

Programmmanalyse

...speziell *Datenflussanalyse*

Typische Fragen sind ...

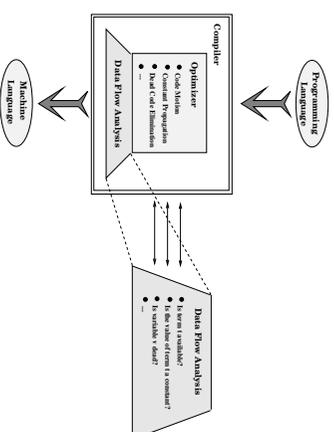
- Welchen **Wert** hat eine Variable an einer Programmstelle?
~> Konstantenausbreitung und Faltung
- Steht der Wert eines Ausdrucks an einer Programmstelle **verfügbar**?
~> (Partielle) Redundanzeliminierung
- Ist eine Variable tot an einer Programmstelle?
~> Elimination (partiell) toten Codes

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

1

Hintergrund

...(Programm-) Analyse zur (Programm-) Optimierung



Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

2

In der Folge

Zentrale Fragen...

Grundlegendes ebenso...

- Was heißt *Optimalität*
...in Analyse und in Optimierung?
- ...wie (scheinbar) Nebensächliches:
- Was ist eine *angemessene* Programmrepräsentation?

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

3

Ausblick

Genauer werden wir unterscheiden...

- Intraprozedurale,
 - interprozedurale,
 - parallele,
 - konditionale,
 - ...
- Datenflussanalyse.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

4

Ausblick

Ingredientien *intraprozeduraler* Datenflussanalyse:

- (*Lokale*) *abstrakte Semantik*
 1. Ein *Datenflussanalyseverband* $\mathcal{L} = (\mathcal{Q}, \eta, \cup, \mathbb{E}, \perp, \top)$
 2. Ein *Datenflussanalysefunktional* $\llbracket \cdot \rrbracket : E \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$
 3. Anfangsinformation/-zusicherung $\alpha_s \in \mathcal{C}$
- *Globalisierungsstrategien*
 1. "Meet over all Paths"-Ansatz (*MOP*)
 2. Maximaler Fixpunktansatz (*MaxFP*)
- *Generischer Fixpunktalgorithmus*

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

5

Ausblick

Hauptresultate:

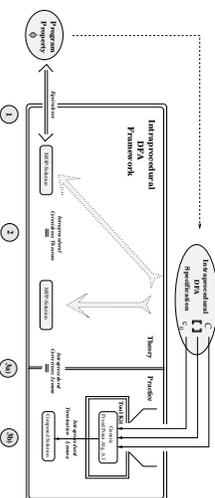
- *Sicherheits-* (*Korrektheits-*) Theorem
 - *Koinzidenz-* (*Vollständigkeits-*) Theorem
- Sowie:
- *Effektivitäts-* (*Terminierungs-*) Theorem

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

6

Ausblick: Intraprozedurale Datenflussanalyse (1)

...die (detaillierte) Werkzeugkistenicht:

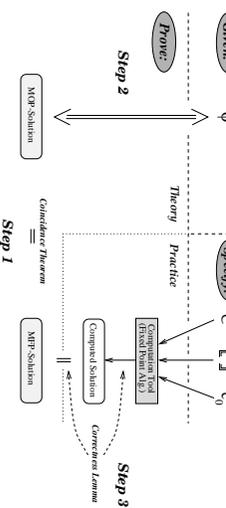


Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

7

Ausblick: Intraprozedurale Datenflussanalyse (2)

...bei genaueren Hinneinsehen:

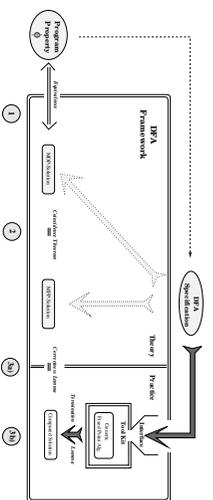


Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

8

Ausblick: DFA-Frameworks / DFA-Tools (1)

