# Heutiges Thema

Hintergrund und Grundlagen...

- **Teil 1:** Programmierung mit Monaden
  - Zusammenhang Monaden und Ein-/Ausgabe in Haskell
- **Teil 2:** Ausdrücke, Auswertung von Ausdrücken, Auswertungsstrategien

  *Schlagwörter*: applicative und normal order evaluation, eager und lazy evaluation, ...
- **Teil 3:** $\lambda$-Kalkül

  ...formale Fundierung nahezu aller funktionalen Programmiersprachen

# Teil 1: Programmierung mit Monaden

...insbesondere

- Zusammenhang Monaden und Ein-/Ausgabe in Haskell

# Ein-/Ausgabe in Haskell und Monaden

Ein-/Ausgabe in Haskell...

- realisiert als Spezialfall eines allgemeineren Konzepts, des Konzepts der *Monade*.

Deshalb: Exkurs über Haskells Monadenkonzept

# Monaden und Monadischer Programmierstil (1)

Monaden...

- erlauben die Reihenfolge, in der Operationen ausgeführt werden, explizit festzulegen.

*Beispiel:*

```
a-b -- Keine Festlegung der Auswertungsreihenfolge;
    -- kritisch, falls z.B. Ein-/Ausgabe involviert ist.

do a <- getInt  -- Reihenfolge explizit festgelegt
   b <- getInt
   return (a-b)
```

# Monaden (1)

...sind *Konstruktorklassen*, Familien von Typen `m a` über einem polymorphen Typkonstruktor `m` mit den Funktionen `(>>=)`, `return`, `(>>)` und `fail`.

```
class Monad m where
  (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
  return :: a -> m a
  (>>)   :: m a -> m b -> m b
  fail   :: String -> m a

  m >> k = m >>= \_ -> k    -- vordefiniert
  fail s = error s          -- vordefiniert
```

...wobei die Implementierungen der Funktionen gewissen Anforderungen genügen müssen.

# Monaden (2)

*Zentral:*

- Die Funktionen (`>>=`) und `return` (und das abgeleitete (und in der Anwendung oft bequemere) `do`-Konstrukt)

...für die die Konstruktorklasse `Monad m` keine Standardimplementierung vorsieht.

# Monaden (3)

Anforderungen (Gesetze) an die Monadenoperationen:

```
return a >>= f                =  f a
c >>= return                  =  c

c >>= (\x -> (f x) >>= g)     =  (c >>= f) >>= g
```

*Intuitiv*:

- `return` gibt den Wert zurück, ohne einen weiteren Effekt.
- durch >>= gegebene Sequenzierungen sind unabhängig von der Klammerung (assoziativ)

# Konstruktorklassen vs. Typklassen

Im Grundsatz ähnliche Konzepte, wobei...

- Konstruktorklassen
  - ...haben Typkonstruktoren als Elemente
- Typklassen (`Eq a`, `Ord a`, `Num a`,...)
  - ...haben Typen als Elemente

- Typkonstruktoren sind...
  - ...Funktionen, die aus gegebenen Typen neue Typen erzeugen
    (Bsp.: Tupelkonstruktor `( )`, Listenkonstruktor `[ ]`,
    Funktionskonstruktor `->`, aber auch:
    Ein-/Ausgabe `IO`,...)

# Der abgeleitete Operator `(>@>)`...

...ist folgendermaßen definiert:

```
(>@>) :: Monad m => (a -> m b) ->
                    (b -> m c) ->
                    (a -> m c)

f >@> g = \x -> (f x) >>= g
```

*Hinweis*:

...`return` ist vom Typ `a -> m a`!

# Damit...

```
(1) return >@> f = f
(2) f >@> return = f

(3) (f >@> g) >@> h = f >@> (g >@> h)
```

Intuitiv...

- (1)&(2): `return` ist Einselement von `(>@>)`
- (3): `(>@>)` ist assoziativ

*Beachte*:
Obige Eigenschaften gelten nicht a priori, sondern sind durch die Implementierung sicherzustellen!

# Beispiele von Monaden (1)

Die Identitätsmonade (mehr dazu auf Folie 20, Teil 8):

...einfachste aller Monaden.

```
(>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
m >>= f = f m

return :: a -> m a
return = id
```

*Erinnerung*:

- `(>>)` und `fail` implizit durch die Standarddefinition festgelegt.

*Bemerkung*:

- In diesem Szenario...
  `(>@>)` wird Vorwärtskomposition von Funktionen, `(>.>)`.
  *Beachte*: `(>.>)` ist assoziativ mit Einselement `id`.

# Beispiele von Monaden (2)

Die Listenmonade:

```
instance Monad [] where
  xs >>= f = concat (map f xs)
  return x = [x]
  fail s   = []
```

# Beispiele von Monaden (3)

Die “Maybe”-Monade:

```
instance Monad Maybe where
  (Just x) >>= k = k x
  Nothing  >>= k = Nothing
  return         = Just
  fail s         = Nothing
```

# Beispiele von Monaden (4)

Die Ein-/Ausgabe-Monade:

```
instance Monad IO where
(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b
return :: a -> IO a   -- Rueckgabewerterzeugung
                      -- ohne Ein-/Ausgabe(aktion)
```

# Standardfunktionen über Monaden

Kombination von Monaden...

- ...zum Aufbau komplexerer Effekte

```
mapF :: Monad m => (a -> b) -> m a -> m b
mapF f m = do x <- m
              return (f x)

joinM :: Monad m => m (m a) -> m a
joinM m = do x <- m
             x
```

*Bemerkung*:

- Aus (1), (2) und (3) folgt:
  (4) `mapF (f.g) = mapF f . mapF g`

# Ein-/Ausgabe und Monaden

*Erinnerung*:

```
(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b
return :: a -> IO a
```

wobei...

- `(>>=)`: Wenn `p` und `q` Kommandos sind, dann ist `p >>= q` das Kommando, das zunächst `p` ausführt, dabei den Rückgabewert `x` vom Typ `a` liefert, und daran anschließend `q x` ausführt und dabei den Rückgabewert `y` vom Typ `b` liefert.

