe True)
 groesse False = 6   -- length (zu_zeichenreihe False)
```

Instanzbildung für Typ Int

...für die Typklassen Info und Groesse:

```
instance Info Int where
 wert_beispiele    = [-42..42]
 zu_zeichenreihe n = < Code, der einen Int-Wert
                       durch seine Ziffernfolge in
                       Binärdarstellung als Zei-
                       chenreihe darstellt, z.B.
                       123 ↦ "1111011" >

instance Groesse Int
-- Die Protoimplementierung passt; nichts zu tun.
-- (Das Schlüsselwort where kann hier entfallen.)
```

Instanzbildung für Typ [a]

...für die Typklassen Info und Groesse:

```
instance Info a => Info [a] where
 wert_beispiele
   = [ [] ]
     ++ [ [x] | x <- wert_beispiele ]
     ++ [ [x,y] | x <- wert_beispiele,
                  y <- wert_beispiele ]
 zu_zeichenreihe = concat . (map zu_zeichenreihe)

instance Groesse a => Groesse [a] where
 groesse = ((foldr (+) 1) . (map groesse))
```

Beachte die überladene Verwendung der Funktionen:

- wert_beispiele, zu_zeichenreihe, groesse operieren auf Instanzen vom Typ [a].
- wert_beispiele, zu_zeichenreihe, groesse operieren auf Instanzen vom Typ a.

Instanzbildung für Typ (Baum a b c) (1)

...für die Typklassen Info und Groesse:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                  | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

instance (Info a,Info b,Info c) =>
                            Info (Baum a b c) where
 wert_beispiele
  = [Blatt (head wert_beispiele) (last wert_beispiele),
     Wurzel
      (Blatt (wert_beispiele!!0) (wert_beispiele!!1))
      (wert_beispiele!!2)
      (Blatt (wert_beispiele!!1) (wert_beispiele!!0))]
 zu_zeichenreihe baum
  = < Code, der einen Baum-Wert als eine (i.a. mehrzei-
      lige) Zeichenreihe darstellt, die die Baumstruktur
      durch Einrückungen und Zeilenumbrüche deutlich
      macht. >
```

Instanzbildung für Typ (Baum a b c) (2)

'Größe' kann vieles für einen Baum bedeuten, z.B.:

```
instance (Groesse a,Groesse b,Groesse c)
                        => Groesse (Baum a b c) where
 groesse = (length . zu_zeichenreihe)
 -- d.h. Übernahme der Protoimplementierung.
```

...oder zweitens Größe als Tiefe des Baums:

```
instance (Groesse a,Groesse b,Groesse c)
                        => Groesse (Baum a b c) where
 groesse = tiefe
```

...oder drittens Größe als Produkt bestimmter Baumparameter:

```
instance (Groesse a,Groesse b,Groesse c)
                        => Groesse (Baum a b c) where
 groesse = ((2*) . length . gen_assliste)
```

...oder viertens Größe als Summe von Blättern und Wurzeln, oder sechstens als Anzahl der {a,b,c}-Marken oder siebentes...

Das Hugs-Kommandos :t

...hilft, auf einfache Art den allgemeinsten Typ eines gültigen Haskell-Ausdrucks zu bestimmen, z.B.:

```
Main> :t wert_beispiele
wert_beispiele :: Info a => [a]
Main> :t zu_zeichenreihe
zu_zeichenreihe :: Info a => a -> [Char]
Main> :t groesse
groesse :: Groesse a => a -> Int
```

Anwendungsbeispiele (1)

...der überladenen Funktionen der Typklassen Info und Groesse:

```
wert_beispiele :: Bool ->> [True,False]
wert_beispiele :: Char ->> ['a','A','z','Z','0','9']
[first (wert_beispiele :: Int)]
 ++ [last (wert_beispiele :: Int)]   ->> [-42,42]
([first wert_beispiele] :: [Int])
 ++ ([last wert_beispiele] :: [Int]) ->> [-42,42]
zu_zeichenreihe True ->> "Wahr"
zu_zeichenreihe '5'  ->> "5"
zu_zeichenreihe 123  ->> "1111011"
```

Anwendungsbeispiele (2)

Abkürzungen: cc für concat, zz für zu_zeichenreihe.

```
zu_zeichenreihe [1,2,3]
 ->> zz [1,2,3]
 ->> (cc . (map zz)) [1,2,3]
 ->> cc (map zz [1,2,3])
 ->> cc [zz 1,zz 2,zz 3]
 ->> cc ["1","10","11"]
 ->> cc [['1'],['1','0'],['1','1']]
 ->> ['1','1','0','1','1']
 ->> "11011"
zu_zeichenreihe [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> zz [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> (cc . (map zz)) [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> cc (map zz [[1,2,3],[4,5],[6]])
 ->> cc [zz [1,2,3],zz [4,5],zz [6]]
 ->> ...
 ->> cc ["11011","100101","110"]
 ->> ...
 ->> "11011100101110"
```

Anwendungsbeispiele (3)

...mit ergänzten Zwischenschritten.

```
zu_zeichenreihe [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> zz [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> (cc . (map zz)) [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> cc (map zz [[1,2,3],[4,5],[6]])
 ->> cc [zz [1,2,3],zz [4,5],zz [6]]
 ->> cc [(cc . (map zz)) [1,2,3],(cc . (map zz)) [4,5],
         (cc . (map zz)) [6]]
 ->> cc [cc (map zz [1,2,3]),cc (map zz [4,5]),
         cc (map zz [6])]
 ->> cc [cc [zz 1,zz 2,zz 3],cc [zz 4,zz 5],cc [zz 6]]
 ->> cc [cc ["1","10","11"],cc ["100","101"],cc ["110"]]
 ->> cc [cc [['1'],['1','0'],['1','1']],cc [['1','0','0'],['1','0','1']],
         cc [['1,'1','0']]]
 ->> cc [['1','1','0','1','1'],['1','0','0','1','0','1'],['1','1','0']]
 ->> ['1','1','0','1','1','1','0','0','1','0','1','1','1','0']
 ->> "11011100101110"
```

Anwendungsbeispiele (4)

```
groesse False ->> 6
groesse 'z'   ->> 1
groesse 123
 ->> (length . zz) 123
 ->> length (zz 123)
 ->> length "1111011"
 ->> 7
groesse [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> foldr (+) 1 (map (length . zz)) [[1,2,3],[4,5],[6]]
 ->> foldr (+) 1 [(length . zz) [1,2,3],(length . zz) [4,5],
                   (length . zz) [6]]
 ->> foldr (+) 1 [length (zz [1,2,3]),length (zz [4,5]),
                  length (zz [6])]
 ->> foldr (+) 1 [length "11011",length "100101",length "110"]
 ->> foldr (+) 1 [5,6,3]
 ->>             1 + foldr (+) 0 [5,6,3]
 ->>             1 + 14
 ->>             15
```

Übungsaufgabe 11.4.2.1

Ergänze fehlende Codestücke in den Beispielen:

- Instanzbildung (Info Int): Vervollständige die Implementierung der Funktion zu_zeichenreihe.
- Instanzbildung (Info (Baum a b c)): Vervollständige die Implementierung der Funktion zu_zeichenreihe.
- Instanzbildung (Groesse (Baum a b c)): Vervollständige die Implementierung d. Funktion groesse mit 'Größe' als
  - Summe von Blättern und Wurzeln,
  - Anzahl der {a,b,c}-Marken.

  Überlege mindestens eine weitere Variante, die als 'Größe' von Bäumen verstanden werden kann und nimm die zugehörige(n) Instanzbildung(en) für diese Variante(n) vor.

Teste die Implementierungen anhand geeigneter Beispiele, ob sie das gewünschte Verhalten zeigen; ebenso die in diesem Kapitel angegebenen Instanzbildungsimplementierungen.

Übungsaufgabe 11.4.2.2

Führe die Schritt- für Schrittauswertung der überladenen Funktionen `wert_beispiele`, `zu_zeichenreihe` und `groesse` der Typklassen `Info` und `Groesse` für weitere Werte aus, z.B. für Werte der Typen:

- `String`, z.B. für die Werte `""` und `"abcd"`.
- `[Bool]`, z.B. für die Werte `[]` und `[True,False,True]`.
- `[[[Int]]]`, z.B. für die Werte `[]`, `[[]]`, `[[[]]]` und `[[[1,2,3],[4,5]],[[6],[7,8]]]`.
- `(Baum Int Int Int)`, z.B. für die Werte `(Blatt 17 4)` und `(Wurzel (Blatt 1 2) 3 (Blatt 4 5))`.
- ...

Übungsaufgabe 11.4.2.3

Mache weitere Typen zu Instanzen der Typklassen `Info` und `Groesse`, z.B. die Typen:

- `Float` (s. Kap. 2.1.3)
- `Pegelstand` (s. Kap. 4.2.2)
- `Mensch` (s. Kap. 5.1)
- ...

Teste die Implementierungen auf gewünschtes Verhalten und führe auch hier für jeweils einige Datenbeispiele Schritt-für-Schritt-Auswertungen der überladenen Funktionen `wert_beispiele`, `zu_zeichenreihe` und `groesse` durch.

Kapitel 11.4.3

Vererben, erben, überschreiben

Vererben, erben, überschreiben

Typklassen können

- Spezifikationen mehr als einer Funktion bereitstellen.
- Protoimplementierungen (engl. default implementations) für (alle oder einige) dieser Funktionen bereitstellen.
- von anderen Typklassen erben.
- geerbte Implementierungen überschreiben.

In der Folge betrachten wir dies anhand einiger Beispiele in Haskell vordefinierter Typklassen.

Vererben, erben und überschreiben

...auf Typklassenebene:

```
class Eq a where
 (==), (/=) :: a -> a -> Bool
 x /= y = not (x==y)  -- Protoimplementierung f. (/=)
 x == y = not (x/=y)  -- Protoimplementierung f. (==)

class Eq a => Ord a where
 (<), (<=), (>), (>=) :: a -> a -> Bool
 max, min             :: a -> a -> a
 compare              :: a -> a -> Ordering
 x <= y = (x < y) || (x == y)    -- Protoimpl. f. (<=)
 x > y  = y < x                  -- Protoimpl. f. (<)
 ...
 compare x y       -- Protoimplementierung f. compare
   | x == y    = EQ
   | x <= y    = LT
   | otherwise = GT
```

Anmerkungen

- Die Typklasse `Ord` erweitert die Klasse `Eq`; jeder Typ, der zu einer Instanz der Typklasse `Ord` gemacht werden soll, muss bereits Instanz der Typklasse `Eq` sein.
- Jede Typinstanz von `Ord` erbt die Implementierungen ihrer Instanz aus `Eq`; umgekehrt vererbt jede Typinstanz aus `Eq` ihre Implementierungen an ihre Instanzen aus `Ord`.
- Für jede Typinstanz `T` der Typklasse `Ord` darf man sich darauf verlassen, dass es für `T`-Werte Implementierungen für alle Funktionen der Typklassen `Eq` und `Ord` gibt.
- Die Typklassen `Eq` und `Ord` stellen für einige Funktionen bereits Protoimplementierungen bereit.
- Für eine vollständige Instanzbildung reicht es deshalb, Implementierungen der Relatoren `(==)` und `(<)` anzugeben.
- Leisten die Protoimplementierungen nicht das Gewünschte, können sie durch instanzspezifische Implementierungen überschrieben werden.

Überschreiben automatisch generierter Impl.

...am Beispiel der Eq-Instanzbildung für den Typ (Paar a):

```
newtype Paar a = P (a,a)
instance (Eq a) => Eq (Paar a) where
 P (u,v) == P (x,y) = (u == x) && (v == y)
```

- Automatisch generiert: Die Eq-Instanz (Paar a) erhält für (/=) folgende sich aus den Protoimplementierungen der Klasse automatisch ergebende Implementierung:
  `P x /= P y = not (P x == P y)`
- Überschreiben: Die sich automatisch ergebende Implementierung von (/=) kann bei der Instanzbildung für (Paar a) überschrieben werden, z.B. durch folgende (geringfügig) effizientere Fassung:

```
instance (Eq a) => Eq (Paar a) where
 P (u,v) == P (x,y) = (u == x) && (v == y)
 P (u,v) /= P (x,y) = if u /= x then True else v /= y
```

Mehrfachvererben, -erben und -überschreiben

...auf Typklassenebene ist ebenfalls möglich; Haskells vordefinierte Typklasse Num ist ein Beispiel dafür:

```
class (Eq a, Show a) => Num a where
 (+), (-), (*) :: a -> a -> a
 negate        :: a -> a
 abs, signum   :: a -> a
 fromInteger   :: Integer -> a  -- Zwei Typkonver-
 fromInt       :: Int -> a      -- sionsfunktionen!

 x - y         = x + negate y       -- Protoimpl.
 fromInt       = ...
```

...jede Instanz der Typklasse Num muss bereits zum Zeitpunkt der Instanzbildung Instanz der Typklassen Eq und Show sein.

Übungsaufgabe 11.4.3.1

Vergleiche das Vererbungskonzept von Haskell mit dem Vererbungskonzept objektorientierter Sprachen, z.B. von Java.

Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede gibt es?

Kapitel 11.4.4

Automatische Typklasseninstanzbildung

Automatische Typklasseninstanzbildung

...möglich für bestimmte vordefinierte Typklassen mithilfe der `deriving`-Klausel:

```
data Spielfarbe = Kreuz | Pik | Herz | Karo
                   deriving (Eq,Ord,Enum,Bounded,
                             Show,Read)

data Suchbaum = Leer | Knoten Suchbaum Integer Suchbaum
                 deriving (Eq,Ord,Show,Read)

newtype GanzeZahlen = GZ Int deriving (Eq,Ord,Bounded,
                                       Show,Read)

data (Ord a, Ord b, Ord c) => Baum a b c
 = Blatt a b
   | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)
                               deriving (Eq,Ord,Show)

newtype (Ord a, Ord b, Show a, Show b) =>
 Relation a b = R [(a,b)] deriving (Eq,Ord,Show)
```

Algebraische und neue Typen

...können mithilfe einer

- deriving-Klausel automatisch als Instanzen (einer festen Auswahl) vordefinierter Typklassen angelegt werden (keine Typsynonyme!).

Für die Funktionen der in der deriving-Klausel angeführten Typklassen wird dabei das

- 'Offensichtliche' als Standardimplementierung generiert.

Intuitiv ersetzt die Angabe einer deriving-Klausel mit einer oder mehreren Typklassen

- die Angabe der entsprechenden instance-Deklaration.
- Elementare Typen (Int, Float, Bool, Char, etc.), Zeichenreihen (String) und Tupel und Listen solcher Typen sind vordefinierte Instanzen der infrage kommenden Typklassen (Integer z.B. nicht für die Typklasse Bounded).

Autom. vs. manuelle Typklasseninstanzbildung

Beispiel: Die Deklaration mit `deriving`-Klausel:

```
data (Eq a, Eq b, Eq c) => Baum a b c
 = Blatt a b
   | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c) deriving Eq
```

ist gleichbedeutend zum Deklarationspaar:

```
data (Eq a, Eq b, Eq c) => Baum a b c
 = Blatt a b
   | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

instance (Eq a, Eq b, Eq c) => Eq (Baum a b c) where
 (Blatt u v) == (Blatt x y) = (u == x) && (v == y)
 (Wurzel ltb z rtb) == (Wurzel ltb' z' rtb')
   = (ltb == ltb') && (z == z') && (rtb == rtb')
 _ == _ = False
```

Autom. vs. manuelle Typklasseninstanzbildung

...bzw. zum Deklarationspaar:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

instance (Eq a, Eq b, Eq c) => Eq (Baum a b c) where
 (Blatt u v) == (Blatt x y) = (u == x) && (v == y)
 (Wurzel ltb z rtb) == (Wurzel ltb' z' rtb')
   = (ltb == ltb') && (z == z') && (rtb == rtb')
 _ == _ = False
```

...mit 'offensichtlicher' Gleichheit interpretiert als Gleichheit in Struktur und Benennung.

Beachte: Der Kontext '(Eq a, Eq b, Eq c) =>' in den Instanzdeklarationen ist nötig für die Instanzbildungen.

Flexibilität durch manuelle Instanzbildung (1)

Manuelle Typklasseninstanzbildung erlaubt Gleichheit abweichend von 'offensichtlicher' Gleichheit in (nahezu) jeder gewünschten Weise zu implementieren:

```
data Baum a b c = Blatt a b
                | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)
```

Z.B. als Gleichheit in Struktur und {a,c}-Benennungen, mit unbeachtet bleibenden (und möglicherweise unterschiedlichen) b-Benennungen:

```
instance (Eq a, Eq c) => Eq (Baum a b c) where
 (Blatt u _) == (Blatt x _) = (u == x)
 (Wurzel ltb z rtb) == (Wurzel ltb' z' rtb')
   = (ltb == ltb') && (z == z') && (rtb == rtb')
 _ == _ = False
```

Flexibilität durch manuelle Instanzbildung (2)

...oder als Gleichheit der Benennungen in mengenartigem Sinn:

```
instance (Ord a, Ord b, Ord c) => Eq (Baum a b c) where
 b == b′ = (kollabiere b) == (kollabiere b′)
```

wobei

```
kollabiere :: (Ord a, Ord b, Ord c) =>
                         (Baum a b c) -> ([a],[b],[c])
kollabiere = (entferne_duplikate . sortiere . aufsammeln)

aufsammeln :: (Baum a b c) -> ([a],[b],[c])
aufsammeln (Blatt x y) = ([x],[y],[])
aufsammeln (Wurzel ltb z rtb)
 = (aufsammeln ltb) +++ ([],[],[z]) +++ (aufsammeln rtb)

(+++) :: ([a],[b],[c]) -> ([a],[b],[c]) -> ([a],[b],[c])
(xs,ys,zs) +++ (xs′,ys′,zs′) = (xs++xs′,ys++ys′,zs++zs′)
```

Flexibilität durch manuelle Instanzbildung (3)

...und:

```
sortiere :: (Ord a,Ord b,Ord c)
                    => ([a],[b],[c]) -> ([a],[b],[c])
sortiere (xs,ys,zs)
 = (quickSort xs,quickSort ys,quickSort zs)

entferne_duplikate :: (Eq a,Eq b,Eq c)
                    => ([a],[b],[c]) -> ([a],[b],[c])
entferne_duplikate (xs,ys,zs)
 = < Code zum Entfernen von Duplikaten von Elementen >
```

Automatische Typklasseninstanzbildung

...ist möglich (ausschließlich!) für folgende Menge vordefinierter Typklassen in Haskell:

- `Eq`
- `Ord`
- `Enum`
- `Bounded`
- `Show`
- `Read`

Für andere Typklassen, gleich ob vor- oder selbstdefiniert, sind zur Instanzbildung stets `instance`-Deklarationen erforderlich; das gilt ebenso, falls von 'offensichtlicher' abweichende Bedeutungen einer oder mehrerer Typklassenfunktionen gewünscht sind.

Übungsaufgabe 11.4.4.1

Ergänze den Code für die Funktion `entferne_duplikate` und teste die verschiedenen `Eq`-Instantiierungsvarianten für den Datentyp (`Baum a b c`).

Kapitel 11.4.5

Grenzen des Überladens

Ist es möglich

...jeden Typ zu einer Instanz der Typklasse Eq zu machen?

De facto hieße das, den Typ des Gleichheitsrelators (==) von

```
(==) :: Eq a => a -> a -> Bool
```

über das Mittel des Überladens auf

```
(==) :: a -> a -> Bool
```

zu verallgemeinern; genauer, so nahe wie immer gewünscht daran anzunähern?

Im Sinne von

...Funktionen als erstrangigen Sprachelementen (engl. first class citizens) wäre ein Gleichheitstest auf Funktionen höchst wünschenswert, z.B.

```
(==) fac fib                        ->> False
(==) (\x -> x+x) (\x -> 2*x) ->> True
(==) (+2) (2+)                      ->> True
```

Anders als z.B. für die Parametervertauschung durch das Funktional

```
flip :: (a -> b -> c) -> b -> a -> c
flip f x y = f y x
```

...ist Gleichheit eine typabhängige Eigenschaft, die eine typspezifische Implementierung erfordert.

In Haskell

...erforderte dies `Eq`-Instanzbildungen auch für funktionale Typen vorzunehmen, etwa für die Typen `(Int -> Int)` und `(Int -> Int -> Int)` für die Abdeckung der Beispiele:

```
instance Eq (Int -> Int) where
(==) f g = ...

instance Eq (Int -> Int -> Int) where
(==) f g = ...
```

Preisfrage: Können wir die 'Punkte' so ersetzen, dass wir eine valide Gleichheitsprüfung für alle Paare von Funktionen der Typen `(Int -> Int)` und `(Int -> Int -> Int)` erhalten?

Antwort: **Nein!**

Gleichheit von Funktionen: Unentscheidbar

Theorem 11.4.5.1 (Theoretische Informatik)

Gleichheit von Funktionen ist nicht entscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der für zwei beliebig vorgelegte Funktionen stets nach endlich vielen Schritten entscheidet, ob diese Funktionen gleich sind oder nicht.

Wichtig: Theorem 11.4.5.1 schließt nicht aus, dass für konkret vorgelegte Funktionen oder bestimmte Klassen von Funktionen deren Gleichheit (algorithmisch) entschieden werden kann.

Abwesenheit universeller, allumfassender Lsg.

...ein typisches Problem.

Siehe Moshe Vardis Kolumne

- Moshe Vardi. Self-Reference and Section 230. Communications of the ACM 61(11):7, 2018.

zu

- Konsistenz (Widerspruchsfreiheit, Freiheit von Paradoxien)
- Vollständigkeit (Alles ist beantwortbar)
- Entscheidbarkeit (Berechenbarkeit, Automatisierbarkeit)

formaler und nichtformaler Systeme von Mathematik und Logik über Informatik zu Gesellschaftstheorie, von Eubulides (Paradoxon des Lügners) über Frege (Axiomatisierung der Mengentheorie) und Hilbert (Hilberts Programm) zu Russel (Mengenparadoxon), Gödel (Unvollständigkeit der Arithmetik, Konsistenz der Arithmetik nicht innerhalb der Arithmetik beweisbar), Church und Turing (Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik) zu Popper (Freiheits- und Toleranzparadoxon).

Zusammenfassend

...anhand der Beobachtungen am Gleichheitsrelator:

- Funktionen bestimmter (auch scheinbar universeller Natur) Funktionalität lassen sich i.a. nicht für jeden Typ angeben, sondern nur für eine Teilmenge aller Typen.
- Die Funktionalität des Gleichheitsrelators ist ein konkretes Beispiel einer solchen Funktion.
- Auch wenn es verlockend wäre, für alle Typen den
  - Gleichheitsrelator echt oder zumindest parametrisch polymorph implementieren zu können, in Haskell mit der Signatur: `(==) :: Eq a => a -> a -> Bool`

  ist dies in dieser Form und Allgemeinheit in keiner (!) Sprache möglich!

In Haskell

...sind die Typen, auf deren Werten der

- Gleichheitsrelator `(==)` definiert ist

genau die Elemente (oder Instanzen) der Typklasse `Eq`.

Bei der `Eq`-Instanzbildung für einen Typ `T` (gleich ob manuell oder automatisch) wird die

- typspezifische Bedeutung des Gleichheitsrelators für `T`-Werte

durch explizite Ausprogrammierung von Gleichheits- und Ungleichheitsrelator `(==)` und `(/=)` definiert und exakt festgelegt.

Kapitel 11.4.6

Ad hoc Polymorphie vs. Polymorphie

Ad hoc Polymorphie über Typklassen

Typklassen sind

- Kollektionen von Typen, auf deren Werten die in der Typklasse angegebenen Funktionen definiert sind.

Durch Instanzbildungen der Typklasse für verschiedene Typen wird die Bedeutung

- dieser Funktionen überladen und typspezifisch.

Zweckmäßiger (wie auch üblicherweise) Weise sind

- die typspezifischen Bedeutungen der überladenen Funktionen einander 'entsprechend', ihre Funktionalität einander 'vergleichbar', jeweils typspezifisch zugeschnitten.
- Instanzbildung mit 'vergleichbarer' Funktionalität kann nicht syntaktisch erzwungen werden; sie liegt in der Verantwortung des Programmierers und richtet einen Appell an die Programmierdisziplin.

Wiederverwendung durch *ad hoc* Polymorphie

Ad hoc Polymorphie (oder unechte Polymorphie oder Überladung) unterstützt Wiederverwendung des

- Funktionsnamens, nicht jedoch der Funktionsimplementierung (diese wird typspezifisch bei der Typklasseninstanzbildung ausprogrammiert, ggf. unter Ausnutzung der Protoimplementierungen der jeweiligen Typklasse):

```
(+)             :: Num a     => a -> a -> a
(>)             :: Ord a     => a -> a -> Bool
zu_zeichenreihe :: Info a    => a -> String
groesse         :: Groesse a => a -> Int
```

  d.h. es gilt das Prinzip:

  - ein Name, eine T-spezifische Implementierung pro Instanz T von a.

Wiederverw. durch parametrische Polymorphie

Parametrische (oder echte) Polymorphie unterstützt Wiederverwendung von

- Funktionsname und -implementierung:

```
curry :: ((a,b) -> c) -> a -> b -> c
curry f x y = f (x,y)

length :: [a] -> Int
length [] = 0
length (x:xs) = 1 + length xs

fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x
```

  d.h. es gilt das Prinzip:

  - ein Name, eine Implementierung.

Ad hoc Polymorphie vs. Polymorphie (1)

Polymorphie: Ein polymorpher Typ wie `(a -> a)` steht informell für:

$\forall$ `a` $\in$ `"Menge gültiger Typen". (a -> a)`

- Funktionen wie `id :: a -> a` besitzen genau eine Implementierung und sind für jeden gültigen Haskell-Typ eine Funktion vom Typ `(a -> a)`.

Ad hoc Polymorphie: Ein *ad hoc* polymorpher Typ wie `(Num a => a -> a -> a)` steht informell für:

$\forall$ `a` $\in$ `Num. (a -> a -> a)`

- Funktionen wie `(+) :: Num a => a -> a -> a` besitzen für jede Instanz der Typklasse `Num` eine instanzspezifische Implementierung und sind für jeden dieser Instanztypen eine Funktion vom Typ `(a -> a -> a)`; für sonst keinen.

Ad hoc Polymorphie vs. Polymorphie (2)

Parametrische Polymorphie ist unter dem Aspekt Wiederverwendung echt stärker als *ad hoc* Polymorphie.

Dennoch: Bereits die von *ad hoc* Polymorphie unterstützte Wiederverwendung von Funktionsnamen ist äußerst nützlich.

Ohne *ad hoc* Polymorphie wären typspezifische Namen erforderlich nicht nur für

- eigendefinierte Funktionen ($\texttt{groesse}_{Int}$, $\texttt{groesse}_{Bool}$, $\texttt{groesse}_{Char}$, etc.)

sondern auch für bekannte Standardoperatoren wie

- Boolesche Relatoren ($=_{Bool}$, $>_{Float}$, $<_{String}$, etc.) und arithmetische Operatoren ($+_{Int}$, $-_{Float}$, $*_{Double}$, etc.)

Deren zwingender Gebrauch wäre nicht nur ungewohnt und unschön, sondern auch äußerst lästig im täglichen Gebrauch.

Anmerkung: Andere Sprachen wie ML und Opal gehen hier einen anderen Umsetzungsweg als Haskell und bieten andere Konzepte als Typklassen.

Kapitel 11.5

Zusammenfassung

Polymorphie

...auf Funktionen und Datentypen unterstützt

- Wiederverwendung durch Parametrisierung

und damit die

- Ökonomie der Programmierung (flapsig: *Schreibfaulheit*).

durch Ausnutzung der Beobachtung, dass tragende Eigenschaften eines Datentyps wie von darauf arbeitenden Funktionen oft unabhängig von typspezifischen Details sind.

Insgesamt: Ein typisches Vorgehen in der Informatik:

- 'Gleiche' Teile werden 'ausgeklammert' und dadurch einer Wiederverwendung zugänglich gemacht.
- Im Fall von Polymorphie bedeutet das, dass ansonsten i.w. gleiche Codeteile nicht mehrfach geschrieben werden müssen.

Als Gratis-Nebeneffekt

...trägt Polymorphie bei zu höherer

- Transparenz und Lesbarkeit
  ...durch Betonung von Gemeinsamkeiten, nicht von Unterschieden.
- Verlässlichkeit und Wartbarkeit
  ...hinsichtlich Fehlersuche, Weiterentwicklung, etc.
- Programmiereffizienz
  ...hinsichtlich höherer Produktivität, früherer Markteintrittsmöglichkeit (engl. time-to-market).
- ...

Nichtzuletzt: Polymorphie

...ein aktuelles Forschungs- und Entwicklungsgebiet auch in anderen Paradigmen, speziell dem

- objektorientierter Programmierung.

Nutzen und Vorteile polymorpher Konzepte für Datentypen und Funktionen werden zunehmend auch für Datentypen und Methoden zu schätzen gewusst (Stich- und Schlagwort: Generic Java).

Res amicos invenit.
Die Sache findet Freunde.

Persius (34 - 62 n.Chr.)
röm. Dichter

Abschliessend

...über Teil IV 'Funktionale Programmierung' der Vorlesung:

Die Stärken des funktionalen Programmierstils resultieren aus insgesamt wenigen Konzepten für

- Funktionen
- Datentypen

Tragend sind dabei die Konzepte von

- Funktionen als erstrangige Sprachelemente (engl. first class citizens)
  - Stichwort: Funktionen höherer Ordnung (Kap. 10)
- Polymorphie als durchgängiges Prinzip auf
  - Datentypen (Kap. 11.2)
  - Funktionen (Kap. 11.3, Kap. 11.4)

Wenige Faktoren, mächtiges Zusammenspiel

Kombination und nahtloses Zusammenspiel der tragenden (wenigen) Einzelkonzepte führen in Summe zur hohen

- Ausdruckskraft und Flexibilität

des funktionalen Programmierstils.

Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Paradigmen- u. sprachspez. Automatismen

Speziell in Haskell tragen zu Ausdruckskraft und Flexibilität weitere paradigmen- und sprachspezifische Automatismen bei, etwa zur automatischen Generierung von:

- Listen: `[2,4..42]`, `[odd n | n <- [1..], n<1000]`.
- Selektorfunktionen: Verbundtyp-Syntax für algebraische Datentypen.
- Typklasseninstanzen: `deriving`-Klausel.

Siehe

- Peter Pepper. Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer. Springer-V., 2. Auflage, 2003.

für eine weiterführende und vertiefende Diskussion.

Kapitel 11.6

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 11 (1)

- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 7, Eigene Typen und Typklassen definieren)
- Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 5, Polymorphic and Higher-Order Functions; Kapitel 9, More about Higher-Order Functions; Kapitel 12, Qualified Types; Kapitel 24, A Tour of Haskell's Standard Type Classes)
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 3, Types and classes; Kapitel 8, Declaring types and classes)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 11 (2)

- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 2, Believe the Type; Kapitel 7, Making our own Types and Type Classes)
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 19, Formalismen 4: Parametrisierung und Polymorphie)
- Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 2.8, Type classes and class methods)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 11 (3)

- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 12, Overloading and type classes; Kapitel 14.3, Polymorphic algebraic types; Kapitel 14.6, Algebraic types and type classes)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 13, Overloading, type classes and type checking; Kapitel 14.3, Polymorphic algebraic types; Kapitel 14.6, Algebraic types and type classes)
- Moshe Vardi. *Self-Reference and Section 230*. Communications of the ACM 61(11):7, 2018.

Teil V

Fundierung funktionaler Programmierung

Kapitel 12

λ-Kalkül

Kapitel 12.1

Motivation

"...much of our attention is focused on functional programming, which is the most successful programming paradigm founded on a rigorous mathematical discipline. Its foundation, the lambda *calculus, has an elegant computational theory and is arguably the smallest universal programming language. As such, the lambda calculus is also crucial to understand the properties of language paradigms other [than] functional programming..."*

Exzerpt von der Startseite der
'Programming Languages and Systems (PLS)'
Forschungsgruppe an der University of New South Wales, Sydney, geleitet von Manuel Chakravarty und Gabriele Keller.
(http://www.cse.unsw.edu.au/∼pls/PLS/PLS.html)

λ-Kalkül

Der λ-Kalkül (mit λ-definierbaren Funktionen) ist

- formales Berechenbarkeitsmodell neben anderen, u.a.:
  - Turing-Maschinen
  - Markov-Algorithmen
  - Allgemein rekursive Funktionen
  - ...
- fundamental für die Berechenbarkeitstheorie.
- formale Fundierung funktionaler Programmierung und Programmiersprachen.

Berechenbarkeitstheorie

...im Mittelpunkt stehende Fragen:

- Was heißt berechenbar?
- Was ist berechenbar?
- Wie aufwändig ist etwas zu berechnen?
- Gibt es Grenzen der Berechenbarkeit?
- ...

Intuitive Berechenbarkeit

…ein informeller Berechenbarkeitsbegriff.

'Etwas' ist intuitiv berechenbar, wenn es

- eine irgendwie machbare effektive mechanische Methode gibt, die zu jedem gültigen Argumentwert in endlich vielen Schritten den Funktionswert konstruiert und für alle anderen Argumentwerte entweder mit einem speziellen Fehlerwert oder nie abbricht.

Intuitive Berechenbarkeit, intuitiv berechenbar

...was ist damit gewonnen?

Für die Beantwortung der sehr konkreten Fragen der Berechenbarkeitstheorie zunächst einmal nichts, da die Bedeutung von intuitiv berechenbar

- vollkommen vage und nicht greifbar ist, ein Bauchgeführl:

  "...wenn es eine irgendwie machbare effektive mechanische Methode gibt..."

Formale Berechenbarkeit, formal berechenbar

Grundlegende Aufgabe der Berechenbarkeitstheorie:

- Berechenbarkeitsbegriffe zu ersinnen und so zu konkretisieren, dass sie
  - formal gefasst
  - einer präzisen Behandlung zugänglich gemacht
  - bezüglich ihrer Ausdruckskraft und Stärke miteinander verglichen

  werden können.

Zentral: Die Einführung

- formaler Berechnungsmodelle

die den Begriff 'berechenbar' präzise und rigoros definieren und damit

- handfeste Ausprägungen von Berechenbarkeit liefern.

Wichtige Bsp. formaler Berechnungsmodelle

...und ihre zeitliche Einordnung:

- Allgemein rekursive Funktionen (Herbrand 1931, Gödel 1934, Kleene 1936) (s. Anh. B.3, B.4)
- μ-rekursive Funktionen (Kleene 1936) (s. Anh. B.4)
- Turing-Maschinen (Turing 1936) (s. Anh. B.1)
- Endliche kombinatorische Prozesse (Post 1936)
- Markov-Algorithmen (Markov 1951) (s. Anh. B.2)
- Registermaschinen (Random Access Machines (RAMs)) (Shepherdson, Sturgis 1963)
- ...
- λ-definierbare Funktionen, λ-Kalkül (Church 1936)

Holzschnittartige Charakterisierung

...formaler Berechnungsmodelle:

Maschinenbasierte/-orientierte Konkretisierungen von Berechenbarkeit:

- Turing-Maschinen, Registermaschinen.

Programmierbasierte/-orientierte Konkretisierungen von Berechenbarkeit:

- Markov-Algorithmen, Theorie rekursiver Funktionen, λ-Kalkül.

Intuitive Berechenbarkeit u. Churchsche These

Die Churchsche These

Eine Funktion ist intuitiv berechenbar genau dann, wenn sie λ-definierbar ist, im λ-Kalkül (als Funktion über den natürlichen Zahlen) ausdrückbar ist.

Ein Beweis für diese These?

- Rückrichtung: Trivial.
- Hinrichtung: Unmöglich.

...aufgrund der Schwammigkeit und daraus folgenden Nichtfassbarkeit des Begriffs 'intuitiv berechenbar' entzieht sich die Hinrichtung der Churchschen These jedem Beweisversuch.

Zur Church/Turingschen These siehe z.B.:

B. Jack Copeland. The Church-Turing Thesis. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2002.
`http://plato.stanford.edu/entries/church-turing`

Gleichmächtigkeit von Berechnungsmodellen

...man hat jedoch folgendes beweisen können:

Theorem 12.1.1 (Gleichmächtigkeit)

Alle der eingangs genannten formalen Berechnungsmodelle sind

- gleich mächtig

d.h. was in einem Modell berechenbar ist, ist in jedem der anderen Modelle berechenbar und umgekehrt.

Dieses Resultat kann als starker Hinweis (keinesfalls als Beweis!) darauf verstanden werden, dass jedes dieser formalen Berechnungsmodelle den Begriff intuitive Berechenbarkeit (im Sinn von umfassend und vollständig)

- wahrscheinlich 'gut' charakterisiert!

Tatsächlich

...schließt dieser starke Hinweis nicht aus, dass vielleicht noch heute ein mächtigeres formales Berechnungsmodell gefunden wird, das den Begriff der intuitiven Berechenbarkeit umfassender und damit vollständiger und besser charakterisierte.

Präzedenzfall: Das Berechenbarkeitsmodell

- primitiv rekursiver Funktionen

galt bis 1928 als adäquate Charakterisierung des Begriffs intuitiver Berechenbarkeit.

- Jedoch: Echt schwächer als spätere Berechnungsmodelle.
- Beweis: Durch Angabe der offensichtlich berechenbaren, aber nicht primitiv rekursiv darstellbaren Ackermann-Funktion (Wilhelm Ackermann, 1928).

(Zur Definition des Schemas primitiv rekursiver Funktionen siehe z.B.: Wolfram-Manfred Lippe. Funktionale und Applikative Programmierung. eXamen.press, 2009, Kapitel 2.1.2.)

Die Ackermann-Funktion

...'berühmtberüchtigtes' Beispiel einer offensichtlich

- effektiv berechenbaren, insbesondere also intuitiv berechenbaren, jedoch nicht primitiv rekursiv darstellbaren Funktion.

Die Ackermann-Funktion (in einer Variante von Rózsa Péter, 1935) in Haskell-Notation:

```
ack :: (Integer,Integer) -> Integer
ack (m,n)
 | m == 0                 = n+1
 | (m > 0) && (n == 0) = ack (m-1,1)
 | (m > 0) && (n /= 0) = ack (m-1,ack(m,n-1))
```

Intuitive Berechenbarkeit: Allgemein genug?

...orthogonal zur Suche nach einer

- umfassenden und vollständigen Formalisierung des Begriffs intuitiver Berechenbarkeit

ist die Frage nach der

- Angemessenheit des Begriffs intuitiver Berechenbarkeit selbst.

Warum?

Die Auffassung intuitiver Berechenbarkeit als Existenzfrage

- "einer irgendwie machbaren effektiven mechanischen Methode, die zu jedem gültigen Argumentwert in endlich vielen Schritten den Funktionswert konstruiert und für alle anderen Argumentwerte entweder mit einem speziellen Fehlerwert oder nie abbricht."

induziert eine

- funktionsorientierte Vorstellung von Algorithmus

die Berechnungsmodellen wie dem λ-Kalkül und anderen zugrundeliegt und weitergehend implizit die Problemtypen festlegt, die überhaupt als

- Berechenbarkeitsproblem

aufgefasst werden (können).

Interaktionslose Verarbeitung (1)

...aus Maschinensicht entspricht der funktionsorientierten Algorithmusauffassung eine interaktionslose stapelartige Verarbeitungs- und Berechnungssicht:

- Eingabe $\leadsto$ endl. Verarbeitung/Berechnung $\leadsto$ Ausgabe

die sich in der Arbeits- und Auswertungsweise der

- Turing-Maschine
- früher automatischer Rechenanlagen (vulgo: Computer)

ebenso findet...

Interaktionslose Verarbeitung (2)

...wie in der Auswertungsweise unserer bisher betrachteten

- Haskell-Programme.

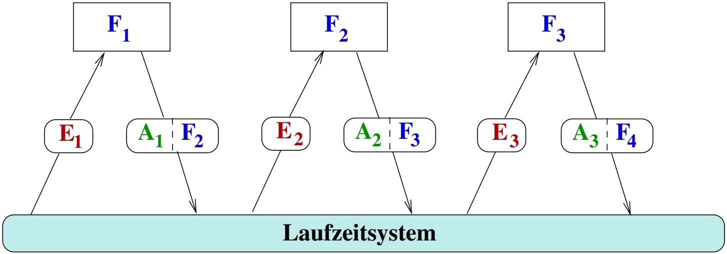
Nach Bereitstellung der Eingabedaten:

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung.*
Springer–Verlag, 2003, S. 245.

...findet Interaktion zwischen Anwender und Programm nicht mehr statt.

Interaktionsbehaftete Verarbeitung

...Interaktion zwischen Anwender und Programm über die Bereitstellung von Eingabedaten hinaus ist für heutige konkrete Rechner jedoch kennzeichnend, auch für Haskell-Programme (siehe Kap. 15, Ein- und Ausgabe):



Peter Pepper. *Funktionale Programmierung.* Springer–Verlag, 2003, S. 253.

Naheliegende Fragen (1)

Sind Leistungen, Aktivitäten, Tätigkeiten, die

- Betriebssysteme
- (Eingebettete) Steuerungssysteme
- Nebenläufige Systeme, Web-Services, das Internet
- Graphische Benutzerschnittstellen
- ...

erbringen oder

- Fahrzeuge autonom ihren Weg im realen Straßenverkehr zu vorgegebenen Zielen finden lassen
- ...

durch den funktionsorientierten Begriff intuitiver Berechenbarkeit gedeckt, d.h. vor- und darstellbar mit einmaliger Eingabedatenbereitstellung ohne weitere Interaktion?

Naheliegende Fragen (2)

...oder sind dies Aufgaben qualitativ anderer, nichtfunktionaler Art? Im Fall von:

...Betriebs- und Steuerungssystemen:

- Ist die Berechnung, Verarbeitung endlich? Terminiert sie?
- Welche Funktion wird berechnet?

...Webservices, dem Internet:

- Können Systeme mit flexibel hinzutretenden und ebenso wieder verschwindenden Komponenten als statisch angesehen werden? Wenn ja, in welchem Sinn?
- Welche Funktion wird berechnet?

...autonomen Fahrzeugen:

- Wie sehen Ein- und Ausgabe aus?
- Welche Funktion wird berechnet?

Interaktion scheint für Aufgaben dieser Art unverzichtbar.

Naheliegende Fragen (3)

...ändert Hinzunahme von Interaktion das Verständnis von Berechnung und Berechenbarkeit möglicherweise ähnlich grundlegend wie Ackermanns Funktion?

Angestoßen wurden diese Fragen und Untersuchungen hierzu besonders durch:

- Peter Wegner. Why Interaction is More Powerful Than Algorithms. Communications of the ACM 40(5):81-91, 1997.

Was heißt Berechnung, was berechenbar?

Sind Antworten wie z.B. von Martin Davis in:

- Martin Davis. What is a Computation? Kapitel in Lynn A. Steen (Hrsg.), Mathematics Today – Twelve Informal Essays. Springer-V., 241-268, 1978.

...ausreichend? Müssen sie angepasst u. weiterentwickelt werden angesichts massiv parallelen, verteilten, interaktiven, asynchronen, analogen, hybriden Rechnens, Echtzeitrechnens, Rechnens mit neuronalen Netzen, chemischen Reaktionsnetzwerken, Quanten-, Nano-, DNS-, molekul., enzym., bakt. Rechn.,...?

- Luca Cardelli. Programming with Chemical Reactions. VCLA-Kolloquiumsvortrag an der TU Wien, 22.11.2018.

"Chemical reactions have been widely used to describe natural phenomena, but increasingly we are capable to use them to prescribe physical interaction, e.g. in DNA computing. Thus, chemical reaction networks can be used as programs that can be physically realized to produce and control molecular arrangements. Because of their relative simplicity and familiarity, and more subtly because of their computational power, they are quickly becoming a paradigmatic "programming language" for bioengineering. We discuss what can be programmed with chemical reactions, and how these programs can be physically realized."

Berechnungsbegriffe und -paradigmen

Ein Klassiker:

- John McCarthy. A Basis for a Mathematical Theory of Computation. In *Computer Programming and Formal Systems*, Paul Braffort, David Hirschberg (Hrsg.), North-Holland, 33-70, 1963.

Neue Auffassungen:

- S. Barry Cooper, Benedikt Löwe, Andrea Sorbi (Hrsg). New Computational Paradigms: Changing Conceptions of What is Computable. Springer-V., 2008.

Als Einführung gut geeignet:

- Ian Horswill. What is Computation? Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):8-14, 2012.

Schwache vs. starke Church/Turing-These (1)

...im Sinn von Peter Wegner auf den Punkt gebracht: Gilt die Church/Turing-These

...im schwachen Sinn:

- Wann immer eine (mathematische) Funktion intuitiv berechenbar ist, d.h. wann immer es eine effektive mechanische Methode für ihre Berechnung gibt, dann kann sie von einer Turing-Maschine, im λ-Kalkül berechnet werden.

...oder im starken Sinn:

- Was immer eine 'Berechnungsmaschine' ('Computer') (mithilfe auch von Interaktion) berechnen kann, kann von einer Turing-Maschine, im λ-Kalkül berechnet werden, d.h. wann immer (über (mathematische) Funktionen hinaus) eine Aufgabe als Berechnung ausgedrückt und verstanden werden kann, kann sie von einer Turing-Maschine, im λ-Kalkül berechnet werden.

Schwache vs. starke Church/Turing-These (2)

...eine 'für' und 'wider' untersuchte Frage:

- Michael Prasse, Peter Rittgen. Why Church's Thesis Still Holds. Some Notes on Peter Wegner's Tracts on Interaction and Computability. The Computer Journal 41(6):357-362, 1998.
- Peter Wegner, Eugene Eberbach. New Models of Computation. The Computer Journal 47(1):4-9, 2004.
- Paul Cockshott, Greg Michaelson. Are There New Models of Computation? Reply to Wegner and Eberbach. The Computer Journal 50(2):232-247, 2007.
- Dina Q. Goldin, Peter Wegner. The Interactive Nature of Computing: Refuting the Strong Church-Rosser Thesis. Minds and Machines 18(1):17-38, 2008.

Schwache vs. starke Church/Turing-These (3)

- Peter Wegner, Dina Q. Goldin. The Church-Turing Thesis: Breaking the Myth. In Proceedings of the 1st Conference on Computability in Europe – New Computational Paradigms (CiE 2005), Springer-V., LNCS 3526, 152-168, 2005.
- Martin Davis. The Church-Turing Thesis: Consensus and Opposition. In Proceedings of the 2nd Conference on Computability in Europe – Logical Approaches to Computational Barriers (CiE 2006), Springer-V., LNCS 3988, 125-132, 2006.
- ...

Wer richtig erkennen will, muss zuvor
in richtiger Weise gezweifelt haben.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Interaktion und Berechenbarkeit

...hat Interaktion das Potential zu einer neuen Ackermannfunktion-vergleichbaren Weltsichtänderung? Eine offene Frage...

Ich weiß, das klingt alles sehr kompliziert.

Fred Sinowatz (1929-2008)
österr. Politiker und Staatsmann, Bundeskanzler

Es ist nicht leicht zu begreifen,
dass man nicht begreift.

Marie von Ebner-Eschenbach (1830-1916)
österr. Schriftstellerin

Untersuchung und Diskurs

...gehen weiter; eigenes Verständnis von Voraussetzungen und Implikationen der ‘für’- und ‘wider’-Argumente sind gefordert.

Einen kompakten Einstieg in das Themenfeld zusammen mit Verweisen auf relevante Arbeiten bieten:

- B. Jack Copeland, Eli Dresner, Diane Proudfoot, Oron Shagrir. Viewpoint: Time to Reinspect the Foundations? Questioning if Computer Science is Outgrowing its Traditional Foundations.
  Communications of the ACM 59(11):34-36, 2016.
- B. Jack Copeland, Oron Shagrir. The Church-Turing Thesis: Logical Limit or Breachable Barrier?
  Communications of the ACM 62(1):66-74, 2019.

...siehe Anhang B für weitere Literaturhinweise.

Nur Beharrung führt zum Ziel.

Friedrich von Schiller (1759-1805)
dt. Schriftsteller

Man kann viel, wenn man sich nur recht viel zutraut.

Wilhelm von Humboldt (1767-1835)
dt. Philosoph und Politiker

Zurück zum λ-Kalkül (1)

Der λ-Kalkül

- geht zurück auf Alonzo Church (1936).
- ist erdacht als formales Berechnungsmodell (neben anderen), um Fragen der Natur von Berechnung und dessen, was berechnet werden kann, zu fassen u. zu untersuchen.
- formalisiert einen Berechnungsbegriff über Paaren, Listen, Bäumen, auch potentiell unendlichen, über Funktionen höherer Ordnung, etc.
- zeichnet sich in diesem Sinne durch größere Praxisnähe als (einige) andere formale Berechnungsmodelle aus.
- ist mit der Erfindung von Rechenanlagen und Programmiersprachen geworden
  - zur Grundlage aller funktionalen Programmiersprachen.
  - zum Bindeglied funktionaler Hochsprachen und maschinennaher Implementierungen.

Zurück zum λ-Kalkül (2)

Der λ-Kalkül zeichnet sich dabei aus durch:

- Einfachheit
  ...wenige syntaktische Konstrukte, einfache Semantik.
- Ausdruckskraft
  ...Turing-mächtig, alle 'intuitiv berechenbaren' Funktionen im λ-Kalkül ausdrückbar.

Zurück zum λ-Kalkül (3)

...wichtige Anwendungsfelder des λ-Kalküls.

Ursprünglich:

- Berechenbarkeitstheorie: Berechenbarkeitsbegriff, Grenzen der Berechenbarkeit.

Später hinzugekommen:

- Entwurf von Programmiersprachen und Programmiersprachkonzepten: Funktionale Programmiersprachen, Typsysteme, Polymorphie,...
- Semantik von Programmiersprachen: Denotationelle Semantik, Bereichstheorie (engl. domain theory),...

Reiner λ-Kalkül und angewandte λ-Kalküle

Reiner λ-Kalkül

- Reduziert auf das 'absolut Notwendige', bedeutsam und praktisch besonders für Untersuchungen zu Fragen der Berechenbarkeit, Berechenbarkeitstheorie.

Angewandte λ-Kalküle

- Syntaktisch angereicherte Varianten des reinen λ-Kalküls, praxis- und programmiersprachennäher.

Extrem angereicherte angewandte λ-Kalküle

- Funktionale Programmiersprachen.

Kapitel 12.2

Syntax des reinen λ-Kalküls

Syntax von λ-Ausdrücken (1)

Die Menge der wohlgeformten Ausdrücke des reinen λ-Kalküls über einer Menge N von Namen, kurz λ-Ausdrücke, ist mit E bezeichnet und wie folgt definiert:

- Namen: Jeder Name aus N ist in E.
  Bsp.: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$
- Abstraktion: Ist x aus N und e aus E, so ist $(\lambda x.\, e)$ in E.
  Sprechweise: (Funktions-) Abstraktion mit Parameter x und Rumpf e.

Bsp.: $(\overbrace{\lambda x.\,\underbrace{(x\ x)}_{\text{Rumpf}}}^{\text{Abstraktion}})$, $(\overbrace{\lambda x.\,\underbrace{(\lambda y.\,(\lambda z.\,(x\ (y\ z))))}_{\text{Rümpfe}}}^{\text{Abstraktionen}})$, …

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
12.1
12.2

Syntax von λ-Ausdrücken (2)

- Applikation: Sind f und e aus E, so ist (f e) in E.

  Sprechweise: Anwendung von f auf e; f heißt auch Rator, e auch Rand.

  Bsp.: $(\underbrace{(\lambda \mathtt{x.(x\ x)})}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\mathtt{y}}_{\text{Rand}}), \ldots$

Syntax in BNF-Notation

...Ausdruckssyntax kompakt in Backus-Naur-Form (BNF):

$$
\begin{array}{rcll}
e & ::= & x & \text{(Namen)} \\
 & ::= & \lambda x.e & \text{(Abstraktion)} \\
 & ::= & e\ e & \text{(Applikation)} \\
 & ::= & (e) & \text{(Klammerung)}
\end{array}
$$

Vereinbarungen, Konventionen

Überflüssige Klammern können weggelassen werden. Es gilt:

- Rechtsassoziativität für λ-Sequenzen in Abstraktionen.

  Beispiele:
  - $\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\,(y\,z))$ steht kurz für $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(x\,(y\,z)))))$
  - $\lambda x.\, e$ steht kurz für $(\lambda x.\, e)$
- Linksassoziativität für Applikationssequenzen.

  Beispiele:
  - $e_1\ e_2\ e_3 \ldots e_n$ steht kurz für $(\ldots((e_1\ e_2)\ e_3)\ldots e_n)$
  - $e_1\ e_2$ steht kurz für $(e_1\ e_2)$

Der Rumpf einer λ-Abstraktion ist der längstmögliche dem Punkt folgende λ-Ausdruck.

Beispiel: $\lambda x.e\ f$ steht kurz für $\lambda x.(e\ f)$, nicht $(\lambda x.e)\ f$

Freie Variablen, gebundene Variablen (1)

...in λ-Ausdrücken. Sei a aus E:

Freie Variablen von a:

$$
\begin{array}{lll}
\text{frei}(x) & = \{x\} & \text{wenn } a \equiv x \text{ aus } N \\
\text{frei}(\lambda x.e) & = \text{frei}(e) \setminus \{x\} & \text{wenn } a \equiv \lambda\, x.e \\
\text{frei}(f\ e) & = \text{frei}(f) \cup \text{frei}(e) & \text{wenn } a \equiv f\ e
\end{array}
$$

Gebundene Variablen von a:

$$
\begin{array}{lll}
\text{gebunden}(x) & = \emptyset & \text{wenn } a \equiv x \text{ aus } N \\
\text{gebunden}(\lambda x.e) & = \text{gebunden}(e) \cup \{x\} & \text{wenn } a \equiv \lambda\, x.e \\
\text{gebunden}(f\ e) & = \text{gebunden}(f) & \\
 & \quad \cup \text{ gebunden}(e) & \text{wenn } a \equiv f\ e
\end{array}
$$

Freie Variablen, gebundene Variablen (2)

Beispiel: Betrachte den λ-Ausdruck $((\lambda x.\ (x\ y))\ x)$.

Gesamtausdruck:

- x kommt in $((\lambda x.\ (x\ y))\ x)$ frei und gebunden vor.
- y kommt in $((\lambda x.\ (x\ y))\ x)$ frei vor, aber nicht gebunden.

Teilausdrücke:

- x kommt in $(\lambda x.\ (x\ y))$ gebunden vor, aber nicht frei.
- x kommt in $(x\ y)$ und (x) frei vor, aber nicht gebunden.
- y kommt in $(\lambda x.\ (x\ y))$, $(x\ y)$ und (y) frei vor, aber nicht gebunden.

Beachte: 'Gebunden' ist nicht die Negation von 'frei' (andernfalls gälte z.B. 'x kommt gebunden in y vor').

Freie, gebundene Variablenvorkommen

...in λ-Ausdrücken:

- Definierende Vorkommen: Jedes Variablenvorkommen unmittelbar nach einem λ.
- Angewandte Vorkommen: Jedes nicht definierende Variablenvorkommen.
- Gebunden an: Relation zwischen Variablenvorkommen und definierenden Variablenvorkommen. Jedes Variablenvorkommen (gleich ob angewandt oder definierend) ist an höchstens ein definierendes Variablenvorkommen gebunden; definierende Vorkommen sind an ihr Vorkommen selbst gebunden.
- Freies Variablenvorkommen: Angewandtes Vorkommen, das an kein definierendes Vorkommen gebunden ist.
- Gebundenes Variablenvorkommen: Vorkommen (gleich ob angewandt oder definierend), das an ein definierendes Vorkommen gebunden ist.

Kapitel 12.3

Semantik des reinen λ-Kalküls

Vorbereitung

...grundlegend für die Definition der Semantik von λ-Ausdrücken sind:

- Syntaktische Substitution
- Konversionsregeln/Reduktionsregeln
- Reduktionsfolgen/Reduktionsstrategien
- Normalformen (Existenz/Eindeutigkeit)

Kapitel 12.3.1

Syntaktische Substitution

Syntaktische Substitution: Informell

...eine dreistellige Abbildung

$$\cdot[\cdot/\cdot] : E \to E \to V \to E$$

zur bindungsfehlerfreien Ersetzung frei vorkommender Variablen x durch einen Ausdruck e in einem Ausdruck e′.

Informell: Angewendet auf zwei Ausdrücke e′ und e und eine Variable x bezeichnet

$$e' \, [e/x]$$

denjenigen Ausdruck, der aus e′ entsteht, indem jedes freie Vorkommen von x in e′ durch e substituiert, ersetzt wird.

Beachte: Die vereinfachende informelle Beschreibung nimmt keinen Bedacht auf mögliche Bindungsfehler. Freiheit von Bindungsfehlern stellt die formale Definition syntaktischer Substitution sicher.

Syntaktische Substitution

Definition 12.3.1.1 (Syntaktische Substitution)

Die syntaktische Substitution ist die 3-stellige Abbildung $\cdot[\cdot/\cdot] : E \to E \to V \to E$ definiert bei Anwendung auf

...Namensterme durch:

$$y\,[e/x] =_{df} \begin{cases} y & \text{falls } y \text{ aus } N \text{ mit } y \neq x \\ e & \text{falls } y \text{ aus } N \text{ mit } y = x \end{cases}$$

...applikative Terme durch:

$$(f\ g)\,[e/x] \ =_{df}\ (f\,[e/x])\,(g\,[e/x])$$

...Abstraktionsterme durch:

$$(\,\lambda y.f\,)\,[e/x] =_{df} \begin{cases} \lambda\, y.f & \text{falls } y = x \\ \lambda\, y.(f\,[e/x]) & \text{falls } y \neq x \wedge y \notin \mathit{frei}(e) \\ \lambda\, z.((f\,[z/y])\,[e/x]) & \text{falls } y \neq x \wedge y \in \mathit{frei}(e), \\ \quad \text{wobei } z \text{ frisch aus } N\text{: } z \notin \mathit{frei}(e) \cup \mathit{frei}(f) \\ \quad\quad \text{(Vermeidung von Bindungsfehlern!)} \end{cases}$$

Beispiele

...zur Anwendung syntaktischer Substitution:

- $((x\ y)\ (y\ z))\ [(a\ b)/y] = ((x\ (a\ b))\ ((a\ b)\ z))$
- $\lambda x.\ (x\ y)\ [(a\ b)/y] = \lambda x.\ (x\ (a\ b))$
- $\lambda x.\ (x\ y)\ [(a\ b)/x] = \lambda x.\ (x\ y)$
- $\lambda x.\ (x\ y)\ [(x\ b)/y] \overset{naiv}{\leadsto} \lambda x.\ (x\ (x\ b))$: Bindungsfehler!
  ...naiv ohne Umbenennung angewendet ist x eingefangen!

Korrekt mit Umbenennung angewendet kein Bindungsfehler:

- $\lambda x.\ (x\ y)\ [\underbrace{(x\ b)}_{x \text{ frei in } (x\ b)}/y] = \underbrace{\lambda z.\ ((x\ y)[z/x])}_{\text{Umbenennung von } x \text{ in } z}\ [(x\ b)/y]$

  $= \underbrace{\lambda z.\ (z\ y)}_{\text{Umbenannt}}\ [(x\ b)/y]$

  $= \lambda z.\ (z\ (\underbrace{x}\ b))$

  Kein Bindungsfehler: x in (x b) bleibt frei!

Kapitel 12.3.2

Konversionsregeln

λ-Konversionsregeln, λ-Konversionen

...die λ-Konversionsregeln führen abgestützt auf syntaktische Substitution zu einer operationellen Semantik für λ-Ausdrücke in Form maximaler Ausdrucksvereinfachung:

Definition 12.3.2.1 (λ-Konversionsregeln)

- α-Konversion (Umbenennung von Parametern)

  $$\lambda x.\, e \longleftrightarrow \lambda y.\, e\,[y/x], \text{ wobei } y \notin \mathit{frei}(e)$$

- β-Konversion (Funktionsanwendung)

  $$(\lambda x.\, f)\; e \longleftrightarrow f\,[e/x]$$

- η-Konversion (Elimination redundanter Funktion)

  $$\lambda x.(e\; x) \longleftrightarrow e, \text{ wobei } x \notin \mathit{frei}(e)$$

Zur Anwendung der Konversionsregeln

α-Konversion zur

- konsistenten Umbenennung von Parametern von λ-Abstraktionen (zur Vermeidung von Bindungsfehlern (s.u.)!).

β-Konversion zur

- Anwendung einer λ-Abstraktion auf ein Argument.

η-Konversion zur

- Elimination unnötiger λ-Abstraktionen.

Erinnerung: Naiv ohne α-Konversion angewendet, kann die Substitution der β-Konversion Bindungsfehler verursachen, wie im nachstehenden Beispiel illustriert:

Bsp.: $(\lambda x.(\lambda y.x\ y))\ (y\ z) \longrightarrow (\lambda y.x\ y)[(y\ z)/x] \longrightarrow (\lambda y.(y\ z)\ y)$

(ohne α-Konversion ist y eingefangen: Bindungsfehler!)

...korrekt angewendet: Keine Bindungsf. dank α-Konversion!

Sprechweisen

...im Zusammenhang mit Konversionsregeln:

- Von links nach rechts angewendet: Reduktion.
- Von rechts nach rechts angewendet: Abstraktion.

Genauer:

- Von links nach rechts gerichtete Anwendungen der β- und η-Konversion heißen β-Reduktion und η-Reduktion.
- Von rechts nach links gerichtete Anwendungen der β-Konversion heißen β-Abstraktion.

Kapitel 12.3.3

Reduktionsfolgen

Reduktionsfolgen, -strategien, Normalform

Eine Reduktionsfolge für einen λ-Ausdruck

- ist eine endliche oder nicht endliche Folge von β-, η-Reduktionen und α-Konversionen.
- heißt maximal, wenn höchstens noch α-Konversionen anwendbar sind.

Ein λ-Ausdruck e ist in Normalform, wenn

- e durch β-, η-Reduktion nicht weiter reduzierbar ist.

(Praktisch relevante) Reduktionsstrategien sind

- Normale (Reduktions-) Ordnung (linkest-äußerst)
- Applikative (Reduktions-) Ordnung (linkest-innerst)

Beispiele zu Reduktionsfolgen, -strategien (1)

Beispiel 1: Applikative Ordnung

$$(\underbrace{(\lambda z.\lambda y.(z\ y))}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(\lambda x.x)}_{\text{Rand}})\ (\lambda s.(s\ s))$$

$$(\beta\text{-Reduktion}) \longrightarrow \underbrace{(\lambda y.((\lambda x.x)\ y))}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(\lambda s.(s\ s))}_{\text{Rand}}$$

$$(\beta\text{-Reduktion}) \longrightarrow \underbrace{(\lambda x.x)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(\lambda s.(s\ s))}_{\text{Rand}}$$

$$(\beta\text{-Reduktion}) \longrightarrow \lambda s.(s\ s)$$

...fertig, Normalform erreicht: Keine β-, η-Reduktion mehr anwendbar.

Beispiele zu Reduktionsfolgen, -strategien (2)

Beispiel 2: Applikative Ordnung

$$((\lambda x.\lambda y.x\ y)\ (((\underbrace{(\lambda x.\lambda y.x\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{a}_{\text{Rand}})\ b))\ c$$

$$(\beta\text{-Reduktion}) \quad \longrightarrow \quad (\lambda x.\lambda y.x\ y)\ ((\underbrace{(\lambda y.a\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{b}_{\text{Rand}}))\ c$$

$$(\beta\text{-Reduktion}) \quad \longrightarrow \quad (\underbrace{(\lambda x.\lambda y.x\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(a\ b)}_{\text{Rand}})\ c$$

$$(\beta\text{-Reduktion}) \quad \longrightarrow \quad \underbrace{(\lambda y.(a\ b)\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{c}_{\text{Rand}}$$

$$(\beta\text{-Reduktion}) \quad \longrightarrow \quad (a\ b)\ c$$

...fertig, Normalform erreicht: Keine β-, η-Reduktion mehr anwendbar.

Beispiele zu Reduktionsfolgen, -strategien (3)

Beispiel 2′: Normale Ordnung

$$(\underbrace{(\lambda x.\lambda y.x\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(((\lambda x.\lambda y.x\ y)\ a)\ b)}_{\text{Rand}})\ c$$

$$(\beta\text{-Reduktion})\quad\longrightarrow\quad \underbrace{(\lambda y.(((\lambda x.\lambda y.x\ y)\ a)\ b)\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{c}_{\text{Rand}}$$

$$(\beta\text{-Reduktion})\quad\longrightarrow\quad ((\underbrace{(\lambda x.\lambda y.x\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{a}_{\text{Rand}})\ b)\ c$$

$$(\beta\text{-Reduktion})\quad\longrightarrow\quad (\underbrace{(\lambda y.a\ y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{b}_{\text{Rand}})\ c$$

$$(\beta\text{-Reduktion})\quad\longrightarrow\quad (a\ b)\ c$$

...fertig, Normalform erreicht: Keine β-, η-Reduktion mehr anwendbar.

Kapitel 12.3.4

Normalformen

Existenz von Normalformen

...Normalformen existieren nicht notwendig; nicht jeder λ-Ausdruck

- besitzt oder ist in Normalform konvertierbar.

Beispiel: Der Ausdruck

- $\underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rand}} \longrightarrow \lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x) \longrightarrow \ldots$

  ...reproduziert sich endlos: Normalform existiert nicht!

Terminierung von Reduktionsfolgen

...Reduktionsfolgen terminieren nicht notwendig mit einem

- λ-Ausdruck in Normalform, selbst wenn eine Normalform existiert.

Beispiel:

- $\underbrace{(\lambda x.y)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{(\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x))}_{\text{Rand}} \longrightarrow y$

  Normale Reduktionsordnung terminiert in einem Schritt: Normalform existiert!

- $(\lambda x.y)\ (\underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rand}}) \longrightarrow (\lambda x.y)\ (\underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\lambda x.(x\ x)}_{\text{Rand}})$

  $\longrightarrow$ ...

  Applikative Reduktionsordnung terminiert nicht, obwohl Normalform existiert!

Church/Rosser-Theoreme

Seien e_1, e_2 zwei λ-Ausdrücke.

Theorem 12.3.4.1 (Konfluenz-, Diamant-, Rauteneig.)

Wenn e_1, e_2 ineinander konvertierbar sind, d.h. $e_1 \longleftrightarrow e_2$, dann gibt es einen gemeinsamen λ-Ausdruck e, zu dem e_1, e_2 reduziert werden können, d.h. $e_1 \longrightarrow^* e$ und $e_2 \longrightarrow^* e$.

Informell: Wenn eine Normalform existiert, dann ist sie (bis auf α-Konversion) eindeutig bestimmt!

Theorem 12.3.4.2 (Standardisierung)

Wenn e_1 zu e_2 mit einer endlichen Reduktionsfolge reduzierbar ist, d.h. $e_1 \longrightarrow^* e_2$, und e_2 in Normalform ist, dann führt auch die normale Reduktionsfolge von e_1 nach e_2.

Informell: Die normale Reduktionsordnung terminiert am häufigsten, so oft wie überhaupt möglich!

Folgerungen

...aus den Church/Rosser-Theoremen (Alonzo Church, John Barkley Rosser (1936)):

- Theorem 12.3.4.1 garantiert, dass die Normalform eines λ-Ausdrucks (bis auf α-Konversionen) eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert; λ-Ausdrücke in Normalform lassen sich (abgesehen von α-Konversionen) nicht mehr weiter reduzieren, vereinfachen.
- Theorem 12.3.4.2 garantiert, dass die normale Reduktionsordnung mit der Normalform terminiert, wenn es irgendeine Reduktionsfolge mit dieser Eigenschaft gibt, d.h. die normale Reduktionsordnung terminiert mindestens so häufig wie jede andere Reduktionsstrategie, mithin am häufigsten.

Omnia viae Romam ducunt.
Alle Wege führen zum Ergebnis
(wenn sie denn zum Ergebnis führen).

lat., sprichwörtl., abgewandelt

Kapitel 12.3.5

Semantik von λ-Ausdrücken

Semantik von λ-Ausdrücken

...die Church/Rosser-Theoreme und ihre Garantien legen nahe, die Semantik (oder Bedeutung) der Ausdrücke des reinen λ-Kalküls in folgender Weise festzulegen:

Definition 12.3.5.1 (Semantik von λ-Ausdrücken)

Sei e ein λ-Ausdruck. Die Semantik von e ist

- seine (bis auf α-Konversionen) eindeutig bestimmte Normalform, wenn sie existiert; die Normalform ist zugleich der Wert von e.
- undefiniert, wenn die Normalform nicht existiert.

Determiniertheit, Turingmächtigkeit

Lemma 12.3.5.2 (Determiniertheit)

Wenn ein λ-Ausdruck in einen λ-Ausdruck in Normalform konvertierbar ist, dann führt jede terminierende Reduktionsfolge des λ-Ausdrucks (bis auf α-Konversion) zu dieser Normalform, d.h. das Resultat jeder terminierenden Reduktionsfolge ist (bis auf α-Konversion) determiniert.

Theorem 12.3.5.3 (Turingmächtigkeit)

Eine Funktion ist im λ-Kalkül genau dann berechenbar, wenn sie Turing-berechenbar, Markov-berechenbar, etc., ist, d.h. im λ-Kalkül sind alle Funktionen berechenbar, die Turing-berechenbar, Markov-berechenbar, etc., sind und umgekehrt.

Kapitel 12.3.6

Rekursion vs. Y-Kombinator

λ-Kalkül und Rekursion

...nicht füreinander gemacht. Betrachte die rekursive Haskell-Rechenvorschrift `fac`:

Argumentbehaftet:

```
fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n - 1)
```

Argumentfrei:

```
fac = \n -> if n == 0 then 1 else n * fac (n - 1)
```

Im λ-Kalkül stellt sich folgendes Problem:

- λ-Abstraktionen sind anonym und können deshalb nicht (rekursiv) aufgerufen werden (auch nicht in Haskell):
  $\lambda n.$ if $n = 0$ then 1 else $n *$ ...???...
- Rekursive Aufrufe wie im Rumpf von `fac` lassen sich deshalb nicht ohne weiteres im (reinen) λ-Kalkül ausdrücken.

Kunstgriff: Kombinatoren, Y-Kombinator

...λ-Terme ohne freie Variablen heißen Kombinatoren.

Ein spezieller Kombinator: Der Y-Kombinator:

$$\texttt{Y = }\lambda\texttt{f.(}\lambda\texttt{x.(f (x x)) }\lambda\texttt{x.(f (x x)))}$$

...ein Kombinator mit Selbstanwendung:

$$\texttt{Y = }\lambda\texttt{f.(}\underbrace{\lambda\texttt{x.(f (x x))}}_{\text{Rator}}\ \underbrace{\lambda\texttt{x.(f (x x))}}_{\text{Rand}}\texttt{)}$$

...Rator ident mit Rand: Selbstanwendung!

Schlüsseleigenschaft des Y-Kombinators

...Selbstreproduktion!

Für e λ-Ausdruck ist (Y e) zu (e (Y e)) konvertierbar:

$$
\begin{array}{lll}
\texttt{Y e} & \longleftrightarrow & \underbrace{(\lambda\texttt{f.}(\lambda\texttt{x.(f (x x))}\ \lambda\texttt{x.(f (x x))}))}_{=\,\mathsf{Y}}\ \texttt{e} \\
& \longrightarrow & \underbrace{\lambda\texttt{x.(e (x x))}\ \lambda\texttt{x.(e (x x))}}_{=\,\mathsf{Y}\ \texttt{e}} \\
& \longrightarrow & \underbrace{\texttt{e}\ (\lambda\texttt{x.(e (x x))}\ \lambda\texttt{x.(e (x x))})}_{=\,\texttt{e}\ (\mathsf{Y}\ \texttt{e})} \\
& \longleftrightarrow & \underbrace{\texttt{e}}_{\text{Kopie}}\ (\underbrace{\texttt{Y e}}_{\text{Selbstreproduktion}})
\end{array}
$$

...Selbstreproduktion plus Kopie des Arguments e!

Der Y-Kombinator

...erlaubt Rekursion auf

- Kopieren zurückzuführen und zu realisieren.

Idee: Überführe eine rekursive Darstellung von f in eine nicht-rekursive Darstellung, die den Y-Kombinator verwendet:

$$
\begin{array}{lrcll}
 & f & = & \cdots\ f \cdots & \text{(Rekursive Darstellung von f)} \\
\leadsto & f & = & \lambda f.\,(\cdots\ f \cdots)\ f & (\lambda\text{-Abstraktion}) \\
\leadsto & f & = & \underbrace{Y\ \lambda f.\,(\cdots\ f \cdots)}_{\text{`}Y\ e\text{'}} & \text{(Nichtrekursive Darstellung von f)}
\end{array}
$$

Übungsaufgabe: Vergleiche den Effekt des Y-Kombinators mit der Kopierregelsemantik prozeduraler Programmiersprachen.

Übungsaufgabe 12.3.6.1

Anwendung des Y-Kombinators

Betrachte die rekursionsfreie Darstellung von `fac` mit Y-Kombinator:

$$\text{fac} = \text{Y}\ \lambda\text{f}.\,(\lambda\text{n}.\,\text{if n} == 0 \text{ then } 1 \text{ else n} * \text{f}\ (\text{n - }1))$$

Zeige durch nachrechnen, dass sich der Term `(fac 1)` auf den in Normalform vorliegenden Term `1` reduzieren lässt:

- fac $1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 1$

Überprüfe dabei, dass durch den Y-Kombinator

- Rekursion auf wiederholtes Kopieren zurückgeführt wird.

Kapitel 12.4

Angewandte λ-Kalküle

Angewandte λ-Kalküle

...sind syntaktisch angereicherte Varianten des reinen λ-Kalküls.

In Ausdrücken angewandter λ-Kalküle können

- Konstanten, Funktionsnamen, 'übliche' Operatoren ähnlich wie Namen auftreten und an die Seite von λ-Abstraktionen treten:

  42, 3.14, true, false, $+$, $*$, $-$, fac, binom, ...
- neue Ausdrücke als Abkürzungen eingeführt und verwendet werden:

  cond e e_1 e_2 , if e then e_1 else e_2, ...
- Typen auftreten, Ausdrücke getypt sein:

  42 : $\mathbb{N}$, 3.14 : $\mathbb{R}$, true : $\mathbb{B}$ool, ...
- ...

Wohlgeformte Ausdrücke

...angewandter λ-Kalküle können dann auch

- Applikative Terme wie
  2+3, fac 3, fib (2+3), binom x y, ((binom x) y), ...
- Abstraktionsterme wie
  λx. (x + x), λx.λy.λz. (x $*$ (y $-$ z)),
  (λx. if odd x then x $*$ 2 else x div 2), ...

sein, für deren Auswertung zusätzliche Reduktionsregeln eingeführt werden, sog.:

- δ-Reduktionen

...zur Auswertung, Reduktion arithmetischer Ausdrücke, bedingter Ausdrücke, Listenoperationen, etc.

Beispiel

...δ-Reduktionsfolge: Unecht 'applikative' Ordnung
(unecht, da ohne Verzahnung von β-, η- und δ-Reduktionen)

$(\lambda x.\lambda.\, x*y)\ ((\lambda x.\lambda y.\, x+y)\ 9\ 5)\ 3$

$$
\begin{array}{lcl}
(\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda x.\lambda y.\, x*y)\ ((\lambda y.\, 9+y)\ 5)\ 3 \\
(\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda x.\lambda y.\, x*y)\ (9+5)\ 3 \\
(\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda y.\, (9+5)*y)\ 3 \\
(\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (9+5)*3
\end{array}
$$

...keine β-, η-Reduktion mehr anwendbar; weiter mit δ-Reduktionen:

$$
\begin{array}{lcl}
 & \ldots & (9+5)*3 \\
(\delta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & 14*3 \\
(\delta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & 42
\end{array}
$$

Anm.: Ratoren in rot, Randen in gold; li für linkest-innerst.

Beispiel′

…δ-Reduktionsfolge: Applikative Ordnung

$$
\begin{array}{lll}
(\lambda x.\lambda.\, x{*}y)\ ((\lambda x.\lambda y.\, x{+}y)\ 9\ 5)\ 3 & & \\
\quad (\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda x.\lambda y.\, x{*}y)\ ((\lambda y.\, 9+y)\ 5)\ 3 \\
\quad (\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda x.\lambda y.\, x{*}y)\ (9+5)\ 3 \\
\quad (\delta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda x.\lambda y.\, x{*}y)\ 14\ 3 \\
\quad (\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & (\lambda y.\, 14*y)\ 3 \\
\quad (\beta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & 14*3 \\
\quad (\delta\text{-Reduktion, li}) & \longrightarrow & 42
\end{array}
$$

Anm.: Ratoren in rot, Randen in gold; li für linkest-innerst.

Übungsaufgabe 12.4.1

δ-Reduktionsfolgen

Gegeben sei der λ-Ausdruck e:

$(\lambda x. \lambda. x * y)\ ((\lambda x. \lambda y. x + y)\ 9\ 5)\ 3$

Ergänze die applikative δ-Reduktionsfolge für diesen Ausdruck aus dem vorhergehenden Beispiel um

- die normale δ-Reduktionsfolge.
- zwei weitere zur Normalform führende δ-Reduktionsfolgen verschieden von der applikativen und normalen Folge.
- Gibt es darüberhinaus weitere verschiedene zur Normalform führende Reduktionsfolgen für e?

Typisierte λ-Kalküle

...ordnen jedem wohlgeformten Ausdruck einen Typ zu, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 3 &: \mathsf{Int} \\ (*) &: \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \\ (\lambda x.2 * x) &: \mathsf{Int} \to \mathsf{Int} \\ (\lambda x.2 * x)\ 3 &: \mathsf{Int} \end{aligned}$$

Dabei treten zwei Schwierigkeiten auf:

1) Ausdrücke mit Selbstanwendung (wie z.B. der Y-Kombinator) können
   - nicht endlich getypt werden, d.h. ihr Typ kann nicht durch einen gewöhnlichen endlichen Typausdruck beschrieben werden.

2) Ausdrücke wie der Y-Kombinator können unmittelbar
   - nicht zur Modellierung von Rekursion verwandt werden.

Typisierung, Selbstanwendung, Rekursion

...Selbstanwendung im Y-Kombinator:

- $\mathsf{Y} = \lambda \mathsf{f}. (\lambda \mathsf{x}. (\mathsf{f}\ (\mathsf{x}\ \mathsf{x}))\ \lambda \mathsf{x}. (\mathsf{f}\ (\mathsf{x}\ \mathsf{x})))$

verhindert

- endliche Typisierung von Y in gewöhnlicher Weise.
- die Modellierung von Rekursion durch kopieren mithilfe von Y.

Überwindung

...der Typisierungsschwierigkeit:

- Rigoros: Übergang zu mächtigeren Typsprachen (Bereichstheorie, reflexive Bereiche (engl. domain theory, reflexive domains)).

...der Rekursionsschwierigkeit:

- Pragmatisch: Explizite Hinzunahme der Reduktionsregel

  $Y\ e \longrightarrow e\ (Y\ e)$

  zum Kalkül.

Rechtfertigung, Fundierung

...des Umgangs mit angereicherten angewandten λ-Kalkülen und des pragmatischen Vorgehens der Reduktionsregelhinzunahme für Rekursion:

Resultate aus der theoretischen Informatik, insbesondere

- Alonzo Church. The Calculi of Lambda-Conversion. Annals of Mathematical Studies, Vol. 6, Princeton University Press, 1941.

  ...u.a. zur Modellierung ganzer Zahlen, Wahrheitswerten, etc. durch Ausdrücke des reinen λ-Kalküls.

Bemerkungen

- Der übergang zu angewandten λ-Kalkülen ist aus praktischer Hinsicht sinnvoll und einsichtig; für theoretische Untersuchungen zur Berechenbarkeit (Berechenbarkeitstheorie) sind sie kaum relevant.
- Die Regelhinzunahme zur Rekursionsmodellierung ist aus Effizienzgründen auch pragmatisch zweckmäßig.

Kapitel 12.5

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Haskell beruht auf den Grundlagen typisierter λ-Kalküle.
- Übersetzer, Interpretierer prüfen, ob die Typisierung von Haskell-Programmen konsistent, wohlgetypt ist.
- Programmierer können Typdeklarationen angeben (aussagekräftigere Fehlermeldungen, Sicherheit), müssen aber nicht (bequem, doch u.U. mit unerwarteten Folgen, etwa bei "zufällig" korrekter, aber "ungemeinter" Typisierung: "gemeinte" Typisierung wäre bei Angabe bei der Typprüfung als inkonsistent aufgefallen).
- Typinformation (gleich ob angegeben oder nicht) wird vom Übersetzer, Interpretierer berechnet, inferiert.
- Rekursion kann unmittelbar ausgedrückt werden (Y-Kombinator nicht erforderlich).

Abschließend

...Anekdote zur Entwicklung der λ-Notation anhand der durch eine abstrakte λ-Abstraktion definierten Funktion:

```
fac :: Integer -> Integer
fac = \n -> (if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1)))
```

In Haskell abweichend vom λ-Kalkül also Verwendung von

- "\" und "->" anstelle von "λ" und "."

...der Weg dorthin war kurvenreich:

	$(\widehat{n.\, n+1})$	(Churchs handschriftliche Schreibweise)
$\rightsquigarrow$	$(\wedge n.\, n+1)$	(Churchs notat. Zugeständnis an Schriftsetzer)
$\rightsquigarrow$	$(\lambda n.\, n+1)$	(Pragmatische Umsetzung durch Schriftsetzer)
$\rightsquigarrow$	`(\n -> n+1)`	(ASCII-Umsetzung in Haskell)

(siehe: Peter Pepper. Funktionale Programmierung in Opal, ML, Haskell und Gofer. Springer-V., 2. Auflage, 2003, S. 22.)

Kapitel 12.6

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (1)

- Wilhelm Ackermann. *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*. Mathematische Annalen 99:118-133, 1928.
- Zena M. Ariola, Matthias Felleisen, John Maraist, Martin Odersky, Philip Wadler. *The Call-by-Need Lambda Calculus*. In Conference Record of the 22nd Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'95), 233-246, 1995.
- Hendrik Pieter Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Revised Edn., North-Holland, 1984. (Kapitel 1, Introduction; Kapitel 2, Conversion; Kapitel 3, Reduction; Kapitel 6, Classical Lambda Calculus; Kapitel 11, Fundamental Theorems)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (2)

- Hendrik P. Barendregt, Erik Barendsen. *Introduction to the Lambda Calculus*. Revised Edn., Technical Report, University of Nijmegen, March 2000. `ftp://ftp.cs.kun.nl/pub/CompMath.Found/lambda.pdf`
- Henrik P. Barendregt, Wil Dekkers, Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Cambridge University Press, 2012.
- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 19, Berechenbarkeit und Lambda-Kalkül)
- Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Annals of Mathematical Studies, Vol. 6, Princeton University Press, 1941.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (3)

- Antonie J.T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 5, Lambda Calculus)
- Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 4, Der Lambda-Kalkül)
- Anthony J. Field, Peter G. Robinson. *Functional Programming*. Addison-Wesley, 1988. (Kapitel 6, Mathematical foundations: the lambda calculus)
- Robert M. French. *Moving Beyond the Turing Test*. Communications of the ACM 55(12):74-77, 2012.
- Robin Gandy. *The Confluence of Ideas in 1936*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 51-102, 1995.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (4)

- Chris Hankin. *An Introduction to Lambda Calculi for Computer Scientists*. King's College London Publications, 2004. (Kapitel 1, Introduction; Kapitel 2, Notation and the Basic Theory; Kapitel 3, Reduction; Kapitel 10, Further Reading)

- Ian Horswill. *What is Computation?* Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):8-14, 2012.

- Achim Jung. *Berechnungsmodelle*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 73-88, 2006. (Kapitel 2.1, Speicherorientierte Modelle: Turing-Maschinen, Registermaschinen; Kapitel 2.2, Funktionale Modelle: Algebraische Kombinationen, Primitive Rekursion, μ-Rekursion, λ-Kalkül)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (5)

- Stephen C. Kleene. *General Recursive Functions of Natural Numbers*. Mathematische Annalen 112:727-742, 1936.
- Stephen C. Kleene. *λ-Definability and Recursiveness*. Duke Mathematical Journal 2:340-352, 1936.
- Stephen C. Kleene. *Origins of Recursive Function Theory*. Annals of the History of Computing 3:52-67, 1981.
- Wolfram-Manfred Lippe. *Funktionale und Applikative Programmierung*. eXamen.press, 2009. (Kapitel 2.1, Berechenbare Funktionen; Kapitel 2.2, Der λ-Kalkül)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (6)

- John Maraist, Martin Odersky, David N. Turner, Philip Wadler. *Call-by-name, Call-by-value, call-by-need, and the Linear Lambda Calculus*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science 1:370-392, 1995.
- John Maraist, Martin Odersky, Philip Wadler. *The Call-by-Need Lambda Calculus*. Journal of Functional Programming 8(3):275-317, 1998.
- John Maraist, Martin Odersky, David N. Turner, Philip Wadler. *Call-by-name, Call-by-value, call-by-need, and the Linear Lambda Calculus*. Theoretical Computer Science 228(1-2):175-210, 1999.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (7)

- John McCarthy. *A Basis for a Mathematical Theory of Computation*. In *Computer Programming and Formal Systems*, P. Braffort, D. Hirschberg (Hrsg.), North-Holland, 33-70, 1963.
- Greg Michaelson. *An Introduction to Functional Programming through Lambda Calculus*. Dover Publications, 2. Auflage, 2011. (Kapitel 2, Lambda calculus; Kapitel 4.1, Repetition, iteration and recursion; Kapitel 4.3, Passing a function to itself; Kapitel 4.6, Recursion notation; Kapitel 8, Evaluation)
- William Newman. *Alan Turing Remembered – A Unique Firsthand Account of Formative Experiences with Alan Turing*. Communications of the ACM 55(12):39-41, 2012.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (8)

- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 9, Formalismen 1: Zur Semantik von Funktionen)
- Rózsa Péter. *Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktionen*. Mathematische Annalen 110:612-632, 1934.
- Rózsa Péter. *Konstruktion nichtrekursiver Funktionen*. Mathematische Annalen 111:42-60, 1935.
- Gordon Plotkin. *Call-by-name, Call-by-value, and the λ-Calculus*. Theoretical Computer Science 1:125-159, 1975.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (9)

- Uwe Schöning, Wolfgang Thomas. *Turings Arbeiten über Berechenbarkeit – eine Einführung und Lesehilfe*. Informatik Spektrum 35(4):253-260, 2012. (Abschnitt Äquivalenz zwischen Turingmaschinen und Lambda-Kalkül)
- Boris A. Trakhtenbrot *Comparing the Church and Turing Approaches: Two Prophetical Messages*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 557-582, 1995.
- Allen B. Tucker (Editor-in-Chief). *Computer Science. Handbook*. Chapman & Hall/CRC, 2004. (Kapitel 92.3, The Lambda Calculus: Foundation of All Functional Languages)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 12 (10)

Ingo Wegener. *Grenzen der Berechenbarkeit*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 111-118, 2006. (Kapitel 4.1, Rechnermodelle und die Churchsche These)

Kapitel 13

Auswertungsordnungen

Kapitel 13.1

Motivation

Motivation und Überblick

Zwei Hauptauswertungsordnungen:

- Applikative Auswertung
  - Kennzeichnend: Sofortige, unverzügliche Argumentauswertung in Funktionsaufrufen.
- Normale Auswertung
  - Kennzeichnend: Aufgeschobene, verzögerte Argumentauswertung in Funktionsaufrufen.

Operationalisierungen applikativer u. normaler Auswertung als

- linksapplikative, frühe (oder fleißige) Auswertung (engl. eager evaluation).
- linksnormale Auswertung (ohne praktische Bedeutung).
- linksnormale Auswertung mit Ausdrucksteilung, späte (oder faule) Auswertung (engl. lazy evaluation).

‘Aliase’ applikativer und normaler Auswertung

Applikative Auswertungsordnung (engl. applicative order eval.)

- Verwandte Bezeichnungen: Wertparameter-, innerste oder strikte Auswertung (engl. call-by-value, innermost or strict evaluation).
- Operationalisierung: Linksapplikative, linkestinnerste, frühe (oder fleißige) Auswertung (engl. leftmost- innermost or eager evaluation).

Normale Auswertungsordnung (engl. normal order evaluation)

- Verwandte Bezeichnungen: Namensparameter-, äußerste Auswertung (engl. call-by-name, outermost evaluation).
- Operationalisierung: Linksnormale, linkestäußerste Auswertung (engl. leftmost-outermost evaluation).
- Effiziente Operationalisierung mit Ausdrucksteilung: Späte (oder faule) Auswertung (engl. lazy evaluation).
    - Verwandte Bezeichnung: Bedarfsparameter-Auswertung (engl. call-by-need evaluation).

Kapitel 13.2

Applikative, normale Auswertungsordnung

Argumentauswertung in Funktionsaufrufen (1)

Applikativ: Sofortige, unverzügliche Argumentauswertung.

- Ein applikativer Ausdruck `(f ausd`$_1$ `... ausd`$_n$`)` wird ausgewertet, indem
  - zunächst die Argumentausdrücke `ausd`$_1$`,...,ausd`$_n$ vollständig ausgewertet werden, anschließend ihre Werte `w`$_1$`,...,w`$_n$ im Rumpf von `f` für die Parameter von `f` eingesetzt werden und schließlich der so entstandene expandierte Ausdruck ausgewertet wird.

Die Wirkung sofortiger Argumentauswertung motiviert folgende Bezeichnungsvarianten:

- Wertparameter-, innerste, strikte Auswertung (engl. call-by-value evaluation, innermost evaluation, strict evaluation).

Argumentauswertung in Funktionsaufrufen (2)

Normal: Aufgeschobene, verzögerte Argumentauswertung.

- Ein applikativer Ausdruck `(f ausd`$_1$ `...` `ausd`$_n$`)` wird ausgewertet, indem
  - die Argumentausdrücke `ausd`$_1$`,...,ausd`$_n$ unausgewertet im Rumpf von `f` für die Parameter von `f` eingesetzt werden und anschließend der so entstandene expandierte Ausdruck ausgewertet wird.

Die Wirkung aufgeschobener Argumentauswertung motiviert folgende Bezeichnungsvarianten:

- Namensparameter-, äußerste Auswertung (engl. call-by-name evaluation, outermost evaluation).

Grundthema aller Auswertungsstrategien

...die Organisation des Zusammenspiels von

- Expandieren (von Funktionsaufrufen)
- Simplifizieren (von Ausdrücken verschieden von Funktionsaufrufen)

mit dem Ziel, Ausdrücke so weit zu vereinfachen wie möglich, ihren Wert zu berechnen.

Drei Beispiele zur Illustration

1. Arithmetischer Ausdruck:

   ```
   3 * (9+5) ->> ...
   ```

2. Ausdruck mit nichtrekursivem Funktionsaufruf und a) elementaren, b) komplexen Argumentausdrücken:

   ```
   simple :: Int -> Int -> Int -> Int
   simple x y z = (x+z) * (y+z)
   ```

   ```
   simple 2 3 4 ->> ...
   ```

3. Ausdruck mit rekursivem Funktionsaufruf:

   ```
   fac :: Integer -> Integer
   fac n = if n == 0 then 1 else n * fac (n-1)
   ```

   ```
   fac 2 ->> ...
   ```

Bsp. 1: Arithmetischer Ausdruck

Viele Simplifikations (S)-Wege – alle führen zum selben Wert:

S-Weg 1:
```
        3 * (9+5)
(S) ->> 3 * 14
(S) ->> 42
```
S-Weg 2:
```
        3 * (9+5)
(S) ->> 3*9 + 3*5
(S) ->> 27 + 3*5
(S) ->> 27 + 15
(S) ->> 42
```
S-Weg 3:
```
        3 * (9+5)
(S) ->> 3*9 + 3*5
(S) ->> 3*9 + 15
(S) ->> 27 + 15
(S) ->> 42
```

Bsp. 2a): Aufruf mit elementaren Argumenten

```
simple x y z ::  Int -> Int -> Int -> Int
simple x y z = (x + z) * (y + z)
```

Eine Expansion (E), viele Simplifikationen (S) – alle Wege führen zum selben Wert:

ES-Weg 1:

```
          simple 2 3 4
(E) ->> (2 + 4) * (3 + 4)
(S) ->> 6 * (3 + 4)
(S) ->> 6 * 7
(S) ->> 42
```

ES-Weg 2:

```
          simple 2 3 4
(E) ->> (2 + 4) * (3 + 4)
(S) ->> (2 + 4) * 7
(S) ->> 6 * 7
(S) ->> 42
```

ES-Weg 3:

```
          simple 2 3 4
(E) ->> ... ->> 42
```

Bsp. 2b): Aufruf mit komplexen Argumenten

```
simple x y z ::  Int -> Int -> Int -> Int
simple x y z = (x + z) * (y + z)
```

ES-Weg 1: Applikative Auswertung

```
            simple 2 3 ((5+7)*9)    (Arg.vereinf. zuerst)
    (S) ->> simple 2 3 12*9
    (S) ->> simple 2 3 108
    (E) ->> (2 + 108) * (3 + 108)
    (S) ->> ...
    (S) ->> 12.210
```

ES-Weg 2: Normale Auswertung

```
            simple 2 3 ((5+7)*9)     (Expansion zuerst)
    (E) ->> (2 + ((5+7)*9)) * ((3 + (5+7)*9))
    (S) ->> ...
    (S) ->> 12.210
```

Beispiel 3: Rekursiver Aufruf

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))

         fac 2
  (E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2 - 1))
  (S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2 - 1))
  (S) ->> 2 * (fac (2 - 1))
```

Auch hier gibt es die Möglichkeit

- applikativ (d.h., rechnen auf Argumentposition)
- normal (d.h., Aufruf expandieren)

auswertend fortzufahren.

...wir führen beide Möglichkeiten im Detail aus.

Bsp. 3: Applikative vs. normale Auswertung

Applikativ: `2 * fac (2-1)` (Arg.vereinf. zuerst)

```
(S) ->> 2 * fac 1
(E) ->> 2 * (if 1 == 0 then 1 else (1 * fac (1-1)))
(S) ->> 2 * (if False then 1 else (1 * fac (1-1)))
(S) ->> 2 * (1 * fac (1-1))
(S) ->> ...in diesem Stil fortfahren.
```

Normal: `2 * fac (2-1)` (Expansion zuerst)

```
(E) ->> 2 * (if (2-1) == 0 then 1
                 else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * (if 1 == 0 then 1
                 else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * (if False then 1
                 else ((2-1) * fac ((2-1)-1)))
(S) ->> 2 * ((2-1) * fac ((2-1)-1))
(S) ->> 2 * (1 * fac ((2-1)-1))
(E) ->> ...in diesem Stil fortfahren.
```

Bsp. 3: Applikative Auswertung (1)

```
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))

          fac (1+1)           (Argument wird sofort ausgewertet)
  (S) ->> fac 2               (Expansion nach max. Argumentvereinf.)
  (E) ->> if 2 == 0 then 1 else (2 * fac (2-1))
  (S) ->> if False then 1 else (2 * fac (2-1))
  (S) ->> 2 * fac (2-1)       (Arg. wird sofort ausgewertet)
  (S) ->> 2 * fac 1           (Exp. nach max. Argumentvereinf.)
  (E) ->> 2 * (if 1 == 0 then 1
                  else (1 * fac (1-1)))
  (S) ->> 2 * (if False then 1
                  else (1 * fac (1-1)))
  (S) ->> 2 * (1 * fac (1-1)) (Arg. wird sofort ausgewertet)
  (S) ->> 2 * (1 * fac 0)     (Exp. nach max. Arg.vereinf.)
  (E) ->> 2 * (1 * (if 0 == 0 then 1
                       else (0 * fac (0-1))))
```

Bsp. 3: Applikative Auswertung (2)

```
(S) ->> 2 * (1 * (if False then 1
                    else (0 * fac (0-1))))
(S) ->> 2 * (1 * 1)
(S) ->> 2 * 1
(S) ->> 2
```

⇝ Applikative, sofortige Argumentauswertung
(engl. applicative order evaluation)

Bsp. 3: Normale Auswertung (1)

```
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1))

          fac (1+1)      (Sofortige Exp., keine vorh. Arg.vereinf.)
   (E) ->> if (1+1) == 0 then 1
              else ((1+1) * fac ((1+1)-1))
   (S) ->> if 2 == 0 then 1
              else ((1+1) * fac ((1+1)-1))
   (S) ->> if False then 1
              else ((1+1) * fac ((1+1)-1))
   (S) ->> ((1+1) * fac ((1+1)-1))
   (S) ->> (2 * fac ((1+1)-1))                   (Sofortige Exp.)
   (E) ->> 2 * (if ((1+1)-1) == 0 then 1
              else (((1+1)-1) * fac (((1+1)-1)-1)))
  (3S) ->> 2 * (if False then 1
              else (((1+1)-1) * fac (((1+1)-1)-1)))
   (S) ->> 2 * (((1+1)-1) * fac (((1+1)-1)-1))
```

Bsp. 3: Normale Auswertung (2)

```
(S)  ->> 2 * ((2-1) * fac (((1+1)-1)-1))
(S)  ->> 2 * (1 * fac (((1+1)-1)-1))       – Sofortige Exp.
(E)  ->> 2 * (1 * (if (((1+1)-1)-1) == 0 then 1
           else (((1+1)-1)-1) * fac ((((1+1)-1)-1)-1)))
(4S) ->> 2 * (1 * (if True then 1
           else (((1+1)-1)-1) * fac ((((1+1)-1)-1)-1)))
(S)  ->> 2 * (1 * 1)
(S)  ->> 2 * 1
(S)  ->> 2
```

$\rightsquigarrow$ Normale, aufgeschobene Argumentauswertung
(engl. normal order evaluation)

Kapitel 13.3

Linksapplikative, linksnormale Auswertungsordnung

Linksapplikative, linksnormale

...Auswertungsordnungen als wichtige praktische Operationalisierungen

- applikativer
- normaler

Auswertung.

Applikativ oder normal auszuwerten

...beantwortet eine erste operationell wichtige Frage der Ausdrucksauswertung:

1. Wie ist mit (Funktions-) Argumenten umzugehen?
   ⇝ Ausgewertet oder unausgewertet übergeben?
   - Applikativ (innerst): Ausgewertet übergeben.
   - Normal (äußerst): Unausgewertet übergeben.

Linksapplikativ oder linksnormal auszuwerten beantwortet eine zweite operationell wichtige Frage:

2. Wo ist im Ausdruck auszuwerten?
   ⇝ Links, rechts, halblinks, in der Mitte?
   - Linksapplikativ (linksinnerst): Linkestinnerste Stelle.
   - Linksnormal (linksäußerst): Linkestäußerste Stelle.

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
```

Linksapplikative Auswertung

Linksapplikativ ausgewertet:

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib(squ 4))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib((4*4)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib 16)+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+fac(fib (16-2)+fib(16-1)) + 3*5 +...
->> 8+fac(fib 14+fib(16-1)) + 3*5 +...
->> ...
```

Linksnormale Auswertung

Linksnormal ausgewertet:

```
2^3+fac(fib(squ(2+2)))+3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+(if fib(squ(2+2))==0 then 1 else n*fac(fib(squ(2+2))-1))
                    +3*5+fib(fac(7*(5+3)))+fib((5+7)*2)
->> 8+( if (if  squ(2+2)==0 then 0
          else if squ(2+2)==1 then 1
              else fib(squ(2+2)-2)+fib(squ(2+2)-1))==0
     then 1 else n*fac(fib(squ(2+2))-1)) + 3*5 +...
->> 8+( if (if (2+2)*(2+2)==0 then 0
          else if squ(2+2)==1 then 1
              else fib(squ(2+2)-2)+fib(squ(2+2)-1))==0
     then 1 else n*fac(fib(squ(2+2))-1)) + 3*5 +...
->> 8+( if (if 4*(2+2)==0 then 0
          else if squ(2+2)==1 then 1
              else fib(squ(2+2)-2)+fib(squ(2+2)-1))==0
     then 1 else n*fac(fib(squ(2+2))-1)) + 3*5 +...
->> ...
```

Beachte bei der Expansion von fib

...im Fall der linksnormalen Auswertung:

Die musterbasierte Definition von fib:

```
fib :: Int-> Int     -- Musterbasierte Definition
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = fib (n-2) + fib (n-1)
```

ist syntaktischer Zucker der Grundversion mit geschachteltem Fallunterscheidungsausdruck:

```
fib :: Int -> Int                 -- Grundversion
fib n = if n==0 then 0
           else if n==1 then 1
                else fib (n-2) + fib (n-1)
```

Zentrale Fragen

Welche Auswirkungen hat die Wahl von (links-) applikativer oder (links-) normaler Auswertungsordnung?

...auf

- Terminierungsverh., -häufigk.? (Th. 13.3.2, Th. 13.3.3)
- Terminierungsgeschwindigkeit? (Th. 13.3.3, Kap. 13.5)
- berechneten Ausdruckswert im Term.fall? (Th. 13.3.1)

Hauptresultate (1)

Die Church/Rosser-Theoreme 12.3.4.1, 12.3.4.2 garantieren:

Theorem 13.3.1 (Wertdeterminiertheit)

Jede terminierende Auswertungsfolge endet mit demselben Ergebnis.

Informell: Terminierende Auswertungsfolgen widersprechen sich nicht.

Theorem 13.3.2 (Terminierungshäufigkeit)

Wenn irgendeine Auswertungsfolge terminiert, so terminiert auch die (links-) normale Auswertungsreihenfolge.

Informell: (Links-) normale Auswertung terminiert am häufigsten.

Hauptresultate (2)

Theorem 13.3.3 (Abweichendes Terminierungsverh.)

Angesetzt auf einen Ausdruck, kann die (links-) normale Auswertungsordnung terminieren, die (links-) applikative aber nicht.

Informell: (links-) applikative und (links-) normale Auswertungsordnung können sich abhängig vom Ausdruck unterscheiden in

- Terminierungsverhalten (d.h. Terminierungshäufigkeit)
- Terminierungsgeschwindigkeit (d.h. Performanz)

nicht aber hinsichtlich des

- Ergebnisses, wenn sie terminieren.

Zu Terminierungsgeschwindigkeit, -häufigkeit

...anhand von Beispielen über den Funktionen squ, infinite und first:

- Die Quadratfunktion squ auf ganzen Zahlen:
```
squ :: Integer -> Integer
squ n = n * n
```
- Die 'ewige' Inkrementfunktion infinite:
```
infinite :: Integer
infinite = 1 + infinite
```
- Die Projektionsfunktion fst:
```
fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x
```
- Drei Ausdrücke:
```
(17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)
fst (2*21,squ (squ (squ (1+1))))
fst (2*21,infinite)
```

Linksapplikative, linkestinnerste (LI) Auswert.

...von `(17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)`:

```
            ((17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + squ (squ (squ 2))) + (2*11)
(LI-E) ->> (21 + squ (squ (2*2))) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + squ (squ 4)) + (2*11)
(LI-E) ->> (21 + squ (4*4)) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + squ 16) + (2*11)
(LI-E) ->> (21 + 16*16) + (2*11)
(LI-S) ->> (21 + 256) + (2*11)
(LI-S) ->> 277 + (2*11)
(LI-S) ->> 277 + 22
(LI-S) ->> 299
```

Insgesamt: $1 + 7 + 3 = 11$ Schritte

...davon 7 Schritte für `squ (squ (squ (1+1)))`

Linksnormale, linkestäußerste (LÄ) Ausw. (1)

...von `(17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)`:

```
              ((17+4) + squ (squ (squ (1+1)))) + (2*11)
(LÄ-S)  ->>   (21 + squ (squ (squ (1+1)))) + (2*11)
(LÄ-E)  ->>   (21 + squ (squ (1+1)) * squ (squ(1+1))) + (2*11)
(LÄ-E)  ->>   (21 + ((squ (1+1))*(squ (1+1))) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-E)  ->>   (21 + ((1+1)*(1+1)*sq (1+1)) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S)  ->>   (21 + (2*(1+1)*squ (1+1)) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S)  ->>   (21 + (2*2*squ (1+1)) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S)  ->>   (21 + (4 * squ (1+1)) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-E)  ->>   (21 + (4*((1+1)*(1+1))) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S)  ->>   (21 + (4*(2*(1+1))) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S)  ->>   (21 + (4*(2*2)) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S)  ->>   (21 + (4*4) * squ (squ (1+1))) + (2*11)
(LÄ-S)  ->>   (21 + 16 * squ (squ (1+1))) + (2*11)
        ->>   ...
```

Linksnormale, linkestäußerste (LÄ) Ausw. (2)

```
        ->> ...
(LÄ-S) ->> (21 + (16 * 16)) + (2*11)
(LÄ-S) ->> (21 + 256) + (2*11)
(LÄ-S) ->> 277 + (2*11)
(LÄ-S) ->> 277 + 22
(LÄ-S) ->> 299
```

Insgesamt: $1 + (1+10+10+1) + 3 = 26$ Schritte

...davon 22 Schritte für `squ (squ (squ (1+1)))`

Linksapplikativ effizienter als linksnormal?

Nicht immer! Betrachte den zweiten Ausdruck:

```
first (2*21, squ (squ (squ (1+1))))
```

- (Links-) applikative Auswertung:

```
                first (2*21, squ (squ (squ (1+1))))
(LI-S) ->> first (42, squ (squ (squ (1+1))))
       ->> ...
(LI-S) ->> first (42, 256)
(LI-E) ->> 42
```

  Insgesamt: 1+7+1=9 Schritte (davon 7 für den Wert des unbenötigten zweiten Arguments!)

- (Links-) normale Auswertung:

```
                first (2*21, squ (squ (squ (1+1))))
(LÄ-E) ->> 2*21
(LÄ-S) ->> 42
```

  Insgesamt: 2 Schritte (das unbenötigte zweite Argument wird überhaupt nicht ausgewertet!)

Linksapplikativ, linksnormal ‘term.gleich’?

Nicht immer! Betrachte den dritten Ausdruck:

```
first (2*21,infinite)
```

- (Links-) applikative Auswertung:

```
                first (2*21,infinite)
(LI-S) ->> first (42,infinite)
(LI-E) ->> first (42,1+infinite)
(LI-E) ->> first (42,1+(1+infinite))
(LI-E) ->> ...
(LI-E) ->> first (42,1+(1+(1+(...+(1+infinite)...))))
(LI-E) ->> ...
```

  Insgesamt: Nichtterminierung, kein Resultat: undefiniert!

- (Links-) normale Auswertung:

```
                first (2*21,infinite)
(LÄ-E) ->> 2*21
(LÄ-S) ->> 42
```

  Insgesamt: Terminierung, Res. 42 nach 2 Schritten: def.!

Unterschiedliche Terminierungshäufigkeit

..von linksapplikativer und linksnormaler Auswertung.

Das Beispiel des zweiten Ausdrucks

```
first (2*21,squ (squ (squ (1+1))))
```

zeigt:

- (Links-) applikative und (links-) normale Auswertung können sich im Terminierungsverhalten unterscheiden:
  - Applikativ: Nichttermination, kein Resultat: undefiniert.
  - Normal: Termination, sehr wohl ein Resultat: definiert.

Bem.: Die umgekehrte Situation ist nicht möglich (s. Theorem 13.3.1)!

Unterschiedliche Terminierungsgeschwindigkeit

...von linksapplikativer und linksnormaler Auswertung.

Das Beispiel des ersten Ausdrucks

```
(17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)
```

zeigt:

- Ergebnisgleichheit: Terminieren (links-) applikative und (links-) normale Auswertungsordnung angewendet auf einen Ausdruck beide, so terminieren sie mit demselben Resultat (s. Theorem 13.3.1).
- Schrittzahlungleichheit: (Links-) applikative und (links-) normale Auswertung können bis zur Terminierung (mit gleichem Endresultat) unterschiedlich viele Expansions- und Simplifikationsschritte benötigen.

Unordenbare Performanz

..von linksapplikativer und linksnormaler Auswertung.

Die Beispiele aller drei Ausdrücke zusammen

```
(17+4) + squ (squ (squ (1+1))) + (2*11)
fst (2*21,squ (squ (squ (1+1))))
fst (2*21,infinite)
```

zeigen, dass weder linksapplikative noch linksnormale Auswertung der jeweils anderen Auswertungsordnung stets überlegen ist.

(Links-) normale Auswertung und Effizienz

Problem: Naive (links-) normale Auswertung führt häufig zur Mehrfachauswertung von Ausdrücken (siehe etwa Beispiel 2b), Weg 2, oder die (links-) normale Auswertung des Ausdrucks `squ (squ (squ (1+1)))`.

Ziel: Effiziensteigerung duch Vermeidung von Mehrfachauswertungen von Ausdrücken.

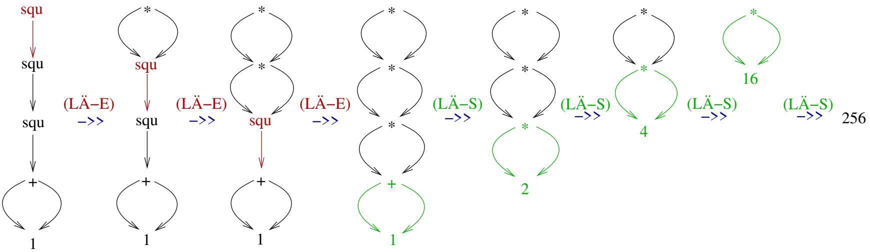
Methode: Teilen gemeinsamer Ausdrücke durch Übergang zu Ausdrucksdarstellung in Form von Graphen; Ausdrucksauswertungen werden zu Graphtransformationen.

Resultierende Auswertungsordnung: Späte (oder faule) Auswertung (engl. lazy evaluation)!

...garantiert, dass Argumente höchstens einmal ausgewertet werden (möglicherweise also gar nicht!).

Späte Auswertung

...Ausdrucksrepräsentation, Ausdrucksauswertung auf Graphen:



Insgesamt: 7 Schritte.

(Statt 22 Schritte bei naiver (links-) normaler Auswertung.)

Zusammenfassung

Späte Auswertung (engl. lazy evaluation)

- ist eine effiziente Umsetzung (links-) normaler Auswertungsordnung.
- erfordert implementierungstechnisch eine Darstellung von Ausdrücken in Form von Graphen und Graphtransformationen zu ihrer Auswertung.
- 'vergleichbar' performant wie frühe Auswertungsordnung (engl. eager evaluation), wenn alle Argumente benötigt werden.
- vereint möglichst gut die Vorteile applikativer (Effizienz!) und normaler (Terminierungshäufigkeit!) Auswertungsordnung.

Kapitel 13.4

Auswertungsordnungscharakterisierungen

Auswertungsordnungscharakterisierungen

...über Analogien und Betrachtungen zu:

(i) Parameterübergabemechanismen
(ii) Auswertungspositionen
(iii) Argumentauswertungshäufigkeiten
(iv) Definiertheitszusammenhang von Argument und Funktion

(i) Parameterübergabemechanismenanalogien

Applikative Auswertungsordnung entspricht

- Call-by-value

Normale Auswertungsordnung entspricht

- Call-by-name

Späte Auswertungsordnung entspricht

- Call-by-need

(ii) Auswertungspositionen

Applikative Auswertungsordnung

- Innerste Auswertungsordnung: Reduziere nur Redexe, die keine Redexe enthalten.
- Linksapplikative, linkestinnerste Auswertungsordnung: Reduziere stets den linkesten innersten Redex, der keine Redexe enthält.