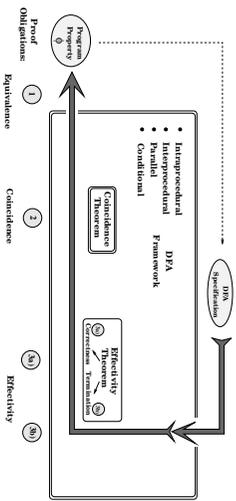
...aus größerer Ferne und Konzentration auf das Wesentliche:



Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007) 9

Ausblick: DFA-Frameworks / DFA-Tools (2)

...das generelle Muster, die Werkzeugkisten Sicht:



Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007) 10

Ziel

Optimale Programmp Optimierung...

...weiße Schimmel in der Informatik?

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007) 11

Ohne Fleiß kein Preis!

In der Sprechweise der optimierenden Übersetzung...

...ohne Analyse keine Optimierung!

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007) 12

Zurück zum Anfang: Zur Programmanalyse

...speziell Datenflussanalyse

üblich ist...

- die Repräsentation von Programmen durch (nichtdeterministische) Flussgraphen

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007) 13

Flussgraph

Ein (nichtdeterministischer) Flussgraph ist ein Quadrupel $G = (N, E, s, e)$ mit

- Knotenmenge (engl. Nodes) N
- Kantenmenge (engl. Edges) $E \subseteq N \times N$
- ausgezeichnetem Startknoten s ohne Vorgänger und
- ausgezeichnetem Endknoten e ohne Nachfolger

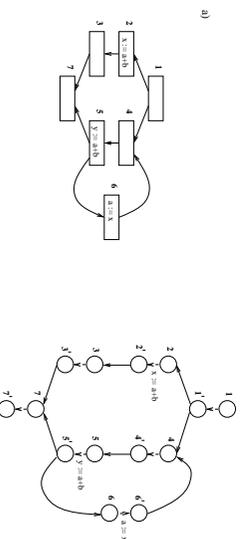
Knoten repräsentieren Programmpunkte, Kanten repräsentieren die Verzweigungsstruktur. Elementare Programmanweisungen (Zuweisungen, Tests) können wahlweise durch Knoten oder Kanten repräsentiert werden.

~ Darstellungsvarianten: Knoten- vs. kantenbenannte Flussgraphen

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007) 14

Veranschaulichung

Knoten- vs. kantenbenannte Flussgraphen (hier mit Einzelanweisungsbenennung)



Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007) 15

Flussgraphen

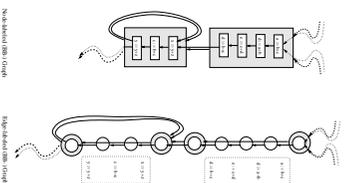
Darstellungsvarianten...

- Knotenbenannte Graphen
 - Einzelanweisungsgraphen (SI-Graphen)
 - Basisblockgraphen (BB-Graphen)
- Kantenbenannte Graphen
 - Einzelanweisungsgraphen (SI-Graphen)
 - Basisblockgraphen (BB-Graphen)

In der Folge werden wir bevorzugt kantenbenannte SI-Graphen betrachten.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007) 16

Knoten- vs. kantenbenannte Flussgraphen



Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

17

Bezeichnungen

Sei $G = (N, E, s, e)$ ein Flussgraph, seien m, n zwei Knoten aus N . Dann bezeichne:

- $P_G[m, n]$: ...die Menge aller Pfade von m nach n
- $P_G^<[m, n]$: ...die Menge aller Pfade von m zu einem Vorgänger von n
- $P_G^>[m, n]$: ...die Menge aller Pfade von einem Nachfolger von m nach n
- $P_G^*[m, n]$: ...die Menge aller Pfade von einem Nachfolger von m zu einem Vorgänger von n

Bem.: Wenn G aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, schreiben wir einfacher auch P statt P_G .