- `return`: Rückgabewerterzeugung ohne Ein-/Ausgabe(aktion)

Somit...

- Ein-/Ausgabe in Haskell Monad über dem Typkonstruktor `IO`

# Programmieren mit Monaden (1)

*Gegeben:*

```
data Tree a = Nil | Node a (Tree a) (Tree a)
```

*Aufgabe:*

- Schreibe eine Funktion, die die Summe der Werte der Marken in einem Baum vom Typ `Tree Int` berechnet.

# Programmieren mit Monaden (2)

*Lösung 1:* Monadenlos

```
sTree :: Tree Int -> Int
sTree Nil             = 0
sTree (Node n t1 t2) = n + sTree t1 + sTree t2
```

*Beachte*:

- Die Reihenfolge der Berechnung ist weitgehend nicht festgelegt (Freiheitsgrade!)

# Programmieren mit Monaden (3)

*Lösung 1:* Monadenbehaftet

```
sumTree :: Tree Int -> Id Int
sumTree Nil = return 0
sumTree (Node n t1 t2) = do num <- return n
                            s1  <- sumTree t1
                            s2  <- sumTree t2
                            return (num + s1 + s2)
```

...wobei `Id` die Identitätsmonade bezeichnet.

*Beachte*:

- Die Reihenfolge der Berechnung explizit festgelegt (keine Freiheitsgrade!)

# Programmieren mit Monaden (4)

Die Identitätsmonade:

```
data Id a = Id a

instance Monad Id where
  (>>=) (Id x) f = f x
  return         = Id
```

# Programmieren mit Monaden (5)

Vergleich der monadenlosen und monadenbehafteten Lösung:

Es gilt:

- Anders als `sTree` hat `sumTree` einen "imperativen Anstrich" in etwa vergleichbar mit:

```
num  := n;
sum1 := sumTree t1;
sum2 := sumTree t2;
return (num + sum1 + sum2);
```

# Programmieren mit Monaden: Ein Resümee (1)

Die Programmierung mit Monaden erlaubt...

- Berechnungsabläufe zu strukturieren.

Folgende Eigenschaften prädestinieren Monaden dafür in besonderer Weise:

- *Wohldefiniert*: ...Strategie sequentielle Programmteile systematisch zu spezifizieren.
- *Angemessen*: ...höhere Abstraktion durch Entkopplung der zugrundeliegenden Monade von der Struktur der Berechnung.
- *Fundiert*: ...Eigenschaften wie etwa (4) werden impliziert von den Monadforderungen (1), (2) und (3).

# Programmieren mit Monaden: Ein Resümee (2)

Monaden sind...

- ein in der Kategorientheorie geprägter Begriff
  $\rightsquigarrow$ ...zur formalen Beschreibung der Semantik von Programmiersprachen (Eugenio Moggi, 1989)

- (ohne obigen Hintergrund) populär in der Welt funktionaler Programmierung, insbesondere weil (Philip Wadler, 1992)
  - erlauben gewisse Aspekte imperativer Programmierung in die funktionale Programmierung zu übertragen
  - eignen sich insbesondere zur Integration von Ein-/Ausgabe, aber auch für weitergehende Anwendungsszenarien
  - geeignete Schnittstelle zwischen funktionaler und effektbehafteter, z.B. imperativer und objektorientierter Programmierung.

# Teil 2: Ausdrücke, Auswertung von Ausdrücken, Auswertungsstrategien

*Schlagwörter*:

applicative und normal order evaluation,
eager und lazy evaluation, ...

# Auswerten von Ausdrücken und Funktionsaufrufen

```
e :: Float
e = 2.71828

res = 2 * e * e ⇒ ...

simple          :: Int->Int->Int->Int
simple x y z    =  (x + z) * (y + z)

simple 2 3 4 ⇒ ...

fac             :: Int -> Int
fac n           =  if n == 0 then 1 else n * fact (n - 1)

fac 2 ⇒ ...
```

# Auswerten von Ausdrücken

## Einfache Ausdrücke

$3 * (9 + 5) \Rightarrow 3 * 14 \Rightarrow 42$

oder

$3 * (9 + 5) \Rightarrow 3 * 9 + 3 * 5 \Rightarrow 27 + 3 * 5 \Rightarrow 27 + 15 \Rightarrow 42$

oder ...

# Auswerten von Funktionsaufrufen (1)

Fundamental...

- *Expandieren*
- *Simplifizieren*

# Auswerten von Funktionsaufrufen (2)

*Beispiele*:

simple x y z = (x + z) ∗ (y + z)

simple 2 3 4 ⇒ (2 + 4) ∗ (3 + 4) (Expandieren)

⇒ 6 ∗ (3 + 4) (Simplifizieren)

⇒ 6 ∗ 7 (Simplifizieren)

⇒ 42 (Simplifizieren)

oder

simple 2 3 4 ⇒ (2 + 4) ∗ (3 + 4) (Expandieren)

⇒ (2 + 4) ∗ 7 (Simplifizieren)

⇒ 6 ∗ 7 (Simplifizieren)

⇒ 42 (Simplifizieren)

oder ...

# Funktionsaufrufe

$\text{fac n} = \text{if n} == 0 \text{ then 1 else (n} * \text{fac (n} - 1))$

$\text{fac 2} \Rightarrow \text{if 2} == 0 \text{ then 1 else (2} * \text{fac (2} - 1))$

$\Rightarrow 2 * \text{fac (2} - 1)$

Weiter mit a)

$\Rightarrow 2 * \text{fac 1}$

$\Rightarrow 2 * (\text{if 1} == 0 \text{ then 1 else (1} * \text{fac (1}-1)))$

$\Rightarrow$ analog fortführen...

...oder mit b)

$\Rightarrow 2 * (\text{if (2}-1) == 0 \text{ then 1 else ((2}-1) * \text{fac ((2}-1)-1)))$

$\Rightarrow$ analog fortführen...

Schließlich...