  Frühe Auswertungsordnung (engl. eager evaluation).

Normale Auswertungsordnung

- Äußerste Auswertungsordnung: Reduziere nur Redexe, die nicht in anderen Redexen enthalten sind.
- Linksnormale, linkestäußerste Auswertungsordnung: Reduziere stets den linkesten äußersten Redex, der nicht in anderen Redexen enthalten ist.

  Späte Auswertungsordnung (engl. lazy evaluation), effiziente Umsetzung linksnormaler Auswertung.

(iii) Argumentauswertungshäufigkeit

Applikative Auswertungsordnung

- Jedes Argument wird genau einmal ausgewertet.

Normale Auswertungsordnung

- Jedes Argument wird so oft ausgewertet, wie es benutzt wird.

Späte Auswertungsordnung

- Jedes Argument wird höchstens einmal ausgewertet.

(iii) Illustrierendes Beispiel

Betrachte die Funktion:

```
f :: Int -> Int -> Int -> Int
f x y z = if x>42 then y+y else z^z
```

und den Aufruf:

```
f 45 (squ (5*(2+3))) (squ ((2+3)*7))
```

(iii) Applikative Auswertung von `f`

```
f x y z = if x>42 then y+y else z^z
```

Applikative Auswertung:

```
          f 45 (squ (5*(2+3))) (squ ((2+3)*7))
(2S) ->> f 45 (squ (5*5)) (squ (5*7))
(2S) ->> f 45 (squ 25) (squ 35)
(2E) ->> f 45 (25*25) (35*35)
(2S) ->> f 45 625 1225
 (E) ->> if 45>42 then 625+625 else 1125^1125
 (S) ->> if True then 625+625 else 1125^1125
 (S) ->> 625+625
 (S) ->> 1250
```

...die Argumente `(squ (5*(2+3)))` und `(squ ((2+3)*7))` werden beide genau einmal ausgewertet (ohne dass der Wert von `(squ ((2+3)*7))` benötigt wird).

(iii) Normale Auswertung von f

```
f x y z = if x>42 then y+y else z^z
```

Normale Auswertung:

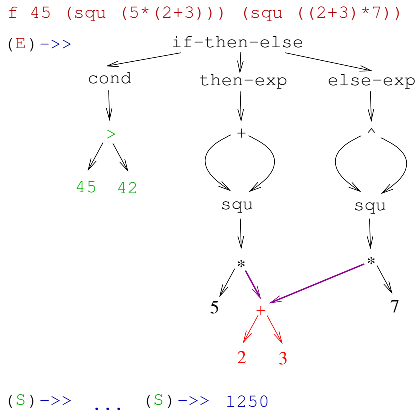
```
        f 45 (squ (5*(2+3))) (squ ((2+3)*7)))
 (E) ->> if 45>42 then (squ (5*(2+3))) + (squ (5*(2+3)))
        else (squ ((2+3)*7)) * (squ ((2+3)*7))
 (S) ->> if True then (squ (5*(2+3))) + (squ (5*(2+3)))
        else (squ ((2+3)*7))^(squ ((2+3)*7))
 (S) ->> (squ (5*(2+3))) + (squ (5*(2+3)))
(2S) ->> (squ (5*5)) + (squ (5*5))
(2S) ->> (squ 25) + (squ 25)
(2E) ->> (25*25) + (25*25)
(2S) ->> 625 + 625
 (S) ->> 1250
```

...das Argument `(squ (5*(2+3)))` wird zweimal ausgewertet; das nicht benötigte Argument `(squ ((2+3)*7))` gar nicht.

(iii) Späte Auswertung von f

```
f x y z = if 42>x then y+y else z^z
```

Späte Auswertung:



...das Argument (squ (5*(2+3))) wird genau einmal ausgewertet; vom nicht benötigten Argument (squ ((2+3)*7)) der Teilterm (2+3) (wg. Ausdrucksteilung ohne Extrakosten!).

(iv) Definiertheitszusammenhang

...von Argument und Funktion.

Schüsselbegriff: Striktheit von Funktionen.

Definition 13.4.1 (Strikt im n-ten Parameter)

Eine Funktion `f` heißt strikt in ihrem n-ten Parameter (oder Argument), wenn gilt: Ist der Wert des Arguments des n-ten Parameters nicht definiert, so ist auch der Wert von `f` nicht definiert (unabhängig von den Werten möglicher weiterer Argumente).

(iv) Bsp.: Striktheit bei einstelligen Funktionen

Die Fakultäts- und Fibonacci-Funktion sind strikt in ihrem ersten (und einzigen) Parameter. Undefiniertheit des Argumentwerts impliziert Undefiniertheit der Funktion.

```
                (LI-S)
fac (1 `div` 0)  ->> undef
                (LÄ-E)
fac (1 `div` 0)  ->>
  if ((1 `div` 0) == 0) then 1
                                   (LÄ-S)
   else n * fac ((1 `div` 0) - 1)  ->>  undef

                (LI-S)
fib (1 `div` 0)  ->> undef
                (LÄ-E)
fib (1 `div` 0)  ->>
 if (1 `div` 0) == 0 then 0
  else (1 `div` 0) == 1 then 1
   else fib ((1 `div` 0) - 2) + fib ((1 `div` 0) - 1)
    (LÄ-S)
    ->> undef
```

(iv) Bsp.: Striktheit bei mehrstelligen Fkt.

Mehrstellige Funktionen können strikt in einigen Parametern, nicht strikt in anderen sein:

Der Fallunterscheidungsausdruck (-funktion)

```
(if . then . else .)
```

ist strikt im 1-ten Argument (Bedingung), nicht strikt im 2-ten und 3-ten Argument (then- und else-Ausdruck).

```
if ((1 `div` 0) == 0) then 4 else 2 ->> undef     (strikt in
                                                   Bedingung)

if ((0 `div` 1) == 0) then 42 else 1 `div` 0
->> if (0 == 0) then 42 else 1 `div` 0
->> if True then 42 else 1 `div` 0              (nicht strikt
->> 42                                          im 3-ten Arg.)

if ((0 `div` 1) /= 0) then 1 `div` 0 else 42
->> if (0 /= 0) then 1 `div` 0 else 42
->> if False then 1 `div` 0 else 42             (nicht strikt
->> 42                                          im 2-ten Arg.)
```

(iv) Striktheit, Terminierung, Ergebnisneutralit.

Theorem 13.4.2 (Striktheit, Terminierung)

Für strikte Funktionen stimmen die Terminierungsverhalten von früher und später Auswertungsordnung für die strikten Argumente überein.

Korollar 13.4.3 (Striktheit, Ergebnisneutralität)

Durch den Übergang von später auf frühe Auswertung für strikte Argumente einer Funktion gehen keine Ergebnisse verloren (und stimmen gemäß Theorem 13.3.1 überein).

Striktheit und Optimierung

Für strikte Argumente von Funktionen darf deshalb stets

- späte durch frühe Auswertung ersetzt werden

da sich Terminierungsverhalten und Resultat nicht ändern.

Die Ersetzung später durch frühe Auswertung für strikte Argumente von Funktionen ist eine der wichtigsten

- Optimierungen

bei der Übersetzung funktionaler Sprachen mit später Auswertungssemantik.

Beispiel: Frühe statt späte Argumentauswertung für die in ihrem jeweiligen Argument strikten Fakultäts- und Fibonacci-Funktionen ist für Übersetzer von Sprachen wie Haskell und Miranda erlaubt.

Striktheitsanalyse, strikte Auswertung

Übersetzer spät auswertender Sprachen führen dazu eine sog.

- Striktheitsanalyse

durch, um dort, wo es sicher ist, d.h. wo ein Ausdruck zum Ergebnis beiträgt und sein Wert deshalb in jeder Auswertungsordnung benötigt wird,

- aufgeschobene, späte (engl. lazy)

durch

- sofortige, frühe (engl. eager)

Argumentauswertung zu ersetzen.

Statt von früher Auswertung spricht man deshalb auch von

- strikter Auswertung (engl. strict evaluation).

Kapitel 13.5

Frühe oder späte Auswertung? Eine Standpunktfrage

To be, or not to be,
that is the question.

Hamlet, Prinz von Dänemark
nach William Shakespeare (1564-1616)
engl. Dramatiker und Lyriker

To be lazy, or not to be lazy,
that is the question.

Hamlet, zeitgerecht
interpretiert

- Frühe Auswertung von Argumenten (engl. eager evaluation) (in Sprachen wie ML, Scheme (ohne Makros),...)
- Späte Auswertung von Argumenten (engl. lazy evaluation) (in Sprachen wie Haskell, Miranda,...)

Quot capita, tot sententiae.
Wie viele Köpfe, so viele Ansichten.

Terenz (190 v.Chr. - 159 v.Chr.)
röm. Schriftsteller

Späte vs. frühe Argumentauswertung (1)

...die Vorteile des einen sind die Nachteile des anderen und umgekehrt.

Vorteile später Argumentauswertung (mit Ausdrucksteilung):

- Terminiert mit Normalform, wenn es (irgend-) eine terminierende Auswertungsreihenfolge gibt.

  Informell: Späte (wie normale und linksnormale) Auswertungsordnung terminieren häufigst möglich!
- Wertet Argumente nur aus, wenn deren Werte wirklich benötigt werden; und dann nur einmal.
- Ermöglicht eleganten und flexiblen Umgang mit potentiell unendlichen Werten von Datenstrukturen (z.B. unendliche Listen, Ströme (s. Kap. 18.2), unendliche Bäume, etc.).

Späte vs. frühe Argumentauswertung (2)

Nachteile später Argumentauswertung:

- Konzeptuell und implementierungstechnisch anspruchsvoller.
  - Repräsentation von Ausdrücken in Form von Graphen statt linearer Sequenzen; Ausdrucksauswertung und -manipulation als Graph- statt Sequenzmanipulation.
  - Partielle Auswertung von Ausdrücken kann Seiteneffekte bewirken! (Beachte: Einwand gilt nicht für Haskell; in Haskell keine Seiteneffekte! In Scheme: Seiteneffektvermeidung obliegt dem Programmierer.)
  - Ein-/Ausgabe nicht in trivialer Weise transparent für den Programmierer zu integrieren.

...volle Einsicht in die Nachteilsursachen erfordert tiefergehendes Verständnis von λ-Kalkül und Bereichstheorie (engl. domain theory).

Späte vs. frühe Argumentauswertung (3)

Vorteile früher Argumentauswertung:

- Konzeptuell und implementierungstechnisch einfacher.
- Einfache(re) Integration imperativer Konzepte.
- Vom mathematischen Standpunkt oft 'natürlicher'.

  Beispiel: Soll der Wert von Ausdrücken wie `(first (2*21,infinite))` definiert gleich 42 sein wie bei aufgeschobener Auswertung oder undefiniert wg. Nichtterminierung wie bei sofortiger Auswertung?

$$\texttt{first (2*21,infinite))} \underbrace{\texttt{->>}}_{\substack{\texttt{aufgeschobene}\\ \texttt{Argumentauswertung}}} \texttt{2*21 ->> 42}$$

$$\begin{array}{l}\texttt{first (2*21,infinite))}\\ \quad \underbrace{\texttt{->>}}_{\substack{\texttt{sofortige}\\ \texttt{Argumentauswertung}}} \texttt{first(42,1+infinite)}\\ \quad \texttt{->> first(42,1+(1+infinite)) ->> ...}\end{array}$$

Auswertungsordnungsauswahlhilfe (1)

... auf Grundlage der Anzahl von Argumentsauswertungen.

Normale Auswertungsordnung

- Argumente werden so oft ausgewertet, wie sie verwendet werden.
  - \+ Kein Argument wird ausgewertet, dessen Wert nicht benötigt wird.
  - \+ Terminiert, wenn immer es eine terminierende Auswertungsfolge gibt; terminiert am häufigsten, häufiger als applikative Auswertung.
  - – Argumente, die mehrfach verwendet werden, werden auch mehrfach ausgewertet; so oft, wie sie verwendet werden $\rightsquigarrow$ praktisch deshalb irrelevant; praktisch relevant: aufgeschobene Auswertung.
- Theorie-relevant, nicht praktisch relevant.

Auswertungsordnungsauswahlhilfe (2)

Applikative Auswertungsordnung

- Argumente werden genau einmal ausgewertet.
  - \+ Jedes Argument wird exakt einmal ausgewertet; kein zusätzlicher Aufwand über die Auswertung hinaus.
  - – Auch Argumente, deren Wert nicht benötigt wird, werden ausgewertet; das ist kritisch für Argumente, deren Auswertung teuer ist, auf einen Laufzeitfehler führt oder nicht terminiert.

Späte Auswertungsordnung (mit Ausdrucksteilung)

- Argumente werden höchstens einmal ausgewertet.
  - \+ Ein Argument wird nur ausgewertet, wenn sein Wert benötigt wird; und dann exakt einmal.
  - \+ Kombiniert die Vorteile von applikativer Auswertung (Effizienz!) und normaler Auswertung (Terminierung!).
  - – Erfordert zusätzlichen Aufwand zur Laufzeit für die Verwaltung der Auswertung von (Teil-) Ausdrücken.

Auswertungsordnungsauswahlhilfe (3)

...von pragmatischem Standpunkt aus:

- Applikative, frühe Auswertungsordnung vorteilhaft gegenüber (normaler und) später Auswertungsordnung, da
  - geringere Laufzeitzusatzkosten (engl. overhead).
  - größeres Parallelisierungspotential (für Funktionsargumente).
- Späte Auswertungsordnung vorteilhaft gegenüber applikativer, früher Auswertungsordnung, wenn
  - Terminierungshäufigkeit (Definiertheit des Programms!) von überragender Bedeutung.
  - Argumente nicht benötigt (und deshalb gar nicht ausgewertet) werden
    Bsp.: $(\lambda x.\lambda y.y)\,((\lambda x.x\,x)(\lambda x.x\,x))\,z \rightarrow (\lambda y.y)\,z \rightarrow z$
- Ideal: Das Beste beider Welten:
  - Applikativ, früh, wo möglich; spät, wo nötig.

Auswertungsordnungsauswahlhilfe (4)

...zusammenfassend:

Sofortige, frühe (engl. eager) oder aufgeschobene, späte (engl. lazy) Argumentauswertung:

- Für beide Strategien sprechen gewichtige Gründe – und Fürsprecher:

  Iucundi acti labores.
  Angenehm sind die erledigten Arbeiten.

  Cicero (106 - 43 v.Chr.)
  röm. Staatsmann und Schriftsteller

  Jetzt schaun ma amoi, nacha sehn ma scho!

  Franz Beckenbauer (* 1945)
  bayer. Fußballspieler und Kaiser

- Die Wahl ist letztlich eine Frage von Angemessenheit und Zweckmäßigkeit im Anwendungskontext.

Randnotiz: 'Lazy' – Maßeinheit

...für den Abstand von Hochkultur und Dekadenz!

To be, or not to be?

...eine Frage der Hochkultur.

To be lazy, or not to be lazy?

...eine Frage der Dekadenz.

O tempora! O mores!
Oh Zeiten! Oh Sitten!
Cato der Ältere (234 - 149 v.Chr.)
röm. Staatsmann
durch Ciceros Reden gegen Verres
berühmt gewordener Ausruf

Jedoch:

Quae fuerant vitia, mores sunt.
Was früher Fehler waren, sind jetzt die Sitten.
Seneca d. Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller

Kapitel 13.6

Frühe und späte Auswertung in Haskell

Steuerung der Auswertung in Haskell

Haskell erlaubt, die Auswertungsordnung (zu einem gewissen Grad) zu steuern.

Aufgeschobene Auswertung:

- Standardverfahren (vom Programmierer nichts zu tun):

```
         fac (2*(3+5))
(E) ->> if (2*(3+5)) == 0 then 1
         else ((2*(3+5)) * fac ((2*(3+5))-1))
...
```

Sofort(-art)ige Auswertung:

- Erzwingbar mithilfe des zweistelligen Operators ($!):

```
         fac $! (2*(3+5))
(S) ->> fac $! (2*8)
(S) ->> fac $! 16
(E) ->> if 16 == 0 then 1 else (16 * fac $! (16-1))
...
```

Sofort(-art)ige Auswertung in Haskell (1)

Wirkung des Operators (`$!`):

- Die Auswertung des Ausdrucks `(f $! ausd)` erfolgt in gleicher Weise wie die des Ausdrucks `(f ausd)` mit dem Unterschied, dass die Auswertung von `ausd` erzwungen wird, bevor `f` angewendet und expandiert wird.

Im Detail: Ist der Wert von `ausd` von einem

- elementaren Typ wie `Int`, `Bool`, `Double`, etc., so wird `ausd` vollständig ausgewertet.
- Tupeltyp wie `(Int,Bool)`, `(Int,Bool,Double)`, etc., so wird `ausd` bis zu einem Tupel von Ausdrücken ausgewertet, aber nicht weiter.
- Listentyp, so wird `ausd` so weit ausgewertet, bis als Ausdruck die leere Liste erscheint oder die Konstruktion zweier Ausdrücke zu einer Liste.

Sofort(-art)ige Auswertung in Haskell (2)

Für curryfizierte Funktionen kann

- strikte Auswertung

für jede Argumentkombination erreicht werden.

Beispiel: Für die zweistellige curryfizierte Funktion

```
f :: a -> b -> c
```

erzwingt

- `(f $! x) y` : Auswertung von `x`
- `(f x) $! y` : Auswertung von `y`
- `(f $! x) $! y` : Auswertung von `x` und `y`

vor der Anwendung und Expansion von `f`.

Hauptanwendung von ($!) in Haskell

...zur Minderung des Speicherverbrauchs.

Beispiel: Vergleiche Funktion

```
sumwith_lz :: Int -> [Int] -> Int
sumwith_lz v []     = v
sumwith_lz v (x:xs) = sumwith_lz (v+x) xs
```

mit

```
sumwith_ea :: Int -> [Int] -> Int
sumwith_ea v []     = v
sumwith_ea v (x:xs) = (sumwith_ea $! (v+x)) xs
```

Anwendungsbsp.: Aufgeschobene Auswertung

...liefert:

```
             sumwith_lz 36 [1,2,3]
 (LÄ-E) ->> sumwith_lz (36+1) [2,3,]
 (LÄ-E) ->> sumwith_lz ((36+1)+2) [3]
 (LÄ-E) ->> sumwith_lz (((36+1)+2)+3) []
 (LÄ-E) ->> (((36+1)+2)+3)
 (LÄ-S) ->> ((37+2)+3)
 (LÄ-S) ->> (39+3)
 (LÄ-S) ->> 42
```

...7 Schritte; die max. Länge des summativen Terms auf erster Argumentposition hängt von der Länge der Liste auf zweiter Argumentposition ab.

Anwendungsbsp.: Sofort(-art)ige Auswertung

...mittels ($!) liefert:

```
              sumwith_ea 36 [1,2,3]
 (LÄ-E) ->> (sumwith_ea $! (36+1)) [2,3]
 (LI-S) ->> (sumwith_ea $! 37) [2,3]
 (LI-S) ->> sumwith_ea 37 [2,3]
 (LÄ-E) ->> (sumwith_ea $! (37+2)) [3]
 (LI-S) ->> (sumwith_ea $! 39) [3]
 (LI-S) ->> sumwith_ea 39 [3]
 (LÄ-E) ->> (sumwith_ea $! (39+3)) []
 (LI-S) ->> (sumwith_ea $! 42) []
 (LI-S) ->> sumwith_ea 42 []
 (LÄ-E) ->> 42
```

...10 Schritte, aber die Länge des summativen Terms auf erster Argumentposition ist unabhängig von der Länge der Liste auf zweiter Argumentposition und konstant kurz.

Anwendungsbsp.: Auswertungsstile

...im Vergleich:

- Aufgeschobene Auswertung von `sumwith_lz 36 [1..3]`
  - baut den Ausdruck `(((36+1)+2)+3)` vollständig auf, bevor die erste Simplifikation ausgeführt wird.
  - Allgemein: `sumwith_lz` baut einen Ausdruck auf, dessen Größe proportional zur Länge der Argumentliste ist.
  - Problem: Programmabbrüche durch Speicherüberläufe schon für vergleichsweise kleine Argumente möglich: `sumwith_lz 36 [1..10000]`
- Sofort(-art)ige Auswertung von `sumwith_ea 36 [1..3]`
  - Simplifikationen werden frühestmöglich ausgeführt.
  - Exzessiver Speicherverbrauch (engl. memory leak) wird (in diesem Beispiel) dadurch vollständig vermieden.
  - Aber: Die Zahl der Rechenschritte steigt; besseres Speicherverhalten wird gegen schlechtere Schrittzahl eingetauscht (engl. trade-off).

Zusammenfassung

Haskells `($!)`-Operator ist

- hilfreich und nützlich

das Speicherverhalten von Programmen zu verbessern, stellt allerdings keinen Königsweg dar: Kleine Beispiele erfordern bereits eine

- sorgfältige Untersuchung

des Verhaltens aufgeschobener und sofort(-art)iger Auswertung.

Es gibt keinen Königsweg [zur Geometrie].

Euklid (ungef. 3./4. Jhdt. v.Chr)
griech. Mathematiker

Kapitel 13.7

Namens- und Bezeichnungsbetrachtung

Englisch vs. Deutsch als Sprachmedium

Englisch	Deutsch	Konnotation
Eager evaluation	Fleißige Auswertung	Positiv
	Eifrige Auswertung	Positiv
	Sofortige Auswertung	Positiv
	Unverzügliche Auswertung	Positiv
	Vorrats-Auswertung	Negativ
	Streber-Auswertung	Negativ
	Frühe Auswertung	Neutral
Lazy evaluation	Faule Auswertung	Negativ
	Lässige Auswertung	Positiv
	Entspannte Auswertung	Positiv
	Aufgeschobene Auswertung	Negativ
	Verzögerte Auswertung	Positiv
	Prokastinator-Auswertung	Negativ
	Auf-den-Punkt-Auswertung	Positiv
	Späte Auswertung	Neutral

Englische vs. deutsche Begriffspaare

Englisch	Deutsch	Motivation, Bewertung
Eager/lazy	Fleißig/faul	Bestmögl. wörtl.
	Sofortig/aufgeschoben Unverzüglich/verzögert	Neutral, unverfängl. Neutral, unverfängl.
	Sofortig/lässig Unverzüglich/lässig	Unzusammenpassend, keine Gegensatzpaare
	Hektisch/entspannt Angespannt/entspannt	Fig. passend, Gegensatzp. Fig. passend, Gegensatzp.
	Streber/Prokastinator	Mutig, kombiniert Althergebrachtes u. Modewort
	Früh/spät	Neutral, unverfängl.

...jede Wahl vermittelt sprachabhängig ‘zwischen den Zeilen’ ein bestimmtes Bild, eine bestimmte Vorstellung; das sollte sich eine gute Übersetzung zunutze machen.

Als Denkanstoß vergleiche und bewerte

Deutsch	Englisch	Verunglückt
Betriebssystem	Operating System	Operationssystem
Schnittstelle	Interface	Zwischengesicht
s. Übung 13.7.3(1)	Social Media	Soziale Medien
Taste	Key	Schlüssel
Keller	Stack	Stapel
Bildschirm	Screen	
Feldtyp, -variable	Array type, variable	
Aktualisierung	Update	updaten, upgedatet
Anwender, Nutzer	User	User, Userin
Am/vom Netz	Online/offline	online/offline
Informatik	Computer Science	Comp.wissenschaft(en)
Körper	Field	Feld, Acker
Steuerung	Controlling	Kontrolle, kontrollieren
Nachrichtendienst	Intelligence Service	Intelligenzdienst
Urknall	Big Bang	Großer Knall
Einarmiger Bandit	Slot Machine	Schlitzmaschine

Bild- und wirkmächtige Übersetzungen

...erfordern Kreativität und Sprachgefühl!

...nur Mut dazu!

Der Unterschied zwischen dem richtigen Wort und dem beinahe richtigen Wort ist derselbe wie zwischen dem Blitz und dem Glühwürmchen.

Mark Twain (1835-1910)
amerikan. Schriftsteller

Siehe auch:

- Anglizismen-Index, Ausgabe 2018. IFB Verlag Deutsche Sprache GmbH, Paderborn, 2018. `http://www.ifb-verlag.de/`

  ...mit deutschen Entsprechungen für etwa 7.500 Anglizismen.

Übungsaufgabe 13.7.1

...Hardware, Software.

1. Warum vermutlich ist im Englischen das Begriffspaar

   Hardware/Software

   geprägt worden?
2. Was könnten passende deutsche Begriffspaare sein, die diesem Ursprung folgend nachgebildet sind?
3. Was möglicherweise könnten bildmächtigere deutsche Begriffspaare sein, die losgelöst vom englischen Sprachbild von einer für die deutsche Begriffsbildung passenderen bildlichen Vorstellung, Metapher abgeleitet sind? Im Sinne von Mark Twain Blitze, nicht nur Glühwürmchen? (s.a. Alvaro Videla. *Metaphors We Compute By*. Communications of the ACM 60(10):42-45, 2017)

Übungsaufgabe 13.7.2

...Computer, Laptop, Notebook, Workstation.

- Worauf geht im Englischen die Bezeichnung Computer zurück? Was ist entsprechend ein passender dt. Begriff?
- Für Laptop wird gelegentlich Klapprechner vorgeschlagen. Gefällt Ihnen der Vorschlag? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?
- Gelten Ihre Gründe für oder wider Klapprechner auch für oder wider Klapptisch, Klappbett, Klappsitz, Klappliege, Klappsessel, Klappstuhl, Klapptür, Klapproller, Klapprad, Klappbrücke, Klappverdeck, Klappmesser u.ä.?
- Ist Notizbuch ein angemessener Begriff für Notebook? Transportiert Notizbuch ein 'richtiges' Bild, eine 'richtige' Vorstellung vom gemeinten Gegenstand? Gilt dies für Notebook im Englischen?
- Was ist mit Workstation? Was transportiert dieser Begriff? Was wäre eine passende dt. Entsprechung?

Übungsaufgabe 13.7.3

...Social media, social event, artificial intelligence — soziale Medien, soziale Veranstaltung, artifizielle Intelligenz.

1. Vergleiche:
   - Sozialhilfe, Sozialwohnung, Sozialgesetzgebung, Sozialministerium Sozialladen, Sozialarbeit, Sozialarbeiter, soziale Sicherheit, soziale Verantwortung, soziales Gewissen, soziale Medien, soziale Veranstaltung,...

   Welche Begriffe fallen aus der Reihe? Warum? Was könnten treffendere Begriffe dafür sein?
2. Vergleiche:
   - Künstliche Intelligenz, artifizielle Intelligenz.

   Könnte artifizielle Intelligenz sogar als geglücktere Entsprechung von artificial intelligence gelten als künstliche Intelligenz? Wenn ja, warum? In welchem Sinn?

Plan D, für mehr Prägnanz in der Wissenschaft

Kapitel 13.8

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (1)

- Hendrik Pieter Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Revised Edn., North Holland, 1984. (Kapitel 13, Reduction Strategies)
- Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Prentice Hall, 2. Auflage, 1998. (Kapitel 7.1, Lazy Evaluation)
- Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 7.1, Lazy evaluation)
- Richard Bird, Phil Wadler. *An Introduction to Functional Programming*. Prentice Hall, 1988. (Kapitel 6.2, Models of Reduction; Kapitel 6.3, Reduction Order and Space)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (2)

- Gilles Dowek, Jean-Jacques Lévy. *Introduction to the Theory of Programming Languages*. Springer-V., 2011. (Kapitel 2.3, Reduction Strategies)
- Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 2.1, Parameterübergabe und Auswertungsstrategien)
- Chris Hankin. *An Introduction to Lambda Calculi for Computer Scientists*. King's College London Publications, 2004. (Kapitel 3, Reduction; Kapitel 8.1, Reduction Machines)
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 15, Lazy evaluation; Kapitel 15.2, Evaluation strategies; Kapitel 15.7, Strict application)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (3)

- Greg Michaelson. *An Introduction to Functional Programming through Lambda Calculus*. Dover Publications, 2. Auflage, 2011. (Kapitel 4.4, Applicative Order Reduction; Kapitel 8, Evaluation; Kapitel 8.2, Normal Order; Kapitel 8.3, Applicative Order; Kapitel 8.8, Lazy Evaluation)
- Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 3.1, Reduction Order)
- Simon Thompson. *Haskell – The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 17.1, Lazy evaluation; Kapitel 17.2, Calculation rules and lazy evaluation)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (4)

- Simon Thompson. *Haskell – The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 17.1, Lazy evaluation; Kapitel 17.2, Calculation rules and lazy evaluation)
- Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008. (Kapitel 7, Naming; Kapitel 7.1, Parameter Passing)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 13 (5)

- Allen B. Tucker (Editor-in-Chief). *Computer Science. Handbook*. Chapman & Hall/CRC, 2004. (Kapitel 92, Functional Programming Languages (History of Functional Languages, Pure vs. Impure Functional Languages, Nonstrict Functional Languages, Scheme, Standard ML, and Haskell, Research Issues in Functional Programming, etc.))
- Alvaro Videla. *Metaphors We Compute By*. Communications of the ACM 60(10):42-45, 2017.
- Reinhard Wilhelm, Helmut Seidl. *Compiler Design – Virtual Machines*. Springer-V., 2010. (Kapitel 3.2, A Simple Functional Programming Language – Evaluation Strategies)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kap. 13.7 (6)

- *Anglizismen-Index, Ausgabe 2018*. IFB Verlag Deutsche Sprache GmbH, Paderborn, 2018. Suchfunktion im Netz zugänglich unter: `https://vds-ev.de/denglisch-und-anglizismen/anglizismenindex`
- Verein Deutsche Sprache – Deutsch in der Wissenschaft. `https://vds-ev.de`
- ADAWiS – Arbeitskreis Deutsch als Wissenschaftssprache e.V. `http://adawis.de/start`
- Deutsch in den Wissenschaften – Deutsch als Wissenschaftssprache. Gemeinsame Erklärung der Präsidenten der Alexander von Humboldt-Stiftung (AvH), des Deutschen Akademischen Austauschdienstes (DAAD), des Goethe-Instituts (GI) und der Hochschulrektorenkonferenz (HRK), 18.02.2009. `https://www.goethe.de/lhr/prj/diw/dos/de7753902.htm`

Kapitel 14

Typprüfung, Typinferenz

Kapitel 14.1

Motivation

Typisierte Programmiersprachen

...teilen sich in Sprachen mit

- schwacher (Typprüfung zur Laufzeit)
- starker (Typprüfung, -inferenz zur Übersetzungszeit)

Typisierung.

Vorteile

...stark typisierter Programmiersprachen:

- Verlässlicherer Code: Der Nachweis der Typkorrektheit eines Programms ist ein Korrektheitsbeweis für ein Programm auf dem Abstraktionsniveau von Typen. Viele Programmierfehler können dadurch schon zur Übersetzungszeit entdeckt werden.
- Effizienterer Code: Keine Typprüfungen zur Laufzeit nötig.
- Effektivere Programmentwicklung: Typinformation ist Programmdokumentation und vereinfacht Verstehen, Wartung und Weiterentwicklung eines Programms, z.B. auch bei der Suche nach vordefinierten Bibliotheksfunktionen: "Gibt es eine Funktion, die alle Duplikate aus einer Liste entfernt?" erlaubt (in Haskell), die Suche einzuschränken auf Funktionen mit Typ `((Eq a) => [a] -> [a])`.

Haskell

...ist eine stark typisierte Programmiersprache.

Dabei gilt:

- Jeder gültige Ausdruck hat einen definierten Typ; gültige Ausdrücke heißen wohlgetypt.
- Typen gültiger Ausdrücke können sein:
  - Monomorph
    `fac :: Integer -> Integer`
  - Parametrisch polymorph (uneingeschränkt polymorph)
    `flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)`
  - *Ad hoc* polymorph (eingeschränkt polymorph)
    `elem :: Eq a => a -> [a] -> Bool`
- Typen können angegeben sein:
  - explizit: Typprüfung (grundsätzlich) ausreichend.
  - implizit: Typinferenz erforderlich.

Typprüfung, Typinferenz

...sind Schlüsselfertigkeiten von Übersetzern, Interpretierern.

Betrachte den Ausdruck:

```
magicType = let
              pair x y z = z x y
              f y = pair y y
              g y = f (f y)
              h y = g (g y)
             in h (\x->x)
```

...zur Veranschaulichung der Mächtigkeit automatischer Typinferenzverfahren.

Veranschaulichung (1)

...automatische Typinferenz in Hugs mit dem Kommando `:t` liefert:

```
Main>:t magicType

magicType ::
((((((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) ->
(((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) ->
(((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) ->
(((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> d) -> d) ->
(((((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> (((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> (((((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> (((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> d) -> d) -> e) -> e
```

Veranschaulichung (2)

...Klammerebenen farblich hervorgehoben:

```
Main>:t magicType

magicType ::
(((((((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) ->
((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) ->
((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) ->
((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> d) -> d) ->
((((((a -> a) -> (a -> a) -> b) -> b) -> ((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> ((((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> ((a -> a) ->
(a -> a) -> b) -> b) -> c) -> c) -> d) -> d) -> e) -> e
```

Veranschaulichung (3)

...Klammerebenen farblich durchgezählt lassen grobe 'Strukturen' erkennen:

```
Main>:t magicType

magicType ::
(1
 (1(1(1(1(1(1(a -> a) -> (a -> a) -> b1) -> b   1) ->
  (2(2(a -> a) -> (a -> a) -> b2) -> b2) -> c1) -> c1) ->
  (2(2(3(3(a -> a) -> (a -> a) -> b3) -> b3) ->
  (4(4(a -> a) -> (a -> a) -> b4) -> b4) -> c2) -> c2) ->
  d1) -> d
 1)
 -> (2(2(3(3(5(5(a -> a) -> (a -> a) -> b5) -> b5) ->
     (6(6(a -> a) -> (a -> a) -> b6) -> b6) -> c3) -> c3) ->
     (4(4(7(7(a -> a) ->
     (a -> a) -> b7) -> b7) -> (8(8(a -> a) ->
     (a -> a) -> b8) -> b8) -> c4) -> c4) -> d2) -> d
    2) -> e1) -> e
```

Veranschaulichung (4)

...wobei es auch bleibt.

```
(1
  (1
   (1
    (1
     (1
      (1
       (1(a -> a) -> (a -> a) -> b
       1) -> b
      1) -> (2
             (2(a -> a) -> (a -> a) -> b
             2) -> b
            2) -> c
     1) -> c
    1) -> (2
           (2
            (3
             (3(a -> a) -> (a -> a) -> b
             3) -> b
            3) -> (4
                   (4(a -> a) -> (a -> a) -> b
                   4) -> b
                  4) -> c
           2) -> c
          2) -> d
   1) -> d
  1)
  -> (2(2(3(3(5(5(a -> a) -> (a -> a) -> b5) -> b5) ->
        (6(6(a -> a) -> (a -> a) -> b6) -> b6) -> c3) -> c3) ->
         (4(4(7(7(a -> a) -> (a -> a) -> b7) -> b7) ->
          (8(8(a -> a) -> (a -> a) -> b8) -> b8) -> c4) -> c4) -> d2) -> d2) -> e
1) -> e
```

Automatische Typprüfung, Typinferenz

...der Typ von `magicType` ist fraglos komplex.

Wie gelingt es Übersetzern, Interpretierern, Typen von Ausdrücken wie `magicType` automatisch zu inferieren?

Informell: Durch Auswertung von

- Kontextinformationen in Ausdrücken, Funktionsdefinitionen und Typklassen.

Methoden und Werkzeuge dafür:

- Typanalyse, Typprüfung
- Typsysteme, Typinferenz
- Unifikation

...die wir als nächstes (beispielgetrieben) näher betrachten.

Kapitel 14.2

Monomorphe Typprüfung

Monomorphe Typprüfung

...liefert als Ergebnis: Ein gegebener Ausdruck ist

- wohlgetypt, d.h. hat einen eindeutig bestimmten konkreten Typ.
- nicht wohlgetypt, d.h. hat überhaupt keinen Typ.

Vereinbarung

...für die folgenden Beispiele.

Polymorphie parametrisch oder überladen polymorpher vordefinierter Funktionen in Haskell wird durch geeignete Typindizierung syntaktisch aufgelöst wie nachstehend angedeutet:

- $+_{Int}$, $+_{Integer}$, $*_{Double}$, $\texttt{length}_{Char}, \ldots$

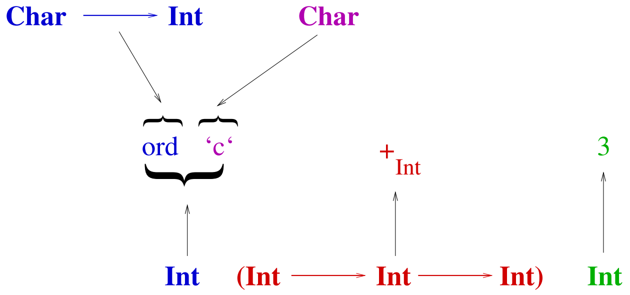
sind wie folgt typisiert gedacht:

- $+_{Int}$ `:: Int -> Int -> Int`
- $+_{Integer}$ `:: Integer -> Integer -> Integer`
- $*_{Double}$ `:: Double -> Double -> Double`
- $\texttt{length}_{Char}$ `:: [Char] -> Int`
- ...

Typprüfung für Ausdrücke (1)

Beispiel 1: Betrachte den Ausdruck `(ord ‘c‘ +`$_{Int}$ `3)`.

Die Auswertung des Ausdruckskontexts erlaubt

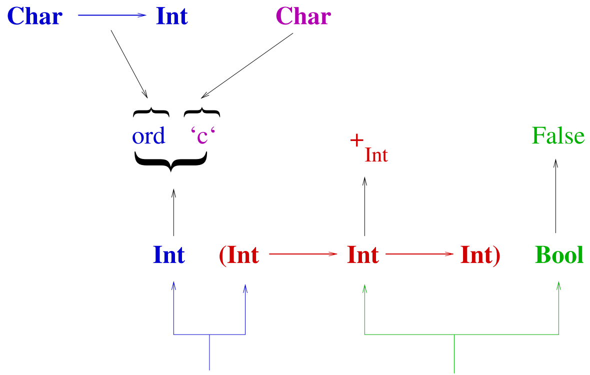


...Typprüfung korrekte Typung nachzuweisen!

Typprüfung für Ausdrücke (2)

Beispiel 2: Betrachte den Ausdruck `(ord 'c' +`$_{Int}$ `False)`.

Die Auswertung des Ausdruckskontexts erlaubt



Erwarteter und tatsächlicher Typ, **Int**, stimmen überein: **Typkorrekt!**

Erwarteter Typ, **Int**, und tatsächlicher Typ, **Bool**, stimmen nicht überein: **Typinkorrekt!**

...Typprüfung inkorrekte Typung aufzudecken!

Typprüfung monomorpher Fkt.-Definitionen

...sei `f` monomorphe Funktionsdefinition:

```
f :: t1 -> t2 -> ... -> tk -> t
f m1 m2 ... mk
  | w1 = a1
  | w2 = a2
  ...
  | wn = an
```

...für die Kontextauswertung zur Typprüfung für `f` sind 3 Eigenschaften heranzuziehen:

1. Jeder Wächter w_i muss vom Typ `Bool` sein.
2. Jeder Ausdruck a_i muss vom Typ `t` sein.
3. Das Muster jedes Parameters m_i muss konsistent mit dem zugehörigen Typ t_i sein.

Musterkonsistenz, Musterpassung

Informell:

Ein Muster μ ist konsistent mit einem Typ τ, wenn die auf μ passenden Werte vom Typ τ sind.

Detaillierter (vgl. Kap. 6):

- Eine Variable ist mit jedem Typ konsistent.
- Ein Literal oder Konstante ist mit ihrem Typ konsistent.
- Ein Listenmuster `(p:q)` ist konsistent mit dem Typ `[t]`, wenn `p` mit dem Typ `t` und `q` mit dem Typ `[t]` konsistent ist.
- ...

Beispiele:

- Das Muster `(42:xs)` ist konsistent mit dem Typ `[Int]`.
- Das Muster `(x:xs)` ist konsistent mit jedem Listentyp.

Kapitel 14.3

Polymorphe Typprüfung

Polymorphe Typprüfung

...liefert als Ergebnis: Ein gegebener Ausdruck ist

- wohlgetypt und steht (abkürzend) für einen oder mehrere, möglicherweise unendlich viele konkrete Typen.
- nicht wohlgetypt, d.h. hat überhaupt keinen Typ.

Schlüssel zur algorithmischen Lösung ist das

- Lösen von Kontextinformationstypbedingungssystemen (engl. constraint satisfaction)

auf Grundlage der Unifikation von Typausdrücken.

Polymorphe Typprüfung (1)

Beispiel 1: Betrachte die Funktionssignatur von `length` mit dem polymorphen Typ `([a] -> Int)`:

```
length :: [a] -> Int
```

...informell steht `([a] -> Int)` abkürzend für die unendliche Menge konkreter Typen (`[`τ`] -> Int`), wobei τ Platzhalter für einen beliebigen monomorphen Typ ist:

```
([Int] -> Int)
([(Bool,Char)] -> Int)
([(String -> String)] -> Int)
([(Bool -> Bool -> Bool)] -> Int)
...
```

Polymorphe Typprüfung (2)

In Aufrufkontexten wie:

```
length [length [1,2,3], length [True,False,True],
        length [], length [(+),(*),(-)]]
length [(True,'a'), (False,'q'), (True,'o')]
length [reverse, ("Felix" ++), tail, init]
length [(&&), (||), xor, nand, nor]
```

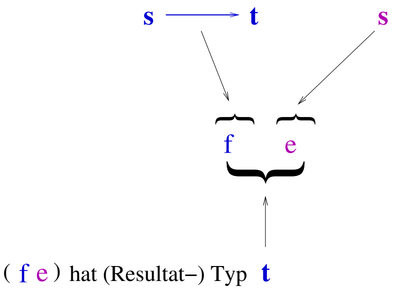
...kann der konkrete monomorphe Typ von Anwendungen von `length` erschlossen werden:

```
length :: [Int] -> Int
length :: [(Bool,Char)] -> Int
length :: [(String -> String)] -> Int
length :: [(Bool -> Bool -> Bool)] -> Int
```

Ausnahme: Der Aufruf (`length []`) erlaubt nur auf `length :: [a] -> Int` zu schließen. Übungsaufgabe: Warum?

Polymorphe Typprüfung (3)

Beispiel 2: Betrachte den applikativen Ausdruck `(f e)`:



Ist weitere Kontextinformation für `f` und `e` nicht vorhanden, liefert die Auswertung des Anwendungskontexts von `(f e)` die allgemeinst möglichen Typen von `e`, `f` und `(f e)` wie folgt:

- `e     :: s`
- `f     :: s -> t`
- `(f e) :: t`

Polymorphe Typprüfung (4)

Beispiel 3: Betrachte die Funktionsgleichung:

```
f (x,y) = (x,['a' .. y])
```

Die Auswertung des Anwendungskontexts ergibt: Funktion `f` erwartet als Argument Paare, an deren

- 1-te Komponente keine Bedingung gestellt ist, die also von einem beliebigen Typ sein darf.
- 2-te Komponente eine Bedingung gestellt ist: `y` muss vom Typ `Char` sein, da `y` als Schranke des Zeichenreihenwerts `['a'..y]` benutzt wird.

Beides zusammen erlaubt den allgemeinsten Typ von `f` zu erschließen:

```
f :: (a,Char) -> (a,[Char])
```

Polymorphe Typprüfung (5)

Beispiel 4: Betrachte die Funktionsgleichung:

```
g (m,zs) = m + length zs
```

Die Auswertung des Anwendungskontexts ergibt: Funktion g erwartet als Argument Paare, an deren Komponenten folgende Bedingungen gestellt sind:

- 1-te Komponente: `m` muss von einem numerischen Typ sein, da `m` als Operand von `(+)` verwendet wird.
- 2-te Komponente: `zs` muss vom Typ `[b]` sein, da `zs` als Argument der Funktion `length` verwendet wird, die den Typ `([b] -> Int)` hat.

Beides zusammen erlaubt den allgemeinsten Typ von g zu erschließen:

```
g :: (Int, [b]) -> Int
```

Polymorphe Typprüfung (6)

Die Beispiele zeigen, dass wie im monomorphen Fall die Anwendungskontexte von Ausdrücken und Funktionsdefinitionen implizit ein

- System von Typbedingungen festlegen.

Das Typprüfungsproblem reduziert sich so auf die Bestimmung der

- allgemeinst möglichen Typausdrücke, so dass keine Bedingung verletzt ist.

Polymorphe Typprüfung (7)

Beispiel 5: Betrachte die Komposition `(g . f)` mit `f`, `g` aus Bsp. 3 und 4.

In Funktionskompositionen $(h' \ . \ h)$ ist

- das Resultat der Anwendung von `h` das Argument der Anwendung von h'.

Die Auswertung des Anwendungskontexts von `(g . f)` gegeben durch die Gleichungen in Bsp. 3 und 4 ergibt zusätzlich:

- Das Resultat von `f` ist vom Typ `(a,[Char])`.
- Das Argument von `g` ist vom Typ `(Int,[b])`.

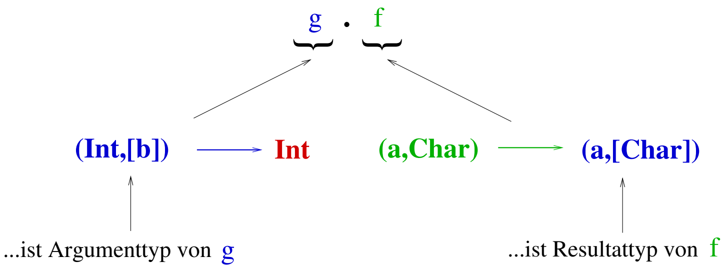
Damit verbleiben noch zu bestimmen: Die

- allgemeinst möglichen Typen für die Typvariablen `a` und `b`, die obige 3 Bedingungen erfüllen.

Der Schlüssel hierfür: Unifikation.

Polymorphe Typprüfung (8)

Veranschaulichung des Unifikationsvorgehens:

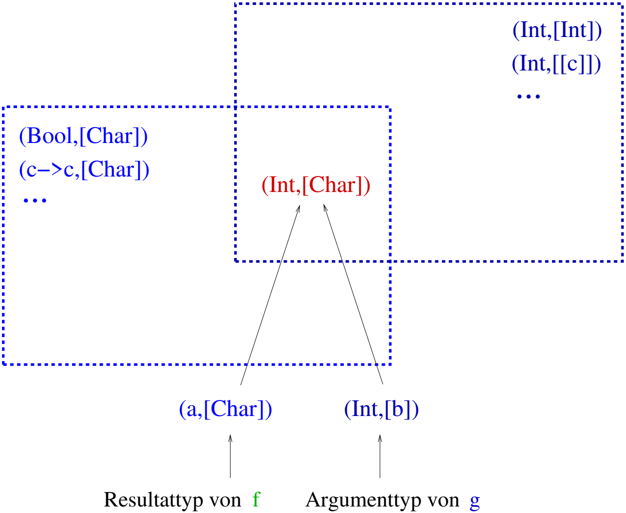


...Unifikation löst die 3 Bedingungen in Kombination auf und liefert `Int` als allgemeinst möglichen Typ für `a`, `Char` für `b` und somit (`(Int,Char) -> Int`) für `(g . f)`, d.h.:

```
(g . f) :: (Int,Char) -> Int
```

Polymorphe Typprüfung (9)

Veranschaulichung des Unifikationsvorgehens:



Instanz, gem. Instanz, Unifikat, Unifikator (1)

Ein Typausdruck a ist (Typ-)

- Instanz eines Typausdrucks a′, wenn a aus a′ durch konsistentes Ersetzen (oder Substitution) von Typvariablen mit Typausdrücken entsteht.
- gemeinsame Instanz einer Menge M von Typausdrücken, wenn a Instanz von allen Typausdrücken aus M ist.
- allgemeinste gemeinsame Instanz einer Menge M von Typausdrücken, wenn a gemeinsame Instanz von M ist und für alle anderen gemeinsamen Instanzen b von M gilt, dass b Instanz von a ist; a heißt dann (allgemeinstes) Unifikat von M, die zugehörige Substitution (allgemeinster) Unifikator von M.

Instanz, gem. Instanz, Unifikat, Unifikator (2)

...gleichwertig: Ein Typausdruck a ist

- Instanz eines Typausdrucks a′, wenn a′ sich zu a spezialisieren lässt; wenn a eine Teilmenge von Typen von a′ beschreibt.
- gemeinsame Instanz einer Menge M von Typausdrücken, wenn jeder Typausdruck a′ aus M sich zu a spezialisieren lässt; wenn a eine Teilmenge von Typen jedes Typausdrucks aus M beschreibt; wenn a eine Teilmenge des Durchschnitts der von den Typausdrücken aus M beschriebenen Typmengen beschreibt.
- allgemeinste gemeinsame Instanz einer Menge M von Typausdrücken, wenn a gemeinsame Instanz von M ist und für alle anderen gemeinsamen Instanzen b von M gilt, dass sich a zu b spezialisieren lässt; dass jede andere gemeinsame Instanz b von M eine Teilmenge der Typen von a beschreibt.

Gemeinsame Instanz v. M $\not\Rightarrow$ Unifikat v. M (1)

Betrachte folgendes Beispiel:

Die Typausdrücke

- `([Bool],[[Bool]])`, `([[e]],[[[e]]])`, `([d],[[d]])`

sind gemeinsame Instanzen (oder Spezialisierungen) der Typausdrücke

- `(a,[a])` und `([b],c)`

unter den Substitutionen

- `[Bool]`, `[[e]]`, `[d]` für `a`
- `Bool`, `[e]`, `d` für `b`
- `[[Bool]]`, `[[[e]]]`, `[[d]]` für `c`.

Gemeinsame Instanz v. M $\not\Rightarrow$ Unifikat v. M (2)

In Substitutionsschreibweise (vgl. Kap. 12.3.1):

- `(a,[a])[[Bool]/a] = ([Bool],[[Bool]])`
  `(a,[a])[[[e]]/a] = ([[e]],[[[e]]])`
  `(a,[a])[[d]/a] = ([d],[[d]])`
- `(([b],c)[Bool/b,[[Bool]]/c] = ([Bool],[[Bool]])`
  `(([b],c)[[e]/b,[[[e]]]/c] = ([[e]],[[[e]]])`
  `(([b],c)[d/b,[[d]]/c] = ([d],[[d]])`

Gemeinsame Instanz v. M $\not\Rightarrow$ Unifikat v. M (3)

Weiters sind beide Typausdrücke

- `([Bool],[[Bool]])`, `([[e]],[[[e]]])`

Instanzen (oder Spezialisierungen) des Typausdrucks

- `([d],[[d]])`

unter den Substitutionen `Bool`, `[e]` für `d`:

- `([d],[[d]])[ [Bool]/d] = ([Bool],[[Bool]])`
  `([d],[[d]])[ [e]/d] = ([[e]],[[[e]]])`

Umgekehrt ist der Typausdruck

- `([d],[[d]])`

keine Instanz (oder Spezialisierung) von einem der Ausdrücke

- `([Bool],[[Bool]])`, `([[e]],[[[e]]])`.

Gemeinsame Instanz v. M $\not\Rightarrow$ Unifikat v. M (4)

Zusammengefasst:

Die Typausdrücke `([Bool],[[Bool]])`, `([[e]],[[[e]]])`

- sind gemeinsame Instanzen der Typausdrucksmenge
  M $=_{df}$ {`(a,[a])`,`([b],c)`,`([d],[[d]])`}
- jedoch keine allgemeinsten Instanzen von M, d.h. keiner der beiden Ausdrücke ist Unifikat von M.

Der Typausdruck `([d],[[d]])` ist

- die allgemeinste gemeinsame Instanz und damit das Unifikat von M.

Insgesamt ist damit gezeigt:

- Die Eigenschaft 'gemeinsame Instanz' einer Menge von Typausdrücken impliziert nicht die Eigenschaft 'Unifikat' dieser Menge.

Unifikation, Unifikationsaufgabe

...ist die Bestimmung der

- allgemeinsten gemeinsamen (Typ-) Instanz (engl. most general common (type) instance) einer Menge von Typausdrücken und der zugehörigen Substitution.

Informell: Unifikation

- bestimmt allgemeinstmögliche mehrere Typbedingungen zugleich erfüllende Typausdrücke, die allgemeinste gemeinsame Instanz einer Menge von Typausdrücken sind.
- wertet dafür Kontextbedingungen in Kombination aus.
- führt i.a. zu polymorphen Typausdrücken.
- kann fehlschlagen.

Unifikation bestimmt allgemeinste Instanzen

...unter Auswertung von Kontextbedingungen in Kombination.

Illustriert an Beispiel 5: Unifikation bestimmt unter kombinierter Auswertung der Kontextbedingungenen

```
(g . f)
f (x,y) = (x,['a' .. y])
g (m,zs) = m + length zs
```

den Typausdruck

- `(Int,[Char])`

als allgemeinste gemeinsame Instanz der Menge M von Typausdrücken

- $M =_{df} \{$`(a,[Char])`,`(Int,[b])`$\}$

unter der Substitution `Int` für `a` und `Char` für `b`:

- `(a,[Char])[Int/a]` = `(Int,[b])[Char/b]` = `(Int,[Char])`

Unifikation liefert polymorphen Typ

Beispiel:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(a,[a]) \arrow[dr] & & ([b],c) \arrow[dl] \\
& ([b],[[b]]) &
\end{tikzcd}$$

([b],[[b]]), die allgemeinste gemeinsame Instanz von (a,[a]) und ([b],c).

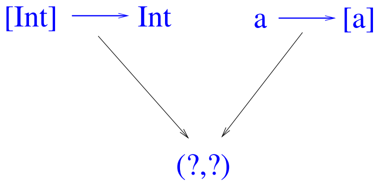
Für die Unifikation von `(a,[a])` und `([b],c)` verlangt die Kontextbedingung

- `(a,[a])`: Die 2-te Komponente ist eine Liste von Elementen des Typs der 1-ten Komponente.
- `([b],c)`: Die 1-te Komponente ist von einem Listentyp.

Zusammen impliziert das: Die allgemeinste gemeinsame Instanz von `(a,[a])` und `([b],c)` ist der (nichtmonomorphe) polymorphe Typausdruck `([b],[[b]])`.

Unifikation schlägt fehl (d.h. ist nicht möglich)

Beispiel:



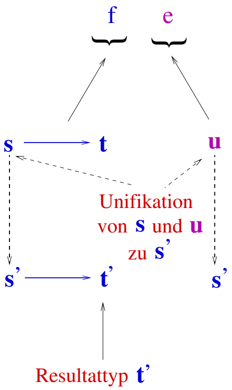
Für die Unifikation von `([Int] -> [Int])` und `(a -> [a])` verlangt die Unifikation der

- Argumenttypen: `a` ist vom Typ `[Int]` ist.
- Resultattypen: `a` ist vom Typ `Int` ist.

Das schließt sich aus und ist nicht zugleich erfüllbar, eine gemeinsame Typinstanz existiert nicht: Unifikation schlägt fehl.

Typüberprüfung von Fkt.-Termen (1)

Betrachte den applikativen Ausdruck `(f e)`:



Es gilt: Typkorrektheit von `(f e)` erfordert nicht Gleichheit von `s` und `u`; es reicht, wenn sie unifizierbar sind: Unifizierter Typ von `f` ist `(s' -> t')`, von `(f e)` somit `t'`.