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

18

Datenflussanalysspezifikation

- (Lokale) abstrakte Semantik
- 1. Ein Datenflussanalyseverbund $\mathcal{C} = (C, \sqcap, \sqcup, \underline{\epsilon}, \perp, \top)$
- 2. Ein Datenflussanalysefunktional $\llbracket \cdot \rrbracket : E \rightarrow (C \rightarrow C)$
- Eine Anfangsinformation/-Zusicherung: $c_s \in C$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

19

Globalisierung einer lokalen abstrakten Semantik

Zwei Strategien:

- "Meet over all Paths"-Ansatz (MOP)
 \rightsquigarrow spezifizierende Lösung
- Maximaler Fixpunktansatz (MaxFP)
 \rightsquigarrow berechenbare Lösung

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

20

Der MOP - Ansatz

Zentral: Ausdehnung der lokalen abstrakten Semantik auf Pfaden

$$\llbracket p \rrbracket =_{df} \begin{cases} Id_C & \text{falls } q < 1 \\ \llbracket \langle e_2, \dots, e_q \rangle \rrbracket \circ \llbracket e_1 \rrbracket & \text{sonst} \end{cases}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

21

Die MOP - Lösung

$$\forall c_s \in C \ \forall n \in N. \text{MOP}_{c_s}(n) = \bigsqcap \{ \llbracket p \rrbracket(c_s) \mid p \in P[s, n] \}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

22

Der MaxFP - Ansatz

Zentral: Das MaxFP - Gleichungssystem:

$$\mathbf{inf}(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = s \\ \bigsqcap \{ \llbracket (m, n) \rrbracket(\mathbf{inf}(m)) \mid m \in \text{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

23

Die MaxFP - Lösung

$$\forall c_s \in C \ \forall n \in N. \text{MaxFP}_{c_s}(\llbracket \cdot \rrbracket_{c_s})(n) =_{df} \mathbf{inf}_{c_s}^*(n)$$

wobei $\mathbf{inf}_{c_s}^*$ die größte Lösung des MaxFP - Gleichungssystems bezeichnet.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

24

Generischer Fixpunktalgorithmus 1(2)

Eingabe: (1) Ein Flussgraph $G = (N, E, s, e)$, (2) eine (lokale) abstrakte Semantik bestehend aus einem Datenflussanalyseverband C , einem Datenflussanalysefunktional $\llbracket \cdot \rrbracket : E \rightarrow (C \rightarrow C)$, und (3) einer Anfangsinformation $c_s \in C$.

Ausgabe: Unter den Voraussetzungen des Effektivitätstheorems (später!) die $MaxFP$ -solution. Abhängig von den Eigenschaften des Datenflussanalysefunktionals gilt dann:

(1) $\llbracket \cdot \rrbracket$ ist *distributiv*: Variable inf enthält für jeden Knoten die stärkste Nachbedingung bezüglich der Anfangsinformation c_s .

(2) $\llbracket \cdot \rrbracket$ ist *monoton*: Variable inf enthält für jeden Knoten eine sichere (d.h. untere) Approximation der stärksten Nachbedingung bezüglich der Anfangsinformation c_s .

Bemerkung: Die Variable $workset$ steuert den iterativen Prozess. Ihre Elemente sind Knoten aus G , deren Annotation jüngst aktualisiert worden ist.

Generischer Fixpunktalgorithmus 2(2)

(Prolog: Initialisierung von inf and $workset$)

```
FORALL  $n \in N \setminus \{s\}$  DO  $inf[n] := \top$  OD;
```

```
 $inf[s] := c_s$ ;
```

```
 $workset := \{s\}$ ;
```

(Hauptprozess: Iterative Fixpunktberechnung)

```
WHILE  $workset \neq \emptyset$  DO
```

```
  CHOOSE  $m \in workset$ ;
```

```
   $workset := workset \setminus \{m\}$ ;
```

(Aktualisiere die Nachfolgerumgebung von Knoten m)

```
  FORALL  $n \in succ(m)$  DO
```

```
     $meet := \llbracket (m, n) \rrbracket (inf[m]) \sqcap inf[n]$ ;
```

```
    IF  $inf[n] \sqsupset meet$ 
```

```
      THEN
```

```
         $inf[n] := meet$ ;
```

```
         $workset := workset \cup \{n\}$ 
```

```
      FI
```

```
    OD
```

```
  ESOOHC
```

```
OD.
```

Hauptresultate

Zusammenhang von...