$\Rightarrow 2$

# Auswertung gemäß Variante a)

$$\text{fac n} = \text{if n} == 0 \text{ then } 1 \text{ else } (\text{n} * \text{fac } (\text{n} - 1))$$

$$\begin{aligned}
\text{fac } 2 &\Rightarrow \text{if } 2 == 0 \text{ then } 1 \text{ else } (2 * \text{fac } (2 - 1)) \\
&\Rightarrow 2 * \text{fac } (2 - 1) \\
&\Rightarrow 2 * \text{fac } 1 \\
&\Rightarrow 2 * (\text{if } 1 == 0 \text{ then } 1 \text{ else } (1 * \text{fac } (1 - 1))) \\
&\Rightarrow 2 * (1 * \text{fac } (1 - 1)) \\
&\Rightarrow 2 * (1 * \text{fac } 0) \\
&\Rightarrow 2 * (1 * (\text{if } 0 == 0 \text{ then } 1 \text{ else } (0 * \text{fac } (0 - 1)))) \\
&\Rightarrow 2 * (1 * 1) \\
&\Rightarrow 2 * 1 \\
&\Rightarrow 2
\end{aligned}$$

# Auswertung gemäß Variante b)

$$\text{fac n} = \text{if n} == 0 \text{ then } 1 \text{ else } (n * \text{fac } (n - 1))$$

$$\begin{aligned}
\text{fac } 2 &\Rightarrow \text{if } 2 == 0 \text{ then } 1 \text{ else } (2 * \text{fac } (2 - 1)) \\
&\Rightarrow 2 * \text{fac } (2 - 1) \\
&\Rightarrow 2 * (\text{if } (2-1) == 0 \text{ then } 1 \text{ else } ((2-1) * \text{fac } ((2-1)-1))) \\
&\Rightarrow 2 * ((2-1) * \text{fac } ((2-1)-1)) \\
&\Rightarrow 2 * (1 * \text{fac } ((2-1)-1)) \\
&\Rightarrow 2 * (1 * (\text{if } ((2-1)-1) == 0 \text{ then } 1 \\
&\Rightarrow \qquad\qquad \text{else } ((2-1)-1) * \text{fac } (((2-1)-1)-1))) \\
&\Rightarrow 2 * (1 * 1) \\
&\Rightarrow 2 * 1 \\
&\Rightarrow 2
\end{aligned}$$

# Freiheitsgrade...

Betrachte...

```
fac(fac(square(2+2))) * fact(fac(square(3)))
```

Zentral...

- **Wo** im Ausdruck mit der Auswertung fortfahren?
- **Wie** mit (Funktions-) Argumenten umgehen?

Gretchenfrage...

- **Welcher** Einfluss auf das Ergebnis?

# Glücklicherweise...

**Theorem**

Jede terminierende Auswertungsreihenfolge endet mit demselben Ergebnis.

...Alonzo Church/J. Barclay Rosser (1936)

# Auswertungsstrategien...

In der Praxis...

Um den Ausdruck $f(exp)$ auszuwerten...

a) ...berechne zunächst den Wert von $exp$ (und setze diesen Wert dann im Rumpf von $f$ ein)

   $\leadsto$ applicative order evaluation, eager evaluation, call-by-value evaluation, leftmost-innermost evaluation

b) ...setze $exp$ unmittelbar im Rumpf von $f$ ein und werte den so entstehenden Ausdruck aus

   $\leadsto$ normal order evaluation, call-by-name evaluation, leftmost-outermost evaluation

   $\leadsto$ *"Intelligente" Realisierung*: lazy evaluation, call-by-need evaluation

# Ein Beispiel...

Einige einfache Funktionen...

```
-- Die Funktion square zur Quadrierung einer ganzen Zahl
square :: Int -> Int
square n = n*n

-- Die Funktion first zur Projektion auf die erste Paarkomponente
first :: (Int,Int) -> Int
first (m,n) = m

-- Die Funktion infiniteInc zum "ewigen" Inkrement
infiniteInc :: Int
infiniteInc = 1 + infiniteInc
```

# Auswertung gemäß...

...applicative order (leftmost-innermost):

$$
\begin{aligned}
& \texttt{square}(\texttt{square}(\texttt{square}(2))) \\
\Rightarrow\ & \texttt{square}(\texttt{square}(2 * 2)) \\
\Rightarrow\ & \texttt{square}(\texttt{square}(4)) \\
\Rightarrow\ & \texttt{square}(4 * 4) \\
\Rightarrow\ & \texttt{square}(16) \\
\Rightarrow\ & 16 * 16 \\
\Rightarrow\ & 256
\end{aligned}
$$

...6 Schritte.

# Auswertung gemäß...

...normal order (leftmost-outermost):

$$
\begin{aligned}
& \texttt{square(square(square(2)))} \\
\Rightarrow\ & \texttt{square(square(2))} * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & (\texttt{square(2)} * \texttt{square(2))} * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & ((2 * 2) * \texttt{square(2)}) * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & (4 * \texttt{square(2)}) * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & (4 * (2 * 2)) * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & (4 * 4) * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & 16 * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & \ldots \\
\Rightarrow\ & 16 * 16 \\
\Rightarrow\ & 256
\end{aligned}
$$

...1+6+6+1=14 Schritte.

# Applicative order effizienter?

Nicht immer...

$$\texttt{first}\ (42, \texttt{square}(\texttt{square}(\texttt{square}(2))))$$

...in applicative order

$$\begin{aligned} & \texttt{first}\ (42, \texttt{square}(\texttt{square}(\texttt{square}(2)))) \\ \Rightarrow\ & \ldots \\ \Rightarrow\ & \texttt{first}\ (42, 256) \\ \Rightarrow\ & 42 \end{aligned}$$

...1+6+1=8 Schritte.