Typüberprüfung von Fkt.-Termen (2)

Betrachte den applikativen Ausdruck (map ord) mit den Kontextbedingungen:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
ord :: Char -> Int
```

Unifikation der Typausdrücke (a -> b) und (Char -> Int) liefert als allgemeinst mögliche Typen für (map ord) und map:

```
(map ord) :: [Char] -> [Int]
 map :: (Char -> Int) -> [Char] -> [Int]
```

Typüberprüfung von Fkt.-Termen (3)

Betrachte den applikativen Term `(foldr (+) 0 [3,5,34])` mit den Kontextbedingungen:

```
(foldr (+) 0 [1,2,3,5,7,11,13]) :: Int  (->> 42)
foldr f s []     = s
foldr f s (x:xs) = f x (foldr f s xs)
```

Für die Typen von `(foldr (+) 0 [3,5,34])` und `foldr` liefert das:

```
(foldr (+) 0 [1,2,3,5,7,11,13]) :: Int
 foldr :: (Int -> Int - Int) -> Int -> [Int] -> Int
```

Naiv suggeriert dies für den 'allgemeinsten' Typ von `foldr`:

```
foldr :: (a -> a -> a) -> a -> [a] -> a
```

Typüberprüfung von Fkt.-Termen (4)

...eine genauere Überlegung liefert:

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

Veranschaulichung:

$$\text{foldr}\ \ f\ \ s\ \ [\,] \quad = \quad \overset{b}{s}$$

$$\text{foldr}\ \ f\ \ s\ \ (x{:}xs) \quad = \quad \underbrace{f\ \ \overset{a}{x}\ \ \overbrace{(\text{foldr}\ \ f\ \ s\ \ xs\,)}^{b}}_{b}$$

Typprüfung polymorpher Fkt.-Definitionen

...sei `f` parametrisch polymorphe Funktionsdefinition:

```
f :: t1 -> t2 -> ... -> tk -> t
f m1 m2 ... mk
 | w1 = a1
 | w2 = a2
 ...
 | wn = an
```

...für die Kontextauswertung zur Typprüfung für `f` sind 3 Eigenschaften heranzuziehen:

1. Jeder Wächter w_i muss vom Typ `Bool` sein.
2. Jeder Ausdruck a_i muss von einem Typ s_i sein, der mindestens (! – umgekehrt im Aufruffall) so allgemein ist wie der Typ `t`, d.h. `t` muss eine Instanz von s_i sein.
3. Das Muster jedes Parameters m_i muss konsistent mit dem zugehörigen Typ t_i sein.

Unifikation mit Konstanten, Variablen (1)

...Konstanten und Variablen werden in Haskell bei Unifikation unterschiedlich behandelt.

Betrachte folgendes Beispiel:

Der Ausdruck a kann erfolgreich getypt werden, die davon abgeleitete Funktionsabstraktion f hingegen nicht:

```
a    = length ([]++[True])
        + length ([]++[1,2,3]) :: Int

f xs = length (xs++[True])
        + length (xs++[1,2,3])  ⇝ Nicht typbar!
```

Unifikation mit Konstanten, Variablen (2)

Das Beispiel zeigt:

- Konstanten wie `[]` können unterschiedlich getypt in Ausdrücken verwendet werden: In `a` verlangt
  - 1-te Verwendung von `[]`: `[] :: [Bool]`
  - 2-te Verwendung von `[]`: `[] :: [Int]`.

  Unifikation analysiert für Konstanten wie `[]` beide Vorkommen getrennt und gelingt.
- Variablen wie `xs` dürfen das nicht: In `f` verlangt
  - 1-te Verwendung von `xs`: `xs :: [Bool]`
  - 2-te Verwendung von `xs`: `xs :: [Int]`.

  Beides zusammen ist unvereinbar. Die verschiedenen Verwendungen von `xs` werden (anders als bei Konstanten) von Unifikation für Variablen nicht getrennt; Unifikation schlägt deshalb für `f` fehl.

Übung 14.3.1

Zeige, dass die unterschiedliche Behandlung von Konstanten und Variablen durch Unifikation sinnvoll ist.

Zu welchen Widersprüchen würde die vermeintlich naheliegende Typisierung

```
f :: [a] -> Int
```

führen? Würde die starke Typisierung von Haskell erhalten bleiben, die zusichert, dass Laufzeitfehler aufgrund von Typfehlern ausgeschlossen sind?

Überlege dazu, Listen welcher Argumenttypen `f` verkraften müsste und ob ihre Implementierung durch die definierende Gleichung

```
f xs = length (xs++[True]) + length (xs++[1,2,3])
```

das hergäbe und was daraus für starke Typisierung und die daraus folgenden Zusicherungen folgte.

Kapitel 14.4

Polymorphe Typprüfung mit Typklassen

Typprüfung mit Typklassen (1)

Betrachte folgende Funktionsdefinition:

```
member []     y = False
member (x:xs) y = (x == y) || member xs y
```

Aus der Auswertung des Kontexts, hier

- dem Listenmuster `(x:xs)` für das erste Argument
- dem Funktionsresultat `False` in der 1-ten Gleichung
- der Benutzung von `(==)` in der 2-ten Gleichung

können wir für den allgemeinsten Typ von `member` schließen:

```
member :: Eq a => [a] -> a -> Bool
```

Typprüfung mit Typklassen (2)

Betrachte zusätzlich zu den definierenden Gleichungen von `member` den Ausdruck `e` mit der Kontextinformation:

```
e :: Ord b => [[b]]
```

Gesucht ist nun der allgemeinste Typ des applikativen Ausdrucks `(member e)`.

Naiv ohne Berücksichtigung der Typklassenkontexte von `e` und `member`, lieferte dies für die Typen von `(member e)`, `member` und `e`:

```
   e :: [[b]]
  member :: [[b]] -> [b] -> Bool
(member e) :: [b] -> Bool
```

Typprüfung mit Typklassen (3)

Mit Berücksichtigung der kombinierten Typklassenkontexte von `member` und `e`:

```
(Eq [b],Ord b)
```

erhalten wir jedoch für den Typ von `(member e)` zunächst:

```
(member e) :: (Eq [b],Ord b) => [b] -> Bool
```

...und schließlich nach einer Typklassenkontextanalyse zur Typklassenkontextvereinfachung einfacher:

```
(member e) :: Ord b => [b] -> Bool
```

Typklassenkontextanalyse (1)

...Analyse und Typklassenkontextvereinfachung erfolgt mehrschrittig, im Bsp. vom Kontext `(Eq [b],Ord b)` zum Kontext `(Ord b)`:

1. Herunterbrechen von Typklassenkontextbedingungen wie `(Eq [b])` auf Bedingungen an Typvariablen wie `b` durch Analyse der involvierten Typklasseninstanzdeklaration wie
   ```
   instance Eq a => Eq [a] where...
   ```
2. Wiederholen von Schritt 1) bis keine Instanzdeklaration mehr anwendbar ist.
3. Weiteres Vereinfachen des Kontexts aus Schritt 2) durch Auswertung der involvierten Typklassendefinitionen wie
   ```
   class Eq a => Ord a where...
   ```
   .

Typklassenkontextanalyse (2)

Für unser Beispiel erhalten wir auf diese Weise:

1. Ausgehend vom Kontext `(Eq [b],Ord b)`, liefert die Analyse der Instanzdeklaration `(instance Eq a => Eq [a] where...)` die Implikation `Eq b`, wenn `Eq [b]`. Das erlaubt `(Eq [b],Ord b)` zu `(Eq b,Ord b)` zu vereinfachen.
2. Keine Instanzdeklaration mehr anwendbar; weiter mit 3).
3. Ausgehend von `(Eq b,Ord b)` aus Schritt 2), liefert die Analyse der Typklassendefinition `(class Eq a => Ord a where...)` die Implikation `Ord b`, wenn `Eq b`. Das erlaubt `(Eq b,Ord b)` zu `(Ord b)` zu vereinfachen; keine weitere Vereinfachung mehr möglich.

Somit erhalten wir ingesamt für den allgemeinsten Typ des applikativen Ausdrucks `(member e)`:

- `(member e) :: Ord b => [b] -> Bool`

Zusammenfassung

...der dreistufige Prozess aus:

- Unifikation
- Analyse (einschl. Instanz- und Typklassendeklarationen)
- Simplifikation

ist das allgemeine Muster für polymorphe Typprüfung mit Typklassen in Haskell.

Kapitel 14.5

Typsysteme, Typinferenz

Typsysteme, Typinferenz

Informell:

Typsysteme sind

- logische Systeme, die uns erlauben, Aussagen der Form 'exp ist Ausdruck vom Typ t' zu formalisieren und sie mithilfe von Axiomen und Regeln des Typsystems zu beweisen.

Typinferenz bezeichnet

- den Prozess, den Typ eines Ausdrucks automatisch mithilfe der Axiome und Regeln des Typsystems abzuleiten.

Typgrammatik (typischer Ausschnitt)

...erzeugt eine Typsprache:

$$
\begin{array}{lcll}
\tau & ::= & \mathit{Int} \mid \mathit{Float} \mid \mathit{Char} \mid \mathit{Bool} & \text{(Einfacher Typ)} \\
 & \mid & \alpha & \text{(Typvariable)} \\
 & \mid & \tau \to \tau & \text{(Funktionstyp)} \\
 & & & \\
\sigma & ::= & \tau & \text{(Typ)} \\
 & \mid & \forall\, \alpha.\, \sigma & \text{(Typbindung)}
\end{array}
$$

Sprechweisen: τ ist ein Typ, σ ein Typschema.

Typsystem (typischer Ausschnitt)

...assoziiert mit jedem (typisierbaren) Ausdruck der Sprache einen Typ der Typsprache, wobei Γ eine sogenannte Typannahme (oder Typumgebung) ist:

Axiome:

VAR $$\frac{—}{\Gamma \vdash \mathit{var} : \Gamma(\mathit{var})}$$

CON $$\frac{—}{\Gamma \vdash \mathit{con} : \Gamma(\mathit{con})}$$

Regeln:

COND $$\frac{\Gamma \vdash \mathit{exp} : \mathit{Bool} \quad \Gamma \vdash \mathit{exp}_1 : \tau \quad \Gamma \vdash \mathit{exp}_2 : \tau}{\Gamma \vdash \text{ if } \mathit{exp} \text{ then } \mathit{exp}1 \text{ else } \mathit{exp}2 : \tau}$$

APP $$\frac{\Gamma \vdash \mathit{exp} : \tau' \to \tau \quad \Gamma \vdash \mathit{exp}' : \tau'}{\Gamma \vdash \mathit{exp}\ \mathit{exp}' : \tau}$$

ABS $$\frac{\Gamma[\mathit{var} \mapsto \tau'] \vdash \mathit{exp} : \tau}{\Gamma \vdash \backslash x\text{->}\mathit{exp} : \tau' \to \tau}$$

...

Typumgebung, substituierte Typumgebung

Typumgebungen sind

- partielle Abbildungen, die Typvariablen auf Typschemata abbilden.

Ist Γ eine Typumgebung, so ist $\Gamma[\tau_1/var_1, \ldots, \tau_n/var_n]$

- eine substituierte Typumgebung, die jede Typvariable var_i auf den Typ τ_i abbildet; jede andere Typvariable auf ihren Typ in der Typumgebung Γ.

Unifikationsalgorithmus (schematisch)

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{U}(\alpha,\alpha) & = & [\,] \\
\mathcal{U}(\alpha,\tau) & = & \begin{cases} [\tau/\alpha] & \text{falls } \alpha \notin \tau \\ \textit{Fehlschlag} & \text{sonst} \end{cases} \\
\mathcal{U}(\tau,\alpha) & = & \mathcal{U}(\alpha,\tau) \\
\mathcal{U}(\tau_1 \to \tau_2, \tau_3 \to \tau_4) & = & \mathcal{U}(U\tau_2, U\tau_4)U \text{ mit } U = \mathcal{U}(\tau_1,\tau_3) \\
\mathcal{U}(\tau,\tau') & = & \begin{cases} [\,] & \text{falls } \tau = \tau' \\ \textit{Fehlschlag} & \text{sonst} \end{cases}
\end{array}
$$

Anmerkung:

- Die Anwendung der Gleichungen erfolgt sequentiell von oben nach unten.
- *U* für (allgemeinster) Unifikator (i.w. eine Substitution).

Unifikator, allgemeinster Unifikator

Beispiel: Betrachte die Typausdrücke `(a -> (Bool,c))` und `(Int -> b)`.

Durch scharfes Hinsehen erkennnt man:

Die Substitution `[Int/a,Float/c,(Bool,Float)/b]`

- ist ein Unifikator von `(a -> (Bool,c))`, `(Int -> b)`.

Die Substitution `[Int/a,(Bool,c)/b]`

- ist der (allgemeinste) Unifikator von `(a -> (Bool,c))`, `(Int -> b)`.

Anwendung des Unifikationsalgorithmus

...am Beispiel der Unifikation der Typausdrücke `(a -> c)` und `(b -> Int -> a)`.

Rechnen liefert:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \mathcal{U}(\texttt{a -> c,b -> Int -> a}) \\
(\text{mit } U = \mathcal{U}(\texttt{a,b}) = [\texttt{b/a}]) & = & \mathcal{U}(U\texttt{c}, U(\texttt{Int -> a}))U \\
 & = & \mathcal{U}(\texttt{c, Int -> b})[b/a] \\
 & = & [\texttt{Int -> b/c}][\texttt{b/a}] \\
 & = & [\texttt{Int -> b/c,b/a}]
\end{array}
$$

Damit ist der allgemeinste Unifikator der beiden Typausdrücke die Substitution `[(Int->b)/c,b/a)]` und das (allgemeinste) Unifikat der Typausdrücke `(a -> c)` und `(b -> Int -> a)` der Typausdruck:

- `(b -> Int -> b) =`
  `(a -> c)[(Int->b)/c,b/a)] =`
  `(b -> Int -> a)[(Int->b)/c,b/a)]`

Entscheidend für den Typinferenzalgorithmus

...die syntaxgerichtete Anwendung der Regeln des Typinferenzsystems, d.h. es ist

- stets nur ein Axiom oder eine Regel anwendbar.

Schlüssel dazu: Anpassung des Typinferenzsystems.

Zusammenfassung (1)

Unifikation ist

- zentral für polymorphe Typinferenz.

Das Beispiel der Funktion magicType illustriert die

- Mächtigkeit automatischer Typinferenz.

Das wirft die Frage auf:

- Lohnt es (sich die Mühe anzutun), Typen zu spezifizieren, wenn (auch derart) komplexe Typen wie im Fall von magicType automatisch hergeleitet werden können?

Antwort: Ja, denn Typspezifikationen

- sind eine sinnvolle Kommentierung des Programms.
- ermöglichen Interpretierern und Übersetzern aussagekräftigere Fehlermeldungen zu erzeugen.

Zusammenfassung (2)

Haskell ist stark typisiert:

- Wohltypisierung von Programmen ist deshalb zur Übersetzungszeit entscheidbar. Fehler zur Laufzeit aufgrund von Typfehlern sind deshalb ausgeschlossen.
- Typen können, müssen aber vom Programmierer nicht angegeben werden. Übersetzer und Interpretierer inferieren die Typen von Ausdrücken und Funktionsdefinitionen (in jedem Fall) automatisch.

Zusammenfassung (3)

...Leseempfehlungen zu Typprüfung, Typinferenz.

Funktionale Sprachen allgemein:

- Anthony J. Field, Peter G. Robinson. Functional Programming. Addison-Wesley, 1988. (Kapitel 7, Type inference systems and type checking)

Haskell-spezifisch:

- Simon Peyton Jones, John Hughes. Report on the Programming Language Haskell 98. `http://www.haskell.org/report/`

Zusammenfassung (4)

Überblick Typsysteme:

- John C. Mitchell. Type Systems for Programming Languages. In Jan van Leeuwen (Hrsg.). *Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. B: Formal Methods and Semantics*. Elsevier Science Publishers, 367-458, 1990.

Grundlagen polymorpher Typsysteme:

- Robin Milner. A Theory of Type Polymorphism in Programming. Journal of Computer and System Sciences 17:248-375, 1978.
- Luís Damas, Robin Milner. Principal Type Schemes for Functional Programming Languages. In Conference Record of the 9th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'82), 207-218, 1982.

Zusammenfassung (5)

Unifikation:

- J. A. Robinson. A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle. Journal of the ACM 12(1):23-42, 1965.

Typsysteme, Typinferenz:

- Luca Cardelli. Basic Polymorphic Type Checking. Science of Computer Programming 8:147-172, 1987.

Kapitel 14.6

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 14 (1)

- Luca Cardelli. *Basic Polymorphic Type Checking*. Science of Computer Programming 8:147-172, 1987.
- Luís Damas, Robin Milner. *Principal Type Schemes for Functional Programming Languages*. In Conference Record of the 9th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'82), 207-218, 1982.
- Antonie J.T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 4.7, Type Inference)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 14 (2)

- Gilles Dowek, Jean-Jacques Lévy. *Introduction to the Theory of Programming Languages*. Springer-V., 2011. (Kapitel 6, Type Inference; Kapitel 6.1, Inferring Monomorphic Types; Kapitel 6.2, Polymorphism)
- Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 5, Typisierung und Typinferenz)
- Anthony J. Field, Peter G. Robinson. *Functional Programming*. Addison-Wesley, 1988. (Kapitel 7, Type inference systems and type checking)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 14 (3)

- Robin Milner. *A Theory of Type Polymorphism in Programming*. Journal of Computer and System Sciences 17:248-375, 1978.
- John C. Mitchell. *Type Systems for Programming Languages*. In *Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. B: Formal Methods and Semantics*, Jan van Leeuwen (Hrsg.). Elsevier Science Publishers, 367-458, 1990.
- Simon Peyton Jones (Hrsg.). *Haskell 98: Language and Libraries. The Revised Report*. Cambridge University Press, 2003. `www.haskell.org/definitions`.
- J. A. Robinson. *A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle*. Journal of the ACM 12(1):23-42, 1965.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 14 (4)

- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 5, Writing a Library: Working with JSON Data – Type Inference is a Double-Edged Sword)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 13, Checking types)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 13, Overloading, type classes and type checking)

Teil VI

Weiterführende Konzepte

Kapitel 15

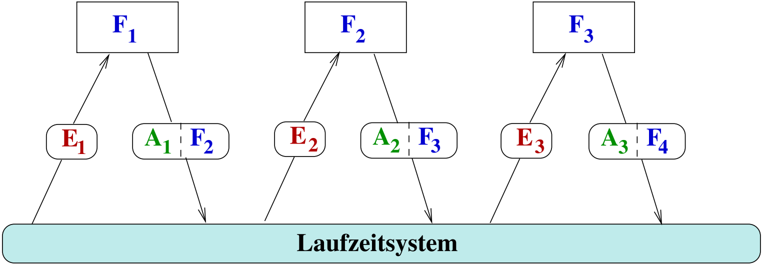
Ein- und Ausgabe

Kapitel 15.1

Motivation

Erwartung

...Programme sind dialog- und interaktionsorientiert dank Ein- und Ausgabemöglichkeiten:



Peter Pepper. *Funktionale Programmierung.* Springer–Verlag, 2003, S. 253.

Aber

...unsere Programme sind bislang stapelverarbeitungsorientiert:

Peter Pepper. *Funktionale Programmierung.*
Springer–Verlag, 2003, S. 245.

Dialog oder Interaktion zwischen Benutzer und Programm finden nicht statt:

- Eingabedaten müssen zu Programmbeginn vollständig zur Verfügung gestellt werden.
- Einmal gestartet, besteht keine Möglichkeit mehr, mit weiteren Eingaben auf das Verhalten oder Ergebnisse des Programms zu reagieren und es zu beeinflussen.

Kapitel 15.1.1

Die Herausforderung

Die Herausforderung

...einen scheinbar unauflöslichen Widerspruch aufzulösen und zu vereinen: Den Umgang

- mit Seiteneffekten in einer seiteneffektlosen Welt!

Konstituierendes Kennzeichen

- rein funktionaler Programmierung:
  - Die völlige Abwesenheit von Seiteneffekten!
- Ein-/Ausgabe:
  - Die unvermeidbare Anwesenheit von Seiteneffekten!

    Ein- und Ausgabe, lesen und schreiben verändern den Zustand der äußeren Welt notwendig und irreversibel.

Es gilt: Ein- und Ausgabe erzeugen (paradigmenunabhängig!) notwendig und unvermeidbar Seiteneffekte und sind ohne Seiteneffekte undenkbar.

Ein-/Ausgabeverzicht ist keine Option

*"Der Benutzer lebt in der Zeit
und kann nicht anders als zeitabhängig
sein Programm beobachten."*

Peter Pepper. Funktionale Programmierung.
Springer-V., 2. Auflage, 2003.

Konsequenz: Wir können abstrahieren

- von der Arbeitweise des Rechners
- nicht aber von der des Benutzers.

Die Aufnahme dialog- und interaktionsorientierter Ein-/Ausgabebehandlung ist unverzichtbar, bringt uns an die Nahtstelle

- von reiner funktionaler und imperativer Programmierung

und erfordert, diese zu überschreiten.

Kapitel 15.1.2

Warum (naive) Einfachheit versagt

Ein-/Ausgabeoperationen

...in funktionaler Programmierung müssen (wie alle Operationen und Funktionen)

- von funktionalem Typ sein,
- ein Resultat liefern.

Damit zu klären: Was können deren

- Typ und Resultat sein?

Leseoperationen

...liefern stets einen Wert.

- Naheliegend: Den Wert der gelesenen Eingabe.

Am Beispiel einer Leseoperation für ganze Zahlen:

```
-- Zur Illustration: Kein gültiges Haskell!
READ_INT :: INT
READ_INT = << Lies "ganze Zahl"
             {- Der unvermeidbare Seiteneffekt, durch
                den der Zustand der Welt irreversibel
                verändert wird! -}
              und liefere deren Wert als Resultat.
             {- Das formal erforderliche und inhalt-
                lich auch gewollte Ergebnis der Lese-
                operation! -}
            >>
```

Schreiboperationen

...liefern stets einen Wert.

- Naheliegend: Nichts.
- Hilfsweise: (i) Den geschriebenen Wert, oder (ii) einen Wahrheitswert in Abhängigkeit des Erfolgs der Operation; oder (iii) irgendeinen Wert (beliebig; beliebig, aber fest).

Am Bsp. einer Schreibop. für Zeichen nach Vorschlag (i):

```
-- Zur Illustration: Kein gültiges Haskell!
PRINT_STRING :: STRING -> STRING
PRINT_STRING s =
 << Gib am Bildschirm den Wert von s aus
  {- Der unvermeidbare Seiteneffekt, durch den der
     Zustand der Welt irreversibel verändert wird! -}
    und liefere s als Resultat.
  {- Das formal erforderliche Ergebnis der Schreib-
     operation! -}
 >>
```

Erstes Problem

Betrachte folgende einfache interaktive Programmieraufgabe:

- Schreibe ein Programm, dass (1) eine ganze Zahl liest und anschließend (2) einen frei wählbaren Text schreibt.

Naheliegend: Komponiere die beiden Funktionen READ_INT und PRINT_STRING sequentiell mittels Funktionskomposition:

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)
(f . g) x = f (g x)
```

Das ergibt:

```
(print_string . read_int)
```

Jedoch: Die Komposition scheitert.

```
read_int     :: Int
print_string :: String -> String
```

...sind nicht typkompatibel für Komposition mittels (.).

Zweites Problem (1)

Betrachte folgendes Beispiel:

```
konstante = 42 :: Int

fun :: Int -> Int              fun' :: Int -> Int
fun n = n + konstante          fun' n = n + read_int
```

- Anders als der Wert von fun, hängt der Wert von fun' nicht allein vom Argumentwert, sondern auch vom Wert der Eingabeoperation ab.
- Das gilt auch für Funktionen, die sich direkt/indirekt auf fun' abstützen: Die Programmbedeutung wird schwer durchschaubar.
- Jeder Aufruf von fun' (u. sich darauf abstützender Funktionen) kann trotz gleichen Argumentwerts einen anderen Wert liefern. $fun'\ 42 == fun'\ 42$ gilt nicht länger.

  fun' und sich darauf abstützende 'Funktionen' werden Relationen.

Zweites Problem (2)

Betrachte folgende Wertveinbarungen:

$$
\begin{array}{ll}
\text{WERT} & = (17+4)*2 \; :: \; \text{Int} \\
\text{DIFF} & = \text{WERT} - \text{WERT} \\
\text{DIFF}' & = \text{Read\_Int} - \text{Read\_Int} \\
\text{WAHR\_ODER\_FALSCH} & = (\text{DIFF} + \text{DIFF}' == 0) \; :: \; \text{Bool}
\end{array}
$$

Ausdruck

- DIFF hat stets den Wert 0; gleich, ob WERT zunächst als linker oder rechter Operand der Differenz ausgewertet wird.
- DIFF′ hat unterschiedliche Werte, wenn die Auswertung von linker und rechter Leseoperation vertauscht wird bei insgesamt gleichen (aber voneinander verschiedenen) eingelesenen Zahlen.
- WAHR_ODER_FALSCH hat abhängig von DIFF′ den Wert TRUE oder FALSE, ist also nicht konstant.

Damit: Verlust referentieller Transparenz

Die Beispiele zeigen: Ein-/Ausgabe lösen das tragende Grundprinzip reiner funktionaler Programmierung auf:

- Referentielle Transparenz

...und sich daraus ergebende Gewissheiten:

- Keine Veränderungen des Zustands der äußeren Welt (Seiteneffektfreiheit).
- Der Wert eines Ausdrucks hängt nur vom Wert seiner Teilausdrücke ab (Kompositionalität), nicht von der Reihenfolge ihrer Auswertung (Reihenfolgenunabhängigkeit).
- Der Wert eines Ausdrucks ist unveränderlich über die Zeit (Zeitunabhängigkeit); er verändert sich nicht durch die Anzahl seiner Auswertungen (Auswertungshäufigkeitsunabhängigkeit).
- Ein Ausdruck darf stets durch seinen Wert ersetzt werden und umgekehrt (Austauschbarkeit).

Ein-/Ausgabe

...stellt somit ein weiteres leitendes Prinzip reiner funktionaler (und allgemeiner deklarativer) Programmierung infrage:

- Die Betonung des 'was' (die Ergebnisse) statt des 'wie' (die Art ihrer Berechnung)

...rüttelt insgesamt an den Grundfesten, auf die sich

- reine funktionale Programmierung

gründet und von denen sich ihre

- Stärke und Eleganz

ableitet.

Kapitel 15.2

Haskells Lösung

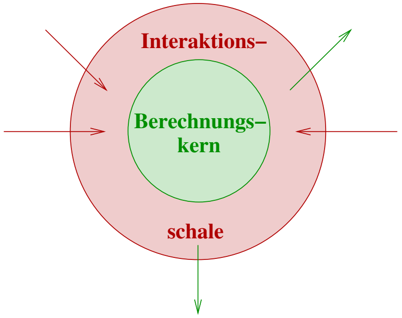
Kapitel 15.2.1

Konzeption und Umsetzung

Konzeptuelle E/A-Lösung Haskells

Konzeptuell wird in Haskell ein Programm geteilt in

- einen rein funktionalen Berechnungskern
- eine imperativartige Dialog- und Interaktionsschale.



Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell.* Pearson, 2004, S. 89.

Haskells Umsetzung d. E/A-Lsg. im Überblick

A) Ein neuer (vordefinierter) Datentyp für Ein-/Ausgabe:

- data IO a = ... (Details implementierungsintern versteckt)

Vordefinierte primitive E/A-Operationen:

- ```
  getChar :: IO Char
  getInt  :: IO Int
  ...
  ```
- ```
  putChar :: Char -> IO ()
  putInt  :: Int -> IO ()
  ...
  ```

B) Ein Operator zur Komposition von E/A-Operationen:

- `(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b`
- 'Syntaktischer Zucker' für `(>>=)`: `do`-Notation.

C) Zwei Vermittlungs'operatoren':

- `return :: a -> IO a`
- '`<-      :: IO a -> a`' ($\rightsquigarrow$ informell!)

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (1)

A) Trennung in rein funktionalen Berechnungskern und imperativartige Dialog- und Interaktionsschale:

Der Datentyp `(IO a)` erlaubt die Unterscheidung von Typen

- des rein funktionalen Berechnungskerns (`Char`, `Int`, `Bool`, etc.)
- der imperativartigen Dialog- und Interaktionsschale (`(IO Char)`, `(IO Int)`, `(IO Bool)`, etc.)

Effekt: `IO`-Werte können nicht das gesamte Programm 'kontaminieren'. Vereinbarungen wie für `wahr_oder_falsch` und `fun'` sind in Haskell typinkorrekt und nicht (mehr) möglich; sie werden vom Typsystem ausgeschlossen und abgewiesen:

```
fun' :: Int -> Int        wert = (17+4)*2 :: Int
fun' n = n + getInt       wahr_oder_falsch
                            = (wert - wert) + (getInt - getInt)
```

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (2)

B) Festlegung der zeitlichen Abfolge von E/A-Operationen ("Der Benutzer lebt in der Zeit...und kann nicht anders..."):

Der Kompositionsoperator `(>>=)` (oder gleichwertig die `do`-Notation, s. Kap. 15.4) erlauben die präzise Festlegung der

- zeitlichen Abfolge von E/A-Operationen.

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (3)

C) Verbindung von funktionalem Kern und E/A-Schale

- `return`: Von Kern in Schale (in äußere Welt).
- `<-`: Von Schale (von äußerer Welt) in Kern.

Informell:

- `return` erlaubt rein funktionale Werte (engl. pure values) aus dem funktionalen Kern über die Schale als seiten-effektverursachende Werte (engl. impure values) in die äußere Welt zu transferieren.

  ...'kontaminieren' reiner Werte.

- `<-` erlaubt den 'reinen' Anteil (`a`-Wert) seiteneffektverursachender Werte (`(IO a)`-Wert) aus der äußeren Welt in den funktionalen Kern zu transferieren.

  ...'dekontaminieren' E/A-verschmutzter Werte.

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (4)

Kontaminierung, Dekontaminierung noch bildhafter:

- `<-`: Dekontaminierung E/A-verschmutzter Werte ⇝ aus einem (`IO a`)-Wert wird ein `a`-Wert:

  $$\texttt{<- :: } \underbrace{\texttt{IO a}}_{\texttt{Schale}} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{a}}_{\texttt{Kern}}$$

  (nach)

  `<-` nimmt einen E/A-verschmutzten (`IO a`)-Wert und extrahiert daraus den rein funktionalen sauberen `a`-Wert, der dadurch für den rein funktionalen Berechnungskern nutzbar wird.

- `return`: Kontaminierung rein funktionaler Werte ⇝ aus einem `a`-Wert wird ein (`IO a`)-Wert:

  $$\texttt{return :: } \underbrace{\texttt{a}}_{\texttt{Kern}} \texttt{ -> } \underbrace{\texttt{IO a}}_{\texttt{Schale}}$$

  (nach)

  `return` nimmt einen rein funktionalen sauberen `a`-Wert und verschmutzt ihn zu einem (`IO a`)-Wert, der dadurch für und in der äußeren Welt nutzbar wird.

Lösungsbeiträge d. Umsetzungsbestandteile (5)

Bemerkung: `return` und `<-` verhalten sich in diesem Sinne dual oder invers zueinander, wobei allerdings

- `return` eine (gewöhnliche) Funktion
- `<-` einen Wertvereinbarungsoperator (ähnlich ‘`:=`’ oder ‘=’) aus imperativen, objektorientierten Sprachen bezeichnet, einen Wertvereinbarungsoperator mit integrierter Dekontaminationsfunktionalität: Dekontamination durch Auspacken, durch Extraktion des `a`-Werts aus einem (`IO a`)-Wert.

Kapitel 15.2.2

Aktionen

Aktionen: Ausdrücke vom Typ `(IO a)`

Ausdrücke vom Typ `(IO a)`

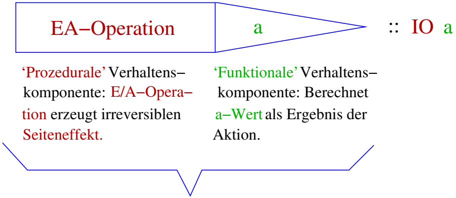
- sind wertliefernde ('funktionaler' Anteil) E/A-Operationen ('prozeduraler' Anteil).
- bewirken einen Lese- oder Schreibseiteneffekt (prozedurales Verhalten) und liefern einen a-Wert als Ergebnis (funktionales Verhalten), der eingepackt als `(IO a)`-Wert zur Verfügung gestellt wird.
- heißen Aktionen (oder Kommandos) (engl. actions oder commands).

Informell:

Aktion = (1) E/A-Operation ('prozedural')
+ (2) Wertlieferung ('funktional')
= wertliefernde E/A-Operation

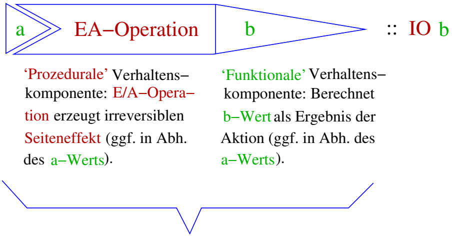
Veranschaulichung des Effekts von Aktionen

Aktion `akt :: IO a`



Aktion akt :: IO a

Aktion liefernde Funktion `f_akt :: a -> IO b`



Aktion liefernde Funktion f_akt :: a –> IO b

Typ

...aller Leseaktionen ist

- (IO a) (für 'lesegeeignete' Typinstanzen von a).

  Der in einen a-Wert transformierte gelesene Wert wird als (formal erforderliches und inhaltlich gewolltes) Ergebnis von Leseoperationen verwendet.

...aller Schreibaktionen ist

- (IO ()) mit () der einelementige Nulltupeltyp mit gleichbenanntem einzigen Datenwert ().

  () als (einziger) Wert des Nulltupeltyps () wird als formal erforderliches Ergebnis von Schreiboperationen verwendet.

Auswertung, Ausführung von Aktionen

Wegen des kombinierten

- prozeduralen (seiteneffekterzeugende Lese-/Schreiboperation) und
- funktionalen (Wert als Ergebnis liefernden)

Effekts der Auswertung von Aktionen (oder E/A-Ausdrücken), spricht man statt von Auswertung meist von Ausführung von Aktionen (oder E/A-Ausdrücken).

Interpretation der Signatur von (>>=)

...des Kompositionsoperators (>>=):

- `(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b`

Die Signatur liefert:

- `(>>=)` ist eine Abbildung, die eine (Argument-) Aktion mit einem `a`-Wert als Ergebnis (d.h. einen `(IO a)`-Wert) auf eine (Bild-) Aktion mit einem `b`-Wert als Ergebnis abbildet (d.h. auf einen `(IO b)`-Wert) mithilfe einer Funktion, deren Ergebnis angewendet auf den `a`-Ergebniswert der Argumentaktion die gesuchte Bildaktion ist.

Interpretation der Signatur von (>>)

...des Kompositionsoperators (>>):

- `(>>) :: IO a -> IO b -> IO b`

Die Signatur liefert:

- `(>>)` ist eine Abbildung, die eine (Argument-) Aktion mit einem `a`-Wert als Ergebnis (d.h. einen `(IO a)`-Wert) und eine zweite (Argument-) Aktion mit einem `b`-Wert als Ergebnis (d.h. einen `(IO b)`-Wert) auf diese zweite Aktion als Bildaktion abbildet.

  (Scheinbar hat das erste Argument keine Bedeutung und verschwindet; dies gilt für sein funktionales Ergebnis, den `a`-Wert, nicht aber für seinen prozeduralen Lese-/Schreibseiteneffekt!)

Interpretation der Signatur von `return`

...der aktionsliefernden Funktion `return`:

- `return :: a -> IO a`

Die Signatur liefert:

- `return` ist eine Abbildung, die einen `a`-Wert auf eine Aktion mit einem `a`-Wert als Ergebnis abbildet (d.h. auf einen `(IO a)`-Wert).

Operationelle Bedeutung

...des Kompositionsoperators `(>>=)`:

- `(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b`

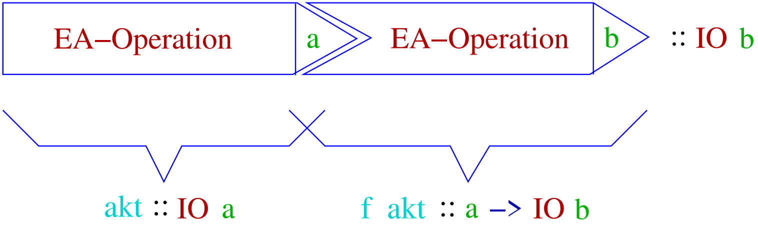
Sei (`akt :: IO a`) eine Aktion, (`f_akt :: a -> IO b`) eine eine Aktion liefernde Abbildung.

Operationelle Bedeutung der Komposition (`akt >>= f_akt`):

- `akt` wird ausgeführt, bewirkt dabei einen Lese- oder Schreibseiteneffekt und liefert als Ergebnis einen `a`-Wert; dieser `a`-Wert wird zum Argument von `f_akt`, deren Bildwert vom Typ (`IO b`) eine Aktion ist, die ausgeführt wird, dabei einen weiteren Lese- oder Schreibseiteneffekt bewirkt und als Ergebnis einen `b`-Wert liefert; dieser ist zugleich das (funktionale) Ergebnis der Komposition (`akt >>= f_akt`).

Veranschaulichung der operat. Bedeutung

...der komponierten Aktion (`akt >>= f_akt`):



`akt >>= f_akt` $\widehat{=}$ `akt >>= \x -> f_akt x`

Inhalt
Teil I
Kap. 1
Teil II
Kap. 2
Kap. 3
Kap. 4
Kap. 5
Kap. 6
Teil III
Kap. 7
Kap. 8
Kap. 9
Teil IV
Kap. 10
Kap. 11
Teil V
Kap. 12
Kap. 13

Operationelle Bedeutung

...des Kompositionsoperators (>>):

- `(>>) :: IO a -> IO b -> IO b`

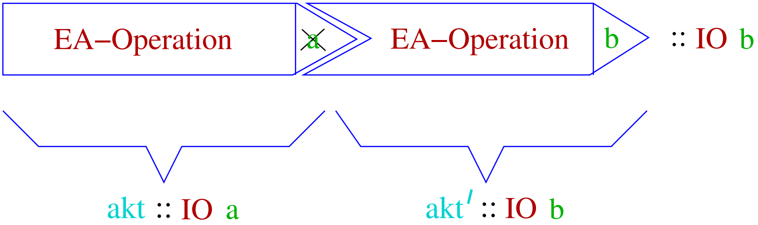
Seien (`akt :: IO a`), (`akt' :: IO b`) zwei Aktionen.

Operationelle Bedeutung der Komposition: (`akt >> akt'`):

- `akt` wird ausgeführt, bewirkt dabei einen Lese- oder Schreibseiteneffekt und liefert als Ergebnis einen `a`-Wert. Dieser `a`-Wert wird ignoriert und unmittelbar die Aktion `akt'` ausgeführt, die dabei einen weiteren Lese- oder Schreibseiteneffekt bewirkt und als Ergebnis einen `b`-Wert liefert; dieser ist zugleich das (funktionale) Ergebnis der Komposition (`akt >> akt'`).

Veranschaulichung der operat. Bedeutung

...der komponierten Aktion (`akt >> akt'`):



`akt >> akt'` $\widehat{=}$ `akt >>= \_ -> akt'`

Komposition: ‘binde-dann’-, ’dann’-Operator

Die Kompositionsoperatoren

- `(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b`
- `(>>)  :: IO a -> IO b -> IO b`
  `akt >> akt' = akt >>= \_ -> akt'` (vordefiniert)

...gelesen als

- binde-dann-Operator (engl. bind oder then)
- dann-Operator (engl. sequence).

Bem.: Die Definition von `(>>)` macht deutlich, dass `(>>)` kein eigenständiger Operator, sondern von `(>>=)` abgeleitet und eine spezielle Anwendung von `(>>=)` ist, die das Ergebnis von `akt` (`a`-Wert) als Argument für `akt'` (`\_ -> akt'`) ignoriert: Der `a`-Wert von `akt` wird anders als bei `(>>=)` nicht für weitere Verwendung an einen Namen gebunden, er wird ‘vergessen’.

Operationelle Bedeutung

...der Funktion `return`:

- `return :: a -> IO a`

Sei (`w :: a`) ein `a`-Wert.

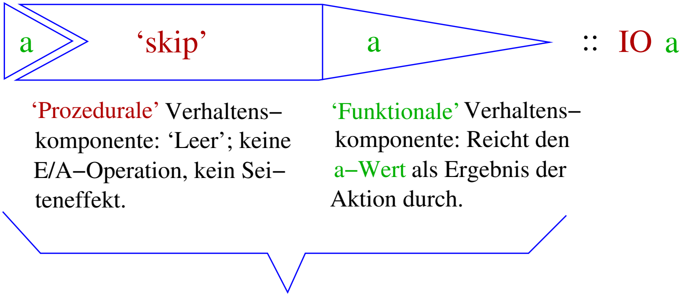
Operationelle Bedeutung des aktionsliefernden Ausdrucks (`return w`):

- `return` bildet den `a`-Wert `w` in 'offensichtlicher' Weise auf den 'entsprechenden' (`IO a`)-Wert ab, ohne einen Lese- oder Schreibseiteneffekt zu bewirken.

  (Das prozedurale Verhalten von `return` entspricht der leeren Anweisung '*skip*'; `return` hat (deshalb) abweichend von anderen Aktionen nur ein funktionales beobachtbares Verhalten, kein prozedurales).

Veranschaulichung

...der operationellen Bedeutung von `return`:



Aktion return :: a –> IO a

Wichtig zu beachten

Die E/A-Aktion `return` in Haskell

- hat eine gänzlich andere Aufgabe und Bedeutung als das aus imperativen oder objektorientierten Sprachen bekannte *return*; außer der Namensgleichheit besteht weder konzeptuell noch funktionell eine Ähnlichkeit.
- Haskells `return` kann in einer Aktionssequenz auftreten und ausgewertet werden, ohne dass dadurch die Auswertung der restlichen Aktionssequenz beendet würde; `return` kann deshalb auch mehrfach in sinnvoller Weise in einer Aktionssequenz auftreten.
- Zum Verständnis von Haskells `return` ist eine Orientierung am imperativen, objektorientierten *return* deshalb nicht sinnvoll und allenfalls irreführend.

Kapitel 15.2.3

Aktionssequenzen

Die Kompositionsoperatoren (>>=) und (>>)

...erlauben die Bildung (assoziativer) Aktionssequenzen:

```
akt1 >>= f_akt2 >> akt3 >> akt4 >>= f_akt5 >>= return f
```

Allgemeines Muster von Aktionssequenzen

...mit (>>=) vom Typ (IO b):

```
akt1 >>= \p1 ->                    -- p für Parameter
akt2 >>= \p2 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p2 ... pn)
```

mit

```
f :: a1 -> a2 -> ... -> an -> b
```

geeigneter Verknüpfungsoperation und

```
akt1 :: IO a1
akt2 :: IO a2
...
aktn :: IO an
```

Aktionssequenzen mit (>>=) und (>>)

...mit und ohne Rückführung von (>>) auf (>>=):

```
akt1 >>= \p1 ->
akt2 >>= \_  ->
akt3 >>= \_  ->
akt4 >>= \p4 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p4 ... pn)
```

```
akt1 >>= \p1 ->
akt2 >>
akt3 >>
akt4 >>= \p4 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p4 ... pn)
```

...der Typ einer Aktionssequenz ist durch den Typ der letzten Aktion bestimmt.

Schrittweise Aktionssequenzauswertung (1)

```
akt1 >>= \p1 ->
akt2 >>= \p2 ->
akt3 >>= \p3 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p2 p3 ... pn)
```

```
->> (Aktion akt1 erzeugt E/A-Effekt und liefert Wert w1)
```

```
(\p1 ->
   akt2 >>= \p2 ->
   akt3 >>= \p3 ->
   ...
   aktn >>= \pn ->
   return (f p1 p2 p3 ... pn)) w1
```

Schrittweise Auswertung Aktionssequenz (2)

```
->>(Aktion akt2 erzeugt E/A-Effekt und liefert Wert w2)
 (\p1 ->
    (\p2 ->
      akt3 >>= \p3 ->
      ...
      aktn >>= \pn ->
      return (f p1 p2 p3 ... pn)) w1) w2
->> (Aktion akt3 erzeugt E/A-Effekt und liefert Wert w3)
( ...
->> (Aktion aktn erzeugt E/A-Effekt und liefert Wert wn)
 (\p1 ->
    (\p2 ->
       (\p3 ->
          ( ...
            (\pn ->
              return (f p1 p2 p3 ... pn)) w1) w2) w3)...) wn
```

Schrittweise Aktionssequenzauswertung (3)

```
->> (Applikation der 1-ten Funktion auf w1)

    (\p2 ->
       (\p3 ->
          ( ...
            (\pn ->
               return (f w1 p2 p3 ... pn)) w2) w3)...) wn

->> (Applikation der 2-ten Funktion auf w2)

       (\p3 ->
          ( ...
            (\pn ->
               return (f w1 w2 p3 ... pn)) w3)...) wn

->> (Applikation der 3-ten Funktion auf w3)
...
->> (Applikation der n-ten Funktion auf wn)

              return (f w1 w2 w3 ... wn)
```

Schrittweise Aktionssequenzauswertung (4)

```
->> (Linksassoziative Klammerung von (f w1 w2 w3 ...wn))

            return ((...((((f w1) w2) w3) ...) wn))

->> (Anwendung von f auf w1 w2 w3 ... wn liefert b-Wert w,
     d.h.: (...((((f w1) w2) w3) ...) wn) ->> w :: b)

            return w

->> (Anwendung von return auf w liefert (ohne E/A-Effekt)
     das Ergebnis erg vom Typ IO b der Aktionssequenz,
     d.h. erg = IO w :: IO b)
```

$$\underbrace{\texttt{erg = IO w}}_{\textit{Datenkonstruktor}} \;\texttt{::}\; \underbrace{\texttt{IO b}}_{\textit{Typkonstruktor}}$$

...in Kapitel 15.4 werden wir Haskells do-Notation als suggestivere und bequemere Schreibweise für Aktionssequenzen kennenlernen.

Kapitel 15.2.4

Zur Sonderstellung des Typs (`IO a`)

Zum Unterschied von (IO a) und (MT a) (1)

Vergleiche die ‘gewöhnliche’ Typdeklaration und Wertvereinbarung von:

```
data MT a = MT a deriving Show  -- MT für ‘MeinTyp’
z = MT ‘u‘ :: MT Char           -- z für ‘zeichen’
```

mit denjenigen der folgenden E/A-Aktionen:

```
data IO a = IO ...          -- Details impl.-intern
akt    = getChar :: IO Char
akt'   = putChar ‘v‘ :: IO ()
akt''  = putChar :: Char -> IO ()
akt''' = return ‘w‘ :: IO Char
akt''''= return :: a -> IO a
```

Zum Unterschied von (IO a) und (MT a) (2)

Die Auswertung von Ausdruck `z` bewirkt:

- Das Zeichen `'u'` (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `MT`) wird geliefert (funktionales Verhalten); darüberhinaus passiert nichts, kein zusätzliches, insbesondere kein prozedurales Verhalten.

Zum Unterschied von (IO a) und (MT a) (3)

Die Auswertung von Aktion

- `akt` bewirkt:
  (1) Ein Zeichen wird vom Bildschirm gelesen (prozedurale E-Operation) und
  (2) der Wert des gelesenen Zeichens wird als Ergebnis (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) geliefert (funktionales Verhalten).
- `akt'` bewirkt:
  (1) Das Zeichen `'v'` wird auf den Bildschirm geschrieben (prozedurale A-Operation) und
  (2) der Wert `()` des Nulltupeltyps `()` wird als Ergebnis von `akt'` (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) geliefert (funktionales Verhalten).
- (`akt''` `'v'`) bewirkt: Ident zur Auswertung von `akt'`.

Die Auswertung von Aktion

- `akt'''` bewirkt:
  (1) Ohne dass eine E/A-Operation stattfindet (das prozedurale Verhalten ist 'leer', entsprechend '*skip*') wird
  (2) das Zeichen `'w'` als Ergebnis von `akt'''` (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) geliefert (funktionales Verhalten).
- `akt''''` bewirkt: Fehlschlag; `akt'''' = return` vereinbart einen Aliasnamen für die Funktion (genauer: Aktion) `return`; ohne Argument lassen sich Funktionen nicht auswerten (vgl. auch `akt''`).
- `(akt'''' 'w')` bewirkt: Ident zur Auswertung von `akt'''`.

Zusammenfassung (1)

Die äußere Ähnlichkeit der Deklarationen

```
data MT a = MT a                    -- rein fkt. Typ
z =  MT ‘u‘ :: MT Char         -- rein fkt. Ausdruck

data IO a = IO ...                       -- E/A-Typ
akt  = getChar :: IO Char      -- E/A-Ausd./Aktion
akt′ = putChar ‘v‘ :: IO ()     -- E/A-Ausd./Aktion
```

ist oberflächlich: Die Auswertung

- rein funktionaler Ausdrücke wie z

ist wesentlich anders als die von

- E/A-Ausdrücken (oder Aktionen) wie akt, akt′.

Zusammenfassung (2)

Auswertung eines

- rein funktionalen Ausdrucks (engl. pure expression): Der Wert des Ausdrucks wird geliefert ('funktionaler' Effekt), sonst (passiert) nichts.
- E/A-Ausdrucks (engl. impure expression):
  (1) Eine E/A- Operation wird ausgeführt (Lese-/Schreibseiteneffekt wird generiert, 'prozeduraler' Effekt).
  (2) ein `a`-Wert (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) wird als Wert des E/A-Ausdrucks geliefert ('funktionaler' Effekt).

Ausnahme: Der E/A-Ausdruck (`return ausd :: IO T`) für (`ausd :: T`) und `T` konkreter Typ liefert den Wert des Ausdrucks `ausd` (eingepackt in den Datenwertkonstruktor `IO`) als Ergebnis ohne eine E/A-Operation auszuführen (und somit ohne einen Lese-/Schreibseiteneffekt zu bewirken).

Kapitel 15.3

E/A-Operationen, E/A-Sequenzen

Vordefinierte Ein-/Ausgabeoperationen

...zum Lesen und Schreiben vom bzw. auf den Bildschirm.

Leseoperationen:

```
getChar :: IO Char
getInt  :: IO Int
getLine :: IO String
readIO  :: Read a => String -> IO a
readLn  :: Read a => IO a
...
```

Schreiboperationen:

```
putChar  :: Char   -> IO ()
putStr   :: String -> IO ()
putStrLn :: String -> IO ()
print    :: Show a => a -> IO ()
...
```

Vordefinierte Ein-/Ausgabeoperationen

...zum Lesen und Schreiben aus bzw. in Dateien.

Leseoperationen:

```
readFile :: FilePath -> IO String
```

Schreiboperationen:

```
writeFile  :: FilePath -> String -> IO ()
appendFile :: FilePath -> String -> IO ()
```

Dateiende-Prädikat:

```
isEOF :: FilePath -> Bool
```

Pfad-/Dateinamen:

```
type FilePath = String
```

...mit betriebssystemabhängigen Werten von `FilePath`.

Beispiel: Anwendungen v. putStrLn, putStr

...für das 'Hallo, Welt'-Programm:

```
halloWelt :: IO ()
halloWelt = putStrLn "Hallo, Welt!"
```

...mit putStrLn zur Ausgabe einer Zeichenreihe mit anschliessendem Zeilenumbruch:

```
putStrLn :: String -> IO ()
putStrLn = putStr . (++ "\n")
```

E/A-Operationen und die Fkt. show, read

Mithilfe der Funktion show der Typklasse Show und der globalen (engl. top level) Funktion read (read keine Funktion der Typklasse Read!):

```
show :: Show a => a -> String
```

...lassen sich Werte von Instanztypen der Typklasse Show ausgeben und von Instanztypen der Typklasse Read einlesen:

```
putLine :: Show a => a -> IO ()
putLine = putStrLn . show

print :: Show a => a -> IO ()
print = putLine

read :: Read a => String -> a
read s = ...             -- definiert im Präludium
```

Bem.: Vordefinierte Instanzen von Show und Read: Alle im Präludium definierten Typen mit Ausnahme v. Funktions- u. IO-Typen.

E/A-Sequenzen mittels (.) und (>>=)

...mittels Funktionskomposition (.).

Schreiben mit Zeilenvorschub (vordefinierte Sequenz):

```
putStrLn :: String -> IO ()
putStrLn = putStr . (++ "\n")
```

..mittels IO-Komposition (>>=).

Lesen einer Zeile und anschließendes Schreiben der gelesenen Zeile (selbstdefinierte Sequenz):

```
echo :: IO ()
echo = getLine >>= (\zeile -> putLine zeile)
```

Kapitel 15.4

Die `do`-Notation

Die do-Notation

...'syntaktischer Zucker' für die IO-Kompositionsoperatoren (>>=) und (>>) zur gefälligeren, imperativähnlicheren

- Bildung von Ein-/Ausgabesequenzen.

Zwei Beispiele:

```
do zeile <- getLine statt getLine >>= (\zeile ->
   putStrLn zeile                      putStrLn zeile)

do putStr "fun"     statt putStr "fun" >> putStr "\n"
   putStr "\n"      oder  putStr "fun" >>= (\_ ->
                                           putStr "\n")
```

Bem.: Ein do-Ausdruck entspricht semantisch einer Sequenz von E/A-Operationen und kann (deshalb) auf eine beliebige Anzahl von Aktionen als Argumente angewendet werden (in den obigen beiden Beispielen jeweils zwei).

Die Abseitsregel gilt auch in do-Ausdrücken.

Allgemeines Muster von do-Ausdrücken

```
do w1 <- akt1      -- Sprechweise: akti Generator
   w2 <- akt2      -- für Wert wi vom Typ ai
   ...
   wn <- aktn
   return (f w1 w2 ... wn)
```

mit

```
f :: a1 -> a2 -> ... -> an -> b
```

geeigneter Verknüpfungsfunktion und

```
akt1 :: IO a1
akt2 :: IO a2
...
aktn :: IO an
```

do-Ausdrücke in einer Zeile

...ein do-Ausdruck wie

```
do w1 <- akt1
   w2 <- akt2
   ...
   wn <- aktn
   return (f w1 w2 ... wn)
```

lässt sich (so gewünscht) mittels ';' bedeutungsgleich in einer Zeile schreiben:

```
do w1 <- akt1; ... ; wn <- aktn; return (f w1 w2 ... wn)
```

Der Typ von do-Ausdrücken

...ist durch den Typ der letzten Aktion bestimmt:

```
( do w1 <- akt1
     w2 <- akt2
     ...
     wn <- aktn
     return (f w1 w2 ... wn) ) :: IO b
```

bzw.

```
( do w1 <- akt1;...; wn <- aktn; return (f w1...wn) ) :: IO b
```

wobei jeweils

```
f :: a1 -> a2 -> ... -> an -> b
```

Nicht verwendete Aktionsergebnisse

...in do-Ausdrücken.