- MOP - und $MaxFP$ -Lösung
 - Korrektheit
 - Vollständigkeit
- $MaxFP$ -Lösung und generischem Algorithmus
 - Terminierung mit $MaxFP$ -Lösung

Korrektheit: Sicherheitstheorem

Theorem [Sicherheit (Safety)]

Die $MaxFP$ -Lösung ist eine sichere (konservative), d.h. untere Approximation der MOP -Lösung, d.h.,

$$\forall c_s \in C \forall n \in N. MaxFP_{c_s}(n) \sqsubseteq MOP_{c_s}(n)$$

falls das Datenflussanalysefunktional $\llbracket \cdot \rrbracket$ monoton ist.

Vollständigkeit (und Korrektheit): Ko- inzidenztheorem

Theorem [Koinzidenz (Coincidence)]

Die $MaxFP$ -solution stimmt mit der MOP -Lösung überein, d.h.,

$$\forall c_s \in C \forall n \in N. MaxFP_{c_s}(n) = MOP_{c_s}(n)$$

falls das Datenflussanalysefunktional $\llbracket \cdot \rrbracket$ distributiv ist.

Terminierung: Effektivitätstheorem

Theorem [Effektivität]

Der generische Fixpunktalgorithmus terminiert mit der $MaxFP$ -Lösung, falls das Datenflussanalysefunktional monoton ist und der Verband die absteigende Kettenbedingung erfüllt.

Nachzutragende Definitionen

...sind:

- Absteigende (aufsteigende) Kettenbedingung
- Monotonie und Distributivität von Datenflussanalysefunktionalen

Auf-/absteigende Kettenbedingung

Definition [Ab-/aufsteigende Kettenbedingung]

Ein Verband $\mathcal{C} = (C, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top)$ erfüllt

1. die *absteigende Kettenbedingung*, falls jede absteigende Kette stationär wird, d.h. für jede Kette $p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsubseteq \dots \sqsupseteq p_n \sqsupseteq \dots$ gibt es einen Index $m \geq 1$ so dass $x_m = x_{m+j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt
2. die *aufsteigende Kettenbedingung*, falls jede aufsteigende Kette stationär wird, d.h. für jede Kette $p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq p_n \sqsubseteq \dots$ gibt es einen Index $m \geq 1$ so dass $x_m = x_{m+j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

Monotonie, Distributivität, Additivität

... von Funktionen auf (Datenflussanalyse-) Verbänden.

Definition [Monotonie, Distributivität, Additivität]

Sei $\mathcal{C} = (C, \cap, \cup, \sqsubseteq, \perp, \top)$ ein vollständiger Verband und $f : C \rightarrow C$ eine Funktion auf C . Dann heißt f

1. *monoton* gdw $\forall c, d \in C. c \sqsubseteq d \Rightarrow f(c) \sqsubseteq f(d)$
(Erhalt der Ordnung der Elemente)
2. *distributiv* gdw $\forall C' \subseteq C. f(\bigcap C') = \bigcap \{f(c) \mid c \in C'\}$
(Erhalt der größten unteren Schranken)
3. *additiv* gdw $\forall C' \subseteq C. f(\bigcup C') = \bigcup \{f(c) \mid c \in C'\}$
(Erhalt der kleinsten oberen Schranken)

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

33

Zur Erinnerung: Oft nützlich

... ist folgende äquivalente Charakterisierung der Monotonie:

Lemma

Sei $\mathcal{C} = (C, \cap, \cup, \sqsubseteq, \perp, \top)$ ein vollständiger Verband und $f : C \rightarrow C$ eine Funktion auf C . Dann gilt:

$$f \text{ ist monoton} \iff \forall C' \subseteq C. f(\bigcap C') \sqsubseteq \bigcap \{f(c) \mid c \in C'\}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

34

Monotonie und Distributivität

... von Datenflussanalysefunktionalen.