...in normal order

$$\begin{aligned} & \texttt{first}\ (42, \texttt{square}(\texttt{square}(\texttt{square}(2)))) \\ \Rightarrow\ & 42 \end{aligned}$$

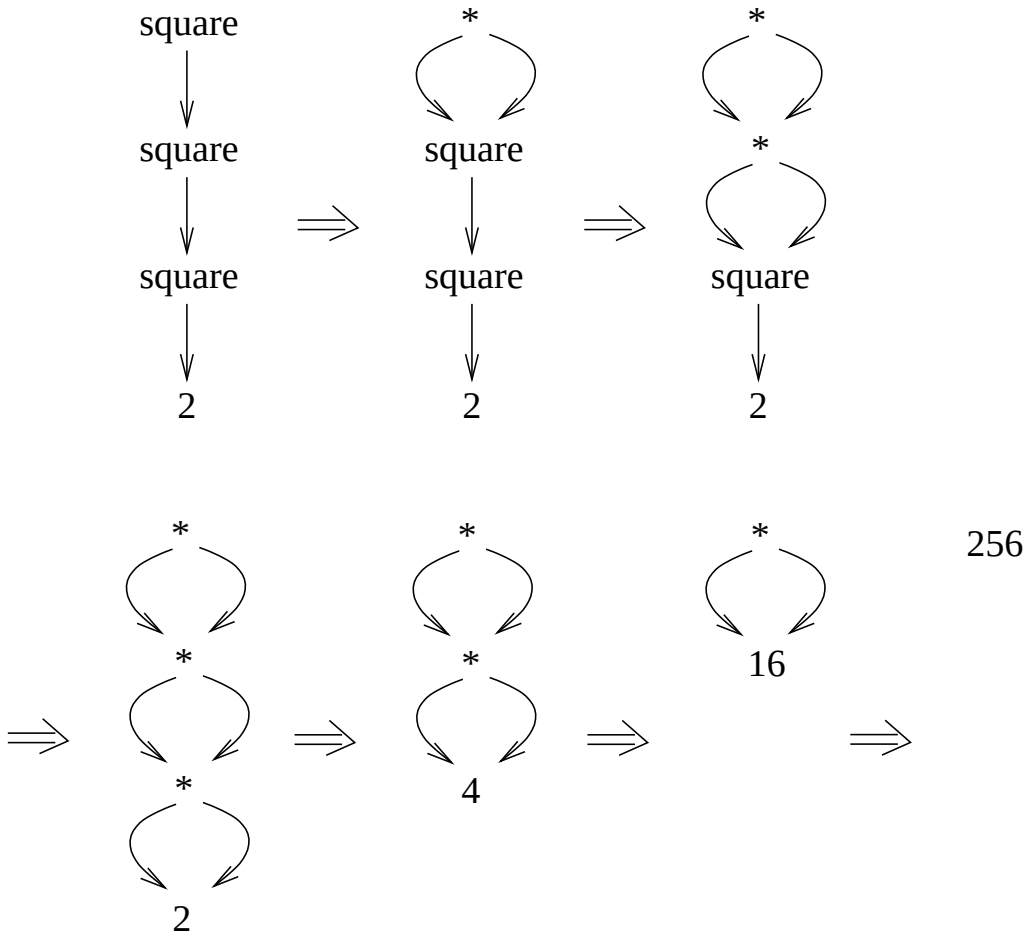
...1 Schritt.

# Von Normal Order zu Lazy Evaluation...

- *Problem*: Mehrfachauswertung von Ausdrücken bei *normal order Evaluation*
- *Ziel*: Vermeidung von Mehrfachauswertungen zur Effizienzsteigerung
- *Lösung*: *Lazy Evaluation*!

  ...Ausdrucksdarstellung und -auswertung basierend auf Graphen und Graphtransformationen.

# Lazy evaluation (call-by-need)...




**...6 Schritte, aber Graphtransformationen!**

# Lazy evaluation (call-by-need)...

- ...beruht (implementierungstechnisch) auf Graphtransformationen
- ...garantiert, dass Argumente höchstens einmal (möglicherweise also gar nicht) ausgewertet werden

Insgesamt...

$\leadsto$ ...effiziente Realisierung der normal order Strategie!

# Zentrale Ergebnisse...

**Theorem**

- ...alle terminierenden Auswertungsreihenfolgen enden mit demselben Ergebnis
  $\leadsto$ Konfluenz- oder Diamanteigenschaft

- ...wenn es eine terminierende Auswertungsreihenfolge gibt, so terminiert auch die normal order Auswertungsreihenfolge

...Church/Rosser (1936)

*Insbesondere*:
Lazy evaluation "vergleichbar effizient" wie applicative (eager) order, falls alle Argumente benötigt werden.

# Frei nach Shakespeare...

*Eager or lazy evaluation: that is the question.*

*Quot capita, tot sensa.*

Oder: Die Antworten sind verschieden...

- eager evaluation (z.B. ML, Scheme (abgesehen von Makros),...)
- lazy evaluation (z.B. Haskell, Miranda,...)

# Lazy vs. Eager: Eine Abwägung (1)

## Lazy Evaluation

- Vorteile
  - terminiert mit Normalform, wenn es eine terminierende Auswertungsreihenfolge gibt
  - wertet Argumente nur aus, wenn nötig
  - elegante Behandlung potentiell unendlicher Datenstrukturen
- Nachteile
  - konzeptuell und implementierungstechnisch anspruchsvoller
    - partielle Auswertung von Ausdrücken (Seiteneffekte! Beachte: Letztere nicht in Haskell! In Scheme: Verantwortung beim Programmierer.)
    - Graphtransformationen
    - Ein-/Ausgabe
  - Volles Verständnis: Domain-Theorie und $\lambda$-Kalkül im Detail

# Lazy vs. Eager: Eine Abwägung (2)

Eager Evaluation

- Vorteile
  - Konzeptuell und implementierungstechnisch einfacher
  - Vom mathematischen Standpunkt oft "natürlicher" (Beispiel: `first (42,infiniteInc)`)
  - (Einfache(re) Integration imperativer Konzepte)

*Mithin...* eager oder lazy – eine Frage des Anwendungsprofils!