Aktionen liefern stets ein Ergebnis. Bleibt es unverwendet (entspricht Aktionskomposition mit (>>) statt mit (>>=)), kann die Nichtverwendung syntaktisch dadurch ausgedrückt werden, dass ein Aktionsergebnis nicht an einen Wertnamen wi, sondern an _ 'gebunden' wird, quasi 'unbenannt' gebunden wird:

```
do w1 <- akt1
   _  <- akt2
   _  <- akt3
   w4 <- akt4
   ...
   wn <- aktn
   return (f w1 w4 ... wn)
```

Weglassen unbenannter Bindungen

...noch einfacher können diese 'unbenannten' Bindungen auch ganz entfallen:

```
do w1 <- akt1
   akt2
   akt3
   w4 <- akt4
   ...
   wn <- aktn
   return (f w1 w4 ... wn)
```

Entsprechung von do- und (>>=)-Notation

Der do-Ausdruck

```
do w1 <- akt1
   w2 <- akt2
   ...
   wn <- aktn
   return (f w1 w2 ... wn)
```

ist durch den (>>=)-Ausdruck definiert:

```
akt1 >>= \p1 ->
akt2 >>= \p2 ->
...
aktn >>= \pn ->
return (f p1 p2 ... pn)
```

Beide Ausdrücke haben dieselbe Bedeutung und entsprechen einander.

A-Sequenzen mittels do-Notation

Einmaliges Schreiben einer Zeichenreihe mit Zeilenvorschub:

```
putStrLn :: String -> IO ()          -- Definition aus
putStrLn str = do putStr str              -- Präludium
                  putStr "\n"
```

Zweimaliges Schreiben einer Zeichenreihe (mit Z-Vorschüben):

```
putStrLn_2mal :: String -> IO ()
putStrLn_2mal str = do putStrLn str
                       putStrLn str
```

Viermaliges Schreiben einer Zeichenreihe (mit Z-Vorschüben):

```
putStrLn_4mal :: String -> IO ()
putStrLn_4mal str = do putStrLn str
                       putStrLn str
                       putStrLn str
                       putStrLn str
```

E/A-Sequenzen mittels do-Notation

Zwei Lese-, eine Schreibaktion:

```
read2lines_and_report :: IO ()
read2lines_and_report
 = do getLine      -- Z. wird gelesen u. vergessen
      getLine      -- Z. wird gelesen u. vergessen
      putStrLn "Zwei Zeilen gelesen."
```

Eine Lese-, zwei Schreibaktionen:

```
read1line_and_echo2times :: IO ()
read1line_and_echo2times
 = do line <- getLine  -- Z. w. gelesen u.  gemerkt
      putStrLn line  -- Gemerkte Z. w. geschrieben
      putStrLn line  -- Gemerkte Z. w. geschrieben
```

A-Sequenzen parametrisierter Länge

n-maliges Schreiben einer Zeichenreihe (mit Z-Vorschüben):

```
putStrLn_nmal :: Int -> String -> IO ()
putStrLn_nmal n str
 = if n <= 1
     then putStrLn str
     else do putStrLn str
             putStrLn_nmal (n-1) str   -- Rekursion!
```

Das erlaubt auch folgende (alternative) Definitionen:

```
putStrLn_2mal :: String -> IO ()
putStrLn_2mal = putStrLn_nmal 2

putStrLn_4mal :: String -> IO ()
putStrLn_4mal = putStrLn_nmal 4
```

do-Ausdrücke mit return (1)

Lesen einer Zeichenreihe vom Bildschirm und Konversion in eine ganze Zahl:

```
getInt :: IO Int
getInt = do line <- getLine
            return (read line :: Int)
```

Im Detail:

```
getInt :: IO Int
getInt = do line   <-   getLine
        :: String    :: IO String
            return (read line :: Int)
                Konvertierung ‘String’ (der
                Typ von line) zu ‘Int’ (der
                Argumenttyp von return)
                  :: IO Int
```

do-Ausdrücke mit return (2)

Bestimmung der Länge, der Zeichenzahl einer Datei:

```
groesse :: IO Int
groesse = do putStrLn "Dateiname = "
             name <- getLine
             text <- readFile name
             return (length text)
```

do-Ausdrücke mit return (3)

Mit detaillierter Typinformation:

```
groesse :: IO Int
groesse = do putStrLn "Dateiname = "
             name     <-    getLine
         :: String        :: IO String
             text     <-    readFile name
         :: String           :: IO String
             return (length text)
                         :: String
                        :: Int
                  :: IO Int
```

Kapitel 15.5

Beispiele ausgewählter E/A-Programme

Kapitel 15.5.1

Dialog- und Interaktionsprogramme

Dialog- und Interaktionsprogramme

Zwei Frage/Antwort-Interaktionen mit dem Benutzer:

```
ask :: String -> IO String
ask frage = do putStrLn frage
               getLine

interAct :: IO ()        -- Bildschirm-Interaktion
interAct
 = do name <- ask "Wie heißen Sie?"
      putStrLn ("Willkommen " ++ name ++ "!")

interAct' :: IO ()           -- Datei-Interaktion
interAct'
 = do putStr "Bitte Dateinamen angeben: "
      dateiname <- getLine
      inhalt    <- readFile dateiname
      putStr inhalt
```

Bedeutungsgleichheit von (>>=),(>>) und do

...für die Konstruktion von E/A-Sequenzen.

Die A-Sequenz mittels (>>):

```
writeFile "meineDatei.txt" "Hallo, Dateisystem!"
 >> putStr "Hallo, Welt!"
```

...ist bedeutungsgleich zur A-Sequenz mittels do (genauer: deren Bedeutung sie definiert):

```
do writeFile "meineDatei.txt" "Hallo, Dateisystem!"
   putStr "Hallo, Welt!"
```

Bedeutungsgleichheit von (>>=),(>>) und do

Die E/A-Sequenz mittels (>>=) und (>>):

```
incrementInt :: IO ()
incrementInt
 = getLine >>=
    \zeile -> putStrLn (show (1+read zeile :: Int))
```

...ist bedeutungsgleich zur E/A-Sequenz mittels do (genauer: deren Bedeutung sie definiert):

```
incrementInt' :: IO ()
incrementInt'
 = do zeile <- getLine
      putStrLn (show (1 + read zeile :: Int))
```

Informell: 'do' entspricht '(>>=) plus anonyme λ-Abstraktion'.

Bedeutungsgleichh. (>>=), (>>) u. do, return

Die E-Sequenz mittels (>>=):

```
readStringPair :: IO (String,String)
readStringPair
 = getLine >>=
    (\zeile -> (getLine >>=
                (\zeile' -> (return (zeile,zeile')))))
```

...ist bedeutungsgleich zur E-Sequenz mittels do und return:

```
readStringPair' :: IO (String,String)
readStringPair'
 = do zeile <- getLine
      zeile' <- getLine
      return (zeile,zeile')
```

Lokale Deklarationen in do-Ausdrücken

Die E/A-Sequenz (ohne lokale Deklarationen):

```
reverse2lines :: IO ()
reverse2lines
 = do line1 <- getLine
      line2 <- getLine
      putStrLn (reverse line2)
      putStrLn (reverse line1)
```

...ist bedeutungsgleich zur Sequenz mit lokalen Deklarationen:

```
reverse2lines :: IO ()
reverse2lines
 = do line1 <- getLine
      line2 <- getLine
      let rev1 = reverse line1
      let rev2 = reverse line2
      putStrLn rev2
      putStrLn rev1
```

Unterschiedliche Bindung von <- und let

Benannte Wertvereinbarungen mittels

- `<-`: für den `a`-Wert von Aktionen vom Typ `(IO a)` (für 'unreine' Werte aus der äußeren Welt!).
- `let`: für den Wert rein funktionaler Ausdrücke (für 'reine' Werte aus dem rein funktionalen Programmkern).

Kapitel 15.5.2

Rekursive E/A-Programme

Rekursive E/A-Programme (1)

...lesen und schreiben gelesener Eingaben: Kopieren.

Nichtterminierendes Kopieren (Notabbruch mit `Ctrl-c`):

```
kopiere :: IO ()
kopiere
 = do zeile <- getLine
      putStrLn zeile
      kopiere                               -- Rekursion!
```

n-maliges Kopieren:

```
kopiere_n_mal :: Int -> IO ()
kopiere_n_mal n
 = if n <= 0
    then return ()
    else do zeile <- getLine
            putStrLn zeile
            kopiere_n_mal (n-1)     -- Rekursion!
```

Rekursive E/A-Programme (2)

Kopieren bis zur Eingabe der leeren Zeile:

```
kopiere_bis_leer :: IO ()
kopiere_bis_leer
 = do zeile <- getLine
      if zeile == ""
       then return ()
       else do putStrLn zeile
               kopiere_bis_leer         -- Rekursion!
```

Kopieren bis zur Eingabe der leeren Zeile unter Mitzählen:

```
kopiere_bis_leer_und_zaehle_mit :: Int -> IO ()
kopiere_bis_leer_und_zaehle_mit n
 = do zeile <- getLine
      if zeile == ""
       then putStrLn
             (show n ++ " Zeilen gelesen u. kopiert.")
       else do putStrLn zeile
               kopiere_bis_leer_und_zaehle_mit (n+1)
```

Rekursive E/A-Programme (3)

Summieren einer Folge ganzer Zahlen bis 0 eingegeben wird:

```
summiere :: IO Int
summiere
 = do n <- getInt
      if n == 0
       then return 0
       else (do m <- summiere
                return (n + m))
```

Vergleiche summiere mit:

```
sum :: [Int] -> Int
sum [] = 0
sum (n:ns)
 = let m = sum ns
   in (n + m)
```

```
sum′ :: [Int] -> Int
sum′ [] = 0
sum′ (n:ns)
 = n + sum′ ns
```

Rekursive E/A-Programme (4)

Interaktives Summieren einer Folge ganzer Zahlen bis 0 eingegeben wird, abgestützt auf `summiere`:

```
summiere_interaktiv :: IO ()
summiere_interaktiv
 = do putStrLn "Gib ganze Zahl ein, je eine pro"
      putStrLn "Zeile. Diese werden summiert bis"
      putStrLn "Null eingegeben wird."
      summe <- summiere
      putStr "Der Summenwert ist "
      putLine summe
```

Kapitel 15.5.3

Iterativartige E/A-Programme

Iterativartige E/A-Programme

Iterativartiger Ausdruck/Programm, genauer die iterativartige Funktion `while`:

```
while :: IO Bool -> IO () -> IO ()
while bedingung aktion
  = do b <- bedingung
       if b
        then
         do aktion
            while bedingung aktion  -- Rekursion!
        else
         return ()
```

Zur operationellen Bedeutung der Fkt. `while`

Intuitiv:

- Ist die Bedingung (`bedingung :: IO Bool`) erfüllt (und hat `b` somit den Wert `True`), so wird die Aktion (`aktion :: IO ()`) ausgeführt (`do`-Ausdruck im `then`-Ausdruck); anderenfalls endet die Ausführung/-wertung von `while` ohne weiteren E/A-Seiteneffekt mit dem Resultatwert `() :: ()`.
- Nach abgeschlossener Ausführung/-wertung von `aktion` (im Fall der erfüllten Bedingung) wird `while` rekursiv aufgerufen, wodurch insgesamt die 'iterativartige' Anmutung entsteht, dass eine Aktion so lange ausgeführt wird, wie eine Bedingung erfüllt ist.
- Mögliches Argument für die Bedingung: Der Ausdruck

  ```
  isEOF :: IO Bool
  ```

  zum Test auf das Eingabeende.

Anwendung der Funktion `while`

...um eine Datei zeilenweise zu lesen und gelesene Zeilen wieder auszugeben, bis das Dateiende erreicht ist.

```
kopiere_eingabe_nach_ausgabe :: IO ()
kopiere_eingabe_nach_ausgabe
 = while (do wert <- isEOF        -- Arg. f. Param.
             return (not wert))      -- bedingung
         (do zeile <- getLine     -- Arg. f. Param.
             putStrLn zeile)            -- aktion
```

Bem.: Die Klammerung der Argumente von `while` ist nötig.

Kapitel 15.5.4

'Iteration' vs. Rekursion

Wertvereinbarung vs. Wertzuweisung

...funktionale Wertvereinbarung vs. imperative Wertzuweisung.

Zur Natur des

- Wertvereinbarungsoperators '`<-`' in `do`-Ausdrücken

im Vergleich zum

- destruktiven Wertzuweisungsoperator '`:=`' in destruktiven Zuweisung(sanweisung)en (engl. destructive assignments) imperativer Sprachen.

Tatsächlich besitzt

- '`<-`' Ähnlichkeit mit einer Wertzuweisung, ist aber gänzlich verschieden der destruktiven Wertzuweisung imperativer Sprachen.

Einmal-Wertvereinbarungsoperator ‘<-’

‘<-’ leistet eine Einmal-Wertvereinbarung für einen Namen:

- `zeile <- getLine` bindet das Resultat von `getLine` (allgemeiner: einer Eingabeoperation), an einen Namen, hier `zeile`.
- Diese Verbindung zwischen dem Namen, hier `zeile`, und dem von einer Eingabeoperation gelieferten Wert, hier `getLine`, bleibt für den gesamten Programmlauf erhalten und ist nicht mehr veränderbar.

Mehrfach-Wertzuweisungsoperator ‘:=’

‘:=’ leistet eine temporäre Wertzuweisung an eine durch einen Namen bezeichnete Speicherzelle:

- x := Read_String: Der von Read_String gelesene Wert wird in die von x bezeichnete Speicherzelle geschrieben; der vorher dort gespeicherte Wert wird dabei überschrieben und zerstört (destruktiv!).
- Die durch die Zuweisung geschaffene Verbindung zwischen Name (d.h. der mit ihm bezeichneten Speicherzelle) und Wert (d.h. dem Inhalt der Speicherzelle) bleibt so lange erhalten (temporär!), bis sie durch eine erneute Zuweisung an diese Zelle überschrieben und zerstört wird (destruktive Zuweisung!).
- Der Inhalt einer Speicherzelle kann jederzeit und beliebig oft überschrieben werden und so die Verbindung von Name und Wert geändert werden (s. a. Anhang A.6).

Zur Wirkung von Einmal-Wertvereinbarungen

...anhand eines Beispiels:

Aufgabe: Schreibe ein Programm, das so lange eine Zeile vom Bildschirm einliest und wieder ausgibt, bis schließlich die leere Zeile eingelesen wird und die Ausführung abgebrochen wird.

Der Effekt von Einmal-Wertvereinbarungen

'Iterativer' Lösungsversuch mittels while-Funktion/Ausdrucks:

```
goUntilEmpty :: IO ()
goUntilEmpty
 = do zeile <- getLine
      while                    -- while mit Argumenten:
       (return (zeile /= []))   -- Bedingungsarg.
       (do putStrLn zeile           -- Aktionsarg.
           zeile <- getLine
           return ())
```

- Die Auswertung von goUntilEmpty terminiert nicht (es sei denn, [] wird als erste Eingabe gewählt).
- zeile und zeile sind unterschiedliche Einmal-Wertvereinbarungen gleichen Namens.
- Test und Ausgabe erfolgen bei jedem Aufruf von while (in jeder 'Schleife') für den Wert von zeile, nie v. zeile.

Lösung: Direkte Rekursion statt 'Iteration'

Direkt-rekursive Lösung (ohne den iterativartigen Ausdruck `while`):

```
goUntilEmpty' :: IO ()
goUntilEmpty'
 = do zeile <- getLine
      if (zeile == [])
         then return ()
         else (do putStrLn zeile
                  goUntilEmpty')     -- Rekursion!
```

(siehe Simon Thompson. The Craft of Functional Programming. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999, S. 393.)

Kapitel 15.5.5

Subtiles, Randbemerkung

(Subtile) Unterschiede

...in Wertdarstellung und Resultattyp zwischen Ausgabe- und Nichtausgabeoperationen:

```
Main>putStr (‘a‘:(‘b‘:(‘c‘:[])))
     ->> abc :: IO ()

Main>putChar (head [‘a‘,‘b‘,‘c‘])
  ->> a :: IO ()

Main>print "abc"
     ->> "abc" :: IO ()
Main>print ‘a‘
->> ‘a‘ :: IO ()
```

```
Main>(‘a‘:(‘b‘:(‘c‘:[])))
 ->> "abc" :: [Char]

Main>head [‘a‘,‘b‘,‘c‘]
 ->> ‘a‘ :: Char

Main>"abc"
 ->> ‘a‘:(‘b‘:‘c‘) :: [Char]
Main>‘a‘
 ->> ‘a‘ :: Char
```

Kapitel 15.6

Zusammenfassung

Haskell-Programme als E/A-Aktionen

Einstiegspunkt für die Auswertung (übersetzter) interaktiver Haskell-Programme ist (per Konvention) eine eindeutig bestimmte

- Definition mit Namen `main` vom Typ `(IO T)`, `T` Typ.
- Intuitiv: 'Haskell-Programm = E/A-Aktion'.

Beispiel:

```
main :: IO ()                                -- E/A-Schale
main
 = do n <- getInt                            -- E/A-Schale
      let ergebnis = meine_funktion n        -- Fkt. Kern
      putStr ergebnis                        -- E/A-Schale

meine_funktion :: Int -> String              -- Fkt. Kern
meine_funktion n = ... meine_funktion' ...

meine_funktion' :: ...                       -- Fkt. Kern
meine_funktion' ... = ...
...
```

Ein-/Ausgabebehandlung

...in funktionaler und imperativer Programmierung grundsätzlich unterschiedlich. Am augenfälligsten:

- Imperativ: Ein-/Ausgabe prinzipiell an jeder Programmstelle möglich.
- Funktional, hier in Haskell: Ein-/Ausgabe an bestimmten Programmstellen konzentriert (in meist wenigen global definierten Funktionen der 'E/A-Schale').

Häufige Beobachtung: Die vermeintliche Einschränkung erweist sich

- als Stärke bei der Programmierung im Großen!

Ein-/Ausgabebehandlung in Haskell

Haskells Konzept zur Behandlung von Ein-/Ausgabe erlaubt Funktionen

- des Berechnungskerns (rein funktionales Verhalten, keine Seiteneffekte)
- der Dialog- und Interaktionsschale (nicht rein funktionales, sondern seiteneffektbehaftetes Verhalten)

zu unterscheiden (und konzeptuell zu trennen), kenntlich an den unterschiedlichen Typen, auf deren Werten sie operieren:

`Int`, `Real`, `Char`,... vs. `IO Int`, `IO Real`, `IO Char`,...

mit `IO` vordefinierter Typkonstruktor (wie z.B. `[]`, `(,)`, `(→)`).

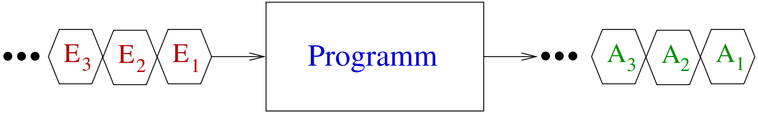
Mithilfe der Kompositionsoperationen `(>>=)` und `(>>)` und der davon abgeleiteten gleichwertigen `do`-Notation ('syntaktischer Zucker') läßt sich die Abfolge von

- Ein-/Ausgabeoperationen präzise festlegen.

Strombasierte Ein-/Ausgabebehandlung (1)

Frühe Haskell-Versionen haben eine strombasierte Behandlung von Ein-/Ausgabe vorgesehen:

- Programme werden dabei als Funktionen auf Strömen angesehen: EA_Prog :: String $\rightarrow$ String



Peter Pepper. *Funktionale Programmierung.* Springer–Verlag, 2003, S. 271.

...mit Ein-/Ausgabeströmen für Terminals, Dateisysteme, Drucker, etc.

Strombasierte Ein-/Ausgabebehandlung (2)

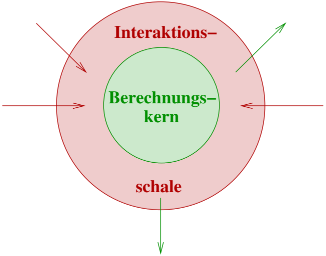
...Vor- und Nachteile für Sprachen mit:

- sofortiger (engl. eager) Auswertung:
  - ein 'echtes' Strommodell fehlt (die Eingabe muss zum Programmstart vollständig vorliegen und konsumiert werden und deshalb endlich sein); Ein-/Ausgabe ist deshalb auf stapelartige (engl. batch-like) Verarbeitung beschränkt.
- verzögerter (engl. lazy) Auswertung:
  - Interaktion ist möglich; verzögerte Auswertung stellt sicher, dass Ein-/Ausgaben in 'richtiger' Abfolge erfolgen.
  - Aber: Ursächlicher und zeitlicher Zusammenhang zwischen Ein-/Ausgaben erscheint oft 'obskur'; besondere Synchronizationen sind nötig, dies zu beheben.
  - Insgesamt: Strombasierte Ein-/Ausgabe kommt an ihre Grenzen beim Übergang zu graphischen Benutzerschnittstellen und wahlfreiem Zugriff auf Dateien.

Haskells heutige Lösung

...der konzeptuellen Trennung eines Haskell-Programms in

- einen rein funktionalen Berechnungskern
- eine Dialog- und Interaktionsschale



Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell.* Pearson, 2004, S. 89.

...wahrt das funktionale Paradigma und ist frei von den Problemen strombasierter Ein-/Ausgabebehandlung.

Ausblick

...IO ist 1-stelliger Typkonstruktor und vordefinierte Instanz der Typ(konstruktor)klasse Monad:

```
class Monad m where
 (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
 (>>)   :: m a -> m b -> m b
 return :: a -> m a
 fail   :: String -> m a
 m >> k = m >>= \_ -> k      -- Protoimpl. von (>>)
 fail   = error              -- Protoimpl. von fail
```

Mit IO für m erhalten wir für die Typsignaturen der Klassenfkt.:

```
 (>>=)  :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b
 (>>)   :: IO a -> IO b -> IO b
 return :: a -> IO a
 fail   :: a -> IO a      -- fail bislang unbenutzt
                          -- von uns.
```

Ausblick (fgs.)

Die Eigenschaften bzw. Anforderungen von Ein-/Ausgabe an funktionale Programmierung und ihre monadische Behandlung in Haskell sind nicht E/A-spezifisch, sondern ein Beispiel von vielen, darunter:

- Seiteneffektbehaftete Programmierung
- Nichtdeterminismus
- Fehlerbehandlung
- Programmierung mit großen Datenstrukturen
- ...

Mehr dazu: LVA 185.A05 Fortgeschritte funktionale Programmierung, jeweils im Sommersemester eines Studienjahrs.

Kapitel 15.7

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 15 (1)

- Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 10.1, The IO monad)
- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 17.5, Ein- und Ausgaben)
- Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 7, Eingabe und Ausgabe)
- Ernst-Erich Doberkat. *Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte*. Oldenbourg Verlag, 2012. (Kapitel 5, Ein-/Ausgabe; Kapitel 5.1, IO-Aktionen)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 15 (2)

- Antonie J. T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 7.5, Input/Output in Functional Programming)
- Andrew J. Gordon. *Functional Programming and Input/Output*. British Computer Society Distinguished Dissertations in Computer Science. Cambridge University Press, 1994.
- Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 16, Communicating with the Outside World)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 15 (3)

- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 10, Interactive programming)
- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 8, Input and output; Kapitel 9, More input and more output)
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 21, Ein-/Ausgabe: Konzeptuelle Sicht; Kapitel 22, Ein-/Ausgabe: Die Programmierung)
- Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung: Sprachdesign und Programmiertechnik*. Springer-V., 2006. (Kapitel 18, Objekte und Ein-/Ausgabe)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 15 (4)

- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 7, I/O; Kapitel 9, I/O Case Study: A Library for Searching the Filesystem)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 18, Programming with actions)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 8, Playing the game: I/O in Haskell; Kapitel 18, Programming with monads)
- Philip Wadler. *Comprehending Monads*. Mathematical Structures in Computer Science 2:461-493, 1992.

Ein Mensch würde nie dazu kommen,
etwas zu tun, wenn er stets warten würde,
bis er es so gut kann, dass niemand mehr
einen Fehler entdecken könnte.

John Henry Newman (1801-1890)
engl. Kardinal

Kapitel 16

Fehlerbehandlung

Kapitel 16.1

Überblick, Orientierung

Typische Fehlersituationen und Sonderfälle

Typische Fehlersituationen:

- Division durch 0.
- Zugriff auf das erste Element einer leeren Liste, `head []`.
- ...

Typische Sonderfälle:

- Auseinanderfallen von intendiertem und implementiertem Definitionsbereich einer Funktion, z.B.
  - $! : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$: Intendierter Definitionsbereich ist $\mathbb{N}$.
  - `fac :: Integer -> Integer`: Implementierter Definitionsbereich ist $\mathbb{Z}$ (abgesehen von Ressourcenbeschränkungen der Maschine).
- Umgang mit Argumentwerten außerhalb des intendierten Definitionsbereichs.
- ...

Jeder Fehler erscheint unheimlich dumm,
wenn andre ihn begehen.

Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799)
dt. Physiker und Naturforscher

Fehlersituationen und Sonderfälle

...bislang von uns naiv behandelt:

Typische Formulierungen aus den Aufgabenstellungen:

...liefert die Funktion den vorher beschriebenen Wert als Resultat; anderenfalls...

- *ist das Ergebnis*
  - *die Zeichenreihe* `"Ungültige Eingabe"`.
  - *die leere Liste* `[]`.
  - *der Wert* `0`.
  - ...
- *endet die Berechnung mit dem Aufruf* `error "Ungültige Eingabe"`.
- ...

Kleine Fehler in einem großen Werk sind die Brosamen, die man dem Neid hinwirft.

Claude Adrien Helvétius (1715-1771)
franz. Philosoph

In diesem Kapitel

...beschreiben wir drei Möglichkeiten eines sukzessive systematisch(er)en Umgangs mit unerwarteten Programmsituationen und Fehlern:

- Panikmodus (Kap. 16.2)
- Auffangwerte (engl. default values) (Kap. 16.3)
  - Funktionsspezifisch
  - Aufrufspezifisch
- Fehlertypen, Fehlerfunktionen (Kap. 16.4)

Fremde Fehler haben wir vor Augen,
unsere liegen uns im Rücken.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller

Kapitel 16.2

Panikmodus

Panikmodus

Ziel:

- Fehler und Fehlerursache melden, Berechnung stoppen.

Hilfsmittel:

- Die polymorphe Funktion `error :: String -> a`.

Wirkung:

Der Aufruf

- `error "Funktion f: Ungültige Eingabe."`

liefert die Meldung

- `Programmfehler: Funktion f: Ungültige Eingabe.`

und stoppt danach die Programmauswertung unwiderruflich.

Anwendungsbeispiel

Beispiel:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
 | n == 0    = 1
 | n > 0     = n * fac (n-1)
 | otherwise = error "Ungültige Eingabe."

fac 5    ->> 120
fac 0    ->> 1
fac (-5) ->> Programmfehler: Ungültige Eingabe.
```

Beurteilung des Panikmodus

Positiv:

- Schnell und einfach umzusetzen.

Negativ:

- Die Berechnung stoppt unwiderruflich.
- Jegliche Information über den Programmlauf ist verloren, auch sinnvolle.

Kapitel 16.3

Auffangwerte

Auffangwerte

Ziel:

- Panikmodus vermeiden; Programmlauf nicht zur Gänze abbrechen, sondern Berechnung möglichst sinnvoll fortführen.

Hilfsmittel: Verwendung von

- funktionsspezifischen (Variante 1)
- aufrufspezifischen (Variante 2)

Auffangwerten (engl. default values) im Fehlerfall.

Variante 1: Funktionsspezifischer Auffangwert

Auffangwertvariante 1:

- Im Fehlerfall wird ein funktionsspezifischer Wert als Resultat geliefert.

Beispiel:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
 | n == 0    = 1
 | n > 0     = n * fac (n-1)
 | otherwise = -1
```

Analyse des Beispiels

Im Beispiel der Funktion `fac` gilt:

- Negative Werte treten nie als reguläres Resultat einer Berechnung auf.
- Der funktionsspezifische Auffangwert -1 erlaubt deshalb, negative Eingaben als fehlerhaft zu erkennen und zu melden, ohne den Programmlauf unwiderruflich abzubrechen.
- Auch `n` selbst käme in diesem Beispiel sinnvoll als Auffangwert in Frage; die aufrufspezifische Rückmeldung beinhaltete so die ungültige Eingabe selbst, begünstigte dadurch die Fehlersuche und wäre daher sogar aussagekräftiger.

Für beide Auffangwertwahlen gilt:

- Die Fehlersituation ist für den Programmierer transparent.

Beurteilung der Auffangwertvariante 1

Positiv

- Panikmodus vermieden, Programmlauf nicht abgebrochen.

Negativ

- Oft gibt es einen zwar naheliegenden und plausiblen funktionsspezifischen Auffangwert; jedoch kann dieser das Eintreten der Fehlersituation verschleiern und intransparent machen, wenn der Auffangwert auch als Resultat einer regulären Berechnung auftreten kann.
- Oft fehlt ein naheliegender und plausibler Wert als Auffangwert; die Wahl eines Auffangwerts ist in diesen Fällen willkürlich und unintuitiv.
- Oft fehlt ein funktionsspezifischer Auffangwert gänzlich; Auffangwertvariante 1 ist in diesen Fällen nicht anwendbar.

...dazu zwei Beispiele.

Auffangwert vorhanden, aber verschleiernd

Beispiel:

```
rest :: [a] -> [a]
rest (_:xs) = xs
rest []     = []
```

Die Verwendung von [] als funktionsspezifischem Auffangwert

- liegt nahe und ist plausibel.

Allerdings:

- Das Auftreten der Fehlersituation wird verschleiert und bleibt für den Programmierer intransparent, da [] auch als reguläres Resultat einer Berechnung auftreten kann:

```
rest [42] ->> [] -- [] als reguläres Resultat:
                 -- Keine Fehlersituation!
rest []   ->> [] -- [] als irreguläres Resultat:
                 -- Fehlersituation eingetreten!
```

Kein (naheliegender) Auffangwert vorhanden

Beispiel:

```
head :: [a] -> a
head (u:_) = u
head []    = ???
```

Ohne Kenntnis der Instanz von a ist

- ein a-Wert überhaupt nicht angebbar: Auffangwert fehlt völlig.

Auch mit Kenntnis der Instanz von a, z.B., `head :: [Int] -> Int`, bietet sich

- kein `Int`-Wert als Auffangwert an: Naheliegender, plausibler Auffangwert fehlt.

...deshalb Übergang zu Auffangwertvariante 2 mit aufrufspezifischen Auffangwerten.

Variante 2: Aufrufspezifische Auffangwerte (1)

Auffangwertvariante 2:

- Im Fehlerfall wird ein aufrufspezifischer Auffangwert als Resultat geliefert. Dazu wird die Signatur erweitert und der jeweils gewünschte Auffangwert als Argument mitgeführt.

Beispiel: Ersetze `head` durch `head'` mit Typisierung

```
head' :: a -> [a] -> a
head' _ (u:_) = u
head' x []    = x
```

...und aufrufspezifischem Auffangargument `x`.

Variante 2: Aufrufspezifische Auffangwerte (2)

Generelle Vorgehensweise:

- Ergänze die fehlerbehandlungsfreie Implementierung einer (hier einstellig angenommenen) Funktion `f`:

  ```
  f :: a -> b
  f u = ...
  ```

  um eine fehlerbehandelnde Variante `f'` dieser Funktion:

  ```
  f' :: b -> a -> b
  f' x u
    | fehlerFall = x
    | otherwise  = f u
  ```

  wobei `fehlerFall` die Fehlersituation charakterisiert.

Bemerkung: Im Beispiel der Funktion `head'` konnte die Abstützung auf `head` gemäß der generellen Vorgehensweise umgangen werden.

Beurteilung der Auffangwertvariante 2 (1)

Positiv:

- Panikmodus vermieden, Programmlauf nicht abgebrochen.
- Generalität, stets anwendbar.
- Flexibilität, aufrufspezifische Auffangwerte ermöglichen variierende Fehlerwerte und Fehlerbehandlung.

Beurteilung der Auffangwertvariante 2 (2)

Negativ:

- Transparente Fehlerbehandlung ist nicht gewährleistet, wenn aufrufspezifische Auffangwerte auch reguläres Resultat einer Berechnung sein können, z.B.:

```
head 'F' "Fehler" ->> 'F' -- 'F' als reguläres Ergebnis
head 'F' ""       ->> 'F' -- 'F' als irreguläres Ergebnis
```

- In diesen Fällen Gefahr ausbleibender Fehlerwahrnehmung mit (möglicherweise fatalen) Folgen durch
  - Vortäuschen eines regulären und korrekten Berechnungsablaufs und eines regulären und korrekten Ergebnisses!

    (Typischer Fall eines "sich ein 'x' für ein 'u' vormachen zu lassen!")

Der schlimmste aller Fehler ist,
sich keines solchen bewusst zu sein.

Thomas Carlyle (1795-1881)
schott. Essayist und Historiker

Kapitel 16.4

Fehlertypen, Fehlerfunktionen

Erkennen, melden, behandeln von Fehlern (1)

Ziel:

- Systematisches Erkennen, Melden und Behandeln von Fehlersituationen.

Hilfsmittel:

- Dezidierte Fehlertypen, Fehlerwerte und Fehlerfunktionen statt schlichter Auffangwerte.

Erkennen, melden, behandeln von Fehlern (2)

Zentral:

Meldbarkeit von Fehlern:

- Der (Fehler-) Datentyp

```
data Maybe a = Just a
             | Nothing
             deriving (Eq, Ord, Read, Show)
```

...die Werte des Typs `a` in der Form `Just a` mit dem Zusatzwert `Nothing` als explizitem Fehlerwert.

Erkennen, weiterreichen, fangen und behandeln von Fehlern:

- Die Funktionen
  - `map_Maybe`: Erkennen und weiterreichen von Fehlern.
  - `maybe`: Fangen und behandeln von Fehlern.

Beachte: `map_Maybe` ist verschieden von der im Standard-Präludium definierten namensähnlichen Funktion `mapMaybe` mit Signatur: `mapMaybe :: (a -> Maybe b) -> [a] -> [b]`.

Erkennen und melden von Fehlern (1)

Generelle Vorgehensweise:

- Ergänze die fehlerbehandlungsfreie Implementierung einer (hier einstellig angenommenen) Funktion `f`:

  ```
  f :: a -> b
  f u = ...
  ```

  um die fehlererkennende und -meldende Variante `f'`:

  ```
  f' :: a -> Maybe b
  f' u
    | fehlerFall = Nothing
    | otherwise  = Just (f u)
  ```

  wobei `fehlerFall` die Fehlersituation charakterisiert.

Erkennen und melden von Fehlern (2)

Anwendungsbeispiel:

Ergänze die (vordefinierte) nichtfehlerbehandelnde Funktion `div` um die fehlererkennende und -meldende Variante `div'`:

```
div' :: Int -> Int -> Maybe Int
div' n m
  | m == 0    = Nothing
  | otherwise = Just (div n m)
```

Weiterreichen und behandeln von Fehlern

Anders als die Funktion `div`, deren Auswertung im Fehlerfall (d.h. Division durch 0)

- gemäß des Panikmodus

vom Laufzeitsystem abgebrochen wird, ist die Funktion `div'` in der Lage, einen Fehler ohne Auswertungsabbruch

- zu erkennen (`m == 0`)
- in Gestalt des Resultats zu melden (`Nothing`).

Offen bleibt:

- Was machen wir im Fehlerfall mit dem Resultat `Nothing`?

Dazu die Funktionen `map_Maybe` und `maybe`...

Die Funktionen map_Maybe und maybe (1)

...erlauben im Zusammenspiel das Erkennen, Weiterreichen, Fangen u. schließliche Behandeln von Fehlern zu organisieren:

Die Funktion map_Maybe:

```
map_Maybe :: (a -> b) -> Maybe a -> Maybe b
map_Maybe f Nothing  = Nothing
map_Maybe f (Just u) = Just (f u)
```

Curryfizierte und uncurryfizierte Sicht auf map_Maybe:

- Curryfiziert: map_Maybe bildet eine (nicht fehlerbehandelnde) Funktion vom Typ (a -> b) auf eine Funktion vom Typ (Maybe a -> Maybe b) ab (entspricht einem 'Typ-Lifting').
- Uncurryfiziert: map_Maybe bildet einen (Maybe a)-Wert auf einen (Maybe b)-Wert ab mithilfe einer (nicht fehlerbehandelnden) Funktion vom Typ (a -> b).

Die Funktionen map_Maybe und maybe (2)

Die Funktion maybe:

```
maybe :: b -> (a -> b) -> Maybe a -> b
maybe x f Nothing  = x
maybe x f (Just u) = f u
```

Curryfizierte und uncurryfizierte Sicht auf map_Maybe:

- Curryfiziert: Gegeben einen b-Wert bildet maybe eine Funktion vom Typ (a -> b) auf eine Funktion vom Typ (Maybe a -> b) ab (entspricht einem 'Typ-Lifting').
- Uncurryfiziert: maybe bildet einen (Maybe a)-Wert auf einen b-Wert ab mithilfe einer (nicht fehlerbehandelnden) Funktion vom Typ (a -> b) und eines aufrufspezifischen Fehlerarguments vom Typ b (entspricht der Auffangwertvariante 2).

Die Funktionen map_Maybe und maybe (3)

...erlauben Fehlerwerte

- weiterzureichen, die Fähigkeit von map_Maybe:

```
map_Maybe f Nothing = Nothing  -- Der Fehlerwert
                               -- Nothing wird
                               -- von map_Maybe
                               -- durchgereicht.
```

- zu fangen und (im Sinn von Auffangwertvariante 2) zu behandeln, die Fähigkeit von maybe:

```
maybe x f Nothing = x  -- Der aufrufspezifische
                       -- Auffangwert x wird als
                       -- Resultat geliefert
                       -- (Auffangwertvariante 2).
```

Anwendungsbeispiel

Zusammenspiel der Funktionen `map_Maybe` und `maybe`:

- Fehlerfall: Der Fehler wird von `map_Maybe` erkannt und später von `maybe` gefangen und behandelt.

```
maybe 9999 (+1) (map_Maybe (*3) (div' 9 0))
->> maybe 9999 (+1) (map_Maybe (*3) Nothing)
->> maybe 9999 (+1) Nothing
->> 9999
```

- Fehlerfreier Fall: Alles läuft 'normal' ab.

```
maybe 9999 (+15) (map_Maybe (*3) (div' 9 1))
->> maybe 9999 (+15) (map_Maybe (*3) (Just 9))
->> maybe 9999 (+15) (Just 27)
->> (+15) 27
->> 27 + 15
->> 42
```

Bewertung d. Fehlerbehandlung mittels `Maybe`

Positiv:

- Fehler können erkannt, gemeldet, weitergereicht und schließlich gefangen und (im Sinn von Auffangwertvariante 2) behandelt werden.

Negativ:

- Geänderte Funktionalität: `Maybe b` statt `b`.

Pragmatischer Zusatzvorteil:

- Systementwicklung ist ohne explizite Fehlerbehandlung möglich (z.B. mit nichtfehlerbehandelnden Funktionen wie `div`).
- Fehlerbehandlung kann nach Abschluss durch Ergänzung der fehlerbehandelnden Funktionsvarianten (wie z.B. der Funktion `div'`) zusammen mit den Funktionen `map_Maybe` und `maybe` realisiert werden.

Die schlimmsten Fehler werden gemacht
in der Absicht, einen begangenen Fehler
wieder gut zu machen.

Jean Paul (1763-1825)
dt. Schriftsteller

Kapitel 16.5

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 16

- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 19, Error Handling)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 14.4, Case study: program errors)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 14.4, Modelling program errors)

Den größten Fehler, den man im Leben machen kann,
ist, immer Angst zu haben, einen Fehler zu machen.

Dietrich Bonhoeffer (1906-1945)
dt. luther. Theologe, NS-Widerständler

Ein Genie macht keine Fehler. Seine Irrtümer sind Tore zu neuen Entdeckungen.

James Joyce (1882-1941)
irisch. Schriftsteller

Irrtümer haben ihren Wert;
jedoch nur hie und da.
Nicht jeder, der nach Indien fährt,
entdeckt Amerika.

Erich Kästner (1899-1974)
dt. Schriftsteller

Kapitel 17

Module

Kapitel 17.1

Überblick, Orientierung

Modularisierung

...wichtiges programmiersprachliches Hilfsmittel zur Dekomposition und Strukturierung von Programm(system)en für die Unterstützung der

- Programmierung im Großen.

In diesem Kapitel

- Ziele und Kennzeichen guter Modularisierung (Kap. 17.2)
- Haskells Modulkonzept (Kap. 17.3)
- Spezielle Anwendung: Abstrakte Datentypen (Kap. 17.4)

Ich denke gern in großen Dimensionen.
Wenn man schon denkt,
kann man es ja auch gleich ordentlich tun.

Donald Trump (* 1946)
amerik. Unternehmer
45. Präsident der USA

Kapitel 17.2

Ziele und Richtlinien guter Modularisierung

Modularisierung

Intuitiv:

- Zerlegung großer Programm(system)e in kleinere Einheiten, genannt Module.

Ziel:

- Sinnvolle, über- und durchschaubare Organisation des Gesamtsystems.

Modularisierungsgewinne

Vorteile:

- Arbeitsphysiologisch: Unterstützung arbeitsteiliger Programmierung.
- Softwaretechnisch: Unterstützung der Wiederbenutzung von Programmen und Programmteilen.
- Implementierungstechnisch: Unterstützung getrennter Übersetzung (engl. separate compilation).

Insgesamt:

- Höhere Effizienz der Softwareerstellung bei gleichzeitiger Qualitätssteigerung (Verlässlichkeit) und Kostenreduktion.

Modularisierungsanforderungen

...zur Erreichung vorgenannter Ziele.

Unterstützung des Geheimnisprinzips durch Trennung von

- Schnittstelle (Import/Export)
  - Wie interagiert das Modul mit seiner Umgebung?
  - Welche Funktionalität stellt es zur Verfügung (Export)?
  - Welche Funktionalität benötigt es (Import)?
- Implementierung (Daten/Funktionen)
  - Wie sind die Datenstrukturen implementiert?
  - Wie ist die Funktionalität auf den Datenstrukturen realisiert?

Regeln 'guter' Modularisierung

Lokale Sicht: Jedes Modul soll

- einen klar definierten, unabhängig von anderen Modulen verständlichen Zweck besitzen.
- nur einer Abstraktion entsprechen.
- einfach zu testen sein.

Globale Sicht: In modular entworfenen Programmen sollen

- Auswirkungen von Designentscheidungen (z.B. Einfachheit vs. Effizienz einer Implementierung)
- Abhängigkeiten von anderen Programmen oder Hardware

...auf (möglichst) wenige Module beschränkt sein.

Modularisierungseigenschaften

...zentral:

- Intramodular: Kohäsion
  - beschäftigt sich mit Art und Typ der in einem Modul zusammengefassten Funktionen.
- Intermodular: Koppelung
  - beschäftigt sich mit dem Import-/Export- und Datenaustauschverhalten von Modulen.

Intramodular: Kohäsion

...anzustreben:

- Funktionale Kohäsion (Funktionen gleicher Funktionalität sind in einem Modul zusammengefasst, z.B. Sortierverfahren, Ein-/Ausgabefunktionen, etc.).
- Datenkohäsion (Auf gleichen Datenstrukturen arbeitende Funktionen sind in einem Modul zusammengefasst, z.B. Funktionen auf trigonometrischen Daten, auf Wasserstandsdaten, etc.).

...zu vermeiden:

- Logische Kohäsion (Funktionen vergleichbarer Funktionalität mit unterschiedlicher Implementierung sind in einem Modul zusammengefasst, z.B. verschiedene Benutzerschnittstellen eines Systems).
- Zufällige Kohäsion (Funktionen sind sachlich unbegründet in einem Modul zusammengefasst, zufällig eben).

Intermodular: Koppelung

...anzustreben:

- Schwache funktionale Koppelung, d.h. wenige, wohlbegründete funktionale Beziehungen und Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Modulen.
- Feste Datenkoppelung, d.h. durch Wertübergabe (Funktionen unterschiedlicher Module kommunizieren nur durch explizite Übergabe von Werten, d.h. Ergebnisse einer Funktion werden Argument einer anderen Funktion.).

..zu vermeiden:

- Starke funktionale Koppelung.
- Lose Datenkoppelung, d.h. durch andere Mechanismen als Wertübergabe, z.B. Kommunikation über Dateien.

Bemerkung: Datenkoppelung durch Wertübergabe ist in funktionalen Sprachen *per se* als Grundform gegeben.

Ziel und Kennzeichen ‘guter’ Modularisierung

Starke funktionale und Datenkohäsion

- enger inhaltlicher Zusammenhang der Definitionen eines Moduls.

Schwache funktionale und lose Datenkoppelung

- wenige Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Modulen, insbesondere keine direkten oder indirekten zirkulären Abhängigkeiten.

Für eine weitergehende und vertiefende Diskussion siehe:

- Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. Einführung in die Programmierung mit Haskell, Pearson Studium, 2004, Kapitel 10.

Kapitel 17.3

Haskells Modulkonzept

Schematischer Aufbau eines Haskellmoduls

```
module M where             -- Moduldefinition
data D_1 ...    = ...      -- Datentypdefinitionen
...
data D_n ...    = ...
newtype N_1 ... = ...      -- Neue Typendefinitionen
...
newtype N_m ... = ...
type T_1 ...    = ...      -- Typsynonymdefinitionen
...
type T_p ...    = ...
class C_1 ...              -- Typklassendefinitionen
...
class C_q ...
f_1 :: ...                 -- Funktionsdefinitionen
f_1 ... = ...
...
f_r :: ...
f_r ... = ...
```

Haskells Modulkonzept

...unterstützt:

- Export
  - Selektiv/nicht selektiv
  - Händischer Reexport
  - Nicht unterstützt: Automatischer Reexport
- Import
  - Selektiv/nicht selektiv
  - Qualifiziert
  - Mit Umbenennung

von Datentypen, Typsynonymen, Typklassen und Funktionen.

Kapitel 17.3.1

Import

Import: Nicht selektiv

Allgemeines Muster:

```
module M1 where
...

module M2 where
import M1 -- Alle im Modul M1 (global sichtbaren) Be-
          -- zeichner, Definitionen werden importiert
          -- und können im Modul M2 benutzt werden.
```

Import: Selektiv

Allgemeines Muster, zwei Varianten:

```
module M1 where...

module M2 where
import M1 (D_1 (..), D_2, T_1, C_1 (..), C_2, f_5)
 -- Ausschließlich D_1 (einschließlich von M1 expor-
 -- tierter Konstruktoren), D_2 (ohne Konstruktoren),
 -- T_1, C_1 (..) (einschließlich von M1 exportierter
 -- Funktionen), C_2 (ohne Funktionen), f_5 werden aus
 -- M1 importiert und können in M2 benutzt werden,
 -- d.h., importiere nur, was explizit genannt ist!

module M3 where
import M1 hiding (D_1, T_2, f_1)
 -- Alle (sichtbaren) Bezeichner, Definitionen aus M1
 -- mit Ausnahme der explizit genannten werden impor-
 -- tiert und können in M3 benutzt werden, d.h., impor-
 -- tiere alles, was nicht explizit ausgeschlossen wird!
```

Anwendungsbeispiel

...'verstecken' der im Standard-Präludium vordefinierten Funktionen

- `reverse`, `tail` und `zip`

durch Einfügen von

- `import Prelude hiding (reverse,tail,zip)`

am Anfang des Haskell-Skripts im Anschluss an die (so vorhandene) Modul-Anweisung (siehe Kapitel 1.3.1).

Kapitel 17.3.2

Export

Export: Nicht selektiv

Allgemeines Muster:

```
module M1 where       -- Alle im Modul M1 eingeführten
data D_1 ... = ...    -- global sichtbaren Bezeichner,
...                   -- Definitionen werden exportiert
data D_n ... = ...    -- und können von anderen Modulen
newtype N_1 ... = ... -- importiert werden.
...
newtyp N_m ... = ...
type T_1 = ...
...
type T_p = ...
class C_1 ...
...
class C_q ...         -- Beachte: module M1 where...
f_1 :: ...            -- ist bedeutungsgleich zu
f_1 ... = ...         -- module M1 (module M1) where...
...
f_r :: ...
f_r ... = ...
```

Export: Selektiv

Allgemeines Muster:

```
module M1 (D_1 (..), D_2, D_3 (Dc_1,...,Dc_k), C_1 (..),
           C_2, C_3 (cf_1,...,cf_l), T_1, f_2, f_5) where
data D_1 ... = ...
...                  -- Nur die explizit genannten Bezeich-
data D_n ... = ...   -- ner, Definitionen werden aus M1 ex-
newtype N_1 ... = ...  -- portiert und können von anderen Mo-
...                  -- dulen importiert werden. Dabei gilt:
newtype N_m ... = ...  -- D_1 wird einschließlich seiner Kon-
type T_1 ... = ...   -- struktoren exportiert; D_2 ohne; D_3
...                  -- mit den explizit genannten. Analog
type T_p ... = ...   -- für die Klassen C_i.
class C_1 ...
...
class C_q ...        -- Selektiver Export unterstützt
f_1 :: ...           -- das Geheimnisprinzip!
f_1 ... = ....
...
f_r :: ...
f_r ... = ...
```

Kapitel 17.3.3

Reexport

Reexport: Nicht automatisch, nur händisch

Veranschaulichung:

```
module M1 where...

module M2 where
import M1 -- Nicht selektiver Import aus M1, d.h. alle
...       -- in M1 (global sichtbaren) Bezeichner, De-
f_2M2     -- finitionen werden von M2 importiert und
...       -- können in M2 benutzt werden.

module M3 where
import M2 -- Nicht selektiver Import aus M2, d.h. alle
...       -- in M2 (global sichtbaren) Bezeichner, De-
          -- finitionen werden von M3 importiert und
          -- können in M3 benutzt werden, nicht jedoch
          -- die von M2 aus M1 importierten Namen,
          -- d.h. kein automatischer Reexport!
```

Reexport: Händisch

Abhilfe: Händischer Reexport, zwei Varianten:

```
module M2 (module M1,f_2M2) where -- Nicht selektiver Reex-
import M1                         -- port von M1 aus M2:
...                               -- M2 reexportiert jeden
f_2M2                             -- aus M1 importierten
                                  -- Namen, sowie das M2-
                                  -- lokale f_2M_2 aus M2.
...

module M2 (D_1 (..), D_2, D_3 (Dc_1,Dc_2), C_1 (..), C_2,
       C_3 (cf_1,cf_2,cf_3), f_1,f_2M2) where
import M1  -- Selektiver Reexport von M1 aus M2: M2 reex-
...        -- portiert von den aus M1 importierten Namen
f_2M2      -- ausschließlich D_1 (einschließlich Konstruk-
...        -- toren), D_2 (ohne Konstruktoren), D_3 (mit
           -- angegebenen Konstruktoren); analog für die
           -- Klassen C_1, C_2 und C_3, sowie f_1 und das
           -- M2-lokale f_2M_2.
```

Kapitel 17.3.4

Namenskonflikte, Umbenennungen, Konventionen

Namenskonflikte, Umbenennungen

Namenskonflikte

- können durch qualifizierten Import aufgelöst werden:

  ```
  import qualified M1
  ```

  Verwendung: `M1.f` zur Bezeichnung der aus `M1` importierten Funktion `f`; `f` zur Bezeichnung der im importierenden Modul lokal definierten Funktion `f`.

Umbenennen importierter Module und Bezeichner

- durch Einführen lokaler Namen im importierenden Modul
  - für Modulnamen:

    ```
    import qualified M1 as MyLocalNameForM1
    ```

    ...`MyLocalNameForM1` wird im importierenden Modul anstelle von `M1` verwendet.
  - für ausgewählte Bezeichner:

    ```
    import M1 (f1,f2)
      renaming (f1 to fac, f2 to fib)
    ```

Konventionen, gute Praxis

Konventionen

- Pro Datei ein Modul.
- Modul- und Dateiname stimmen überein (abgesehen von der Endung `.hs` bzw. `.lhs` im Dateinamen).
- Alle Deklarationen beginnen in derselben Spalte wie das Schlüsselwort `module`.

Gute Praxis

- Module unterstützen eine (!) klar abgegrenzte Aufgabenstellung (vollständig) und sind in diesem Sinne in sich abgeschlossen; ansonsten Teilen (Teilungskriterium).
- Module sind 'kurz' (d.h. 'so kurz wie möglich, so lang wie nötig'; Faustregel: zwei bis drei Bildschirmseiten).

Haskell-Programme

...sind Modulsysteme.

Soll ein Haskell-Programm übersetzt (statt interpretiert) werden, muss dessen Modulsystem ein Hauptmodul namens

- `Main`

mit einer Funktion namens

- `main :: IO` τ für einen Typ τ

enthalten, mit deren Auswertung die Ausführung des übersetzten Programms beginnt (wobei das Ergebnis vom Typ τ unbeachtet bleibt).

Bemerkung: Die `module`-Deklaration darf in einem Haskell-Skript fehlen; implizit wird in diesem Fall die `module`-Deklaration

```
module Main (main) where
```

ergänzt.

Kapitel 17.4

Abstrakte Datentypen als Modul-Anwendung

Abstrakte Datentypen

...als spezielle Anwendung des Modulkonzepts in Haskell.

Mit abstrakten Datentypen (ADTs) verfolgtes Ziel:

- Kapselung von Daten, Realisierung des Geheimnisprinzips auf Datenebene (engl. information hiding).

Implementierungstechnischer Schlüssel:

- Haskells Modulkonzept, speziell der selektive Export, bei dem Konstruktoren algebraischer Datentypen verborgen bleiben.

Grundlegende Idee von ADT-Definitionen (1)

...implizite Festlegung eines Datentyps in zwei Teilen:

- A) Schnittstellenfestlegung: Angabe der auf den Werten des Datentyps zur Verfügung stehenden Operationen in Form ihrer syntaktischen Signaturen.
- B) Verhaltensfestlegung: Festlegung der Bedeutung der Operationen durch Angabe ihres Zusammenspiels in Form von Axiomen (oder sog. Gesetzen), die von jeder (!) Implementierung dieser Operationen einzuhalten sind.

Beachte: Die Darstellung der Werte des abstrakten Datentyps wird ausdrücklich nicht festgelegt; sie bleibt verborgen und deshalb für die Implementierung als Freiheitsgrad offen!

Grundlegende Idee von ADT-Definitionen (2)

Herausforderung:

- Die Gesetze so zu wählen, dass das Verhalten der Operationen präzise und eindeutig festgelegt ist; also so, dass weder eine Überspezifikation (keine widerspruchsfreie Implementierung möglich) noch eine Unterspezifikation (mehrere in sich widerspruchsfreie, aber sich widersprechende Implementierungen möglich) vorliegt.

Pragmatischer Gewinn:

- Die Trennung von Schnittstellen- und Verhaltensfestlegung erlaubt die Implementierung zu verstecken (Geheimnisprinzip!) und nach Zweckmäßigkeit und Anforderungen (z.B. Einfachheit, Performanz) auszuwählen und auszutauschen.