Definition

Ein Datenflussanalysefunktional $\llbracket \cdot \rrbracket : E \rightarrow (C \rightarrow C)$ heißt *monoton (distributiv)* gdw $\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket$ ist monoton (distributiv).

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

35

Beispiel: Verfügbare Ausdrücke

... ein typisches distributives DFA-Problem.

- **Abstrakte Semantik für verfügbare Ausdrücke:**

1. *Datenflussanalyseverband:*
 $(C, \cap, \cup, \sqsubseteq, \perp, \top) = df (\mathcal{B}, \wedge, \vee, \leq, false, true)$
2. *Datenflussanalysefunktional:* $\llbracket \cdot \rrbracket_{av} : E \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})$ definiert durch

$$\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_{av} = df \begin{cases} Cst_{true} & \text{falls } Comp_e \wedge Transp_e \\ Id_{\mathcal{B}} & \text{falls } \neg Comp_e \wedge Transp_e \\ Cst_{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

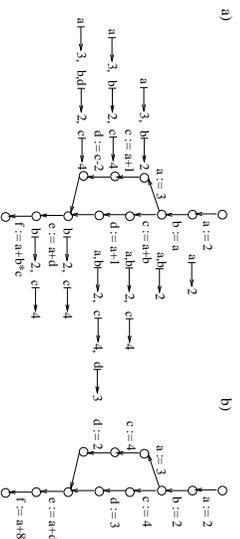
wobei

$$\mathcal{B} = df (\mathcal{B}, \wedge, \vee, \leq, false, true)$$

den Verband der Wahrheitswerte bezeichnet mit $false \leq true$ und dem logischen "und" und "oder" als Schnitt- bzw. Vereinigungsoperation \cap and \cup .

Beispiel: Einfache Konstanten

Ein typisches monotones (nicht distributives) DFA-Problem...



Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

37

Abstrakte Semantik für einfache Konstanten

- **Abstrakte Semantik für einfache Konstanten:**

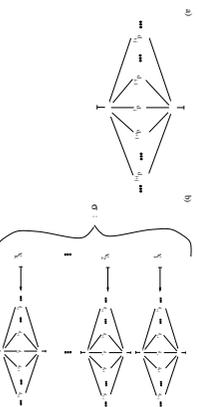
1. *Datenflussanalyseverband:*
 $(C, \cap, \cup, \sqsubseteq, \perp, \top) = df (\Sigma, \cap, \cup, \sqsubseteq, \sigma_{\perp}, \sigma_{\top})$
 2. *Datenflussanalysefunktional:*
 $\llbracket \cdot \rrbracket_{sc} : E \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$ definiert durch
- $$\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_{sc} = df \theta_e$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

38

Datenflussanalyseverband für einfache Konstanten

Der "kanonische" Verband für Konstantenausbreitung/-faltung:



Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

39

Die Semantik von Termen

Die *Semantik* von Termen $t \in \mathbb{T}$ ist gegeben durch die *Evaluationsfunktion*

$$\mathcal{E} : \mathbb{T} \rightarrow (\Sigma \rightarrow D)$$

die induktiv definiert ist durch:

$$\forall t \in \mathbb{T} \forall \sigma \in \Sigma. \mathcal{E}(t)(\sigma) = df \begin{cases} \sigma(x) & \text{falls } t = x \in V \\ I_0(c) & \text{falls } t = c \in C \\ I_0(op)(\mathcal{E}(t_1)(\sigma), \dots, \mathcal{E}(t_n)(\sigma)) & \text{falls } t = op(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

40

Nachzutragende Begriffe und Definitionen

...um die Definition der Termsemantik abzuschließen:

- Termsyntax
- Interpretation
- Zustand

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

41

Die Syntax von Termen (1)

Sei

- V eine Menge von Variablen und
- Op eine Menge von n -stelligem Operatoren, $n \geq 0$, so wie $C \subseteq Op$ die Menge der 0-stelligen Operatoren, der sog. *Konstanten* in Op .