# Zu guter Letzt

Wäre ein Haskell-Compiler (Interpretierer) korrekt, der die Fakultätsfunktion applikativ auswertet?

Ja, weil die Funktion `fac` *strikt* in ihrem Argument ist...

$\leadsto$ eager evaluation oder auch strict evaluation!

# Teil 3: $\lambda$-Kalkül

...formale Fundierung nahezu aller funktionalen Programmiersprachen

# Intuitive vs. formale Berechenbarkeit

*Ausgangspunkt*...

*Intuitiv berechenbar* ...“wenn es eine *irgendwie machbare effektive mechanische Methode* gibt, die zu jedem Argument aus dem Definitionsbereich nach endlich vielen Schritten den Funktionswert konstruiert und die für alle anderen Argumente entweder mit einem speziellen Fehlerwert oder nie abbricht”.

*Zentrale Frage*...

Lässt sich der Begriff “intuitiver Berechenbarkeit” formal fassen?

*Zur Beantwortung nötig*...

Formale Berechnungsmodelle!

...d.h. *Explikationen* des Begriffs “intuitiver Berechenbarkeit”.

# Der $\lambda$-Kalkül... (1)

- ...ein spezielles formales Berechnungsmodell, wie viele andere auch, z.B.
  - allgemein rekursive Funktionen (Herbrand 1931, Gödel 1934, Kleene 1936)
  - Turing-Maschinen (Turing 1936)
  - $\mu$-rekursive Funktionen (Kleene 1936)
  - Markov-Algorithmen (Markov 1951)
  - ...
- ...geht zurück auf Alonzo Church (1936)
- ...Berechnungen über Paaren, Listen, Bäumen, auch unendlichen, Funktionen höherer Ordnung einfach ausdrückbar
- ...in diesem Sinne "praxisnäher/realistischer" als andere formale Berechnungsmodelle

# Der $\lambda$-Kalkül... (2)

**Church'sche These**
Eine Funktion ist genau dann intuitiv berechenbar, wenn sie $\lambda$-definierbar ist (d.h. im $\lambda$-Kalkül ausdrückbar ist).

**Beweis**? ...schlechterdings unmöglich!

Aber...

# Der $\lambda$-Kalkül... (3)

Man hat bewiesen...

- Alle der obigen Berechnungsmodelle sind gleich mächtig.

Das kann als Hinweis darauf verstanden werden, dass alle der obigen Berechnungsmodelle den Begriff wahrscheinlich "gut" charakterisieren!

**Aber**: es schließt nicht aus, dass morgen ein mächtigeres formales Berechnungsmodell gefunden wird, das dann den Begriff der intuitiven Berechenbarkeit "besser" charakterisierte.

*Präzedenzfall*: Primitiv rekursive Funktionen

- ...bis Ende der 20er-Jahre als adäquate Charakterisierung intuitiver Berechenbarkeit akzeptiert (auch von Hilbert)
- ...tatsächlich jedoch: echt schwächeres Berechnungsmodell
- ...Beweis: Ackermann-Funktion ist berechenbar, aber nicht primitiv rekursiv (Ackermann 1928)

# Die Ackermann-Funktion

...“berühmtberüchtigtes” Beispiel einer

- zweifellos (intuitiv) berechenbaren, aber nicht primitiv rekursiven Funktion!

```
ack ::  (Integer,Integer) -> Integer
ack (m,n)
  | m == 0                  = n+1
  | (m > 0) && (n == 0)     = ack (m-1,1)
  | (m > 0) && (n /= 0)     = ack (m-1,ack(m,n-1))
```

$\rightsquigarrow$ ...hier in Haskell-Notation!

# Der $\lambda$-Kalkül... (4)

...ausgezeichnet durch

- *Einfachheit*
  ...nur wenige syntaktische Konstrukte, einfache Semantik

- *Ausdruckskraft*
  ...Turing-mächtig, alle "intuitiv berechenbaren" Funktionen im $\lambda$-Kalkül ausdrückbar

Darüberhinaus...

$\leadsto$ Bindeglied zwischen funktionalen Hochsprachen und ihren maschinennahen Implementierungen.

# Wir unterscheiden...

- *Reiner* $\lambda$-Kalkül
  ...reduziert auf das "absolut Notwendige"
  $\leadsto$ besonders bedeutsam in Untersuchungen zur Theorie der Berechenbarkeit

- *Angewandte* $\lambda$-Kalküle
  ...syntaktisch angereichert, praxisnäher

# Reiner $\lambda$-Kalkül: Syntax

Die Menge *Exp* der Ausdrücke des (reinen) $\lambda$-Kalküls, kurz $\lambda$-Ausdrücke, ist definiert durch:

- Jeder *Name* (*Identifier*) ist in *Exp*.
  (Bsp: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$)

- *Abstraktion*: Wenn x ein Name und e aus *Exp* ist, dann ist auch ($\lambda$x. e) in *Exp*. *Sprechweise*: Funktionsabstraktion mit formalem Parameter x und Rumpf e.
  (Bsp.: ($\lambda$x.(x x)), ($\lambda$x.($\lambda$y.($\lambda$z.(x (y z))))), ...)

- *Applikation*: Wenn f und e in *Exp* sind, dann ist auch (f e) in *Exp*; *Sprechweisen*: Anwendung von f auf e. f heißt auch *Rator*, e auch *Rand*.
  (Bsp.: (($\lambda$x.(x x)) y), ...)