Beispiel: FIFO-Warteschlange als ADT

...in Pseudo-Code (kein Haskell):

```
A: Festlegung der Schnittstelle durch Signaturangabe:
    NEW:                           -> Queue
    ENQUEUE:  Queue × Item -> Queue
    FRONT:    Queue               -> Item
    DEQUEUE:  Queue               -> Queue
    IS_EMPTY: Queue               -> Boolean

B: Festlegung der einzuhaltenden Axiome/Gesetze:
  b1) IS_EMPTY(NEW)           = true
  b2) IS_EMPTY(ENQUEUE(q,i)) = false
  b3) FRONT(NEW)              = error
  b4) FRONT(ENQUEUE(q,i))     = if IS_EMPTY(q) then i
                                 else FRONT(q)
  b5) DEQUEUE(NEW)            = error
  b6) DEQUEUE(ENQUEUE(q,i)) =
        if IS_EMPTY(q) then NEW
                       else ENQUEUE(DEQUEUE(q),i)
```

FIFO-Warteschlange: Haskell-Realisierung (1)

```
module Queue
  {- Kommunikation von Teil A: Schnittstellenspezifikation -}
  (Queue,    -- Name des Datentyps (Geheimnisprinzip, kein
             -- Konstruktorexport!)
   new,      -- new :: Queue a
   enqueue,  -- enqueue :: Queue a -> a -> Queue a
   front,    -- front :: Queue a -> a
   dequeue,  -- dequeue :: Queue a -> Queue a
   is_empty, -- is_empty :: Queue a -> Bool

   {- Kommunikation von Teil B: Axiome/Gesetze
    b1) is_empty(new)           = True
    b2) is_empty(enqueue(q,i))  = False
    b3) front(new)              = error "Niemand wartet!"
    b4) front(enqueue(q,i))     = if is_empty(q) then i
                                  else front(q)
    b5) dequeue(new)            = error "Niemand wartet!"
    b6) dequeue(enqueue(q,i))   = if is_empty(q) then new
                                  else enqueue(dequeue(q),i) -}
  ) where...
```

FIFO-Warteschlange: Haskell-Realisierung (2)

```haskell
{- Impl. von Teil B: Als algebraischer Datentyp, B1 -}
data Queue a = Qu [a]

new :: Queue a
new = Qu []

enqueue :: Queue a -> a -> Queue a
enqueue (Qu xs) x = Qu (xs ++ [x])

front :: Queue a -> a
front q@(Qu xs)           -- Hier praktisch: Das als-Muster
 | not (is_empty q) = head xs
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

dequeue :: Queue a -> Queue a
dequeue q@(Qu xs)         -- Hier praktisch: Das als-Muster
 | not (is_empty q) = Qu (tail xs)
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

is_empty :: Queue a -> Bool
is_empty (Qu []) = True
is_empty _       = False
```

FIFO-Warteschlange: Haskell-Realisierung (3)

```haskell
{- Implementierung von Teil B: Als neuer Typ, B2 -}

newtype Queue a = Qu [a]

new :: Queue a
new = Qu []

enqueue :: Queue a -> a -> Queue a
enqueue (Qu xs) x = Qu (xs ++ [x])

front :: Queue a -> a
front q@(Qu xs)           -- Hier praktisch: Das als-Muster
 | not (is_empty q) = head xs
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

dequeue :: Queue a -> Queue a
dequeue q@(Qu xs)         -- Hier praktisch: Das als-Muster
 | not (is_empty q) = Qu (tail xs)
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

is_empty :: Queue a -> Bool
is_empty (Qu []) = True
is_empty _       = False
```

FIFO-Warteschlange: Haskell-Realisierung (4)

```
{- Implementierung von Teil B: Als Typsynonym, B3 -}

type Queue a = [a]

new :: Queue a
new = []

enqueue :: Queue a -> a -> Queue a
enqueue q x = q ++ [x]

front :: Queue a -> a
front q
 | not (is_empty q) = head q
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

dequeue :: Queue a -> Queue a
dequeue q
 | not (is_empty q) = tail q
 | otherwise        = error "Schlange leer; niemand wartet!"

is_empty :: Queue a -> Bool
is_empty q = (q == [])
```

Das als-Muster

...als nützliche Musterspielart (siehe Kapitel 6.1.5):

```
front q@(Qu xs)   -- Arg. als q oder als (Qu xs).
dequeue q@(Qu xs) -- Arg. als q oder als Qu xs).
```

Das als-Muster (`q@(Qu xs)`) bietet mittels:

- `q`: Zugriff auf das Argument als Ganzes.
- `(Qu xs)`: Zugriff auf Teile des strukturierten Arguments.

Abstrakte vs. algebraische Datentypen

Abstrakte Datentypen

- werden durch ihr Verhalten spezifiziert, d.h. durch die auf ihren Werten definierten Funktionen/Operationen und deren Zusammenspiel.
- die tatsächliche Darstellung der Werte des Datentyps wird zum Definitionszeitpunkt nicht angegeben u. bleibt offen.
- Dem Anwender eines abstrakten Datentyps wird die Darstellung der Werte und die Implementierung der Funktionen darauf nie bekanntgegeben: Geheimnisprinzip!

Konkrete Datentypen (in Haskell: Algebraische Datentypen)

- werden durch die exakte Angabe und Darstellung ihrer Werte spezifiziert, aus denen sie bestehen.
- auf ihnen gegebene Funktionen/Operationen werden zum Definitionszeitpunkt nicht angegeben und bleiben offen.

ADT-Vorteile

...das Geheimnisprinzip: Nur die Schnittstelle ist bekannt, die Implementierung bleibt verborgen.

Das gewährleistet folgende Vorteile der ADT-Verwendung:

- Schutz der Datenstruktur vor unkontrolliertem oder nicht beabsichtigtem/zugelassenem Zugriff.

  Beispiel: Ein eigendefinierter Leerheitstest wie:

  ```
  emptyQ == Qu []
  ```

  führte in `Queue` importierenden Modulen zu einem Laufzeitfehler, da die Implementierung und somit der Konstruktor `Qu` dort nicht sichtbar sind.
- Einfache Austauschbarkeit der zugrundeliegenden Implementierung.
- Unterstützung arbeitsteiliger Programmierung.

Zur ADT-Realisierung in Haskell

...ADTs sind keine erstrangigen Sprachelemente (engl. first class citizens) in Haskell:

- Haskell bietet kein dezidiertes Sprachkonstrukt zur Spezifikation von ADTs, das eine externe Offenlegung von Signaturen und Gesetzen bei intern bleibender Implementierung erlaubte.

ADTs können in Haskell unter Ausnutzung des

- Modulkonzepts realisiert werden.

Das erlaubt, die Implementierung

- intern und damit im Sinn des Geheimnisprinzips versteckt zu halten
- jedoch können die Funktionssignaturen und Gesetze dem ADT-Anwender nur umständlich und in unsicherer Weise in Form von Kommentaren kommuniziert werden.

Wegweisende Arbeiten

...zu abstrakten Datentypen:

- John V. Guttag. *Abstract Data Types and the Development of Data Structures*. Communications of the ACM 20(6):396-404, 1977.
- John V. Guttag, James Jay Horning. *The Algebra Specification of Abstract Data Types*. Acta Informatica 10(1):27-52, 1978.
- John V. Guttag, Ellis Horowitz, David R. Musser. *Abstract Data Types and Software Validation*. Communications of the ACM 21(12):1048-1064, 1978.

Kapitel 17.5

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 17 (1)

- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011. (Kapitel 8, Modularisierung und Schnittstellen)
- Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004. (Kapitel 10, Modularisierung und Programmdekomposition)
- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. (Kapitel 6, Modules)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 17 (2)

- John V. Guttag. *Abstract Data Types and the Development of Data Structures*. Communications of the ACM 20(6):396-404, 1977.
- John V. Guttag, James Jay Horning. *The Algebra Specification of Abstract Data Types*. Acta Informatica 10(1):27-52, 1978.
- John V. Guttag, Ellis Horowitz, David R. Musser. *Abstract Data Types and Software Validation*. Communications of the ACM 21(12):1048-1064, 1978.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 17 (3)

- David L. Parnas. *On the Criteria to be used on Decomposing Systems into Modules*. Communications of the ACM 15(12):1053-1058, 1972.
- David L. Parnas, Paul C. Clements, David M. Weiss. *The Modular Structure of Complex Systems*. IEEE Transactions on Software Engineering 11(3):259-266, 1985.
- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. (Kapitel 5, Writing a Library: Working with JSON Data – The Anatomy of a Haskell Module, Generating a Haskell Program and Importing Modules)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 17 (4)

- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 14, Datenstrukturen und Modularisierung)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Kapitel 15.1, Modules in Haskell; Kapitel 15.2, Modular design; Kapitel 16, Abstract data types)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 15.1, Modules in Haskell; Kapitel 15.2, Modular design; Kapitel 16, Abstract data types)

Kapitel 18

Programmierprinzipien

Kapitel 18.1

Überblick, Orientierung

Überblick, Orientierung

Funktionen höherer Ordnung (Kap. 18.2)

- ermöglichen algorithmisches Vorgehen zu verpacken.
  Illustrierendes Beispiel: Teile und Herrsche.

Späte Auswertung (engl. lazy evaluation) (Kap. 18.3)

- ermöglicht semantische Modularisierungsprinzipien: Generator/Selektor-, Generator/Filter-, Generator/Transformator-Prinzip und Kombinationen davon.
  Illustrierendes Beispiel: Programmieren mit Strömen (unendliche Listen (engl. streams, lazy lists)).

Reflektives Programmieren (Kap. 18.4)

- Stetes Hinterfragen und Anpassen des eigenen Vorgehens.

Kapitel 18.2

Teile und Herrsche

Teile und Herrsche

...die zugrundeliegende algorithmische Idee des 'Teile und Herrsche'-Prinzips:

- Ist ein Problem einfach genug, löse es sofort.
- Teile anderenfalls das Problem rekursiv in kleinere Teilprobleme, bis alle Teilprobleme einfach genug sind, sofort gelöst werden zu können.
- Berechne die Lösung des ursprünglichen Problems aus den Lösungen der Teilprobleme.

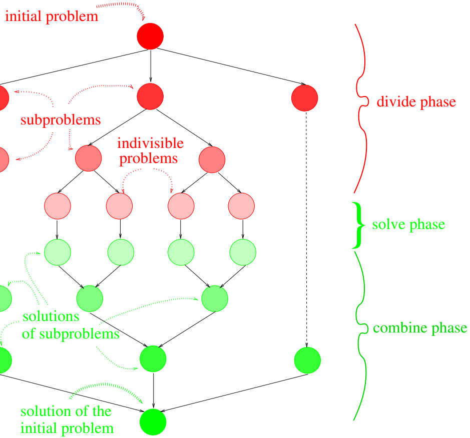
...eine typische von-oben-nach-unten-Vorgehensweise (engl. top-down)!

Divide et impera.
Teile und herrsche.

nach Ludwig XI von Frankreich (1423-1483)

Veranschaulichung

Die Phasenabfolge des 'Teile und Herrsche'-Prinzips:



Fethi Rabhi, Guy Lapalme.
Algorithms: A Functional Programming Approach.
Addison-Wesley, 1999, Seite 156.

Typische Anwendungsfelder

...und Anwendungen für Vorgehen mittels 'teile und herrsche':

- Sortierverfahren (Quicksort, Mergesort, etc.)
- Numerische Analyseverfahren
- Kryptographie
- Bildverarbeitung
- Binomialkoeffizientenberechnung
- ...

Vorbereitung der funktionalen Umsetzung

Gegeben:

- Ein Problem mit Probleminstanzen eines generischen Typs, beschrieben durch die Typvariable `pb`.

Gesucht:

- Eine Lösung aus einer Menge von Lösungsinstanzen eines generischen Typs, beschrieben durch die Typvariable `lsg`.

(Algorithmisches) Ziel:

Eine Funktion höherer Ordnung (oder Funktional) `teile_und_herrsche`, die geeignet parametrisiert für

- Probleminstanzen vom Typ `pb` gemäß des 'Teile und Herrsche'-Prinzips eine Lösungsinstanz vom Typ `lsg` berechnet.

Parameter

... des Funktionals `teile_und_herrsche`:

- `einfach_genug :: pb -> Bool`: ...liefert `True`, falls die Probleminstanz einfach genug ist, um sofort gelöst werden zu können.
- `loese :: pb -> lsg`: ...liefert die Lösungsinstanz einer unmittelbar lösbaren Probleminstanz.
- `teile :: pb -> [pb]`: ...teilt eine nicht unmittelbar lösbare Probleminstanz in eine Liste von Teilprobleminstanzen auf.
- `herrsche :: pb -> [lsg] -> lsg`: ...liefert angewendet auf eine Ausgangsprobleminstanz und eine Liste von Lösungen von Teilprobleminstanzen die Lösung der Ausgangsprobleminstanz.

Nützliche Typsynonyme

...auftretender Funktionstypen:

```
type Einfach_genug pb    = pb -> Bool
type Loese pb lsg        = pb -> lsg
type Teile pb            = pb -> [pb]
type Herrsche pb lsg     = pb -> [lsg] -> lsg
```

Das Funktional teile_und_herrsche

```
teile_und_herrsche :: (Einfach_genug pb) -> (Loese pb lsg)
     -> (Teile pb) -> (Herrsche pb lsg) -> pb -> lsg
teile_und_herrsche einfach_genug loese teile herrsche
                   pb_instanz
 = tuh pb_instanz
   where
    tuh p
     | einfach_genug p = loese p
     | otherwise       = herrsche p (map tuh (teile p))
```

$\underbrace{\texttt{(map tuh (teile p))}}_{\text{Löse rekursiv alle durch die Teilung entstehenden Probleme.}}$

Löse rekursiv alle
durch die Teilung
entstehenden Probleme.

Teile und Herrsche am Beispiel von Quicksort

```
quickSort :: Ord a => [a] -> [a]
quickSort liste
 = teile_und_herrsche einfach_genug loese teile
                      herrsche liste
 where
  einfach_genug ls          = length ls <= 1
  loese                     = id
  teile (l:ls)              = [[ x | x <- ls, x <= l],
                               [ x | x <- ls, x > l]]
  herrsche (l:_) [ls1,ls2] = ls1 ++ [l] ++ ls2
```

Warnung

...nicht jedes Problem, das dem 'teile und herrsche'-Vorgehen in natürlicher Weise zugänglich ist, ist auch (in naiver Weise) dafür geeignet.

Betrachte dazu folgendes Beispiel:

```
fib :: Integer -> Integer
fib n = teile_und_herrsche einfach_genug loese
                           teile herrsche n
   where
    einfach_genug n     = (n == 0) || (n == 1)
    loese               = id
    teile n             = [n-2,n-1]
    herrsche _ [m1,m2] = m1 + m2
```

...besitzt exponentielles Laufzeitverhalten!

Algorithmenmuster

Die Idee, ein generelles algorithmisches Vorgehen wie 'teile und herrsche' durch eine geeignete Funktion höherer Ordnung wiederverwendbar zu machen, lässt sich auch für andere algorithmische Verfahrensweisen umsetzen, darunter:

- Rücksetzsuche (engl. Backtracking Search)
- Prioritätsgesteuerte Suche
- Lokale Suche (engl. Greedy Search)
- Dynamische Programmierung

Wir sprechen hier auch von Algorithmenmustern (mehr dazu in der LVA 185.A05 'Fortgeschrittene funktionale Programmierung').

Kapitel 18.3

Stromprogrammierung

Ströme

...programmiersprachlicher Jargon für

- unendliche Listen (engl. streams, lazy lists).

Ströme ermöglichen im Zusammenspiel mit später Auswertung qualitativ neue

- semantikbasierte Modularisierungen
  - Generator/Selektor-Prinzip
  - Generator/Filter-Prinzip
  - Generator/Transformator-Prinzip

mit denen sich viele Probleme elegant, knapp und effizient lösen lassen.

Ströme am Bsp. des Siebs des Eratosthenes (1)

...zur Berechnung des Stroms der Primzahlen:

1. Schreibe alle natürlichen Zahlen ab 2 hintereinander auf.
2. Die kleinste nicht gestrichene Zahl in dieser Folge ist eine Primzahl. Streiche alle Vielfachen dieser Zahl.
3. Wiederhole Schritt 2 mit der kleinsten jeweils noch nicht gestrichenen Zahl.

```
Nach Schritt 1:
 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19...
Nach Schritt 2 für Zahl 2:
 2 3   5   7   9    11    13    15    17    19...
Nach Schritt 2 für Zahl 3:
 2 3   5   7        11    13          17    19...
usw.
```

Ströme am Bsp. des Siebs des Eratosthenes (2)

```
primes :: [Integer]
primes = sieve [2..]

sieve :: [Integer] -> [Integer]
sieve (x:xs) = x : sieve [y | y <- xs, mod y x > 0]
```

Die (0-stellige) Funktion `primes` liefert

- den Strom der (unendlich vielen) Primzahlen.

Aufruf von `primes`:

```
primes ->> [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,...
```

Ströme am Bsp. des Siebs des Eratosthenes (3)

Veranschaulichung der Stromberechnung durch händische Auswertung:

```
    primes
->> sieve [2..]
->> 2 : sieve [y | y <- [3..], mod y 2 > 0]
->> 2 : sieve (3 : [y | y <- [4..], mod y 2 > 0]
->> 2 : 3 : sieve [z | z <- [ y | y <- [4..],
                                 mod y 2 > 0],
                                 mod z 3 > 0]
->> ...
->> 2 : 3 : sieve [z | z <- [5, 7, 9..],
                          mod z 3 > 0]
->> ...
->> 2 : 3 : sieve [5, 7, 11,...
->> ...
```

Semantische Modularisierungsprinzipien

...aus dem Stromkonzept erwachsen qualitativ neue, semantische Modularisierungsprinzipien.

Insbesondere:

- Generator/Selektor- (G/S-) Prinzip
- Generator/Filter- (G/F-) Prinzip
- Generator/Transformator- (G/T-) Prinzip

sowie Kombinationen davon wie das G/T/S- und G/T/F-Prinzip und weitere.

G/S-Prinzip am Bsp. des Primzahlstroms (1)

Ein Generator (G):

- ```
  gen_Primes :: [Integer]
  gen_Primes = primes
  ```

Viele Selektoren (S):

- Nimm die ersten n Elemente einer Liste:
  ```
  take :: Int -> [a] -> [a]
  take n ls = ...
  ```
- Nimm das $(n+1)$-te Element einer Liste, $n \geq 0$:
  ```
  !! :: [a] -> Int -> a
  (!!) ls n = ...
  ```
- Nimm alle ab dem $(n+1)$-ten Element einer Liste:
  ```
  drop :: Int -> [a] -> [a]
  drop n ls = ...
  ```
- ...
  ```

G/S-Prinzip am Bsp. des Primzahlstroms (2)

Zusammenfügen der G/S-Module zum Gesamtprogramm:

- Anwendung des G/S-Prinzips:
  Die ersten 5 Primzahlen:
  `take 5 gen_Primes ->> [2,3,5,7,11]`
- Anwendung des G/S-Prinzips:
  Die 5-te Primzahl:
  `(!!) 4 gen_Primes ->> gen_Primes!!4 ->> 11`
- Anwendung des G/S-Prinzips:
  Die 6-te bis 10-te Primzahl:
  `take 5 (drop 5 gen_Primes) ->> [13,17,19,23,29]`

G/F-Prinzip am Bsp. des Primzahlstroms (1)

Ein Generator (G):

- ```
  gen_Primes :: [Integer]
  gen_Primes = primes
  ```

Viele Filter (F):

- Alle Listenelemente größer als 1000:
  ```
  filter (>1000) :: [Integer] -> [Integer]
  filter (>1000) ls = ...
  ```
- Ist Zahl mit genau drei Einsen in der Dezimaldarstellung:
  ```
  hat_drei_Einsen :: Integer -> Bool
  hat_drei_Einsen n = ...
  ```
- Ist Zahl mit Palindromdezimaldarstellung:
  ```
  ist_Palindrom :: Integer -> Bool
  ist_Palindrom n = ...
  ```
- ...
  ```

G/F-Prinzip am Bsp. des Primzahlstroms (2)

Zusammenfügen der G/F-Module zum Gesamtprogramm:

- Anwendung des G/F-Prinzips:

  Alle Primzahlen größer als 1000:

  ```
  filter (>1000) gen_Primes
    ->> [1009,1013,1019,1021,1031,1033,1039,...
  ```

- Anwendung des G/F-Prinzips:

  Alle Primzahlen mit genau drei Einsen in der Dezimaldarstellung:

  ```
  [ n | n <- gen_Primes, hat_drei_Einsen n]
    ->> [1117,1151,1171,1181,1511,1811,2111,...
  ```

- Anwendung des G/F-Prinzips:

  Alle Primzahlen mit Palindromdezimaldarstellung:

  ```
  [ n | n <- gen_Primes, ist_Palindrom n]
    ->> [2,3,5,7,11,101,131,151,181,191,313,...
  ```

G/T-Prinzip am Bsp. des Primzahlstroms (1)

Ein Generator (G):

- ```
  gen_Primes :: [Integer]
  gen_Primes = primes
  ```

Viele Transformatoren (T):

- Quadrieren (für den Strom der Quadratprimzahlen):
  ```
  square :: Integer -> Integer
  square n = ...
  ```
- Dekrementieren (für den Strom der Primzahlvorgänger):
  ```
  decrement :: Integer -> Integer
  decrement n = n-1
  ```
- Summieren (für den Strom der partiellen Primzahlsummen (den Strom d. Summen d. Primzahlen von 2 bis *n*)):
  ```
  sum :: [Integer] -> Integer
  sum ls = ...
  ```
- ...
  ```

G/T-Prinzip am Bsp. des Primzahlstroms (2)

Zusammenfügen der G/T-Module zum Gesamtprogramm:

- Anwendung des G/T-Prinzips:

  Der Strom der Quadratprimzahlen:

  ```
  [ square n | n <- gen_Primes ]
     ->> [4,9,25,49,121,169,289,361,529,841,...
  ```

- Anwendung des G/T-Prinzips:

  Der Strom der Primzahlvorgänger:

  ```
  [ decrement n | n <- gen_Primes ]
     ->> [1,2,4,6,10,12,16,18,22,28,...
  ```

- Anwendung des G/T-Prinzips:

  Der Strom der partiellen Primzahlsummen:

  ```
  [ sum [2..n] | n <- gen_Primes ]
     ->> [2,5,14,27,65,90,152,189,275,434,...
  ```

Terminierungsbemerkung

Auf Terminierung ist bei Anwendung der Prinzipien

- stets besonders zu achten.

So terminiert der Aufruf:

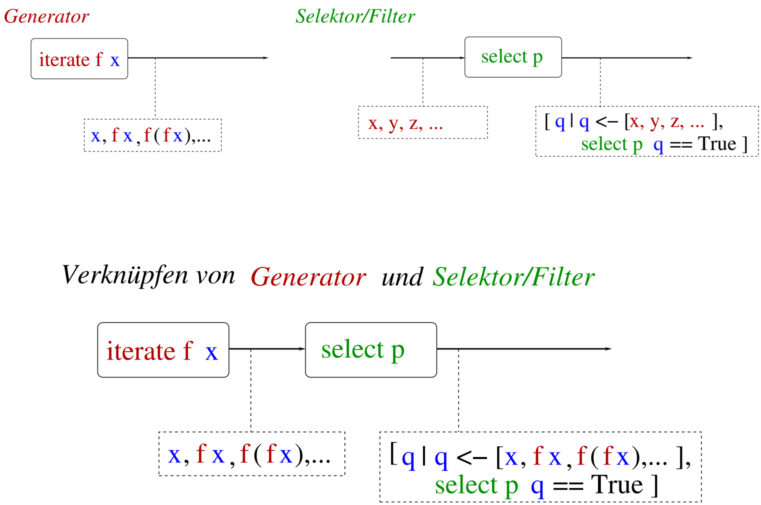
```
filter (<10) gen_Primes ->> [2,3,5,7,
```

nicht; der Aufruf:

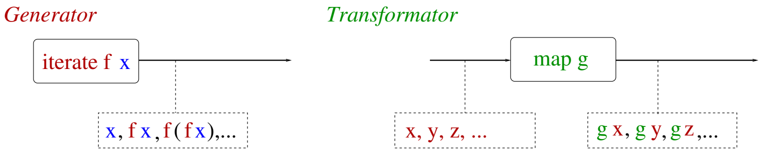
```
takeWhile (<10) gen_Primes ->> [2,3,5,7]
```

hingegen schon.

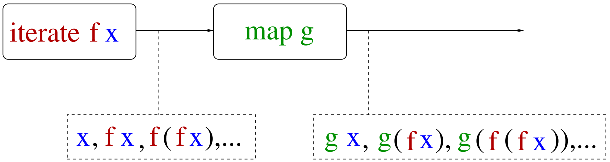
Das G/S- und G/F-Prinzip auf einen Blick



Das G/T-Prinzip auf einen Blick



Verknüpfen von Generator und Transformator



Typische Anwendungen

...des G/S-, G/F- und G/T-Prinzips:

- Rucksackprobleme
- Pascalsches Dreieck
- Goldenes Verhältnis
- Fibonacci-Zahlen
- Potenzreihen
- ...

Fibonacci-Zahlen als Summe von Strömen (1)

Zwei Generatoren G1 und G2:

`G1, Strom der Fib.-Zahlen:`	0	1	1	2	3	5	8	13	21...
`G2, Rest d. Stroms d. Fib.-Z.:`	1	1	2	3	5	8	13	21	34...
`Summiere G1 u. G2, 'G1+G2':`	+	+	+	+	+	+	+	+	+...
`Rest des Restes des Stroms der Fibonacci-Zahlen`	1	2	3	5	8	13	21	34	55...

Berechnung der Fibonacci-Zahlen als Summe von G1 und G2:

```
fibs :: [Integer] -- Generator der Fibonacci-Zahlen
```

$$\texttt{fibs = } \underbrace{\underbrace{\texttt{0 : 1}}_{\texttt{'Schopf'}}\texttt{ : }\underbrace{\texttt{zipWith (+) } \underbrace{\texttt{fibs}}_{\texttt{G1}}\ \underbrace{\texttt{(tail fibs)}}_{\texttt{G2}}}_{\texttt{'Sumpf'}\ \ \texttt{Rest d. Restes d. Stroms d. Fib.-Z.}}}_{\texttt{Strom der Fibonacci-Zahlen}}$$

...sich wie Münchhausen 'am eigenen Schopfe aus dem Sumpfe ziehen'!

Fibonacci-Zahlen als Summe von Strömen (2)

Aufruf von Generator fibs:

```
fibs ->> [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...
```

Aufrufe von Generator/Filter-, Selektorkombinationen mit fibs:

```
filter even fibs ->> [0,2,8,34,144,...
take 10 fibs     ->> [0,1,1,2,3,5,8,13,21,34]
fibs!!5          ->> 3
```

Verwendete Hilfsfunktionen:

```
take :: Int -> [a] -> [a]
take 0 _             = []
take _ []            = []
take n (x:xs) | n>0 = x : take (n-1) xs
take _ _ = error "PreludeList.take: negative argument"

zipWith :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
zipWith f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith f xs ys
zipWith f _      _      = []
```

Zusammenfassung

Späte Auswertung (engl. lazy evaluation) erlaubt es

- die Kontrolle der Auswertungsreihenfolge von Daten

zu trennen und ermöglicht dadurch die elegante Behandlung

- unendlicher Datenwerte (genauer: nicht a priori in der Größe beschränkter Datenwerte), insbesondere
  - unendlicher Listen, sog. Ströme (engl. streams, lazy lists)

Dies führt zu semantikbasierten, von der Programmlogik her begründeten neuen Modularisierungsprinzipien:

- Generator/Selektor-Prinzip
- Generator/Filter-Prinzip
- Generator/Transformator-Prinzip

sowie von Kombinationen dieser Prinzipien.

Übungsaufgabe 18.2.1

Nicht nur Generatoren lassen sich wie in den Beispielen demonstriert mit verschiedenen

- Selektoren, Filtern, Transformatoren

verknüpfen. Umgekehrt lassen sich auch Selektoren, Filter und Transformatoren mit verschiedenen

- Generatoren

verknüpfen.

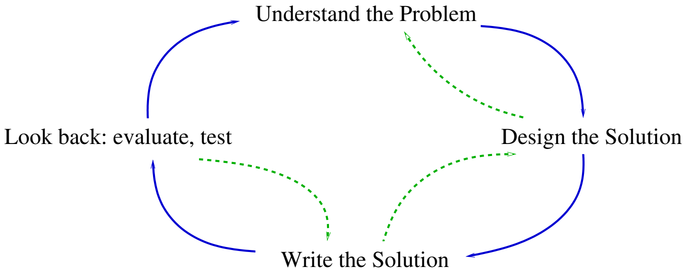
Überlege und implementiere dazu einige Beispiele, die das demonstrieren.

Kapitel 18.4

Reflektives Programmieren

Reflektives Programmieren

...der Programm-Entwicklungszyklus nach Simon Thompson, Haskell: The Craft of Fuctional Programming, 2. Auflage, 1999, Kap. 11 'Reflective Programming':



...in jeder der 4 Phasen ist es nützlich, (sich) Fragen zu stellen, zu beantworten und den Lösungsweg ggf. anzupassen.

Nosce te ipsum, nosce tuum opus.
Erkenne dich selbst, erkenne dein Werk.
lat., sprichw., Apoll zugeschrieben, abgewandelt

Phase 1: Typische Fragen

Verstehen des Problems:

- Welches sind die Ein- und Ausgaben des Problems?
- Welche Randbedingungen sind einzuhalten?
- Ist das Problem über- oder unterspezifiziert?
- Ist das Problem entscheidbar und damit grundsätzlich lösbar? In welche Komplexitätsklasse fällt es?
- Ist das Problem aufgrund seiner Struktur in Teilprobleme zerlegbar?
- ...

Phase 2: Typische Fragen

Entwerfen einer Lösung:

- Ist das Problem verwandt zu (mir) bekannten anderen, möglicherweise einfacheren Problemen?
- Wenn ja, lassen sich deren Lösungsideen anpassen und anwenden? Ebenso deren Implementierungen, vorhandene Bibliotheken?
- Lässt sich das Problem verallgemeinern und so möglicherweise sogar einfacher lösen?
- Ist das Problem mit den vorhandenen Ressourcen, einem gegebenen Budget lösbar?
- Ist die Lösung änderungs-, erweiterungs- und wiederbenutzungsfreundlich?
- ...

Phase 3: Typische Fragen

Ausformulieren und kodieren der Lösung:

- Gibt es passende Bibliotheken, speziell geeignete polymorphe Funktionen höherer Ordnung für die Lösung von Teilproblemen?
- Können vorhandene Bibliotheksfunktionen (zumindest) als Vorbild dienen, um entsprechende Funktionen für eigene Datentypen zu definieren?
- Kann funktionale Abstraktion (auch höherer Stufe) zur Verallgemeinerung der Lösung angewendet werden?
- Welche Hilfsfunktionen, Datenstrukturen könnten nützlich sein?
- Welche Möglichkeiten der Sprache können für die Codierung vorteilhaft ausgenutzt werden und wie?
- ...

Phase 4: Typische Fragen

Blick zurück, evaluieren, testen:

- Lässt sich die Lösung testen, ihre Korrektheit beweisen, auch formal?
- Worin sind möglicherweise gefundene Fehler begründet? Flüchtigkeitsfehler, Programmierfehler, falsches oder unvollständiges Problemverständnis, falsches Semantikverständnis der verwendeten Programmiersprache? Andere Gründe?
- Sollte das Problem noch einmal gelöst werden müssen; sollte die Lösung und ihre Implementierung genauso gemacht werden? Was sollte beibehalten oder geändert werden und warum?
- Erfüllt das Programm auch nichtfunktionale Eigenschaften gut wie Performanz, Speicherverbrauch, Skalierbarkeit, Verständlichkeit, Änder- und Erweiterbarkeit?
- ...

Am Ende gilt

Opus opificem probat.
Das Werk empfiehlt den Meister.

lat., sprichwörtl.

Kapitel 18.5

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 18 (1)

- Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Prentice Hall, 2. Auflage, 1998. (Kapitel 9, Infinite Lists)
- Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015. (Kapitel 9, Infinite lists)
- Richard Bird, Phil Wadler. *An Introduction to Functional Programming*. Prentice Hall, 1988. (Kapitel 6.4, Divide and conquer; Kapitel 7, Infinite Lists)
- Antonie J. T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992. (Kapitel 7.2, Infinite Objects; Kapitel 7.3, Streams)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 18 (2)

- Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999. (Kapitel 2.2, Unendliche Datenstrukturen)
- Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000. (Kapitel 14, Programming with Streams)
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 15.6, Modular programming)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 18 (3)

- Lambert Meertens. *Functional Pearl: Calculating the Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 14(6):759-763, 2004.
- Matti Nykänen. *A Note on the Genuine Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 21(6):563-572, 2011.
- Melissa E. O'Neill. *The Genuine Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 19(1):95-106, 2009.
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 20.2, Sortieren von Listen)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 18 (4)

- Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung*. Springer-V., 2006. (Kapitel 2, Faulheit währt unendlich)
- Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 8.1, Divide-and-conquer)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Kapitel 12, Developing higher-order programs; Kapitel 17, Lazy programming)

Teil VII

Abschluss, Ausblick

Kapitel 19

Abschließendes

Suavis est laborum praeteritorum memoria.
Süss ist die Erinnerung an vergangene Mühen.

Cicero (106 - 43 v.Chr.)
röm. Staatsmann und Schriftsteller

Kapitel 19.1

Rückblick

Funktionale, imperative Programmierung (1)

Eigenschaften und Charakteristika im Vergleich.

- Funktional:
  - Programm ist Ein-/Ausgaberelation.
  - Programme sind zustandsfrei und 'zeitlos'.
  - Programmformulierung auf abstraktem, mathematisch geprägten Niveau, ohne eine Maschine im Blick.
- Imperativ:
  - Programm ist Arbeitsanweisung für eine Maschine.
  - Programme sind zustands- und 'zeitbehaftet'.
  - Programmformulierung mit Blick auf eine Maschine, ein Maschinenmodell (von Neumann).

Funktionale, imperative Programmierung (2)

- Funktional:
  - Die Auswertungsreihenfolge von Ausdrücken liegt (bis auf Datenabhängigkeiten) nicht fest.
  - Namen werden durch Wertvereinbarungen genau einmal für immer an einen Wert gebunden.
  - Schachtelung (rekursiver) Funktionsaufrufe erlaubt neue Werte mit neuen Namen zu verbinden.
- Imperativ:
  - Die Ausführungsreihenfolge von Anweisungen liegt fest; Freiheiten bestehen bei der Auswertungsreihenfolge von Ausdrücken (wie funktional).
  - Namen werden in der zeitlichen Abfolge durch Zuweisungen temporär mit Werten belegt.
  - Namen können durch wiederholte Zuweisungen beliebig oft mit neuen Werten belegt werden (in rekursiven Aufrufen, repetitiven Anweisungen wie *while*, *repeat*, *for*).

Möglichkeiten fkt. Programmierung

Die Fülle an Möglichkeiten [in funktionalen Programmiersprachen] erwächst aus einer kleinen Zahl von elementaren Konstruktionsprinzipien.

Peter Pepper, *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2003.

Im Fall von:

- Funktionen: (Fkt.-) Applikation, Fallunterscheidung, Rekursion.
- Datenstrukturen: Aufzählung, Produkt- und Summenbildung, Rekursion.

Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Mächtigkeit fkt. Programmierung

...zusammen mit den durchgängigen Konzepten von

- Funktionen als erstrangige Sprachelemente (engl. first class citizens)
  - Funktionen höherer Ordnung
- Polymorphie auf
  - Funktionen
  - Datentypen

...führt dies zur Mächtigkeit und Eleganz funktionaler Programmierung, auf den Punkt gebracht im Slogan:

Functional Programming is Fun!

Zur (rethorischen) Eingangsfrage

Can programming be liberated from the von Neumann style?

John W. Backus (1924-2007)
Turing Award Preisträger 1977

Ja (im Detail kann diskutiert werden, siehe Ein-/Ausgabe).

Erfolgreiche Einsatzfelder fkt. Programmierung

- Theorembeweiser HOL und Isabelle in ML.
- Modellprüfer (z.B. Edinburgh Concurrency Workbench).
- Mobility Server von Ericson in Erlang.
- Konsistenzprüfung mit Pdiff (Lucent 5ESS) in ML.
- Übersetzer in übersetzter Sprache geschrieben.
- Datenbankabfragesprachen (z.B. CPL/Kleisli, in ML; Natural Expert, Haskell-ähnliche Abfragesprache).
- Protokollspezifikation (effiziente Fallstudien z.B. in ML).
- Expertensysteme (oft Lisp-basiert).
- ...
- `http://homepages.inf.ed.ac.uk/wadler/realworld`
- `www.haskell.org/haskellwiki/Haskell_in_industry`

Rückblick auf die Vorbesprechung

...warum die nächste Sprache funktional sein sollte:

- Konrad Hinsen. The Promises of Functional Programming. Computing in Science and Engineering 11(4): 86-90, 2009.

  ...adopting a functional programming style could make your programs more robust, more compact, and more easily parallelizable.

- Konstantin Läufer, Geoge K. Thiruvathukal. The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II. Computing in Science and Engineering 11(5): 68-75, 2009.

  ...this second installment picks up where Konrad Hinsen's article "The Promises of Functional Programming" [...] left off, covering static type inference and lazy evaluation in functional programming languages.

Haben Sie eine Antwort für sich gefunden?

...ich bin (als Programmierer) ein Typ

- klarer Ansagen, denke imperativ in Instruktionen und ihren Effekten und handle als Instrukteur.

- harmonischen, konsensualen Ausgleichs, denke funktional in Gleichungssystemen und Eigenschaften ihrer Lösungen und handle als Delegateur.

- faszinierender Empathie- und Herzlosigkeit, denke logisch in Formeln und ihren logischen Konsequenzen und handle als Spockteur.

Ich denke nie an die Zukunft.
Sie kommt früh genug.

Albert Einstein (1879-1955)
dt.-schweiz.-amerik. Physiker

Wer nicht an die Zukunft denkt,
wird bald Sorgen haben.

Konfuzius (551 - 479 v.Chr.)
chin. Ethiker und Staatslehrer

Kapitel 19.2

Ausblick

Die Zukunft hat schon begonnen.

Robert Jungk (1913-1994)
österr. Wissenschaftspublizist und Zukunftsforscher

Alles, was man wissen muss,
um selber weiter zu lernen,
...ist jetzt gelernt.

Dietrich Schwanitz (1940-2004)
dt. Anglistikprof. und Schriftsteller
(verkürzt und ergänzt in seinem Sinn)

Fort- und weiterführendes zu funktionaler Programmierung in TUW-Lehrveranstaltungen, insbesondere:

- LVA 185.A05 Fortgeschrittene funktionale Programmierung, VU 2.0, ECTS 3.0.
- LVA 183.653 Methodisches, industrielles Software-Engineering mit funktionalen Sprachen am Fallbeispiel von Haskell, VU 2.0, ECTS 3.0, ao.Prof. Thomas Grechenig.
- LVA 127.008 Haskell-Praxis: Programmieren mit der funktionalen Programmiersprache Haskell,
VU 2.0, ECTS 3.0, Prof. em. Andreas Frank, Institut für Geoinformation und Kartographie.

Man muss so lange lernen,
wie man etwas nicht weiß;
und wenn wir dem Sprichwort glauben,
ein Leben lang.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller
Epistulae ad Lucilium 76,1-4

Lebenslanges Lernen?

Nihil novi sub sole.
Es gibt nicht Neues unter der Sonne.

Vulgata, lat. Neuübersetzung der Bibel aus dem 4. Jhdt. von
Hieronymus (um 347 - 419 oder 420)
Liber Ecclesiastes 1,10

LVA 185.A05 Fortg. fkt. Programmierung

Vorlesungsinhalte:

- Programmieren mit
  - Strömen, Funktoren, Monaden, Kombinatorbibliotheken.
  - Funktionalen Feldern, abstrakten Datentypen.
- Anwendungen
  - Funktionale Perlen, Algorithmenmuster, funktionale reaktive Programmierung, logische Programmierung funktional, Strukturanalyse (engl. Parsing).
- Qualitätssicherung
  - Programmverifikation, Programmvalidation, gleichungsbasiertes Schließen und Beweisen, automatisches Testen.
- ...

LVA 127.008 Haskell-Praxis: Progr. mit Haskell

Vorlesungsinhalte:

- Analyse und Verbesserung von gegebenem Code.
- Weiterentwicklung der Open-Source-Entwicklungsumgebung LEKSAH für Haskell, insbesondere der graphischen Benutzerschnittstelle (GUI).
- Gestaltung graphischer Benutzerschnittstellen (GUIs) mit Glade und Gtk+.
- ...

Always look on the bright side of life

The clarity and economy of expression that the language of functional programming permits is often very impressive, and, but for human inertia, functional programming can be expected to have a brilliant future.(∗)

Edsger W. Dijkstra (1930-2002)
Turing Award Preisträger 1972

(∗) Zitat aus: Introducing a course on calculi. Ankündigung einer Lehrveranstaltung an der University of Texas at Austin, 1995.

Der größte Feind des Fortschritts
ist nicht der Irrtum, sondern die Trägheit.

Henry Thomas Buckle (1821-1862)
engl. Historiker, aus "Geschichte der Zivilisation" (unvollendet)

Übungsaufgabe 19.2.1 – Eiskunstlauf (1)

Eiskunstlauf heißt vor allem Disziplin,
Willensstärke und Ausdauer.
Einen neuen Sprung richtig zu beherrschen,
kann schon mal ein Jahr dauern.
Oder auch etwas länger.

Sophia Schaller (* 2000)
österr. Eiskunstläuferin

Übungsaufgabe 19.2.1 – Philosophie (2)

Die Kenntnis der Philosophie haben
die Götter niemandem mitgegeben,
doch die Fähigkeit allen.

Hätten die Götter auch die Philosophie
zu einem Allgemeingut gemacht und würden wir
bereits einsichtig geboren, hätte die Weisheit
ihren größten Vorzug verloren, nämlich
nicht zu den Zufallsgaben zu gehören.

Nun freilich ist gerade dies an ihr so kostbar und
herrlich, dass sie einem nicht einfach zufällt, sondern
dass jeder sie nur sich selbst verdankt, dass sie nicht
von einem anderen erbeten werden kann.

Warum solltest du zur Philosophie aufblicken, wenn
sie eine Sache der Gefälligkeit wäre?

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller
Epistulae ad Lucilium 90,1-3

Übungsaufgabe 19.2.1 – Informatik (3)

Ersetze in den Zitaten von Sophia Schaller und Seneca

- Eiskunstlauf und Philosophie/Weisheit

durch

- Informatik

und

- neuen Sprung

durch

- neues Paradigma, funktionale Programmierung.

Ergeben sich erneut sinnvolle, bedenkenswerte Aussagen? Sind sie nachvollziehbar?

Übungsaufgabe 19.2.2 – Schätzaufgabe

Ein ECTS-Punkt entspricht einem erwarteten ernsthaften (ungleich gefühltem) Arbeitsaufwand im Ausmaß von

- in Österreich 25 Stunden.
- in Deutschland 30 Stunden.
- ...

1. Schätze, mit wie vielen ECTS-Punkten der Aufwand des
   1.1 'zu richtiger Beherrschung' führenden Lernens und Einübens eines neuen Sprungs im Eiskunstlauf
   1.2 'zu richtiger Beherrschung' führenden Lernens und Einübens des funktionalen Programmierstils

   angemessen bewertet wäre?
2. Wie liegen diese Schätzwerte im Vergleich zum Referenzwert von 3 ECTS-Punkten entsprechend 75 Aufwandsstunden für diese Lehrveranstaltung? Höher? Niedriger?
3. Welche Schlussfolgerungen können aus diesem Vergleich gezogen, welche Maßnahmen ggf. abgeleitet werden?

Übungsaufgabe 19.2.3 – Feldstudie

Beobachten Sie Ihre Umgebung. Gibt es Parallelen zum Studium?

Um erfolgreich zu sein,
brauchst du das ganze Paket:
Talent, mehr Fleiß als die anderen,
Risikobereitschaft, keine Angst
vor der Niederlage.

Franz Klammer (* 1953)
österr. Skirennläufer, Olympiasieger 1976

Italien ist wie ein Athlet mit
Potenzial, der keine Veranlassung sieht,
an sich zu arbeiten. Ich hasse die
italienische Mentalität. Wir wollen
mit dem geringstmöglichen Aufwand
das Maximum erreichen.

Sofia Goggia (* 1992)
ital. Skirennläuferin, Olympiasiegerin 2018

In manchen Phasen muss man die Zähne zusammenbeißen: Stürze tun weh [ergänzt: Niederlagen auch].

Sophia Schaller (* 2000)
österr. Eiskunstläuferin

...gleich ob Eiskunstlauf, Philosophie, Informatik,...

Ewige Wahrheiten

Scientia prodest.
Wissen nützt.

Cicero (106 - 43 v.Chr.)
röm. Staatsmann und Schriftsteller

Alle Menschen streben
von Natur aus nach Wissen.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Die Summe unserer Erkenntnis
besteht aus dem, was wir gelernt,
und aus dem, was wir vergessen haben.

Marie von Ebner-Eschenbach (1830-1916)
österr. Schriftstellerin

Glückes Geschick

Semper aliquid haeret.
Etwas bleibt immer hängen.

Plutarch (um 46 - nach 119 n.Chr.)
griech. Schriftsteller

Kapitel 19.3

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 19 (1)

- Simon Peyton Jones. *16 Years of Haskell: A Retrospective on the occasion of its 15th Anniversary – Wearing the Hair Shirt: A Retrospective on Haskell*. Invited Keynote Presentation at the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'03), 2003. `research.microsoft.com/users/simonpj/papers/haskell-retrospective/`

- Paul Hudak, John Hughes, Simon Peyton Jones, Philip Wadler. *A History of Haskell: Being Lazy with Class*. In Proceedings of the 3rd ACM SIGPLAN 2007 Conference on History of Programming Languages (HOPL III), 12-1 - 12-55, 2007. (ACM Digital Library `www.acm.org/dl`)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 19 (2)

- Andrew Appel. *A Critique of Standard ML*. Journal of Functional Programming 3(4):391-430, 1993.
- Anthony J. Field, Peter G. Robinson. *Functional Programming*. Addison-Wesley, 1988. (Kapitel 5, Alternative functional styles)
- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016. (Kapitel 1.3, Features of Haskell; Kapitel 1.4, Historical background)
- Wolfram-Manfred Lippe. *Funktionale und Applikative Programmierung*. eXamen.press, 2009. (Kapitel 3, Programmiersprachen)

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 19 (3)

- Greg Michaelson. *An Introduction to Functional Programming through Lambda Calculus*. Dover Publications, 2. Auflage, 2011. (Kapitel 1, Introduction; Kapitel 9, Functional programming in Standard ML; Kapitel 10, Functional programming and LISP)
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003. (Kapitel 23, Compiler and Interpreter für Opal, ML, Haskell, Gofer)
- Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999. (Kapitel 1.2, Functional Languages)
- Colin Runciman, David Wakeling. *Applications of Functional Programming*. UCL Press, 1995.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Kapitel 19 (4)

- Dietrich Schwanitz. *Bildung: Alles, was man wissen muss*. Eichborn Verlag, 1999.
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999. (Anhang A, Functional, imperative and OO programming)
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011. (Anhang A, Functional, imperative and OO programming)
- Philip Wadler. *The Essence of Functional Programming*. In Conference Record of the 19th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 1-14, 1992.

Literaturverzeichnis

I cannot live without books.

Thomas Jefferson (1743-1826)
amerik. Staatsmann und Philosoph
3. Präsident der USA
Hauptverfasser der amerik. Unabhängigkeitserklärung

Literaturhinweise und Leseempfehlungen

...zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium.

- I Lehrbücher
- II Tutorien, Manuale
- III Grundlegende, wegweisende Artikel
- IV Weitere Arbeiten
- V Zum Haskell-Sprachstandard
- VI Die Haskell-Geschichte

I Lehrbücher (1)

- Christopher Allen, Julie Moronuki. *Haskell Programming from First Principles*. ebook. `http://haskellbook.com`.
- Henri E. Baal, Dick Grune. *Programming Language Essentials*. Addison-Wesley, 1994.
- Hendrik P. Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Revised Edn., North-Holland, 1984.
- Henrik P. Barendregt, Wil Dekkers, Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Cambridge University Press, 2012.
- Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015.
- Richard Bird. *Introduction to Functional Programming using Haskell*. Prentice Hall, 2. Auflage, 1998.

I Lehrbücher (2)

- Richard Bird, Philip Wadler. *An Introduction to Functional Programming*. Prentice Hall, 1988.
- Marco Block-Berlitz, Adrian Neumann. *Haskell Intensivkurs*. Springer-V., 2011.
- Manuel Chakravarty, Gabriele Keller. *Einführung in die Programmierung mit Haskell*. Pearson Studium, 2004.
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald Rivest, Clifford Stein. *Algorithmen – Eine Einführung*. Oldenbourg Verlag, 2004.
- Antonie J.T. Davie. *An Introduction to Functional Programming Systems using Haskell*. Cambridge University Press, 1992.

I Lehrbücher (3)

- Ernst-Erich Doberkat. *Haskell: Eine Einführung für Objektorientierte*. Oldenbourg Verlag, 2012.
- Kees Doets, Jan van Eijck. *The Haskell Road to Logic, Maths and Programming*. Texts in Computing, Vol. 4, King's College, UK, 2004.
- Gilles Dowek, Jean-Jacques Lévy. *Introduction to the Theory of Programming Languages*. Springer-V., 2011.
- Martin Erwig. *Grundlagen funktionaler Programmierung*. Oldenbourg Verlag, 1999.
- Anthony J. Field, Peter G. Harrison. *Functional Programming*. Addison-Wesley, 1988.

I Lehrbücher (4)

- Matthias Felleisen, Rober B. Findler, Matthew Flatt, Shriram Krishnamurthi. *How to Design Programs: An Introduction to Programming and Computing*. MIT Press, 2001.
- Hugh Glaser, Chris Hankin, David Till. *Principles of Functional Programming*. Prentice Hall, 1984.
- Chris Hankin. *An Introduction to Lambda Calculi for Computer Scientists*. King's College London Publications, 2004.
- Peter Henderson. *Functional Programming: Application and Implementation*. Prentice Hall, 1980.
- Paul Hudak. *The Haskell School of Expression: Learning Functional Programming through Multimedia*. Cambridge University Press, 2000.

I Lehrbücher (5)

- Graham Hutton. *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2016.
- Wolfram-Manfred Lippe. *Funktionale und Applikative Programmierung*. eXamen.press, 2009.
- Miran Lipovača. *Learn You a Haskell for Great Good! A Beginner's Guide*. No Starch Press, 2011. `learnyouahaskell.com`
- Bruce J. MacLennan. *Functional Programming: Practice and Theory*. Addison-Wesley, 1990.
- Greg Michaelson. *An Introduction to Functional Programming through Lambda Calculus*. Dover Publications, 2. Auflage, 2011.

I Lehrbücher (6)

- Bryan O'Sullivan, John Goerzen, Don Stewart. *Real World Haskell*. O'Reilly, 2008. `book.realworldhaskell.org`
- Peter Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*. Springer-V., 2. Auflage, 2003.
- Peter Pepper, Petra Hofstedt. *Funktionale Programmierung: Sprachdesign und Programmiertechnik*. Springer-V., 2006.
- Tomas Petricek, Jon Skeet. *Real World Functional Programming: With Examples in F# and C#*. Manning Publications Co., 2009.
- Fethi Rabhi, Guy Lapalme. *Algorithms – A Functional Programming Approach*. Addison-Wesley, 1999.
- Chris Reade. *Elements of Functional Programming*. Addison-Wesley, 1989.

I Lehrbücher (7)

- Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.). *Informatik-Handbuch*. Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 2006.
- Colin Runciman, David Wakeling. *Applications of Functional Programming*. UCL Press, 1995.
- Steven S. Skiena. *The Algorithm Design Manual*. Springer-V., 1998.
- Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik. Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014.
- Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018.

I Lehrbücher (8)

- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 2. Auflage, 1999.
- Simon Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Addison-Wesley/Pearson, 3. Auflage, 2011.
- Allen B. Tucker (Editor-in-Chief). *Computer Science. Handbook*. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008.
- Reinhard Wilhelm, Helmut Seidl. *Compiler Design – Virtual Machines*. Springer-V., 2010.

II Tutorien, Manuale (1)

- H. Conrad Cunningham. *Notes on Functional Programming with Haskell*. Course Notes, University of Mississippi, 2007. citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.114.2822&rep=rep1&type=pdf
- Hal Daumé III. *Yet Another Haskell Tutorial*. wikibooks.org-Ausgabe, 2007. https://en.wikibooks.org/wiki/Yet_Another_Haskell_Tutorial
- Chris Done. *Try Haskell*. Online Hands-on Haskell Tutorial. tryhaskell.org.
- Paul Hudak, Joseph Fasel, John Peterson. *A Gentle Introduction to Haskell*. Technischer Bericht, Yale University, 1996. https://www.haskell/org/tutorial

II Tutorien, Manuale (2)

- Hugs-Benutzerhandbuch. *The Hugs98 User Manual.* https://www.haskell.org/hugs/pages/hugsman/index.html
- GHCi-Benutzerhandbuch. *Glasgow Haskell Compiler User's Guide.* http://www.haskell.org/ghc/docs/latest/html/users_guide/ghci.html
- Haskells Standard-Präludium. https://www.haskell.org/onlinereport/standard-prelude.html

III Grundlegende, wegweisende Artikel (1)

- John W. Backus. *Can Programming be Liberated from the von Neumann Style? A Functional Style and its Algebra of Programs*. Communications of the ACM 21(8):613-641, 1978.
- Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Annals of Mathematical Studies, Vol. 6, Princeton University Press, 1941.
- Robert W. Floyd. *The Paradigms of Programming*. Turing Award Lecture. Communications of the ACM 22(8):455-460, 1979.
- John Hughes. *Why Functional Programming Matters*. The Computer Journal 32(2):98-107, 1989.

III Grundlegende, wegweisende Artikel (2)

- Paul Hudak. *Conception, Evolution and Applications of Functional Programming Languages*. Communications of the ACM 21(3):359-411, 1989.
- Christopher Strachey. *Fundamental Concepts in Programming Languages*. Higher-Order and Symbolic Computation 13:11-49, 2000, Kluwer Academic Publishers (revised version of a report of the NATO Summer School in Programming, Copenhagen, Denmark, 1967.)
- Philip Wadler. *The Essence of Functional Programming*. In Conference Record of the 19th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 1-14, 1992.

IV Weitere Arbeiten (1)

- Wilhelm Ackermann. *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*. Mathematische Annalen 99:118-133, 1928.
- Andrew Appel. *A Critique of Standard ML*. Journal of Functional Programming 3(4):391-430, 1993.
- Zena M. Ariola, Matthias Felleisen, John Maraist, Martin Odersky, Philip Wadler. *The Call-by-Need Lambda Calculus*. In Conference Record of the 22nd Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'95), 233-246, 1995.
- Hendrik Pieter Barendregt, Erik Barendsen. *Introduction to the Lambda Calculus*. Revised Edn., Technical Report, University of Nijmegen, March 2000. `ftp://ftp.cs.kun.nl/pub/CompMath.Found/lambda.pdf`

IV Weitere Arbeiten (2)

- Luca Cardelli. *Basic Polymorphic Type Checking*. Science of Computer Programming 8:147-172, 1987.
- B. Jack Copeland, Oron Shagrir. *The Church-Turing Thesis: Logical Limit or Breachable Barrier?* Communications of the ACM 62(1):66-74, 2019.
- Iavor S. Dachki, Thomas Hallgren, Mark P. Jones, Rebekah Leslie, Andrew Tolmach. *Writing System Software in a Functional Language: An Experience Report*. In Proceedings of the 4th International Workshop on Programming Languages and Operating Systems (PLOS 2007), Article No. 1, 5 pages, 2007.

IV Weitere Arbeiten (3)

- Luís Damas, Robin Milner. *Principal Type Schemes for Functional Programming Languages*. In Conference Record of the 9th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'82), 207-218, 1982.
- Noah M. Daniels, Andrew Gallant, Norman Ramsey. *Experience Report: Haskell in Computational Biology*. In Proceedings of the 17th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2012), 227-234, 2012.
- Frank DeRemer, Hans H. Kron. *Programming-in-the-Large vs. Programming-in-the-Small*. IEEE Transactions on Software Engineering 2(2):80-86, 1976.

IV Weitere Arbeiten (4)

- Atze Dijkstra, Jeroen Fokker, S. Doaitse Swierstra. *The Architecture of the Utrecht Haskell Compiler*. In Proceedings of the 2nd ACM SIGPLAN Symposium on Haskell (Haskell 2009), 93-104, 2009.
- Atze Dijkstra, Jeroen Fokker, S. Doaitse Swierstra. *UHC Utrecht Haskell Compiler*, 2009. www.cs.uu.nl/wiki/UHC
- Neal Ford. *Functional Thinking: Why Functional Programming is on the Rise*. IBM developerWorks, 11 pages, 2013. `www.ibm.com/developerworks/java/library/j-ft20/j-ft20-pdf.pdf`
- Robert M. French. *Moving Beyond the Turing Test*. Communications of the ACM 55(12):74-77, 2012.

IV Weitere Arbeiten (5)

- Robin Gandy. *The Confluence of Ideas in 1936*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 51-102, 1995.
- Hugh Glaser, Pieter H. Hartel, Paul W. Garrat. *Programming by Numbers: A Programming Method for Novices*. The Computer Journal 43(4):252-265, 2000.
- Benjamin Goldberg. *Functional Programming Languages*. ACM Computing Surveys 28(1):249-251, 1996.
- Andrew J. Gordon. *Functional Programming and Input/Output*. British Computer Society Distinguished Dissertations in Computer Science. Cambridge University Press, 1994.

IV Weitere Arbeiten (6)

- John V. Guttag. *Abstract Data Types and the Development of Data Structures*. Communications of the ACM 20(6):396-404, 1977.
- John V. Guttag, James J. Horning. *The Algebra Specification of Abstract Data Types*. Acta Informatica 10(1):27-52, 1978.
- John V. Guttag, Ellis Horowitz, David R. Musser. *Abstract Data Types and Software Validation*. Communications of the ACM 21(12):1048-1064, 1978.
- Bastiaan Heeren, Daan Leijen, Arjan van IJzendoorn. *Helium, for Learning Haskell*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN 2003 Haskell Workshop (Haskell 2003), 62-71, 2003.
- Konrad Hinsen. *The Promises of Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 11(4):86-90, 2009.

IV Weitere Arbeiten (7)

- C.A.R. Hoare. *Algorithm 64: Quicksort*. Communications of the ACM 4(7):321, 1961.
- C.A.R. Hoare. *Quicksort*. The Computer Journal 5(1):10-15, 1962.
- Ian Horswill. *What is Computation?* Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):8-14, 2012.
- Paul Hudak, Joseph H. Fasel. *A Gentle Introduction to Haskell*. ACM SIGPLAN Notices 27(5):1-52, 1992.
- Arjan van IJzendoorn, Daan Leijen, Bastiaan Heeren. *The Helium Compiler*. `www.cs.uu.nl/helium`.
- Neil D. Jones. *Constant Time Factors do Matter*. In Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'93), 602-611, 1993.

IV Weitere Arbeiten (8)

- Jerzy Karczmarczuk. *Scientific Computation and Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 1(3):64-72, 1999.
- Stephen C. Kleene. *General Recursive Functions of Natural Numbers*. Mathematische Annalen 112:727-742, 1936.
- Stephen C. Kleene. *λ-Definability and Recursiveness*. Duke Mathematical Journal 2:340-352, 1936.
- Stephen C. Kleene. *Origins of Recursive Function Theory*. Annals of the History of Computing 3:52-67, 1981.
- Donald E. Knuth. *Big Omicron and Big Omega and Big Theta*. ACM SIGACT News 8(2):18-24, 1976. (s.a. Nachdruck unter gleichem Titel in: Donald E. Knuth. *Selected Papers on Analysis of Algorithms*. CSLI Lecture Notes Number 102, CSLI Publications, 35-41, 2012.)

IV Weitere Arbeiten (9)

- Donald E. Knuth. *Literate Programming*. The Computer Journal 27(2):97-111, 1984.
- Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal. *The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II*. Computing in Science and Engineering 11(5):68-75, 2009.
- John Maraist, Martin Odersky, David N. Turner, Philip Wadler. *Call-by-name, Call-by-value, call-by-need, and the Linear Lambda Calculus*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science 1:370-392, 1995.
- John Maraist, Martin Odersky, Philip Wadler. *The Call-by-Need Lambda Calculus*. Journal of Functional Programming 8(3):275-317, 1998.

IV Weitere Arbeiten (10)

- John Maraist, Martin Odersky, David N. Turner, Philip Wadler. *Call-by-name, Call-by-value, call-by-need, and the Linear Lambda Calculus*. Theoretical Computer Science 228(1-2):175-210, 1999.
- Mihai Maruseac. *Haskell: A Language for Modern Times*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 24(1):64-66, 2017.
- John McCarthy. *A Basis for a Mathematical Theory of Computation*. In *Computer Programming and Formal Systems*, Paul Braffort, David Hirschberg (Hrsg.), North-Holland, 33-70, 1963.
- Lambert Meertens. *Functional Pearl: Calculating the Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 14(6):759-763, 2004.

IV Weitere Arbeiten (11)

- Donald Michie. *'Memo' Functions and Machine Learning*. Nature 218:19-22, 1968.
- Robin Milner. *A Theory of Type Polymorphism in Programming*. Journal of Computer and System Sciences 17:248-375, 1978.
- Yaron Minsky. *OCaml for the Masses*. Communications of the ACM 54(11):53-58, 2011.
- John C. Mitchell. *Type Systems for Programming Languages*. In *Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. B: Formal Methods and Semantics*, Jan van Leeuwen (Hrsg.). Elsevier Science Publishers, 367-458, 1990.
- William Newman. *Alan Turing Remembered – A Unique Firsthand Account of Formative Experiences with Alan Turing*. Communications of the ACM 55(12):39-41, 2012.

IV Weitere Arbeiten (12)

- Matti Nykänen. *A Note on the Genuine Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 21(6):563-572, 2011.
- Melissa E. O'Neill. *The Genuine Sieve of Eratosthenes*. Journal of Functional Programming 19(1):95-106, 2009.
- David L. Parnas. *On the Criteria to be used on Decomposing Systems into Modules*. Communications of the ACM 15(12):1053-1058, 1972.
- David L. Parnas, Paul C. Clements, David M. Weiss. *The Modular Structure of Complex Systems*. IEEE Transactions on Software Engineering 11(3):259-266, 1985.

IV Weitere Arbeiten (13)

- Rózsa Péter. *Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktionen*. Mathematische Annalen 110:612-632, 1934.
- Rózsa Péter. *Konstruktion nichtrekursiver Funktionen*. Mathematische Annalen 111:42-60, 1935.
- Gordon Plotkin. *Call-by-name, Call-by-value, and the λ-Calculus*. Theoretical Computer Science 1:125-159, 1975.
- Norman Ramsey. *On Teaching How to Design Programs*. In Proceedings of the 19th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2014), 153-166, 2014.
- J. A. Robinson. *A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle*. Journal of the ACM 12(1):23-42, 1965.

IV Weitere Arbeiten (14)

- Chris Sadler, Susan Eisenbach. *Why Functional Programming?* In *Functional Programming: Languages, Tools and Architectures*, Susan Eisenbach (Hrsg.), Ellis Horwood, 9-20, 1987.
- Neil Savage. *Using Functions for Easier Programming*. Communications of the ACM 61(5):29-30, 2018.
- Uwe Schöning, Wolfgang Thomas. *Turings Arbeiten über Berechenbarkeit – eine Einführung und Lesehilfe*. Informatik Spektrum 35(4):253-260, 2012.
- Curt J. Simpson. *Experience Report: Haskell in the "Real World": Writing a Commercial Application in a Lazy Functional Language*. In Proceedings of the 14th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP 2009), 185-190, 2009.

Weitere Arbeiten (15)

- Michael Snoyman. *Developing Web Applications with Haskell and Yesod*. O'Reilly, 2012.
- Simon Thompson. *Where Do I Begin? A Problem Solving Approach in Teaching Functional Programming*. In Proceedings of the 9th International Symposium on Programming Languages: Implementations, Logics, and Programs (PLILP'97), Springer-Verlag, LNCS 1292, 323-334, 1997.
- Boris A. Trakhtenbrot *Comparing the Church and Turing Approaches: Two Prophetical Messages*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 557-582, 1995.
- Moshe Vardi. *Self-Reference and Section 230*. Communications of the ACM 61(11):7, 2018.

Weitere Arbeiten (16)

- Alvaro Videla. *Metaphors We Compute By*. Communications of the ACM 60(10):42-45, 2017.
- Philip Wadler. *An angry half-dozen*. ACM SIGPLAN Notices 33(2):25-30, 1998.
- Philip Wadler. *Why no one uses Functional Languages*. ACM SIGPLAN Notices 33(8):23-27, 1998.
- Philip Wadler. *Comprehending Monads*. Mathematical Structures in Computer Science 2:461-493, 1992.
- Interview mit John Hughes über *'Funktionale Programmierung und Haskell'*. `https://www.youtube.com/watch?v=LnX3B9oaKzw`

Weitere Arbeiten (17)

Welches Paradigma, welche Sprache sollte ich nutzen?

- Peter J. Landin. *The next 700 Programming Languages*. Communications of the ACM 9(3):157-166, 1966.
- Jeffrey S. Foster. *Shedding New Light on an Old Language Debate*. Communications of the ACM 60(10):90, 2017.
- Baishakhi Ray, Daryl Posnett, Premkunar Devanbu, Vladimir Filkov. *A Large-Scale Study of Programming Languages and Code Quality in GitHub*. Communications of the ACM 60(10):91-100, 2017.
- Rachel Harrison, L. G. Smaraweera, Mark R. Dobie, Paul H. Lewis. *Comparing Programming Paradigms: An Evaluation of Functional and Object-Oriented Programs*. Software Engineering Journal 11(4):247-254, 1996.

V Zum Haskell-Sprachstandard

- Paul Hudak, Simon Peyton Jones, Philip Wadler (Hrsg.). *Report on the Programming Language Haskell: Version 1.1*. Technical Report, Yale University and Glasgow University, August 1991.
- Paul Hudak, Simon Peyton Jones, Philip Wadler (Hrsg.) *Report on the Programming Language Haskell: A Non-strict Purely Funcional Language (Version 1.2)*. ACM SIGPLAN Notices, 27(5):1-164, 1992.
- Simon Marlow (Hrsg.). *Haskell 2010 Language Report*, 2010. `www.haskell.org/definition/haskell2010.pdf`
- Simon Peyton Jones (Hrsg.). *Haskell 98: Language and Libraries. The Revised Report*. Cambridge University Press, 2003. `www.haskell.org/definitions`.

VI Die Haskell-Geschichte

- Simon Peyton Jones. *16 Years of Haskell: A Retrospective on the occasion of its 15th Anniversary – Wearing the Hair Shirt: A Retrospective on Haskell*. Invited Keynote Presentation at the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 2003. research.microsoft.com/users/simonpj/papers/haskell-retrospective/

- Paul Hudak, John Hughes, Simon Peyton Jones, Philip Wadler. *A History of Haskell: Being Lazy with Class*. In Proceedings of the 3rd ACM SIGPLAN 2007 Conference on History of Programming Languages (HOPL III), 12-1 - 12-55, 2007. (ACM Digital Library www.acm.org/dl)

Daher verehre ich die Erkenntnisse der Weisheit und ihre Entdecker; mit Freude nähere ich mich gleichsam dem Vermächtnis vieler. Für mich ist dies alles erworben, für mich erarbeitet.

Doch wir wollen uns als guter Familienvater erweisen und mehr hinterlassen, als wir bekommen haben; dies Erbe soll vergrößert von mir auf die Nachwelt übergehen. Viel bleibt noch zu tun, und viel wird bleiben, und keinem, der nach tausend Menschenaltern auf die Welt kommt, ist die Möglichkeit versperrt, noch etwas hinzuzufügen.

Aber selbst wenn schon alles von den alten Denkern herausgefunden wurde, wird dies immer neu sein: die Anwendung, das Verstehen und die Neuordnung der von anderen stammenden Erkenntnisse.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller
Epistulae ad Lucilium 64, 7f.

Seneca. Der Weise ist sich selbst genug. Gedanken für alle Lebenslagen.
Übersetzt u. herausgegeben von Ursula Blank-Sangmeister, Reclam, 2014.

Wenn ich weiter gesehen habe als andere,
so deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stehe.

gewöhnlich Isaac Newton zugeschrieben,
jedoch wesentlich älteren Ursprungs
Sir Isaac Newton (1643-1727)
engl. Naturforscher, Physiker und Philosoph

Anhänge

A

Imperative vs. funktionale Programmierung: Schlaglichter

A.1

Programmatischer Kern

Imperativ vs. fkt.: Programmatischer Kern

In imperativen (prozeduralen, objektorientierten) Programmen geht es um die Ausführung von Anweisungen (dafür müssen auch Ausdrücke ausgewertet werden):