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

42

Die Syntax von Termen (2)

Dann legen wir fest:

1. Jede Variable $v \in V$ und jede Konstante $c \in C$ ist ein Term.
2. Ist $op \in Op$ ein n -stelliger Operator, $n \geq 1$, und sind t_1, \dots, t_n Terme, dann ist auch $op(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.
3. Es gibt keine weiteren Terme außer den nach den obigen beiden Regeln konstruierbaren.

Die Menge aller Terme bezeichnen wir mit \mathbb{T} .

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

43

Interpretation

Sei D' ein geeigneter Datenbereich (z.B. die Menge der ganzen Zahlen), seien \perp und \top zwei ausgezeichnete Elemente mit $\perp, \top \notin D'$ und sei $D =_{df} D' \cup \{\perp, \top\}$.

Eine *Interpretation* über \mathbb{T} und D ist ein Paar $I \equiv (D, I_0)$, wobei

- I_0 eine Funktion ist, die mit jedem 0-stelligen Operator $c \in Op$ ein Datum $I_0(c) \in D'$ und mit jedem n -stelligen Operator $op \in Op$, $n \geq 1$, eine totale Funktion $I_0(op) : D^n \rightarrow D$ assoziiert, die als *strikt* angenommen wird (d.h. $I_0(op)(d_1, \dots, d_n) = \perp$, wann immer es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $d_j = \perp$)

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

44

Menge der Zustände

$$\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : V \rightarrow D\}$$

...bezeichnet die Menge der *Zustände*, d.h. die Menge der Abbildungen σ von der Menge der Programmvariablen V auf einen geeigneten (hier nicht näher spezifizierten) Datenbereich D .

Insbesondere

- $\sigma_{\perp} : \dots$ bezeichnet den wie folgt definierten *total undefinierten* Zustand aus Σ : $\forall v \in V. \sigma_{\perp}(v) = \perp$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

45

Zustandstransformationsfunktion

Die *Zustandstransformationsfunktion*

$$\theta : \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad \iota \equiv x := t$$

ist definiert durch:

$$\forall \sigma \in \Sigma \forall y \in V. \theta(\sigma)(y) =_{df} \begin{cases} \mathcal{E}(t)(\sigma) & \text{falls } y = x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

46

Der funktionale *MaxFP*-Ansatz

Zentral: Das "funktionale" *MaxFP*-Gleichungssystem:

$$\llbracket n \rrbracket = \begin{cases} Id_c^c & \text{falls } n = s \\ \sqcap \{ \llbracket (n, m) \rrbracket \circ \llbracket m \rrbracket \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

In der Folge bezeichne das Funktional

$$\llbracket \rrbracket : N \rightarrow (C \rightarrow C)$$

die größte Lösung des obigen Gleichungssystems.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

47

Zusammenhang von *MaxFP*- und funktionalem *MaxFP*-Ansatz

Theorem [Äquivalenz]

$$\forall n \in N \forall c_s \in C. MaxFP_{(G, \llbracket \rrbracket)}(n)(c_s) = \llbracket n \rrbracket(c_s)$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 6. Teil (19.11.2007)

48

Ausblick

Die funktionale Perspektive auf den *MaxFP* -Ansatz liefert den Schlüssel zu

- interprozeduraler (d.h. von Programmen mit Prozeduren)
 - paralleler (d.h. von Programmen mit Parallelität)
- Datenflussanalyse.

Vorschau auf die weiteren Vorlesungstermine...

- Mo, 26.11.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude
- Mo, 03.12.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude
- Mo, 10.12.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude
- Mo, 17.12./24.12./31.12.2007: *Keine Vorlesung(en)!* (*Ferienzeit*)