# Alternativ...

...die Syntax in (modifizierter) Backus-Naur-Form (BNF):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $e$ | ::= | | ($\lambda$-Ausdrücke) |
| | ::= | $x$ | (Namen (Identifikatoren)) |
| | ::= | $\lambda\, x.e$ | (Abstraktion) |
| | ::= | $e\ e$ | (Applikation) |
| | ::= | $(e)$ | |

# Konventionen

- Überflüssige Klammern können weggelassen werden.
  Dabei gilt:
  - *Rechts*assoziativität für $\lambda$-Sequenzen in Abstraktionen
    Bsp.: – $\lambda$x.$\lambda$y.$\lambda$z.(x(yz)) kurz für ($\lambda$x.($\lambda$y.($\lambda$z.(x(yz))))),
    – $\lambda$x. e kurz für ($\lambda$x. e)
  - *Links*assoziativität für Applikationssequenzen
    Bsp.: – $e_1\ e_2\ e_3 \ldots e_n$ kurz für $(\ldots((e_1\ e_2)\ e_3)\ldots e_n)$,
    – $(e_1\ e_2)$ kurz für $e_1\ e_2$
- Der Rumpf einer $\lambda$-Abstraktion ist der längstmögliche dem Punkt folgende $\lambda$-Ausdruck
  Bsp.: – $\lambda$x.e f entspricht $\lambda$x.(e f), nicht ($\lambda$x. e) f

# Angewandte $\lambda$-Kalküle

Angewandte $\lambda$-Kalküle sind syntaktisch angereichert.

Beispielsweise...

- Auch Konstanten, Funktionsnamen oder "übliche" Operatoren können Namen (im weiteren Sinn) sein
  (Bsp: 1, 3.14, $true$, $false$, $+$, $*$, $-$, fac, simple, ...)
- Ausdrücke können...
  - komplexer sein
    (Bsp.: if e then $e_1$ else $e_2$ fi ... statt cond e $e_1$ $e_2$ für
    cond geeignete Funktion)
  - getypt sein
    (Bsp.: $1 : IN$, $true : Boole$, ...)
- ...

$\lambda$-Ausdrücke sind dann beispielsweise auch...

- Applikationen: fac 3, simple x y z (entspricht ((simple x) y) z), ...)
- Abstraktionen: $\lambda$x.(x + x), $\lambda$x.$\lambda$y.$\lambda$z.(x * (y - z)), 2 + 3,
  ($\lambda$x.if odd x then x*2 else x div 2 fi) 42, ...)

# In der Folge

...erlauben wir uns die Annehmlichkeit Ausdrücke, für die wir eine eingeführte Schreibweise haben (z.B. $n * fac\ (n-1)$) in dieser gewohnten Weise zu schreiben, auch wenn wir die folgenden Ergebnisse für den reinen $\lambda$-Kalkül formulieren.

Rechtfertigung...

- Resultate der theoretischen Informatik, insbesondere

  Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Annals of Mathematical Studies, Vol. 6, Princeton University Press, 1941

  ...zur Modellierung von ganzen Zahlen, Wahrheitswerten, etc. durch geeignete Ausdrücke des reinen $\lambda$-Kalküls

# Freie und gebundene Variablen (1)

...in $\lambda$-Ausdrücken

Die Menge der *frei* vorkommenden Variablen...

$$free(\text{x}) = \{\text{x}\}, \text{ wenn x ein Variablenname ist}$$

$$free(\lambda\text{x.e}) = free(\text{e}) \setminus \{\text{x}\}$$

$$free(\text{f e}) = free(\text{f}) \cup free(\text{e})$$

Umgekehrt...

Die Menge der *gebunden* vorkommenden Variablen...

$$bound(\lambda\text{x.e}) = bound(\text{e}) \cup \{\text{x}\}$$

$$bound(\text{f e}) = bound(\text{f}) \cup bound(\text{e})$$

*Beachte*: gebunden $\neq$ nicht frei !
...sonst wäre etwa "x gebunden in y"

# Freie und gebundene Variablen (2)

Betrachte: ($\lambda$x. (x y)) x

- Gesamtausdruck
  - x kommt frei und gebunden in ($\lambda$x. (x y)) x vor
  - y kommt frei in ($\lambda$x. (x y)) x vor
- Teilausdrücke
  - x kommt gebunden in ($\lambda$x. (x y)) vor und frei in (x y) und in x
  - y kommt frei in ($\lambda$x. (x y)), (x y) und y vor

# Gebunden vs. gebunden an...

Wir müssen unterscheiden...

- Eine *Variable* ist *gebunden*...
- Ein *Variablenvorkommen* ist *gebunden an*...

*Gebunden* und *gebunden an* ...unterschiedliche Konzepte!

Letzteres meint:

- Ein (definierendes oder angewandtes) Variablenvorkommen ist an ein definierendes Variablenvorkommen gebunden

Definition

- *Definierendes* V.vorkommen ...Vorkommen unmittelbar nach einem $\lambda$
- *Angewandtes* V.vorkommen ...jedes nicht definierende Vorkommen

# Der $\lambda$-Kalkül: Vorwärts zur Semantik

Zentral sind folgende Begriffe...

- (Syntaktische) Substitution
- Konversionsregeln / Reduktionsregeln

# Syntaktische Substitution

Erster zentraler Begriff... (*syntaktische*) *Substitution*

x[e/x] = e, wenn x ein Name ist

y[e/x] = y, wenn y ein Name mit x $\neq$ y ist

(f g)[e/x] = (f[e/x]) (g[e/x])

$(\lambda$x.f)[e/x] = $\lambda$x.f

$(\lambda$y.f)[e/x] = $\lambda$y.(f[e/x]), wenn x $\neq$ y und y $\notin free$(e)

$(\lambda$y.f)[e/x] = $\lambda$z.((f[z/y])[e/x]), wenn x $\neq$ y und y $\in free$(e),
wobei x $\neq$ z und z $\notin free$(e) $\cup$ $free$(f)

# (Syntaktische) Substitution

Einige Beispiele zur Illustration...

- ((x y) (y z)) [a+b/y] = ((x (a+b)) ((a+b) z))
- $\lambda$x. (x y) [a+b/y] = $\lambda$x. (x (a+b))
- Aber: $\lambda$x. (x y) [a+b/x] = $\lambda$x. (x y)
- Achtung: $\lambda$x. (x y) [x+b/y] $\leadsto$ $\lambda$x. (x (x+b))

  ...ohne Umbenennung *Bindungsfehler*!

  Deshalb: $\lambda$x. (x y) [x+b/y] = $\lambda$z. ((x y)[z/x]) [x+b/y]
  = $\lambda$z. (z y) [x+b/y]
  = $\lambda$z. (z (x+b))

  ...dank Umbenennung kein Bindungsfehler!