```
a := y + z;
b := x + y;
if a>0 then c := a*b else c := a/2;
```

In funktionalen Programmen geht es ausschließlich um die Auswertung von Ausdrücken. Anweisungen gibt es nicht!

```
y + z
x + y
if (y+z)>0 then (y+z)*(x+y) else (y+z)/2
```

Imperativ: Anweisungen und Ausdrücke

...im Detail:

$$\underbrace{\texttt{a := }\underbrace{\texttt{y + z}}_{\textit{Ausdruck}}\texttt{;}}_{\textit{Anweisung}}$$

$$\underbrace{\texttt{b := }\underbrace{\texttt{x + y}}_{\textit{Ausdruck}}\texttt{;}}_{\textit{Anweisung}}$$

$$\underbrace{\texttt{if }\underbrace{\texttt{a>0}}_{\textit{Ausdruck}}\texttt{ then }\underbrace{\texttt{c := }\underbrace{\texttt{a*b}}_{\textit{Ausdruck}}}_{\textit{Anweisung}}\texttt{ else }\underbrace{\texttt{c := }\underbrace{\texttt{a/2}}_{\textit{Ausdruck}}}_{\textit{Anweisung}}\texttt{;}}_{\textit{Anweisung}}$$

Genauer sind auch `0` und `2` Ausdrücke; `y`, `z`, `x` `a`, `b` und `c` hingegen Programmvariable, deren Wert abseits von linksseitigen Vorkommen als Ausdruck verwendet wird.

Funktional: Ausschließlich Ausdrücke

...im Detail:

$$\underbrace{\texttt{y + z}}_{\mathit{Ausdruck}}$$

$$\underbrace{\texttt{x + y}}_{\mathit{Ausdruck}}$$

$$\underbrace{\texttt{if } \underbrace{\texttt{(y+z)>0}}_{\mathit{Ausdruck}} \texttt{ then } \underbrace{\underbrace{\texttt{(y+z)}}_{\mathit{Ausdruck}} \texttt{ * } \underbrace{\texttt{(x+y)}}_{\mathit{Ausdruck}}}_{\mathit{Ausdruck}} \texttt{ else } \underbrace{\underbrace{\texttt{(y+z)}}_{\mathit{Ausdruck}} \texttt{ / 2}}_{\mathit{Ausdruck}}}_{\mathit{Ausdruck}}$$

Genauer sind auch `y`, `z`, `x`, `0` und `2` Ausdrücke.

A.2

Namensvereinbarungen

A.2.1

Namensvereinbarungen in imperativen Programmen

Namensvereinbarungen

...werden getroffen u.a. für:

- Variablen: Variablennamen
- Prozeduren/Methoden: Prozedur-/Methodennamen
- Funktionen: Funktionsnamen
- Typen: Typnamen
- ...

Dabei gilt: Die Einführung benamter

- Variablen, Prozeduren/Methoden ist von überragender Bedeutung.
- Funktionen ist oft nur eingeschränkt möglich.
- Typen, etc.: Für diesen Abschnitt nicht relevant und daher unbetrachtet bleibend.

A.2.2

Namensvereinbarungen in funktionalen Programmen

Namensvereinbarungen

Für Ausdrücke können Namen vergeben, vereinbart werden:

$$\underbrace{\texttt{a = y + z}}_{\texttt{Vereinb. von Name a für Ausdruck y + z}}$$

$$\underbrace{\texttt{b = x + y}}_{\texttt{Vereinb. von Name b für Ausdruck x + y}}$$

$$\underbrace{\texttt{c = if (y+z)>0 then (y+z)*(x+y) else (y+z)/2}}_{\texttt{Vereinb. von Name c für Ausdr. if...then...else...}}$$

Jeder Name kann nur einmal als Bezeichnung gewählt werden und somit Bezeichnung nur eines einzigen Ausdrucks sein. Namen sind ebenfalls Ausdrücke. Ausdrücke und ihre Namen dürfen sich in Ausdrücken wechselweise vertreten (mit '==' in der Bedeutung von 'ist wertgleich mit'):

```
   (x+y) * (if (y+z)>0 then (y+z)*(x+y) else (y+z)/2)
== b * (if a>0 then a*b else a/2)
== b * c
```

Namensvereinbarungen mit Argumenten

Namensvereinbarungen können Argumente erhalten:

```
quadrat n      = n*n
flaeche l b    = l*b
volumen l b h  = l*b*h
antwort_auf_alle_Fragen = 42
```

Namen sind unabhängig von der Zahl ihrer Argumente Ausdrücke. Der Wert von Namen mit m Argumenten ist eine m-stellige Funktion. Ist m gleich null, spricht man von einer Konstante oder einer 0-stelligen Funktion, was eine einheitliche Sicht von Ausdrücken als Ausdrücke von funktionalem Wert (oder kürzer als funktionale Ausdrücke) ermöglicht:

```
quadrat :: Int -> Int                    -- 1-stellig
flaeche :: Int -> Int -> Int             -- 2-stellig
volumen :: Int -> Int -> Int -> Int      -- 3-stellig
antwort_auf_alle_Fragen :: Int           -- 0-stellig
```

Namensvereinbarungen mit Bezug

Namensvereinbarungen können aufeinander Bezug nehmen, auch auf sich selbst. In diesem Fall spricht man von Rekursion:

```
fac n     = if n <= 0 then 1 else n * fac (n-1)
binom n k = div (fac n) (fac k * fac (n-k))
```

Die Werte von `fac` und `binom` sind Funktionen:

```
fac   :: Int -> Int                  -- 1-stellig
binom :: Int -> Int -> Int           -- 2-stellig
```

Argumente können implizit sein:

```
fib = \n -> if n==0 then 0
            else if n==1 then 1
                 else fib (n-2) + fib (n-1)
```

Der Wert von `fib` ist ebenfalls eine Funktion:

```
fib :: Int -> Int                    -- 1-stellig
```

Aufgebrochene Namensvereinbarungen

Namensvereinbarungen für m-stellige Funktionen, $m \geq 1$, können in mehrere Gleichungen aufgebrochen werden, die einer Fallunterscheidung entsprechen:

```
fac' 0 = 1
fac' n = n * fac' (n-1)

fib' 0 = 0
fib' 1 = 1
fib' n = fib' (n-2) + fib' (n-1)
```

Die Werte von fac′ und fib′ sind Funktionen:

```
fac' :: Int -> Int                    -- 1-stellig
fib' :: Int -> Int                    -- 1-stellig
```

Namensvereinbarungen mit Wächtern

Gleichungen können mit Bedingungen, sog. Wächtern, versehen und vor ungewollter Anwendung geschützt werden:

```
fac'' n
 | n == 0 = 1
 | n >= 0 = n * fac'' (n-1)

fib'' n
 | n == 0 = 0
 | n == 1 = 1
 | n >= 0 = fib'' (n-2) + fib'' (n-1)
```

Mögl. Mehrdeutigkeiten durch Überschneidungen (`fac''`: `n==0` mit `n>=0`; `fib''`: `n==0`, `n==1` mit `n>=0`) werden (in Haskell) durch Prüfung der Wächter von oben nach unten aufgelöst.

Die Werte von `fac''` und `fib''` sind Funktionen:

```
fac'' :: Int -> Int                    -- 1-stellig
fib'' :: Int -> Int                    -- 1-stellig
```

A.3

Operanden und Werte von Ausdrücken

Werte von Ausdrücken, Ausdruckswerte

Ausdrücke können einen elementaren Wert (Zahlen, Zeichen, Wahrheitswerte,...) oder einen funktionalen Wert (Funktion auf den ganzen Zahlen, Funktion auf Zeichenreihen in Wahrheitswerte,...) haben.

- Der Wert des Ausdrucks `a` vereinbart durch:

  ```
  a = (17+4)*2
  ```

  ist elementar, ganzzahlig vom Wert 42; in Haskell: `a :: Int`.

- Der Wert der Ausdrucks `fac''' n` vereinbart durch:

  ```
  fac''' n = if n==0 then 1 else n * fac''' (n-1)
  ```

  ist funktional, eine Funktion auf den ganzen Zahlen; in Haskell: `fac''' :: Int -> Int`.

Operanden von Ausdrücken

Ausdrücke können als Operanden (andere) Ausdrücke

- elementaren Werts haben:

$$\underbrace{\texttt{fac (17+4)*2-39}}_{\texttt{Operand elem. Werts, ganzzahlig}}$$

$$\underbrace{\texttt{fib (fac (17+4)*2-39)}}_{\texttt{Operand elem. Werts, ganzzahlig}}$$

- funktionalen Werts haben:

$$\underbrace{\texttt{map (\textbackslash n-> n+1) [1,2,3]}}_{\texttt{Operand fkt. Werts, Inkrementfunktion}}$$

$$\underbrace{\texttt{foldr (*) 1 [1,2,3]}}_{\texttt{Operand fkt. Werts, Multiplikation}}$$

Werte von Ausdrücken

Werte von Ausdrücken können

- elementar sein:

```
fac (17+4)*2-39 ->> 6 :: Int
fib (fac (17+4)*2-39) ->> fib 6 ->> 8  :: Int
map (\n-> n+1) [1,2,3] ->> [2,3,4] :: [Int]
foldr (*) 1 [3,4,5] ->> 60 :: Int
```

- funktional sein:

```
map (\n-> n+1) :: [Int] -> [Int]      -- 1-stellig
foldr (*) :: Int -> [Int] -> Int      -- 2-stellig
foldr (*) 1 :: [Int] -> Int           -- 1-stellig
```

Funktionen, Funktionen höherer Ordnung

Ausdrücke

- eines funktionalen Werts heißen Funktionen.
- mit mindestens einem funktionalwertigen Operanden oder Wert (-teil) heißen Funktionen höherer Ordnung (oder Funktionale).

Funktionen höherer Ordnung sind also Funktionen, Funktionen mit speziellen Eigenschaften ihrer Argumente oder/und Resultate.

Statt von Operand(en) und Wert spricht man bei Funktionen auch von Argument(en) und Resultat.

Funktionen erster Ordnung

Funktionen, die keine Funktionen höherer Ordnung sind, heissen

- Funktionen erster Ordnung.

Funktionen erster Ordnung sind Funktionen mit elementarwertigen Argumenten und elementarwertigem Resultat.

A.4

Funktionen und Polymorphie: Erstrangige Sprachelemente

Funktionen

...sind in funktionalen Sprachen

- erstrangige Sprachelemente (engl. first-class citizens):
  Ausdrücke funktionalen Werts dürfen (fast überall) stehen, wo auch Ausdrücke elementaren Werts stehen dürfen und umgekehrt.

...sind in imperativen Sprachen

- zweitrangige Sprachelemente (engl. second-class citizens):
  Ausdrücke funktionalen Werts oder Prozeduren dürfen nicht überall stehen; in vielen Sprachen noch auf Argumentposition als funktionale oder prozedurale Argumente von Funktionen und Prozeduren, kaum als Resultat von Funktionen.

Polymorphie

...ist in funktionalen Sprachen

- erstrangiges Sprachelement (engl. first-class citizen):

  ```
  map    :: (a -> b) -> [a] -> [b]
  foldr  :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
  flip   :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
  length :: [a] -> Int
  ```

  Der Typ jeder Funktion ist grundsätzlich von den konkreten Typen der Argumentwerte so weit entkoppelt wie irgend möglich.

...ist in imperativen Sprachen

- zweitrangiges Sprachelement (engl. second-class citizen): Möglichkeiten zur polymorphen Typspezifikation fehlen oft völlig oder sind im Vergleich zu funktionalen Sprachen wesentlich limitiert.

A.5
Imperative vs. funktionale Programme

Imperative Programme

...sind eine Menge von Anweisungsvereinbarungen, kurz Anweisungen, zusammen mit einer Anordnung, in welcher Reihenfolge diese Anweisungen auszuführen sind.

Anweisungen werden in Prozeduren zusammengefasst, um das Programm zu strukturieren; Prozeduren werden in Modulen zusammengefasst, um das Programm weiter zu strukturieren.

Anm.: In objektorientierten Sprachen ist als Bezeichnung Methode statt Prozedur üblich.

Funktionale Programme

...sind eine Menge von Ausdrucksvereinbarungen, kurz Ausdrücken.

Eine explizite, ausdrückliche Anordnung, in welcher Reihenfolge sie ausgewertet werden sollen, gibt es nicht (Ausnahme: In übersetzten Programmen ist ein Ausdruck durch seinen Namen (in Haskell `main`) als zuerst auszuwertender 'Hauptausdruck' ausgezeichnet).

Einzig Wertabhängigkeiten zwischen Ausdrücken legen lose eine Reihenfolge fest, wenn Ausdrücke zur Auswertung ausgewählt werden.

Ausdrücke werden in Modulen zusammengefasst, um Programme zu strukturieren; eine Zusammenfassung von Ausdrücken zu 'Ausdruckssammlungen' analog einer Prozedur (oder Methode) gibt es nicht; eine Funktion ist ein benamter Ausdruck, keine Ausdruckssammlung.

A.6

Wertzuweisung vs. Wertvereinbarung

Wertzuweisungen vs. Wertvereinbarungen

Betrachte die Bedeutung von:

`a := (17+4)*2`   `(oft a = (17+4)*2 als Schreibw.)`

als imperative Wertzuweisung und von:

`b = (17+4)*2`

als funktionale Wertvereinbarung.

Imp. Wertzuweisung, fkt. Wertvereinbarung

...ähnliche Optik, fundamental andere Bedeutung.

- Imperativ: Wertzuweisung, temporär, abänderbar

  ```
  a := (17+4)*2
  ```

  Wertzuweisung für Speicherzelle `a` auf Zeit; Wertzuweisungen sind temporäre Wertfestlegungen für benamte Speicherzellen, Festlegungen auf Zeit, bis zum nächsten Überschreiben (abänderbar, engl. mutable).

- Funktional: Wertvereinbarung, dauerhaft, unabänderbar

  ```
  b = (17+4)*2
  ```

  Wertvereinbarung für Ausdrucksnamen `b` für die gesamte Programmzukunft; Wertvereinbarungen sind permanente Wertfestlegungen für Ausdrucksnamen, Festlegungen für immer, auf alle Zeit (unabänderbar, engl. immutable).

Imperativ: Wertzuweisungen

Wertzuweisung:

```
a := (17+4)*2
```

Bedeutung:

- In der mit dem Namen a bezeichneten Speicherzelle sei ab jetzt bis auf weiteres (abänderbar!) der Wert 42 gespeichert.
- Diese Festlegung kann in der Zukunft jederzeit und beliebig oft widerrufen und durch eine neue Wertfestlegung ersetzt werden, ebenfalls auf Zeit.
- Ein Austausch von a durch 42 oder umgekehrt hat deshalb (über die Vertauschung hinaus) i.a. einen von außen beobachtbaren Effekt und ist deshalb nicht möglich: Nicht überall, wo 42 stehen darf, darf ohne Bedeutungsunterschied auch a stehen oder umgekehrt.

Funktional: Wertvereinbarungen

Wertvereinbarung:

```
b = (17+4)*2
```

Bedeutung:

- Der Name `b` hat ab jetzt für den gesamten restlichen Programmlauf (unabänderbar!) den Wert 42.
- Wo immer 42 stehen darf, darf bedeutungsgleich auch `b` stehen und umgekehrt (cum grano salis - mit einem Körnchen Salz (Plinius der Ältere): $42 =$ `b` ist nicht möglich, weil 42 kein gültiger Name ist).
- Ein Austausch von `b` durch 42 oder umgekehrt hat (über die Vertauschung hinaus) keinen von außen beobachtbaren Effekt.

Imperativ: Variablennamen

...Namen sind Variablennamen.

`a := (17+4)*2` Wertzuweisung, a Variablenname

- Es besteht auf dem Niveau des Programms eine logische und adressierbare Verknüpfung zwischen dem Variablennamen a und einer Speicherzelle, die den Wert der Variablen aufnimmt.
- Aufgrund der Verknüpfung kann diese Speicherzelle vom Programmierer vom Programm aus angesprochen, gelesen und auch geändert werden.

Funktional: Ausdrucksnamen

...Namen sind Ausdrucksnamen.

`b = (17+4)*2` Wertvereinbarung, `b` Ausdrucksname

- Eine logische oder/und adressierbare Verknüpfung des Ausdrucksnamens `b` mit einer Speicherzelle besteht auf dem Niveau des Programms nicht.

  Auf der Maschine ist der mit dem Namen `b` verbundene Wert 42 natürlich in einer Speicherzelle gespeichert (wie auch und wo auch sonst, da wir für funktionale und imperative Programme dieselben Maschinen, dieselben Hardware-Architekturen benutzen). Diese Speicherzelle kann allerdings vom Programmierer vom Programm aus weder angesprochen noch gelesen oder gar geändert werden.

A.7

Selbstbezügliche Wertzuweisungen, Wertvereinbarungen

Sebstbezügliche Wertzuw. und Wertvereinb.

...lassen den konzeptuell fundamentalen Unterschied zwischen

- imperativen Wertzuweisungen (`a := a + 1`)

und

- funktionalen Wertvereinbarungen (`b = b + 1`)

besonders hervortreten und auf den Punkt zu bringen:

Welchen Wert erhält

- `a` durch die imperative Wertzuweisung '`a := a + 1`'?
- `b` durch die funktionale Wertvereinbarung '`b = b + 1`'? Kann oder sollte `b` durch diese Vereinbarung einen wohldefinierten Wert erhalten? Welchen?

Imperativ: Selbstbezug in Wertzuweisungen

Selbstbezügliche Wertzuweisung:

- `a := a + 1`

Operationelle Bedeutung:

- Lies den Wert, der in der mit dem Variablennamen a verknüpften Speicherzelle abgelegt ist, erhöhe ihn um 1 und überschreibe den gelesenen alten Wert mit dem erhöhten neuen Wert.

Das heißt:

- Alles ist wohldefiniert! Der alte Wert, der neue Wert und der Weg vom alten zum neuen Wert. Die Ausführung der selbstbezüglichen Wertzuweisung terminiert!
- Es gibt ein Konzept von vorher und nachher, von Wert vor und nach der Ausführung, von Zustand!
- Der neue Wert von a ist der alte Wert von a erhöht um 1.

Funktional: Selbstbezug in Wertvereinbarungen

Selbstbezügliche Wertvereinbarung:

- `b = b + 1`

Bedeutung:

- Ausdrucksname `b` und rechtsseitiger Ausdruck `b+1` haben denselben Wert; der Wert von `b` ist Lösung der Gleichung `b = b + 1`.

Das heißt:

- Der Wert von `b` ist gleich dem Wert von `b+1`, welcher gleich dem Wert von `(b+1)+1` ist, welcher gleich dem Wert von `((b+1)+1)+1` ist, welcher gleich dem Wert von `(((b+1)+1)+1)+1` ist usw: Ein unendlicher Regress!
- Die operationelle Berechnung des Wert von `b` über die Berechnung des Werts von `b+1`:

  `b ->> b+1 ->> (b+1)+1 ->> ((b+1)+1)+1 ->> ...`

  terminiert nicht! Der Wert von `b` ist undefiniert!

Funktional: Selbstbezug in Wertvereinbarungen

Wichtig:

- Funktional ist weder die Rede von einem alten noch von einem neuen Wert von `b`, sondern nur vom Wert von `b`.
- Funktional gibt es kein Konzept von vorher und nachher, kein Konzept eines Wertes von vor oder nach der Auswertung eines Ausdrucks, kein Konzept eines Zustands!
- Die Gleichung `b = b + 1` hat keine Lösung!
- Der Wert von `b` als Lösung der Gleichung `b = b + 1` existiert deshalb nicht in einem wohldefinierten Sinn, er ist undefiniert.
- Im operationellen Versuch, den Wert einer selbstbezüglichen Wertvereinbarung zu berechnen, zeigt sich das daran, dass die Berechnungsfolge nicht terminiert!

  `b ->> b+1 ->> (b+1)+1 ->> ((b+1)+1)+1 ->> ...`

Auf den Punkt gebracht:

Die imperative Wertzuweisung '`a := a + 1`' bedeutet:

- Erhöhe den in Speicherzelle `a` befindlichen Wert um `1`.

Die funktionale Wertvereinbarung '`b = b + 1`' bedeutet:

- Finde eine Lösung für die Gleichung `b = b + 1`.

Der Bedeutungsunterschied ist offensichtlich und er ist fundamental.

A.8

Problem- und Lösungssicht: Imperativ vs. funktional

Problemsicht

...für imperative und funktionale Programmierung ident, gegeben und beschrieben durch:

- Menge $\mathcal{P}$ von Problemen, Menge $\mathcal{L}$ von Lösungen.
- Probleminstanzen $p \in \mathcal{P}$ mit Lösungen $l_p \in \mathcal{L}$.

Beispiel:

- $\mathcal{P}$: Menge der Listen ganzer Zahlen.
- $\mathcal{L}$: Menge der aufsteigend sortierten Listen ganzer Zahlen.
- p: Die Zahlenliste $42, 4, 4711, 17$.
- l_p: Die aufsteigend sortierte Zahlenliste $4, 17, 42, 4711$.
- Gesucht: Sortierverfahren (z.B. Quicksort) für Listen ganzer Zahlen.

Imperative Lösungssicht

Ansatz:

- Schreibe ein imperatives Programm π über der Variablenmenge V zur Lösung von Probleminstanzen $p \in \mathcal{P}$.

  (Wichtig: Eine Variablenbelegung von π ist eine Abb. $\nu : V \to W$, die jeder Variablen aus V einen Wert aus einem Wertebereich W zuordnet.)

Korrektheitsannahme (partielle Korrektheit):

- Wenn eine initiale Variablenbelegung ν_{init} von π eine Probleminstanz $p \in \mathcal{P}$ beschreibt und π angesetzt auf ν_{init} mit der finalen Variablenbelegung ν_{final} terminiert, dann beschreibt ν_{final} eine Lösung $l_p \in \mathcal{L}$ von p.

Frage, Aufforderung an ein imperatives Prg.

Ist π ein imperatives Programm, $p \in \mathcal{P}$ eine Probleminstanz und ν_{init} eine p beschreibende initiale Variablenbelegung von π, so lauten Frage und Aufforderung an π:

Frage: Welches ist die

- finale Variablenbelegung (und damit Beschreibung einer Lösung $l_p \in \mathcal{L}$ von p)

wenn π auf ν_{init} angesetzt wird, d.h. wenn π mit der durch ν_{init} gegebenen Variablenbelegung gestartet wird?

Aufforderung:

- Führe deine Instruktionen beginnend mit den Werten der initialen Variablenbelegung aus und liefere die Werte der finalen Variabenbelegung!

Funktionale Lösungssicht

Ansatz:

- Schreibe ein funktionales Programm ϕ über der Namensmenge N zur Lösung von Probleminstanzen $p \in \mathcal{P}$.

  (Wichtig: Ein Ausdruck α ist ein Ausdruck über der Namensmenge N von ϕ, wenn α induktiv ausschließlich aus Grundoperanden, Grundoperationen und Namen aus N aufgebaut ist.)

Korrektheitsannahme (partielle Korrektheit):

- Wenn ein Ausdruck α über der Namensmenge N von ϕ eine Probleminstanz $p \in \mathcal{P}$ beschreibt und die Auswertung von α durch ϕ mit dem Wert w terminiert, dann beschreibt w eine Lösung $l_p \in \mathcal{L}$ von p.

Frage, Aufforderung an ein funktionales Prg.

Ist ϕ ein funktionales Programm (also ein System von Gleichungen), $p \in \mathcal{P}$ eine Probleminstanz und α ein p beschreibender Ausdruck über der Namensmenge von ϕ, so lauten Frage und Aufforderung an ϕ:

Frage: Welches ist der

- Wert von α (und damit die Beschreibung einer Lösung $l_p \in \mathcal{L}$ von p)

unter den Gleichungen von ϕ, d.h. was ist der Wert von α, wenn die in ϕ gegebenen Gleichungen gelten?

Aufforderung:

- Liefere den Wert von Ausdruck α unter Lösung der Gleichungen deines Gleichungssystems!

Zum Vergleich

Aufforderung an ein imperatives Programm:

- Führe deine Instruktionen beginnend mit durch ν_{init} gegebenen Variablenbelegung aus und liefere die finale Variablenbelegung ν_{final}!

Aufforderung an ein funktionales Programm:

- Liefere den Wert von Ausdruck α unter Lösung der Gleichungen deines Gleichungssystems!

Der Unterschied ist offensichtlich und fundamental:

- Eine Aufgabe imperativ zu lösen erfordert deshalb eine andere Herangehens- und Denkweise als funktional und umgekehrt!
  - Imperativ: Denken in Instruktionen und ihren Effekten.
  - Funktional: Denken in Gleichung(ssystem)en und Eigenschaften ihrer Lösungen.

Aus dieser unterschiedlichen Sicht

...auf die Welt und ihre Probleme ergeben sich Unterschiede im Denken, Tun und Produkt

- imperativer
- funktionaler

Programmierung.

Denken, Tun, Produkt imp. Programmierung

Denken:

- Denken in Instruktionen und ihren Effekten.

Tun:

Spezifiziere Instruktionen an den Rechner:

- Tu dies, tu das, tu jenes,...

mit dem Ziel, ihn in die Lage zu versetzen, durch Ausführung der vorgegebenen Instruktionen eine initiale Variablenbelegung in eine

- finale Variablenbelegung zu überführen.

Produkt:

Ein imperatives Programm als Gesamtheit seiner Instruktionen.

Denken, Tun, Produkt fkt. Programmierung

Denken:

- Denken in Gleichung(ssystem)en und Eigenschaften ihrer Lösungen.

Tun:

Spezifiziere Gleichungen für den Rechner:

- Diese, jene, folgende,...

mit dem Ziel, ihn in die Lage zu versetzen, durch Lösung der vorgegebenen Gleichungen einen Ausdruck in seinen

- Wert zu überführen.

Produkt:

Ein funktionales Programm als Gesamtheit seiner Gleichungen.

Das Schreiben funktionaler Programme

...ist deshalb das Schreiben von Gleichung(ssystem)en.

Gleichungen funktionaler Programme beschreiben fast alle

- polymorphe echte Funktionen (d.h. 1- oder mehrst. Fkt.):

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f xs = if xs==[] then []
                     else f (head xs) : map f (tail xs)
```

Die allermeisten beschreiben:

- polymorphe Funktionen höherer Ordnung:

```
flip  :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
flip f x y = f y  x
```

- einige polymorphe Funktionen erster Ordnung:

```
length :: [a] -> Int
length xs = if xs==[] then 0 else 1 + length (tail xs)
```

- wenige unechte Funktionen (d.h. 0-stell. Fkt., Konstanten):

```
pi :: Float
pi = 3.14
```

Übungsaufgabe A.8.1 – Logisierung

Wie sehen die Welt und ihre Probleme durch die Brille logischer Programmierung aus? Wie sehen im Sinn dieses Abschnitts die

- logische Lösungssicht (Ansatz, Korrektheitsannahme)
- Frage, Aufforderung an ein logisches Programm

aus?

Wodurch sind Herangehens- und Denkweise gekennzeichnet, ein Problem durch logische Programmierung, z.B. ein Prolog-Programm, zu lösen?

- Logisch Programmieren heißt: Denken in ...?

Was folgt daraus für Tun und Produkt im Fall logischer Programmierung?

A.9

Welcher Problemlösungstyp bin ich?

Imperative Problemlösungssicht

Konzeptionell:

- Denken in Instruktionen und ihren Effekten.

Operationell:

- Haarklein jeden Schritt bis hin zum allerletzten Detail unzweideutig anweisen.

Ich erkär's nur einmal – Sortieren geht so:

```
quickSort (L,low,high)
  if low < high
    then splitInd = partition (L,low,high)
         quickSort (L,low,splitInd-1)
         quickSort (L,splitInd+1,high) fi

partition (L,low,high)
  l = L[low]
  left = low
  for i = low+1 to high do
    if L[i] <= l then left = left+1
                      swap (L[i],L[left]) fi od
  swap (L[low],L[left])
  return left
```

Abtreten zum Sortieren! Im Laufschritt. Marsch!

In der Gefahr besteht die Schwierigkeit nie darin, Menschen zu finden, die gehorchen werden, sondern Männer, die befehlen können.

George Bernard Shaw (1854-1900)
irischer Schriftsteller

Funktionale Problemlösungssicht

Konzeptionell:

- Denken in Gleichung(ssystem)en und Eigenschaften ihrer Lösungen.

Operationell:

- Präzise die Eigenschaften der Lösung beschreiben.

Lieber Sesselkreis, liebe Sesselkreisler,
ich wünsche mir, dass meine Liste permutiert eine der folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:

```
(1) quickSort []     = []
(2) quickSort (n:ns) = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                        ++ [n]
                        ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

...den lästigen Rest zur Wunschverwirklichung übernehmen ihre Sesselkreisler, begeistert, zwanglos, sofort.

Der ideale Mensch fühlt Freude,
wenn er anderen einen Dienst erweisen kann.

Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
griech. Philosoph

Man soll den Menschen nie sagen,
wie sie etwas tun sollen,
sondern nur, was sie tun sollen.
Dann wird ihr Einfallsreichtum einen verblüffen.

George S. Patton (1885-1945)
amerik. General

Imperativer und fkt. Lösungsweg im Vergleich

Imperativ:

Aufgabe des inspirierenden Instrukteurs:

> Exaktes Anweisen des einzuschlagenden Lösungswegs, des 'wie' zur Lösung gelangen.

Funktional:

Aufgabe des eleganten Sesselkreis-Delegateurs:

> Präzises Beschreiben der essentiellen Eigenschaften der Lösung, des 'was' der Lösung, unter weitreichender Freistellung des konkreten Wegs zur Lösung für den Sesselkreis bei freilich determiniertem Ergebnis!

Instrukteur, Delegateur: Erforderliches Wissen

Imperativ:

- Wie sieht die Lösung aus? Wie komme ich zur Lösung hin?

  Bsp.: Der Instrukteur muss wissen: Wenn auf meine Liste folgende Schritte pippifein angewendet werden, ist sie sortiert.

```
quickSort (L,low,high)
  if low < high
    then splitInd = partition (L,low,high)
         quickSort (L,low,splitInd-1)
         quickSort (L,splitInd+1,high) fi
```

```
partition (L,low,high)
  l = L[low]
  left = low
  for i = low+1 to high do
    if L[i] <= l then left = left+1
                      swap (L[i],L[left]) fi od
  swap (L[low],L[left])
  return left
```

Funktional:

- Was erwarte ich von der Lösung?

  Bsp.: Der Delegateur erwartet: Meine Liste ist sortiert, wenn sie Gleichung (1) oder Gleichung (2) erfüllt (und denkt sich: Zu wissen, was ich will, war durchaus genug mit Arbeit verbunden; Wegschrittfolgen auch noch wissen zu sollen, wäre zu viel erwartet!).