# Konversionsregeln

Zweiter zentraler Begriff: *λ-Konversionen*...

- $\alpha$-Konversion (Umbenennung formaler Parameter)

  $\lambda$x.e $\Leftrightarrow$ $\lambda$y.e[y/x], wobei y $\notin$ $free$(e)

- $\beta$-Konversion (Funktionsanwendung)

  ($\lambda$x.f) e $\Leftrightarrow$ f[e/x]

- $\eta$-Konversion (Elimination redundanter Funktion)

  $\lambda$x.(e x) $\Leftrightarrow$ e, wobei x $\notin$ $free$(e)

$\rightsquigarrow$ führen auf eine operationelle Semantik des $\lambda$-Kalküls.

# Sprechweisen

...im Zusammenhang mit Konversionsregeln

- Von links nach rechts gerichtete Anwendungen der $\beta$- und $\eta$-Konversion heißen $\beta$- und $\eta$-Reduktion.
- Von rechts nach links gerichtete Anwendungen der $\beta$-Konversion heißen $\beta$-Abstraktion.

# Intuition hinter den Konversionsregeln

Noch einmal zusammengefasst...

- $\alpha$-Konversion... erlaubt die konsistente Umbenennung formaler Parameter von $\lambda$-Abstraktionen
- $\beta$-Konversion... erlaubt die Anwendung einer $\lambda$-Abstraktion auf ein Argument
  (Achtung: Gefahr von Bindungsfehlern! Abhilfe: $\alpha$-Konversion!)
- $\eta$-Konversion... erlaubt die Elimination redundanter $\lambda$-Abstraktionen

Bsp.: $(\lambda x.\lambda y.x+y)\ (y*2) \Rightarrow \lambda y.(y*2)+y)$
$\leadsto$ Bindungsfehler (''y wird eingefangen'')

# Beispiel für $\lambda$-Reduktion

$(\lambda x.\lambda y.x*y)\ ((\lambda x.\lambda y.x+y)\ 9\ 5)\ 3$ ($\beta$-Reduktion)

$\Rightarrow$ $(\lambda x.\lambda y.x*y)\ ((\lambda y.9+y)\ 5)\ 3$ ($\beta$-Reduktion)

$\Rightarrow$ $(\lambda y.((\lambda y.9+y)\ 5)*y)\ 3$ ($\beta$-Reduktion)

$\Rightarrow$ $(\lambda y.(9+5)*y)\ 3$ ($\beta$-Reduktion)

$\Rightarrow$ $(9+5) * 3$ ($\beta$- und $\eta$-Reduktion nicht anwendbar)

$\rightsquigarrow$ Weitere Regeln zur Reduktion primitiver Operationen in erweitertem $\lambda$-Kalkül (Auswertung arithmetischer Ausdrücke, bedingte Anweisungen, Listenoperationen, . . . ), sog. $\delta$-Regeln.

$\rightsquigarrow$ solche Erweiterungen sind praktisch notwendig und einsichtig, aber für die Theorie (der Berechenkarkeit) kaum relevant.

# Reduktionsfolgen & Normalformen (1)

- Ein $\lambda$-Ausdruck ist in *Normalform*, wenn er durch $\beta$-Reduktion und $\eta$-Reduktion nicht weiter reduzierbar ist.
- (Praktisch relevante) Reduktionsstrategien
  - normal order (leftmost-outermost)
  - applicative order (leftmost-innermost)

# Reduktionsfolgen & Normalformen (2)

- *Beachte*: Nicht jeder $\lambda$-Ausdruck ist zu einem $\lambda$-Ausdruck in Normalform konvertierbar (Endlosrekursion).
  Bsp.: (1) $\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x) \Rightarrow \lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x) \Rightarrow \ldots$
  (2) $(\lambda x.42)\ (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x))$ (hat Normalform!)

Zentrale Resultate:

- Wenn ein $\lambda$-Ausdruck zu einem $\lambda$-Ausdruck in Normalform konvertierbar ist, dann führt jede terminierende Reduktion des $\lambda$-Ausdrucks zum (bis auf $\alpha$-Konversion) selben $\lambda$-Ausdruck in Normalform (bis auf $\alpha$-Konversion).

- Durch Reduktionen im $\lambda$-Kalkül sind genau jene Funktionen berechenbar, die Turing-, Markov-, ... berechenbar sind!

# Church-Rosser-Theoreme

Seien $e_1$ und $e_2$ zwei $\lambda$-Ausdrücke...

**Theorem 1**
Wenn $e_1 \Leftrightarrow e_2$, dann gibt es einen $\lambda$-Ausdruck e mit $e_1 \Rightarrow^* e$ und $e_2 \Rightarrow^* e$
(sog. *Konfluenzeigenschaft*, *Diamanteigenschaft*)

*Informell* ...wenn eine Normalform ex., dann ist sie eindeutig (bis auf $\alpha$-Konversion)!

**Theorem 2**
Wenn $e_1 \Rightarrow^* e_2$ und $e_2$ in Normalform, dann gibt es eine normal order Reduktionsfolge von $e_1$ nach $e_2$
(sog. *Standardisierungstheorem*)

*Informell* ...normal order Reduktion terminiert am häufigsten!

# Semantik von $\lambda$-Ausdrücken

- $\lambda$-Ausdrücke in Normalform lassen sich (abgesehen von $\alpha$-Konversionen) nicht weiter vereinfachen (reduzieren)

- Nach dem 1. Church-Rosser-Theorem ist die Normalform eines $\lambda$-Ausdrucks eindeutig bestimmt, wenn sie existiert (wieder abgesehen von $\alpha$-Konversionen)

Das legt folgende Sichtweise nahe...

- Besitzt ein $\lambda$-Ausdruck eine Normalform, so ist dies sein Wert.

- *Umgekehrt*: Die *Semantik* (*Bedeutung*) eines $\lambda$-Ausdrucks ist seine Normalform, wenn sie existiert, ansonsten ist sie undefiniert.

# Rekursion. Und wie sie behandelt wird...

Erinnerung...

$$\text{fac n} = \text{if n} == 0 \text{ then 1 else (n} * \text{fac (n} - 1))$$

oder alternativ:

$$\text{fac} = \lambda\text{n.if n} == 0 \text{ then 1 else (n} * \text{fac (n} - 1))$$

"**Problem**"...

$\lambda$-Abstraktionen sind *anonym*.

# Lösung: Der $Y$-Kombinator

Y-Kombinator: Y = $\lambda$f.($\lambda$x.(f (x x)) $\lambda$x.(f (x x)))

Es gilt: Für jeden $\lambda$-Ausdruck e ist (Y e) zu (e (Y e)) konvertierbar:

$$\begin{array}{rcl} \text{Y e} & \Rightarrow & \lambda\text{x.(e (x x))}\ \lambda\text{x.(e (x x))} \\ & \Rightarrow & \text{e}\ (\lambda\text{x.(e (x x))}\ \lambda\text{x.(e (x x))}) \\ & \Leftrightarrow & \text{e (Y e)} \end{array}$$

Mithilfe des Y-Kombinators lässt sich Rekursion realisieren.
*Intuition*:

$$\begin{array}{rl} & \text{f} = \cdots\ \text{f}\ \cdots \text{ (rekursive Darstellung)} \\ \rightsquigarrow & \text{f} = \lambda\text{f.}(\cdots\ \text{f}\ \cdots)\ \text{f} \text{ ($\lambda$-Abstraktion)} \\ \rightsquigarrow & \text{f} = \text{Y}\ \lambda\text{f.}(\cdots\ \text{f}\ \cdots) \text{ (nicht-rekursive Darstellung)} \end{array}$$

*Bemerkung:*
$\lambda$-Terme ohne freie Variablen heißen *Kombinatoren*.

# Zur Übung empfohlen

...Anwendung des Y-Kombinators

Betrachte...

$$\text{fac} = \text{Y}\ \lambda\text{f.}(\lambda\text{n.if n} == 0\ \text{then 1 else n} * \text{f (n} - 1))$$

Rechne nach...

$$\text{fac 1} \Rightarrow \ \ldots\ \Rightarrow 1$$

Überprüfe dabei...

Der Y-Kombinator realisiert Rekursion
durch wiederholtes Kopieren

# Praktisch relevant: Typisierte $\lambda$-Kalküle

Jedem $\lambda$-Ausdruck ist ein Typ zugeordnet

Beispiele:

$$\begin{aligned} 3 &:: \text{Integer} \\ (*) &:: \text{Integer} -> \text{Integer} -> \text{Integer} \\ (\lambda x.2 * x) &:: \text{Integer} -> \text{Integer} \\ (\lambda x.2 * x)\ 3 &:: \text{Integer} \end{aligned}$$

*Einschränkung*: Typen müssen konsistent sein (wohltypisiert)

*Problem jetzt*: Selbstanwendung im $Y$-Kombinator

$\leadsto$ Y nicht endlich typisierbar!

*Abhilfe*: explizite Rekursion zum Kalkül hinzufügen mittels Hinzunahme der Reduktionsregel Y e $\Rightarrow$ e (Y e))

...nebenbei: zweckmäßig auch aus Effizienzgründen!

# Zurück zu Haskell...

- Haskell beruht auf typisiertem $\lambda$-Kalkül
- Übersetzer/Interpretierer überprüft, ob alle Typen konsistent sind
- Programmierer kann Typdeklarationen angeben (Sicherheit), muss aber nicht (bequem, manchmal unerwartete Ergebnisse)
- fehlende Typinformation wird vom Übersetzer inferiert (berechnet)
- Rekursive Funktionen direkt verwendbar
  (daher in Haskell kein Y-Kombinator notwendig)

# Ergänzende und weiterführende Literaturhinweise


- A. Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Annals of Mathematical Studies, Vol. 6, Princeton University Press, 1941.

- H.P. Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. (Revised Edn.), North Holland, 1984.

# Zum Abschluss für heute

...$\lambda$-artige Funktionsnotation in Haskell

...am Beispiel der Fakultätsfunktion:

```
fac :: Int -> Int
fac = \n -> (if n == 0 then 1 else (n * fac (n - 1)))
```

Mithin in Haskell: "\" statt "$\lambda$" und "->" statt "."

*Anekdote* (vgl. P. Pepper [4]):
$(n.\widehat{n+1}) \rightsquigarrow (\wedge n.n+1) \rightsquigarrow (\lambda n.n+1) \rightsquigarrow \backslash n\text{->}n+1$

# Vorschau auf die noch kommenden Aufgabenblätter...

Ausgabe des neunten und...

- letzten Aufgabenblatts: Mi, den 05.12.2007

  ...Abgabetermine: Do, den 13.12.2007, und Do, den 10.01.2008, jeweils 15:00 Uhr (Abgabetermine verlängert!)

# Vorschau auf den abschließenden Vorlesungstermin...

- Di, 11.12.2007, Vorlesung von 13:00 Uhr bis 14:30 Uhr im Informatik-Hörsaal (letzte Vorlesung!)

  (statt des ursprünglich angekündigten Donnerstagtermins am 13.12.2007)

# Einladung zum Kolloquiumsvortrag

Die Complang-Gruppe lädt ein zu folgendem Vortrag...

**Automatic Verification of Combined Specifications**

Prof. Dr. Ernst-Rüdiger Olderog

Carl v. Ossietzky Universität Oldenburg, Deutschland

ZEIT: Freitag, 13. Dezember 2007, 14:00 Uhr c.t.

ORT: TU Wien, Elektrotechnik, EI 5 Hochenegg-Hörsaal, Gußhausstr. 25-29 (Altbau), 2. Stock

MEHR INFO: `http://www.complang.tuwien.ac.at/talks/Olderog2007-12-13`

Alle Interessenten sind herzlich willkommen!