```
(1) quickSort []     = []
(2) quickSort (n:ns) = quickSort [m | m <- ns, m <= n]
                       ++ [n] ++ quickSort [m | m <- ns, m > n]
```

Imp. vs. fkt. Lsg.-Weg: Aufgabenlastverteilung

Auf wem liegt konzeptionell und operationell die größere Last?

- Dem handlungsfixierten imperativ vorgehenden Instrukteur?

- Dem ergebnisorientierten funktional vorgehenden Delegateur?

Übungsaufgabe A.9.1 – Schönheitssehnsucht

Instrukteur und imperativer Programmierer erfreuen sich an der exakten Beschreibung der Schönheiten des Wegs zur Lösung, Delegateur und funktionaler Programmierer an der präzisen Beschreibung der Schönheiten der Lösung selbst.

Welche Parallelen gibt es zum Zitat von Antoine de Saint-Exupéry? Welche Doppelrolle kommt den ‘Männern’ im Zitat in dieser Sicht zu?

> Wenn du ein Schiff bauen willst,
> dann trommle nicht Männer zusammen,
> um Holz zu beschaffen, Aufgaben zu vergeben
> und die Arbeit einzuteilen, sondern lehre die Männer
> die Sehnsucht nach dem weiten unendlichen Meer.
>
> Antoine de Saint-Exupéry (1900-1944)
> franz. Schriftsteller

Imperative oder funktionale Programmierung

...eine Frage (auch?!) von Typ, Persönlichkeit, Führungsstil:

- Sie bevorzugen Ordnung, klare Hierarchien und Ansagen und wissen ohnehin am besten, wie eine Aufgabe zu erledigen ist?

  Imperative Programmierung ist Ihr Ding. Probieren Sie nichts anderes.

- Sie bevorzugen ein kooperatives, harmonisches Arbeitsumfeld, in dem partizipativ, konsensual mit schließlicher Zufriedenstellung aller ohne der Rede werten eigenen Beitrags Ihr ganz persönliches Wunschergebnis erarbeitet wird?

  Funktionale Programmierung könnte Ihr Ding sein. Probieren Sie es!

  Gleichungen bilden Ihr kooperatives und harmonisches Arbeitsumfeld!

Typauswertung und Prognose

(1) Sie sind als Instrukteur geboren auf die Welt gekommen ohne sonderliche Veranlassung sich zu verändern? Vor Ihnen

- liegt eine harte Zeit; Sie werden sich glücklich schätzen, anschließend in Ihre Welt der klaren Ansagen zurückkehren zu dürfen.

(2) Sie haben sich als Instrukteur nie wirklich, nie rundum wohlgefühlt? Als Delegateur werden Sie möglicherweise

- aufblühen und darin ihre Bestimmung finden; Ihre Rückkehr in die Welt der klaren Ansagen ist zweifelhaft.

(3) Sie können situationselastisch gleichermaßen gut als Instrukteur wie als Delegateur agieren? Sie werden in beiden

- Welten, der imperativen und der funktionalen Programmierung, reüssieren; das wünsche ich Ihnen!

Ihr Typ ist nicht dabei?

...instruieren scheint Ihnen zu harsch, delegieren zu ausnutzend, logisieren zu kalt, empathie- und herzlos?

Der vierte Weg: Augenhöhe, Wertschätzung!

> Du, Rechner — ich glaube, Deine Ergebnisse — stimmen nicht — was denkst Du? — Wir müssen mal — reden.
>
> Hallo!? — Rechner? — Hallooo? — Wir müssen — reeden!! — Hörst Du nicht? — ICH WILL MIT DIR REEEDEN...

Wenn die Alternativen unattraktiv erscheinen, sicher einen Versuch wert. Oder, Blaise Pascals Logik-Variante, fünfter Weg:

Logik des Herzens.

Blaise Pascal (1623-1662)
franz. Philosoph, Mathematiker und Physiker

Oder 6. Weg: Den Rechner nehmen 'wie er ist'!

- Imperativ zu programmieren verlangt als Instrukteur zu denken und zu handeln.

Gib keine Befehle, die man nicht vollbringen kann.

Äsop (6. Jh. v.Chr.)
griech. Fabeldichter

- Funktional zu programmieren verlangt als Delegateur zu denken und zu handeln.

Delegiere, was andere besser können.

sprichwörtl., lebensklug

- Logisch zu programmieren verlangt als Spockteur zu denken und zu handeln.

Logik, die Anatomie des Denkens.

John Locke (1632-1704)
engl. Philosoph

Das heißt: Ist mein Programmierumfeld

...hineingeworfen oder selbstgewählt (LVA, Firma, mein Projekt), in dem ich erfolgreich sein will, eine Welt

- klarer Ansagen, so denke ich beim Programmieren imperativ in Instruktionen und ihren Effekten und handle als Instrukteur.

- harmonischen und konsensualen Ausgleichs, so denke ich beim Programmieren funktional in Gleichungssystemen und Eigenschaften ihrer Lösungen und handle als Delegateur.

- faszinierender Empathie- und Herzlosigkeit, so denke ich beim Programmieren logisch in Formeln und ihrer logischen Konsequenzen und handle als Spockteur.

Bedenkenswertes zu(m) Denken und Handeln

Das Handeln ist eine Folge des Denkens.

Franz Peter Künzel (* 1925)
dt. Lektor und Redakteur

Denken ist oft schwerer als man denkt.

Werner Mitsch (1936-2009)
dt. Aphoristiker

Denken ist die schwerste Arbeit, die es gibt.
Das ist wahrscheinlich der Grund, warum
sich so wenige damit beschäftigen.

Henry Ford (1863-1947)
amerikan. Unternehmer

Es gibt keinen Ausweg,
den ein Mensch nicht beschreitet,
um die tatsächliche Arbeit
des Denkens zu vermeiden.

Thomas A. Edison (1847-1931)
amerikan. Erfinder und Unternehmer

Verzicht auf Denken ist geistige Bankrotterklärung.

Albert Schweitzer (1875-1965)
elsäss. evang. Theologe und Arzt

Denken hilft. Meistens.
Nachdenken noch mehr.
Am meisten vorher.

Hochschullehrerweisheit, unbekannt (leider)

Auch im Denken gibt es eine Zeit des Pflügens
und eine Zeit der Ernte.

Ludwig Wittgenstein (1889-1951)
österr. Philosoph

Denken lernt man nicht an Regeln zum Denken,
sondern an Stoff zum Denken.

Jean Paul (1763-1825)
dt. Schriftsteller

Worüber wir nicht ernsthaft nachgedacht haben,
vergessen wir schnell.

Marcel Proust (1871-1922)
franz. Schriftsteller

Denken ist nicht dasselbe wie Gelesenhaben.

Antonio Machado (1875-1939)
span. Lyriker

Eine Sache lernt man, indem man sie macht.

Cesare Pavese (1908-1950)
italien. Schriftsteller

Für das Können gibt es nur einen Beweis, das Tun.

Marie von Ebner-Eschenbach (1830-1916)
österr. Schriftstellerin

Wer immer tut, was er schon kann,
bleibt immer das, was er schon ist.

Henry Ford (1863-1947)
amerikan. Unternehmer

Der Weg zum Ziel beginnt an dem Tag,
an dem du die hundertprozentige Verantwortung
für dein Tun übernimmst.

Dante (um 1265-1321)
italien. Schriftsteller

Übungsaufgabe A.9.2 – Feldstudie

Beobachten Sie Ihre Umgebung. Hat Aristoteles recht?

Einen guten und einen weniger guten imperativen Programmierer unterscheidet:

> Niemand kann gut befehlen,
> der nicht zuvor gehorchen gelernt hat.
>
> Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
> griech. Philosoph

Ein funktionaler Programmierer folgt dem Prinzip:

> Der Gebildete treibt die Genauigkeit nicht weiter,
> als es der Natur der Sache entspricht.
>
> Aristoteles (384 - 322 v.Chr.)
> griech. Philosoph

> Cogita, omne simile claudicat.
> Bedenke, jedes Gleichnis hinkt.
>
> lat., sprichwörtl.

Übungsaufgabe A.9.3 – Syllogilei (1)

Die Syllogistik ist die Lehre von den Syllogismen, den logischen Schlüssen, bei denen deduktiv vom Allgemeinen auf das Besondere geschlossen wird. Die Syllogistik geht auf Aristoteles zurück, dargestellt in den beiden *Analytiken*.

Berühmtes Beispiel eines Syllogismus ist:

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
Also ist Sokrates sterblich.

Übungsaufgabe A.9.3 – Syllogilei (2)

Ambros Bierce (1842 - Weihnachten/Neujahr 1913/14), amerik. Schriftsteller, Autor von *'The Cynic's Word Book'*, hat in seiner Erklärung der Logik den arithmetischen Syllogismus als Schluss eingeführt. Mr. Spock, ist (syl)logisch alles o.k.?

Logik, die: Die Kunst des Denkens und Argumentierens in strenger Übereinstimmung mit den Beschränkungen und Unfähigkeiten des menschlichen Missverstehens. Die Grundlage der Logik ist der Syllogismus, der aus einem Obersatz, einem Untersatz und einer Konklusion besteht – in etwa so:

Obersatz: Sechzig Männer können eine Arbeit sechzigmal so schnell vollbringen wie ein einziger.
Untersatz: Ein Mann kann ein Pfostenloch in 60 Sekunden graben, also...
Konklusion: Sechzig Männer können ein Pfostenloch in 1 Sekunde graben.

Dies kann man einen arithmetischen Syllogismus nennen, durch den wir aufgrund der Verbindung von Logik und Mathematik eine doppelte Gewissheit erlangen und daher gleich zwiefach gesegnet sind (Übersetzung von Dr. Michael Siefener).

A.10

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang A (1)

- Neal Ford. *Functional Thinking: Why Functional Programming is on the Rise*. IBM developerWorks, 11 pages, 2013. `www.ibm.com/developerworks/java/library/j-ft20/j-ft20-pdf.pdf`
- Konrad Hinsen. *The Promises of Functional Programming*. Computing in Science and Engineering 11(4):86-90, 2009.
- John Hughes. *Why Functional Programming Matters*. The Computer Journal 32(2):98-107, 1989.
- Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal. *The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II*. Computing in Science and Engineering 11(5):68-75, 2009.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang A (2)

- Mihai Maruseac. *Haskell: A Language for Modern Times*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 24(1):64-66, 2017.
- Yaron Minsky. *OCaml for the Masses*. Communications of the ACM 54(11):53-58, 2011.
- Neil Savage. *Using Functions for Easier Programming*. Communications of the ACM 61(5):29-30, 2018.
- Michael Siefener. *Aus dem Wörterbuch des Teufels*. marixverlag, 2011.
- Philip Wadler. *The Essence of Functional Programming*. In Conference Record of the 19th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 1-14, 1992.

B

Formale Rechenmodelle

B.1

Turing-Maschinen

Turing-Maschine

Definition B.1.1 (Turing-Maschine)

Eine Turing-Maschine TM ist ein ‘schwarzer’ Kasten, der über einen Lese/Schreibkopf mit einem unendlichen Rechenband verbunden ist.

Das Rechenband ist in einzelne (nummerierte) Felder eingeteilt, von denen zu jeder Zeit genau eines unter dem Lese/Schreibkopf liegt.

TM kann interne Zustände $0, 1, 2, 3, \ldots$ aus $\mathbb{N}_0$ annehmen; der interne Zustand 0 ist der Startzustand von TM.

Es gibt eine Möglichkeit, TM einzuschalten; das Arbeiten und Abschalten von TM erfolgt selbsttätig.

Turing-Tafel, Turing-Programm

Definition B.1.2 (Turing-Tafel, Turing-Programm)

Eine Turing-Tafel (oder Turing-Programm) T über einem (endlichen) Zeichenvorrat $\mathcal{A}$ ist eine Tafel mit 4 Spalten und $m+1$ Zeilen, $m \geq 0$:

$$\begin{array}{cccc} i_0 & a_0 & b_0 & j_0 \\ i_1 & a_1 & b_1 & j_1 \\ \ldots & & & \\ i_k & a_k & b_k & j_k \\ \ldots & & & \\ i_m & a_m & b_m & j_m \end{array}$$

Dabei gilt für alle $0 \leq k \leq m$:

- $i_k, j_k \in \mathbb{N}_0$.
- $a_k \in \mathcal{A} \,\dot\cup\, \{\mathfrak{b}\}$ (d.h. $\mathfrak{b} \notin \mathcal{A}$).
- $b_k \in \mathcal{A} \,\dot\cup\, \{\mathfrak{b}\} \,\dot\cup\, \{L, R\}$ (d.h. $L, R \notin \mathcal{A} \,\dot\cup\, \{\mathfrak{b}\}$).
- Für alle Paare $(i_p, a_p) \in \mathbb{N}_0 \times (\mathcal{A} \cup \{\mathfrak{b}\})$ gilt: (i_p, a_p) kommt höchstens einmal als Zeilenanfang vor.

Turing-Tafel, Turing-Programm (fgs.)

Die Elemente jeder Zeile von T bedeuten für eine T beobachtende Turing-Maschine TM:

- Das erste Element einen Zustand, den TM mit ihrem internen Zustand zu vergleichen hat.
- Das zweite Element ein Zeichen aus $\mathcal{A} \dot{\cup} \{\mathfrak{b}\}$, das TM mit dem aktuell unter ihrem Lese/Schreibkopf liegenden Zeichen zu vergleichen hat.
- Das dritte Element den Befehl für TM: 'Drucke b_k', falls $b_k \in \mathcal{A} \dot{\cup} \{\mathfrak{b}\}$; den Befehl 'Gehe nach links', falls $b_k = L$; den Befehl 'Gehe nach rechts', falls $b_k = R$ (d.h. positioniere den Lese/Schreibkopf je ein Feld weiter links bzw. rechts).
- Das vierte Element den internen Folgezustand, den TM nach Ausführung des Befehls annimmt.

Arbeitsweise einer Turing-Maschine

Definition B.1.3 (Arbeitsweise einer TM)

Sei TM eine Turing-Maschine, T eine endliche Turing-Tafel:

- Bei Einschalten nimmt TM den internen Zustand 0 an und der Lese/Schreibkopf positioniert sich über Feld 0 des Rechenbands; dabei wird angenommen, dass auf jedem Feld des Rechenbands etwas steht.
- Einschaltet beobachtet TM die endliche Turing-Tafel (oder Turing-Programm) T und kann abhängig davon:
  - Den Lese/Schreibkopf ein Feld nach links oder nach rechts bewegen.
  - Zeichen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eines (endlichen) Zeichenvorrats $\mathcal{A}$ sowie das Sonderzeichen ƀ $\notin \mathcal{A}$ auf Felder des Rechenbands drucken; ƀ steht dabei für das Leerzeichen. Jedes Drucken löscht und überschreibt das vorher auf dem Feld befindliche Zeichen.

Arbeitsweise einer Turing-Maschine (fgs.)

Arbeiten/rechnen:

- Stimmen interner Zustand von TM und aktuelles Zeichen unter dem Lese/Schreibkopf von TM mit dem Anfang einer Zeile in T überein, so führt TM den Befehl dieser (eindeutig bestimmten) Zeile aus und nimmt anschließend den in dieser Zeile genannten Folgezustand als neuen internen Zustand an.

Abschalten/terminieren:

- TM schaltet sich ab, wenn interner Zustand von TM und aktuelles Zeichen unter dem Lese/Schreibkopf von TM nicht als Anfang einer Zeile in T vorkommen.

Turing-berechenbar

Definition B.1.4 (Turing-berechenbar)

Eine partiell definierte Funktion f ist Turing-berechenbar gdw. es gibt eine Turing-Tafel T, eine T beobachtende Turing-Maschine TM, eine eineindeutige Codierung der Argument- und Bildwerte von f als Rechenbandinhalte, so dass TM angesetzt auf die Codierung eines Arguments a von f mit der Codierung des Bildwerts b von a auf dem Rechenband terminiert, wenn $f(a) = b$ definiert ist, oder nicht terminiert oder mit einem speziellen Fehlerwert als Bandinhalt terminiert, wenn $f(a)$ nicht definiert ist.

Beispiele zweier Turing-Programme (1)

...gegeben durch die Turing-Tafeln T_1 und T_2 über dem einelementigen Zeichenvorrat $\{|\}$.

1. Turing-Tafel T_1:

0	ƀ	$\vert$	1
1	$\vert$	L	2

Eine T_1 beobachtende Turing-Maschine TM terminiert angesetzt auf das Rechenband (vgl. Übungsaufgabe B.1.4):

···	ƀ	ƀ	ƀ	$\vert$	$\vert$	···	$\vert$	ƀ	ƀ	···
	−2	−1	0	1	2		n	n+1	n+2	

im Zustand 2 mit dem Bandinhalt:

···	ƀ	ƀ	$\vert$	$\vert$	$\vert$	···	$\vert$	ƀ	ƀ	···
	−2	−1	0	1	2		n	n+1	n+2	

Beispiele zweier Turing-Programme (2)

2. Turing-Tafel T_2:

0	ƀ	R	1
1	ƀ	ƀ	8
1	$\vert$	ƀ	2
2	ƀ	R	3
3	$\vert$	R	3
3	ƀ	R	4
4	$\vert$	R	4
4	ƀ	$\vert$	5
5	$\vert$	R	5
5	ƀ	$\vert$	6
6	$\vert$	L	6
6	ƀ	L	7
7	$\vert$	L	7
7	ƀ	R	1

Beispiele zweier Turing-Programme (3)

Eine T_2 beobachtende Turing-Maschine TM terminiert angesetzt auf das Rechenband (vgl. Übungsaufgabe B.1.4):

$\cdots$	ƀ	ƀ	$\vert$	$\vert$	$\cdots$	$\vert$	ƀ	ƀ	$\cdots$
	-1	0	1	2		n	n+1	n+2	

mit dem Bandinhalt:

$\cdots$	ƀ	ƀ	ƀ	ƀ	$\cdots$	ƀ	ƀ	$\vert$	$\vert$	$\cdots$	$\vert$	ƀ	ƀ	$\cdots$
	-1	0	1	2		n	n+1	n+2	n+3		3n+1	3n+2		

Übungsaufgabe B.1.4

Eine Turing-Maschine TM, die angesetzt auf ein Band mit je einem Strich auf den Feldern 1 bis n, das ansonsten leer ist, die Turing-Tafel

- T_1 beobachtet, fügt zu den vorhandenen Strichen einen Strich im Feld 0 hinzu, geht einen Schritt nach links und terminiert im Zustand 2.
- T_2 beobachtet, löscht sukzessive alle Striche auf den Feldern 1 bis n und druckt $2n$ Striche neu auf das Band beginnend im Feld $n+2$ und endend im Feld $3n+1$.

1. Überprüfe dieses Verhalten von TM durch schrittweises händisches Nachvollziehen der Arbeitsschritte von TM für jeweils folgenden Anfangsinhalt des Rechenbands:

…	ƀ	ƀ	ƀ	|	|	|	ƀ	ƀ	…
	−2	−1	0	1	2	3	4	5	

2. In welchem Zustand terminiert TM T_2 beobachtend?

B.2

Markov-Algorithmen

Markov-Tafel

Definition B.2.1 (Markov-Tafel)

Eine Markov-Tafel T über einem (endlichen) Zeichenvorrat $\mathcal{A}$ ist eine Tafel mit 5 Spalten und $m+1$ Zeilen, $m \geq 0$:

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & a_0 & i_0 & b_0 & j_0 \\
1 & a_1 & i_1 & b_1 & j_1 \\
\ldots & & & & \\
k & a_k & i_k & b_k & j_k \\
\ldots & & & & \\
m & a_m & i_m & b_m & j_m
\end{array}
$$

Dabei gilt:

- $k, i_p, j_p \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq m$.
- $a_p, b_p \in \mathcal{A}^*$ mit $\mathcal{A}^*$ Menge der Worte über $\mathcal{A}$; ε bezeichnet das leere Wort aus $\mathcal{A}^*$.

Markov-Algorithmus

Definition B.2.2 (Markov-Algorithmus)

Ein Markov-Algorithmus

$$M = (T, Z, E, A, f_M)$$

ist gegeben durch

1. Eine Zwischenkonfigurationsmenge $Z = \mathcal{A}^* \times \mathbb{N}_0$.
2. Eine Eingabekonfigurationsmenge $E \subseteq \mathcal{A}^* \times \{0\}$.
3. Eine Ausgabekonfigurationsmenge $A \subseteq \mathcal{A}^* \times [m+1..\infty)$.
4. Eine Markov-Tafel T über dem (endlichen) Zeichenvorrat $\mathcal{A}$ mit $m+1$ Zeilen mit der durch T definierten (partiellen) Überführungsfunktion

$$f_M : Z \to Z$$

Markov-Algorithmus (fgs.)

...wobei die Überführungsfunktion

$$f_M : Z \to Z$$

definiert ist durch:

$\forall\, x \in \mathcal{A}^*.\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$

$$f_M(x,k) =_{df} \begin{cases} (x, i_k) & \text{falls } k \leq m \text{ und } a_k \text{ keine Teil-} \\ & \text{zeichenreihe von } x \text{ ist.} \\ (\bar{x} b_k \bar{\bar{x}}, j_k) & \text{falls } k \leq m \text{ und } x = \bar{x} a_k \bar{\bar{x}}, \text{ wobei} \\ & \text{die Länge von } \bar{x} \text{ minimal ist.} \\ \textit{undefiniert} & \text{falls } k > m. \end{cases}$$

Der Markov-Alogorithmus M terminiert, wenn das Resultat der Überführungsfunktion undefiniert ist.

Markov-berechenbar

Definition B.2.3 (Markov-berechenbar)

Eine partiell definierte Funktion f ist Markov-berechenbar gdw. es gibt einen Markov-Algorithmus M, eine eineindeutige Codierung der Argument- und Bildwerte von f über dem Zeichenvorrat von M, so dass M angesetzt auf die Codierung eines Arguments a von f mit der Codierung des Bildwerts b von a terminiert, wenn $f(a) = b$ definiert ist, oder nicht terminiert oder mit einer speziellen Zeichenreihe als Fehlerwert terminiert, wenn $f(a)$ nicht definiert ist.

Beispiele dreier Markov-Algorithmen (1)

...in Form der Markov-Tafeln T_1, T_2 und T_3.

1. Markov-Tafel T_1 über dem Alphabet $\{|\}$:

$$0 \quad \varepsilon \quad i_0 \quad | \quad 1$$

2. Markov-Tafel T_2 über dem Alphabet $\{|, \text{ƀ}\}$:

$$0 \quad \text{ƀ} \quad i_0 \quad \varepsilon \quad 1$$

wobei in T_1 und T_2 der Wert i_0 (verschieden von null) beliebig aus $\mathbb{N}_1$ gewählt werden darf.

Beispiele dreier Markov-Algorithmen (2)

3. Markov-Tafel T_3 über dem Alphabet $\{|, \alpha, \beta, ƀ\}$:

0	ƀ	i_0	ƀβ	1
1	$\beta\vert$	2	$\vert\beta$	1
2	$\vert$ƀ	7	ƀ	3
3	ƀ	i_3	ƀα	4
4	$\alpha\vert$	6	$\vert\alpha$	5
5	β	i_5	$\beta\vert$	4
6	α	i_6	ε	2
7	ƀ$\vert$	8	ƀ	7
8	ƀβ	i_8	ε	9

wobei die Werte i_0, i_3, i_5, i_6, i_8 (verschieden von null) beliebig aus $\mathbb{N}_1$ gewählt werden dürfen.

Beispiele dreier Markov-Algorithmen (3)

Stellt man die natürlichen Zahlen als Strichfolgen im Einersystem dar (die leere Strichfolge ε repräsentiert die null die Strichfolge aus n Strichen die Zahl n), so gilt: Die durch die Markov-Tafel

- T_1 induzierte Überführungsfunktion realisiert die Nachfolger-Funktion einer als Strichfolge gegebenen natürlichen Zahl: '$nf\ ||| = ||||$'
- T_2 induzierte Überführungsfunktion realisiert die Addition zweier als Strichfolgen gegebener natürlicher Zahlen: '$|| + ||| = |||||$'
- T_3 induzierte Überführungsfunktion realisiert die Multiplikation zweier als Strichfolgen gegebener natürlicher Zahlen: '$|| * ||| = ||||||$'

Übungsaufgabe B.2.4

Überprüfe anhand einiger selbstgewählter Beispiele durch schrittweises händisches Nachvollziehen der Arbeitsschritte der durch die Markov-Tafeln T_1, T_2 und T_3 induzierten Überführungsfunktionen, dass die zugehörigen Markov-Algorithmen

- M_1 angewendet auf eine als Strichfolge gegebene natürliche Zahl deren Nachfolger dargestellt als Strichfolge berechnet.
- M_2 angewendet auf zwei als Strichfolgen gegebene durch genau ein Leerzeichen ƀ voneinander getrennte natürliche Zahlen deren Summe dargestellt als Strichfolge berechnet.
- M_3 angewendet auf zwei als Strichfolgen gegebene durch genau ein Leerzeichen ƀ voneinander getrennte natürliche Zahlen deren Produkt dargestellt als Strichfolge berechnet.

B.3

Primitiv rekursive Funktionen

Primitiv rekursive Funktionen

Definition B.3.1 (Primitiv rekursive Funktionen)

Eine Funktion f heißt primitiv rekursiv, wenn f ausgehend von den Grundfunktionen $\lambda x.0$ und $\lambda x.x+1$ durch endlich viele Anwendungen expliziter Transformationen, Kompositionen und primitiver Rekursionen hervorgeht.

Transformation, Komposition

Definition B.3.2 (Explizite Transformation)

Eine Funktion g geht aus einer Funktion f durch eine explizite Transformation hervor, wenn es $e_1, \ldots, e_n$ gibt, so dass jedes e_i entweder eine Konstante aus $\mathbb{N}$ oder eine Variable x_i ist, so dass für alle $\bar{x}^m \in \mathbb{N}^m$ gilt:

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f(e_1, \ldots, e_n)$$

Definition B.3.3 (Komposition)

Sind $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}_\perp$, $g_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}_\perp$ für $i = 1, \ldots, k$ Funktionen, dann geht $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}_\perp$ durch Komposition aus den Funktionen $f, g_1, \ldots, g_k$ hervor gdw. für alle $\bar{x}^n \in \mathbb{N}^n$ gilt:

$$h(\bar{x}^n) = \begin{cases} f(g_1(\bar{x}^n), \ldots, g_k(\bar{x}^n)) & \text{falls jedes } g_i(\bar{x}^n) \neq \perp \text{ ist} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Primitive Rekursion

Definition B.3.4 (Primitive Rekursion)

Sind $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}_\perp$ und $g : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_\perp$ Funktionen, dann geht $h : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_\perp$ durch primitive Rekursion aus f und g hervor gdw. für alle $\bar{x}^n \in \mathbb{N}^n, t \in \mathbb{N}$ gilt:

$$h(0, \bar{x}^n) = f(\bar{x}^n)$$

$$h(t+1, \bar{x}^n) = \begin{cases} g(t, h(t, \bar{x}^n), \bar{x}^n) & \text{falls } h(t, \bar{x}^n) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

B.4

μ-rekursive Funktionen

μ-rekursive Funktionen, Minimierung

Definition B.4.1 (μ-rekursive Funktionen)

Eine Funktion f heißt μ-rekursiv, wenn f ausgehend von den Grundfunktionen $\lambda x.0$ und $\lambda x.x + 1$ durch endlich viele Anwendungen expliziter Transformationen, Kompositionen, primitiver Rekursionen und Minimierungen totaler Funktionen hervorgeht.

Definition B.4.2 (Minimierung)

Ist $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}_\perp$ eine Funktion, dann geht $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}_\perp$ aus g durch Minimierung hervor gdw. für alle $\bar{x}^n \in \mathbb{N}^n$ gilt:

$$h(\bar{x}^n) = \begin{cases} t & \text{falls } t \in \mathbb{N} \text{ die kleinste Zahl ist mit } g(t, \bar{x}^n) = 0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

B.5

Leseempfehlungen

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (1)

- Friedrich L. Bauer. *Historische Notizen – Wer erfand den von-Neumann-Rechner?* Informatik-Spektrum 21(3):84-89, 1998.
- Cristian S. Calude. *People and Ideas in Theoretical Computer Science*. Springer-V., 1999.
- Luca Cardelli. *Global Computation*. ACM SIGPLAN Notices 32(1):66-68, 1997.
- Gregory J. Chaitin. *The Limits of Mathematics*. Journal of Universal Computer Science 2(5):270-305, 1996.
- Gregory J. Chaitin. *The Limits of Mathematics – A Course on Information Theory and the Limits of Formal Reasoning*. Springer-V., 1998.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (2)

- Gregory J. Chaitin. *The Unknowable*. Springer-V., 1999.
- Paul Cockshott, Greg Michaelson. *Are There New Models of Computation? Reply to Wegner and Eberbach*. The Computer Journal 50(2):232-247, 2007.
- S. Barry Cooper, Benedikt Löwe, Andrea Sorbi (Hrsg). *New Computational Paradigms: Changing Conceptions of What is Computable*. Springer-V., 2008.
- B. Jack Copeland. *The Broad Conception of Computation*. American Behavioral Scientist 40(6):690-716, 1997.
- B. Jack Copeland. *The Church-Turing Thesis*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2002. `http://plato.stanford.edu/entries/church-turing`

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (3)

- B. Jack Copeland. *Accelerating Turing Machines*. Minds and Machines 12(2):281-301, 2002.
- B. Jack Copeland. *Hypercomputation*. Minds and Machines 12(4):461-502, 2002.
- B. Jack Copeland, Eli Dresner, Diane Proudfoot, Oron Shagrir. *Viewpoint: Time to Reinspect the Foundations? Questioning if Computer Science is Outgrowing its Traditional Foundations*. Communications of the ACM 59(11):34-36, 2016.
- B. Jack Copeland, Carl J. Posy, Oron Shagrir (Hrsg.). *Computability: Turing, Gödel, Church, and Beyond.* MIT Press, 2013.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (4)

- B. Jack Copeland, Oron Shagrir. *The Church-Turing Thesis: Logical Limit or Breachable Barrier?* Communications of the ACM 62(1):66-74, 2019.
- Martin Davis. *What is a Computation?* Kapitel in Lynn A. Steen (Hrsg.), Mathematics Today – Twelve Informal Essays. Springer-V., 241-268, 1978.
- Martin Davis. *Mathematical Logic and the Origin of Modern Computers*. Studies in the History of Mathematics, Mathematical Association of America, 137-165, 1987. Nachdruck in: Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine – A Half-Century Survey, Kemmerer&Unverzagt und Oxford University Press, 149-174, 1988.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (5)

- Martin Davis. *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*. W.W. Norton and Company, 2000.
- Martin Davis. *The Myth of Hypercomputation*. Christof Teuscher (Hrsg.), Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker, Springer-V., 195-212, 2004.
- Martin Davis. *The Church-Turing Thesis: Consensus and Opposition*. In Proceedings of the 2nd Conference on Computability in Europe – Logical Approaches to Computational Barriers (CiE 2006), Springer-V., LNCS 3988, 125-132, 2006.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (6)

- Martin Davis. *Why There is No Such Discipline as Hypercomputation*. Applied Mathematics and Computation 178(1):4-7, Special issue on Hypercomputation, 2006.
- John W. Dawson Jr. *Gödel and the Origin of Computer Science*. In Proceedings of the 2nd Conference on Computability in Europe – Logical Approaches to Computational Barriers (CiE 2006), Springer-V., LNCS 3988, 133-136, 2006.
- Peter J. Denning. *The Field of Programmers Myth*. Communications of the ACM 47(7):15-20, 2004.
- Peter J. Denning, Peter Wegner. *Introduction to What is Computation*. The Computer Journal 55(7):803-804, 2012.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (7)

- Jon Doyle. *What is Church's Thesis? An Outline*. Minds and Machines 12(4):519-520, 2002.
- Charles E.M. Dunlop. Book review on: M. Gams, M. Paprzycki, X. Wu (Hrsg.). *Mind Versus Computer: Were Dreyfus and Winograd Right?*, Frontiers in Artificial Intelligence and Applications Vol. 43, IOS Press, 1997. Minds and Machines 10(2):289-296, 2000.
- Eugene Eberbach, Dina Q. Goldin, Peter Wegner. *Turing's Ideas and Models of Computation*. Christof Teuscher (Hrsg.), Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker, Springer-V., 159-194, 2004.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (8)

- Bertil Ekdahl. *Interactive Computing does not Supersede Church's Thesis*. In Proceedings of the 17th International Conference on Computer Science, Association of Management and the International Association of Management, Vol. 17, No. 2, Part B, 261-265, 1999.
- Matjaž Gams. *The Turing Machine may not be the Universal Machine – A Reply to Dunlop*. Minds and Machines 12(1):137-142, 2002.
- Matjaž Gams. *Alan Turing, Turing Machines and Stronger*. Informatica 37(1):9-14, 2013.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (9)

- Dina Q. Goldin, Scott B. Smolka, Paul C. Attie, Elaine L. Sonderegger. *Turing Machines, Transition Systems, and Interaction*. Information and Computation Journal 194(2):101-128, 2004.
- Dina Q. Goldin, Peter Wegner. *The Interactive Nature of Computing: Refuting the Strong Church-Rosser Thesis*. Minds and Machines 18(1):17-38, 2008.
- Yuri Gurevich. *What is an Algorithm?* In Proceedings of SOFSEM 2012: Theory and Practice of Computer Science - 38th Conference on Current Trends in the Theory and Practice of Computer Science. Springer-V., LNCS 7147, 31-42, 2012.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (10)

- Yuri Gurevich. *Unconstrained Church-Turing Thesis cannot Possibly be True*. CoRR abs/1901.04911, 2019. `https://arxiv.org/abs/1901.04911`
- Brosl Hasslacher. *Beyond the Turing Machine*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey. Springer-V., 2. Auflage, 387-402, 1995.
- Neil D. Jones. *Computability and Complexity from a Programming Perspective*. MIT Press, 1997.
- Saul B. Kripke. *The Church-Turing "Thesis" as a Special Corollary of Gödel's Completeness Theorem*. In B. Jack Copeland, Carl J. Posy, Oron Shagrir (Hrsg.) Computability: Turing, Gödel, Church, and Beyond. MIT Press, 77-104, 2013.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (11)

- John MacCormick. *What can be Computed? A Practical Guide to the Theory of Computation*. Princeton University Press, 2018.
- Emil Leon Post. *Finite Combinatory Processes: Formulation I*. The Journal of Symbolic Logic 1(3):103-105, 1936.
- Michael Prasse, Peter Rittgen. *Bemerkungen zu Peter Wegners Ausführungen über Interaktion und Berechenbarkeit*. Informatik-Spektrum 21(3):141-146, 1998.
- Michael Prasse, Peter Rittgen. *Why Church's Thesis Still Holds. Some Notes on Peter Wegner's Tracts on Interaction and Computability*. The Computer Journal 41(6):357-362, 1998.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (12)

- Edna E. Reiter, Clayton M. Johnson. *Limits of Computation: An Introduction to the Undecidable and the Intractable*. Chapman and Hall, 2012.
- Uwe Schöning. *Complexity Theory and Interaction*. In Rolf Herken (Hrsg.), The Universal Turing Machine – A Half-Century Survey. 2. Auflage, Springer-V., 519-536, 1995.
- Jack T. Schwartz. *Do the Integers Exist? The Unknowability of Arithmetic Consistency*. Communications on Pure and Applied Mathematics 58:1280-1286, 2005.
- Dennis Shasha. *Future of Computing: Inspiration from Nature*. Crossroads, the ACM Magazine for Students 18(3):38-39, 2012.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (13)

- Wilfried Sieg. *Church without Dogma: Axioms for Computability*. In S. Barry Cooper, Benedikt Löwe, Andrea Sorbi (Hrsg.), New Computational Paradigms - Changing Conceptions of What is Computable, Springer-V., 139-152, 2008.
- Alan Turing. *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*. Proceedings of the London Mathematical Society 42(2):230-265, 1936. Correction, ibid, 43:544-546, 1937.
- Alan Turing. *Computing Machinery and Intelligence*. Mind 59:433-460, 1950.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (14)

- Jan van Leeuwen, Jirí Wiedermann. *On Algorithms and Interaction*. In Proceedings of the 25th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2000), Springer-V., LNCS 1893, 99-112, 2000.
- Jan van Leeuwen, Jirí Wiedermann. *The Turing Machine Paradigm in Contemporary Computing*. In Björn Enquist, Wilfried Schmidt (Hrsg.), Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond. Springer-V., 1139-1155, 2001.
- Jan van Leeuwen, Jirí Wiedermann. *Beyond the Turing Limit: Evolving Interactive Systems*. In Proceedings of the 28th Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics (SOFSEM 2001), Springer-V., LNCS 2234, 90-109, 2001.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (15)

- Robin Milner. *Elements of Interaction: Turing Award Lecture*. Communications of the ACM 36(1):78-89, 1993.
- Hava T. Siegelmann. *Neural Networks and Analog Computation: Beyond the Turing Limit.* Birkhäuser, 1999.
- Peter Wegner. *Why Interaction is More Powerful Than Algorithms*. Communications of the ACM 40(5):81-91, 1997.
- Peter Wegner. *Interactive Foundations of Computing*. Theoretical Computer Science 192(2):315-351, 1998.
- Peter Wegner. *Observability and Empirical Computation*. The Monist 82(1), Issue on the Philosophy of Computation, 1999. www.cs.brown.edu/people/pw/papers/monist.ps

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (16)

- Peter Wegner. *The Evolution of Computation*. The Computer Journal 55(7):811-813, 2012.
- Peter Wegner, Eugene Eberbach. *New Models of Computation*. The Computer Journal 47(1):4-9, 2004.
- Peter Wegner, Dina Q. Goldin. *Interaction, Computability, and Church's Thesis*. Accepted to the British Computer Journal.
  `www.cs.brown.edu/people/pw/papers/bcj1.pdf`
- Peter Wegner, Dina Q. Goldin. *Computation Beyond Turing Machines*. Communications of the ACM 46(4):100-102, 2003.

Leseempfehlungen zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium für Anhang B (17)

Peter Wegner, Dina Q. Goldin. *The Church-Turing Thesis: Breaking the Myth*. In Proceedings of the 1st Conference on Computability in Europe – New Computational Paradigms (CiE 2005), Springer-V., LNCS 3526, 152-168, 2005.

C

Andere funktionale Sprachen

Schlaglichter

...auf ausgewählte andere funktionale Programmiersprachen und wesentliche ihrer Eigenschaften:

- ML: Starker Wettbewerber von Haskell mit sofortiger (engl. eager) Auswertung.
- Lisp: Der *Oldtimer* unter den funktionalen Sprachen.
- APL: Ein sprachlicher Exot.
- ...

C.1

ML

ML: Eine Sprache mit 'sofortiger' Auswertung

ML, eine strikte funktionale Sprache.

Wichtige Eigenschaften:

- Starke Typisierung mit Typinferenz, keine Typklassen.
- Umfangreiches Typkonzept für Module und abstrakte Datentypen (ADTs).
- Lexical scoping, curryfizieren (wie Haskell).
- Zahlreiche Erweiterungen (z.B. in OCaml) auch für imperative und objektorientierte Programmierung.
- Sehr gute theoretische Fundierung.

ML-Programmbeispiel: Module/ADTs in ML

```
structure S = struct
     type 't Stack           = 't list;
     val  create             = Stack nil;
     fun  push x (Stack xs)  = Stack (x::xs);
     fun  pop (Stack nil)    = Stack nil;
     |    pop (Stack (x::xs)) = Stack xs;
     fun  top (Stack nil)    = nil;
     |    top (Stack (x:xs)) = x;
end;
```

```
signature st = sig type q; val push: 't -> q -> q; end;
```

```
structure S1:st = S;
```

C.2

Lisp

Lisp: Der ‘Oldtimer’ fkt. Programmierspr.

Lisp, eine bewährte und weiterhin häufig verwendete strikte funktionale Sprache mit imperativen Zusätzen.

Wichtige Eigenschaften:

- Einfache, interpretierte Sprache, dynamisch typisiert.
- Listen sind gleichzeitig Daten und Funktionsanwendungen.
- Nur lesbar, wenn Programme gut strukturiert sind.
- Erfolgreicher Einsatz in vielen Bereichen, insbesondere künstliche Intelligenz, Expertensysteme.
- Umfangreiche Bibliotheken, leicht erweiterbar.
- Sehr gut zur Metaprogrammierung geeignet

Ausdrücke in Lisp

Beispiele für Symbole:	A	(Atom)
	austria	(Atom)
	68000	(Zahl)

Beispiele für Listen:
(plus a b)
((meat chicken) water)
(unc trw synapse ridge hp)
nil bzw. () entsprechen leerer Liste

Eine Zahl repräsentiert ihren Wert direkt —
ein Atom ist der Name eines assoziierten Werts.

(setq x (a b c)) bindet x global an (a b c)
(let ((x a) (y b)) e) bindet x lokal in e an a und y an b

Funktionen in Lisp

Das erste Element einer Liste wird normalerweise als Funktion interpretiert, anzuwenden auf die restlichen Listenelemente.

(quote a) bzw. 'a liefert Argument a selbst als Ergebnis.

Beispiele für primitive Funktionen:

```
(car '(a b c))      ->> a
(car 'a)            ->> error
(cdr '(a b c))      ->> (b c)
(cdr '(a))          ->> nil
(cons 'a '(b c))    ->> (a b c)
(cons '(a) '(b))    ->> ((a) b)
```

```
(atom 'a)           ->> t
(atom '(a))         ->> nil
(eq 'a 'a)          ->> t
(eq 'a 'b)          ->> nil
(cond ((eq 'x 'y) 'b)
      (t 'c))       ->> c
```

Funktionsdefinitionen in Lisp

- (lambda (x y) (plus x y)) ist Funktion mit zwei Parametern.
- ((lambda (x y) (plus x y)) 2 3) wendet diese Funktion auf die Argumente 2 und 3 an und liefert 5 als Resultat.
- (define (add (lambda (x y) (plus x y)))) definiert einen globalen Namen "'add'" für die Funktion.
- (defun add (x y) (plus x y)) ist abgekürzte Schreibweise dafür.

Beispiel:

```
(defun reverse (l) (rev nil l))
(defun rev (out in)
     (cond ((null in) out)
           (t (rev (cons (car in) out) (cdr in)))))
```

Closures in Lisp

- Kein curryfizieren in Lisp, sog. closures als Ersatz.
- Closures: lokale Bindungen behalten Wert auch nach Verlassen der Funktion.

  Beispiel:
  ```
  (let ((x 5))
    (setf (symbol-function 'test)
      #'(lambda () x)))
  ```
- Praktisch: Funktion gibt closure zurück.

  Beispiel:
  ```
  (defun create-function (x)
    (function (lambda (y) (add x y)))
  ```
- Closures sind flexibel, aber curryfizieren ist viel einfacher.

Dynamisches vs. statisches Binden

...engl. dynamic scoping, static scoping.

- Lexikalisch: Bindung ortsabhängig (Quellcode).
- Dynamisch: Bindung vom Zeitpunkt abhängig.
- 'Normales' Lisp: Lexikalisches Binden.

  Beispiel:
  ```
  (setq a 100)
  (defun test () a)
  (let ((a 4)) (test))    ⇒ 100
  ```
- Dynamisches Binden durch (defvar a) möglich.

  Das obige Beispiel liefert damit 4.

Makros

- Code expandiert, nicht als Funktion aufgerufen (wie C).
- Definition: Erzeugt Code, der danach evaluiert wird.

  Beispiel:
  ```
  (defmacro get-name (x n)
      (list 'cadr (list 'assoc x n)))
  ```
- Expansion und Ausführung:
  ```
  (get-name 'a b) <<->> (cadr (assoc 'a b))
  ```
- Nur Expansion:
  ```
  (macroexpand '(get-name 'a b)) ->> '(cadr (assoc 'a b))
  ```

Lisp im Vergleich mit Haskell

Kriterium	Lisp	Haskell
Basis	Einfacher Interpreter	Formale Grundlage
Zielsetzung	Viele Bereiche	Referentiell transparent
Verwendung	Noch häufig	Zunehmend
Sprachumfang	Riesig (kleiner Kern)	Moderat, wachsend
Syntax	Einfach, verwirrend	Modern, Eigenheiten
Interaktivität	Hervorragend	Mit Einschränkungen
Typisierung	Dynamisch, einfach	Statisch, modern
Effizienz	Relativ gut	Relativ gut
Zukunft	Noch lange genutzt	Einflussreich

C.3
APL

APL: Ein Exot unter den Sprachen

APL, eine ältere applikative (funktionale) Sprache mit imperativen Zusätzen.

Wichtige Eigenschaften:

- Dynamische Typisierung.
- Verwendung speziellen Zeichensatzes.
- Zahlreiche Funktionen (höherer Ordnung) sind vordefiniert; Sprache aber nicht einfach erweiterbar.
- Programme sehr kurz und kompakt, aber kaum lesbar.
- Besonders für Berechnungen mit Feldern gut geeignet.

APL-Programmentwicklung

...anhand eines Beispiels: Berechne d. Primzahlen von 1 bis N:

Schritt 1. $(\iota N) \circ.| (\iota N)$

Schritt 2. $0 = (\iota N) \circ.| (\iota N)$

Schritt 3. $+/[2]\ 0 = (\iota N) \circ.| (\iota N)$

Schritt 4. $2 = (+/[2]\ 0 = (\iota N) \circ.| (\iota N))$

Schritt 5. $(2 = (+/[2]\ 0 = (\iota N) \circ.| (\iota N)))\ /\ \iota N$

D

Datentypdeklarationen in Pascal

Aufzählungstypen in Pascal

```
TYPE jahreszeiten = (fruehling, sommer, herbst, winter);
     spielfarbe   = (karo, herz, pik, kreuz);
     werktage     = (montag, dienstag, mittwoch,
                     donnerstag, freitag);
     wochenende   = (samstag, sonntag);
```

Bemerkung:

- Gleichheits- und Ordnungsrelationen sind auf Aufzählungstypen automatisch definiert (entspricht `deriving (Eq,Ord)`), so dass Aufzählungstypwerte verglichen werden können, z.B. karo $=$ pik $\leadsto$ false, karo $<$ pik $\leadsto$ true, kreuz $>=$ herz $\leadsto$ true, herz $<>$ kreuz $\leadsto$ true.
- Die Funktionen succ und pred liefern den Nachfolge- und Vorgängerwert eines Werts, die Funktion ord seine Position in der Aufzählung (entspricht `deriving Enum`), z.B. succ (herz) $\leadsto$ pik, pred (herz) $\leadsto$ karo, succ (kreuz) undef., ord (karo) $\leadsto$ 0, ord (kreuz) $\leadsto$ 3.

Produkttypen in Pascal

```
TYPE person    = RECORD
                  name: ARRAY [1..50] OF char;
                  geschlecht: (maennlich, weiblich);
                  alter: 0..150
                 END;

     anschrift = RECORD
                  gemeinde: ARRAY [1..50] OF char;
                  strasse: ARRAY [1..75] OF char;
                  hausnr: integer;
                  land: ARRAY [1..100] OF char
                 END;
```

Bemerkung:

- Der Typ von alter ist hier als Ausschnittstyp ganzer Zahlen definiert. Werte des Typs 0..150 sind die Zahlen von 0 bis 150.
- Bereichsüberschreitungen zur Laufzeit werden automatisch überprüft und führen zum Programmabbruch.

Summentypen in Pascal

```
TYPE index1 = 1..5;
TYPE index2 = 1..100;
TYPE traegermedium = (buch, ebuch, dvd, cd);

TYPE bildSchriftUndTonTraeger =
 RECORD
  CASE
   medium: traegermedium OF
   buch: (autor, titel, verlag: ARRAY [index2] OF char;
          auflage: 1..20; lieferbar: boolean);
   ebuch: (autor, titel, verlag: ARRAY [index2] OF char;
           lizenzBisJahr: integer);
   dvd: (titel, regisseur: ARRAY [index2] OF char;
         hauptdarsteller, sprachen: ARRAY [index1,index2]
                                              OF char);
   cd: (kuenstler, titel: ARRAY [index2] OF char;
        spieldauer: ARRAY [1..3] OF integer)
 END;
```

Mengentypen in Pascal

```
TYPE buchstaben = 'a'..'z';
TYPE zutaten = (mehl, zucker, salz, hefe, eier, essig,
                honig, rosinen, mandeln, joghurt, obst)

TYPE buchstabensuppe = SET OF buchstaben;
TYPE rezept = SET OF zutaten;

VAR vokalsuppe, allerleisuppe: buchstabensuppe;
VAR lebkuchen, nachtisch, verdorben: rezept;

vokalsuppe    := ['a','o','e','u']
                   * ['u','a'..'g'];        (Durchschnitt)
allerleisuppe := ['a'..'z'] - vokalsuppe;     (Differenz)
lebkuchen     := [mehl..salz,eier,honig..mandeln];
nachtisch     := [joghurt,obst];
verdorben     := lebkuchen + [essig];      (Vereinigung)
```

Bemerkung: Mengentypen in Pascal besitzen Eigenschaften und Funktionen, die denen von Listentypen und automatischer Listengenerierung in funktionalen Sprachen ähneln.

E

Implementierungsaspekte

Lineare und repetitive Rekursion

...am Beispiel der Fakultätsfunktion.

Formulierung mittels linearer Rekursion:

Funktional (in Haskell)

```
fac :: Int -> Int
fac n
 | n == 0 = 1
 | True   = n * fac (n-1)
```

Imperativ (in Pseudo-Code)

```
FUNC fac (n: int): int;
 {
  IF n == 0 THEN fac := 1
  ELSE fac := n * fac(n-1) FI }
```

Formulierung mittels repetitiver Rekursion:

Funktional (in Haskell)

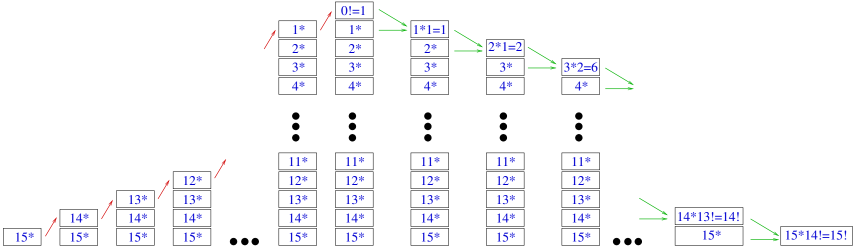
```
fac :: Int -> Int -> Int
fac n res
 | n == 0 = res
 | True   = fac (n-1) (n*res)
```

Imperativ (in Pseudo-Code)

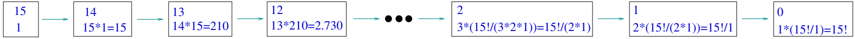
```
FUNC fac (n,res: int): int;
 {
  IF n == 0 THEN fac := res
  ELSE fac := fac(n-1,n*res) FI }
```

Berechnungsablauf

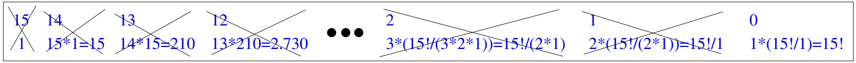
...im Fall linearer Rekursion:



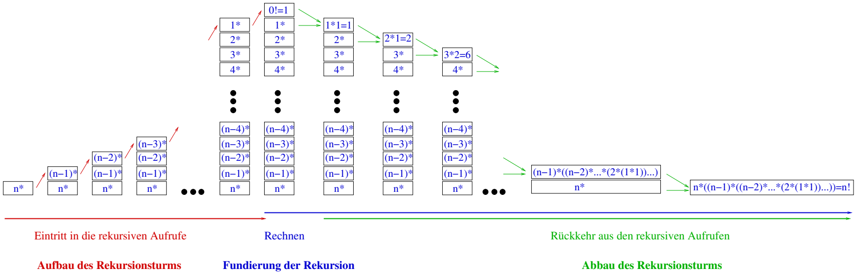
...im Fall repetitiver Rekursion:



Ein (überschreibbarer) Speicherplatz reicht für die Rechnung:

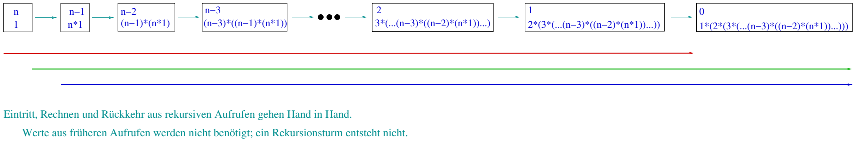


Laufzeitkeller/-stapel bei linearer Rekursion



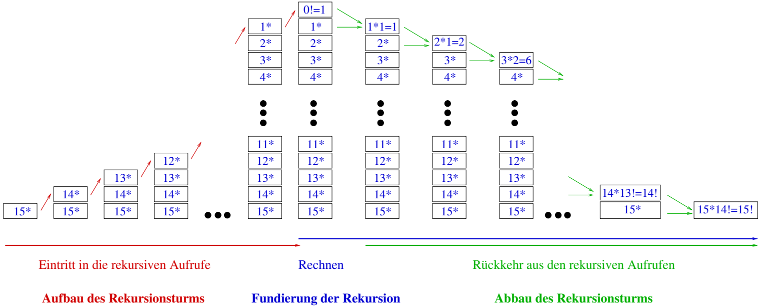
- Im Fall linearer Rekursion ist der rekursive Aufruf nicht die letzte Aktivität in einem Rechenzweig; nach Rückkehr aus dem rekursiven Aufruf wird die Rechnung in der akuellen Funktionsinkarnation fortgesetzt.
- Für die Fortsetzung der Rechnung sind Werte vorzuhalten, organisiert in Form eines Laufzeitkellers/-stapels.
- Auf- und Abbau des Laufzeitstapels erfordern Verwaltungsaktivitäten, die über die eigentliche Berechnung hinausgehenden zusätzlichen Rechenaufwand zur Laufzeit verursachen.

Laufzeitkeller/-stapel bei repetitiver Rekursion



- Im Fall repetitiver Rekursion ist der rekursive Aufruf die letzte Aktivität in einem Rechenzweig; sie schließt den aktuellen Aufruf vollständig ab.
- Eine Rückkehr in diese (oder frühere) Funktionsinkarnationen erfolgt nicht; Werte müssen nicht für eine Fortsetzung der Rechnung vorgehalten werden.
- Der Laufzeitstapel bleibt flach; Rechenaufwand für Auf- und Abbau entsteht nicht.

Konkret: Lineare Rekursion am Bsp. von 15!



Ablaut der Rechnung:

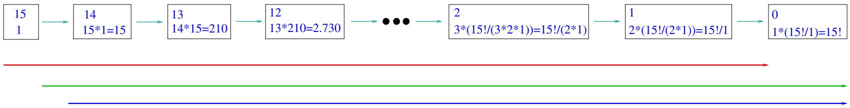
- Phase 1: Vollständiger Aufbau des Terms (Eintritt in die Rekursion)

$$15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * (3 * (2 * (1 * 1)))) \ldots))))$$

- Phase 2: Ausführung der Rechnung (Rückkehr aus der Rekursion)

$$\begin{aligned}
& 15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * (3 * (2 * (1 * 1)))) \ldots)))) \\
\rightsquigarrow\ & 15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * (3 * (2 * 1))) \ldots)))) \\
\rightsquigarrow\ & 15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * (3 * 2)) \ldots)))) \\
\rightsquigarrow\ & 15 * (14 * (13 * (12 * (\ldots * (4 * 6) \ldots)))) \\
\rightsquigarrow\ & \cdots \rightsquigarrow 15! = 1.307.674.368.000
\end{aligned}$$

Konkret: Repetitive Rekursion am Bsp. v. 15!



Eintritt, Rechnen und Rückkehr aus rekursiven Aufrufen gehen Hand in Hand.

Werte aus früheren Aufrufen werden nicht benötigt; ein Rekursionsturm entsteht nicht.

Ablauf der Rechnung:

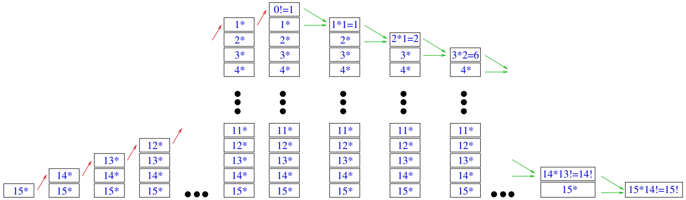
- 1-phasig: Termaufbau und Rechnung gehen Hand in Hand!

$$\begin{array}{rrcl}
 & 15 & / & 1 \\
\rightsquigarrow & 15-1=14 & / & 15*1=15 \\
\rightsquigarrow & 14-1=13 & / & 14*15=210 \\
\rightsquigarrow & 13-1=12 & / & 13*210=2.730 \\
\rightsquigarrow & & \ldots & \\
\rightsquigarrow & 3-1=2 & / & 3*\frac{15!}{3*2*1}=\frac{15!}{2*1}=653.837.184.000 \\
\rightsquigarrow & 2-1=1 & / & 2*\frac{15!}{2*1}=\frac{15!}{1}=1.307.674.368.000 \\
\rightsquigarrow & 1-1=0 & / & 1*\frac{15!}{1}=15!=1.307.674.368.000
\end{array}$$

Wer wird eher fertig sein?

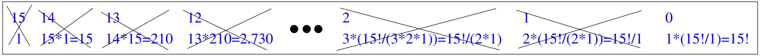
Jemand, der

- auf der grünen Wiese für jeden Rechenschnipsel ein neues Stockwerk zu einem Wolkenkratzer in die Höhe türmt, um nach der Ausführung jedes dieser Stockwerke wieder abzureißen, um die Wiese wieder grün zu hinterlassen?



...oder jemand, der

- die grüne Wiese grün sein lässt, Platz darauf nimmt und die gesamte Rechnung direkt am (Sitz-) Platz vornimmt?



Mehr dazu

...in Lehrveranstaltungen zum Übersetzerbau, insbesondere:

- LVA 185.A48 Übersetzerbau
- LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer
- LVA 185.A22 Seminar aus Übersetzerbau

Orthogonal

...zu vorigen Überlegungen ist die Überführung von

- repetitiver, linearer Rekursion

in funktionalen (oder imperativen) Programmen in

- Iteration (d.h. in while-Schleifen).

Überführung repetitiver Rekursion in Iteration

...am Beispiel der Berechnung des größten gemeins. Teilers.

Formulierung mittels repetitiver Rekursion:

Funktional (in Haskell)

```
ggt :: Int -> Int -> Int
ggt m n
 | n == 0 = m
 | m >= n = ggt (m-n) n
 | True   = ggt (n-m) m
```

Imperativ (in Pseudo-Code)

```
FUNC ggt (m,n: int): int;
 {
  IF n=0 THEN ggt := m
  ELSF m >= 0 THEN ggt := ggt(m-n,n)
  ELSE ggt := ggt(n-m,m) FI }
```

Formulierung mittels Iteration (in Pseudo-Code):

```
VAR m,n,ggt: int;
read(m,n);                        ≙ Aufrufen ggt m n, ggt(m,n)
WHILE not(n==0) DO
 IF m >= 0 THEN m := m-n ELSE (m,n) := (n-m,m) FI OD;
ggt := m.
```

Überführung repetitiver Rekursion in Iteration

...am Beispiel der Fakultätsfunktion.

Formulierung mittels repetitiver Rekursion:

Funktional (in Haskell)

```
fac :: Int -> Int -> Int
fac n res
 | n == 0 = res
 | True   = fac (n-1) (n*res)
```

Imperativ (in Pseudo-Code)

```
FUNC fac (n,res: int): int;
 {
  IF n==0 THEN fac := res
  ELSE fac := fac(n-1,n*res) FI }
```

Formulierung mittels Iteration (in Pseudo-Code):

```
VAR n,res,fac: int;
(n,res) := (readint,1);      ≙ Aufrufen fac n 1, fac(n,1)
WHILE not(n==0) DO
 (n,res) := (n-1,n*res) OD;
fac := res.
```

Überführung linearer Rekursion in Iteration

...am Beispiel der Fakultätsfunktion.

Formulierung mittels linearer Rekursion:

Funktional (in Haskell)

```
fac :: Int -> Int
fac n
 | n == 0 = 1
 | True   = n * fac (n-1)
```

Imperativ (in Pseudo-Code)

```
FUNC fac (n: int): int;
 {
  IF n==0 THEN fac := 1
  ELSE fac := n * fac(n-1) FI }
```

Formulierung mittels Iteration (in Pseudo-Code):

```
VAR n,fac: int; ns: [int];
n := readint;                       ≙ Aufrufen fac n, fac(n)
ns := [];
WHILE not(n==0) DO              (Phase 1: Sammeln aller Werte)
 (n,ns) := (n-1,n:ns) OD;
ns := 1:ns
WHILE length(ns)>=2 DO                     (Phase 2: Rechnen)
 ns := (fst(ns)*snd(ns)):(tail(tail(ns)) OD;
fac := fst(ns).
```

Verbesserung: Ersetzen der

...Laufzeitkeller/-stapelsimulation mittels Liste ns in Phase 1:

```
VAR n,fac: int; ns: [int];
n := readint;                       ≙ Aufrufen fac n, fac(n)
ns := [];
WHILE not(n==0) DO           (Phase 1: Sammeln aller Werte)
 (n,ns) := (n-1,n:ns) FI OD;
ns := 1:ns
WHILE length(ns)>=2 DO                    (Phase 2: Rechnen)
 ns := (fst(ns)*snd(ns)):(tail(tail(ns)) OD;
fac := fst(ns).
```

durch sofortiges Rechnen mittels einer Variablen res:

```
VAR n,fac,res: int;
n := readint;                       ≙ Aufrufen fac n, fac(n)
res := 1;
WHILE not(n==0) DO
 (n,res) := (n-1,n*res) OD;
fac := res.
```

Beobachtung

Die verbesserte iterative Umsetzung linearer Rekursion:

```
    VAR n,fac,res: int;
 ↦  n := readint;                    ≙ Aufrufen fac n, fac(n)
 ↦  res := 1;
    WHILE not(n==0) DO
     (n,res) := (n-1,n*res) OD;
    fac := res.
```

...ist *de facto* die iterative Umsetzung der auf repetitive Rekursion zurückgeführten linearen Rekursion:

```
    VAR n,res,fac: int;
 ↦  (n,res) := (readint,1);    ≙ Aufrufen fac n 1, fac(n,1)
    WHILE not(n==0) DO
     (n,res) := (n-1,n*res) OD;
    fac := res.
```

Programmanalysen

...erlauben Übersetzern, Rekursionsmuster wie z.B.

- lineare Rekursion

durch

- repetitive Rekursion

oder in Abhängigkeit der Zielsprache auch durch

- Iteration

zu ersetzen.

Exkurs: Turing-Mächtigkeit von WHILE

Die Programmiersprache WHILE (der sog. while-Kern imperativer Programmiersprachen) mit

$$
\begin{array}{lll}
\pi & ::= & x := a & \text{(Zuweisung)} \\
 & & \mid \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} & \text{(Fallunterscheidung)} \\
 & & \mid \text{while } b \text{ do } \pi_1 \text{ od} & \text{(while-Schleife)} \\
 & & \mid \pi_1; \pi_2 & \text{(Sequentielle Komposition)}
\end{array}
$$

wobei

- a für Ausdrücke
- b für Wahrheitswertausdrücke

stehen, ist Turing-mächtig.

Informelle Folgerung

...aus der Turing-Mächtigkeit von WHILE:

- Jedes rekursive Programm lässt sich in ein bedeutungsgleiches WHILE-Programm überführen, d.h. in ein iteratives Programm, das ausschließlich while-Schleifen zur wiederholten Ausführung nutzt.

...und stärker:

- Jedes WHILE-Programm lässt sich in ein bedeutungsgleiches WHILE-Programm mit einer einzigen while-Schleife überführen, ein Programm in sog. Engelerscher Normalform.

Nicht immer jedoch ist dies so einfach wie für

- repetitive und lineare Rekursion.

Übungsaufgabe E.1

Löse die Probleme

1. Türme von Hanoi
2. fun91

nach dem Vorbild der Haskell-Funktionen hanoi und fun91 rekursiv in einer imperativen oder objektorientierten Sprache, z.B. Java.

```
hanoi :: Turmhoehe -> A_Stapel -> Z_Stapel -> H_Stapel
                                       -> [(Scheibe,Von,Nach)]
hanoi n a z h
 | n == 0    = []
 | otherwise =
   (hanoi (n-1) a h z) ++ [(n,a,z)] ++ (hanoi (n-1) h z a)

fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
 | n >  100 = n - 10
 | n <= 100 = fun91 (fun91 (n+11))
```

Übungsaufgabe E.2

Löse die Probleme

1. Türme von Hanoi
2. fun91

iterativ, d.h. gib für die Haskell-Funktionen `hanoi` und `fun91` gleichbedeutende Programme der Sprache WHILE oder des while-Kerns von z.B. Java an:

```
hanoi :: Turmhoehe -> A_Stapel -> Z_Stapel -> H_Stapel
                                    -> [(Scheibe,Von,Nach)]
hanoi n a z h
 | n == 0    = []
 | otherwise =
    (hanoi (n-1) a h z) ++ [(n,a,z)] ++ (hanoi (n-1) h z a)
```

```
fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
 | n >  100 = n - 10
 | n <= 100 = fun91 (fun91 (n+11))
```

Übungsaufgabe E.3

Gib für die iterativen Programme aus Übungsaufgabe E.2 gleichbedeutende Programme mit je nur einer einzigen while-Schleife an.

Was man kann, erfährt man
nur durch eine Prüfung.

Seneca der Jüngere (um 4 v.Chr. - 65 n.Chr.)
röm. Politiker, Philosoph und Schriftsteller
De providentia 4,3

F

Hinweise zur schriftlichen Prüfung

Hinweise zur schriftlichen LVA-Prüfung (1)

- Worüber:
  - Vorlesungs- und Übungsstoff.
  - Folgende zusammengehörende wissenschaftliche Artikel:
    1. Konrad Hinsen. The Promises of Functional Programming. Computing in Science and Engineering 11(4): 86-90, 2009.
    2. Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal. The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II. Computing in Science and Engineering 11(5): 68-75, 2009.

    (zugänglich aus TUW-Netz in IEEE Digital Library)
- Wann, wo, wie lange:
  - Haupttermin: Vorauss. am
    - **Do, den 17.01.2019,** 16:00 Uhr s.t. bis ca. 18:00 Uhr, Hörsaal EI7 (und ggf. EI3), Gußhausstr. 25-29; die Dauer beträgt 90 Minuten.
- Hilfsmittel: **Keine.**

Hinweise zur schriftlichen LVA-Prüfung (2)

- Anmeldung:
  - Ist erforderlich!
    - Wann: Von vorauss. Mo, 10.12.2018 (01:00 Uhr) bis vorauss. Mo, 14.01.2019 (12:00 Uhr).
    - Wie: Elektronisch über TISS.
- Mitzubringen:
  - **Studierendenausweis, Stift** (Papier wird gestellt).
- Voraussetzung:
  - Mindestens 50% der Punkte aus dem Übungsteil.
- Wichtig:
  - Verbindlich sind im Zweifel allein die in TISS angegebenen Termine, Fristen und Räume.

Hinweise zur schriftlichen LVA-Prüfung (3)

- Neben dem Haupttermin wird es drei Nebentermine für die schriftliche LVA-Prüfung geben, und zwar:
  - zu Anfang
  - in der Mitte
  - am Ende

  der Vorlesungszeit im SS 2019. Zeugnisausstellung stets zum frühestmöglichen Zeitpunkt; insbesondere nach jedem Klausurantritt; spätestens nach Ablauf des letzten Termins für die schriftliche Prüfung.
- Auch zur Teilnahme an der schriftlichen LVA-Prüfung an einem der Nebentermine ist eine Anmeldung in TISS zwingend erforderlich.
- Die genauen Termine werden/sind in TISS angekündigt!

Vergiss nicht: Erfolg ist die Belohnung für schwere Arbeit.

Sophokles (497/496 - 406/405 v.Chr) griech. Dichter

Es war sehr schön,
es hat mich sehr gefreut.

Franz-Josef I. (1830-1916)
Kaiser von Österreich