

Semantikdefinitionsstile (1)

Es gibt unterschiedliche Stile, die Semantik einer Programmiersprache festzulegen. Sie richten sich an unterschiedliche Adressaten und deren spezifische Sicht auf die Semantik...

Insbesondere unterscheiden wir den...

- *denotationalen*
- *operationalen*
- *axiomatischen*

Stil.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

1

Semantikdefinitionsstile (2)

- *Sprachentwicklersicht*
 - Denotationelle Semantik
- *Sprach- und Anwendungsimplimentiersicht*
 - Operationelle Semantik
 - * Strukturell operationelle Semantik (small steps semantics)
 - * Natürliche Semantik (big steps semantics)
- *Programmierer- und Verifizierersicht*
 - Axiomatische Semantik

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

2

Strukturell operationelle Semantik (1)

...noch einmal wiederholt für das Beispiel von WHILE:

$$[\text{skip}]_{\text{SOS}} \quad \frac{}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma}$$

$$[\text{abort}]_{\text{SOS}} \quad \frac{}{\langle \text{abort}, \sigma \rangle \Rightarrow \text{error}}$$

$$[\text{assns}] \quad \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma' \quad \llbracket t \rrbracket_A(\sigma) / x}$$

$$[\text{comp}]_{\text{SOS}} \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_1', \sigma' \rangle \quad \langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_1; \pi_2, \sigma' \rangle}{\langle \pi_1, \pi_2, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_2, \sigma' \rangle}$$

$$[\text{comp}]_{\text{SOS}}^2 \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma' \quad \langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_2, \sigma' \rangle}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_2, \sigma' \rangle}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

3

Strukturell operationelle Semantik (2)

$$[\text{if}]_{\text{SOS}}^t \quad \frac{}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_1, \sigma \rangle}$$

$$[\text{if}]_{\text{SOS}}^{f_1} \quad \frac{}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_2, \sigma \rangle}$$

$$[\text{while}]_{\text{SOS}} \quad \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \text{if } b \text{ then } \pi; \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od else skip fi}, \sigma \rangle}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

4

Strukturell operationelle Semantik (3)

Der Fokus liegt auf...

- *individuellen Schritten* einer Berechnungsfolge, d.h. auf der Ausführung von Zuweisungen und Tests

Intuitive Bedeutung der Transitionsrelation...

$$\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \gamma$$

...mit γ von der Form $\langle \pi', \sigma' \rangle$ oder σ' oder *error*. beschreibt den *ersten* Schritt der Berechnungsfolge von π angesetzt auf σ . Folgende Übergänge sind möglich:

- γ von der Form $\langle \pi', \sigma' \rangle$:
Abarbeitung von π nicht vollständig; das Restprogramm π' ist auf σ' anzusetzen
- γ von der Form σ' :
Abarbeitung von π vollständig; π angesetzt auf σ terminiert in einem Schritt in σ'
- γ von der Form *error*:
Abarbeitung von π terminiert irregulär

Natürliche Semantik (2)

$$[\text{if}]_{\text{NS}} \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \quad \langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}{\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt}}$$

$$[\text{if}]_{\text{NS}}^{f_1} \quad \frac{\langle \pi_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \quad \langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}{\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{ff}}$$

$$[\text{while}]_{\text{NS}}^t \quad \frac{\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma', \langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma'' \quad \langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''}{\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt}}$$

$$[\text{while}]_{\text{NS}}^{f_1} \quad \frac{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}{\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{ff}}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

7

Natürliche Semantik (3)

Der Fokus liegt auf...

- Zusammenhang von *initialem* und *finalen* Zustand einer Berechnungsfolge

Intuitive Bedeutung von...

$$\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \gamma$$

...mit γ von der Form σ' oder *error* ist: π angesetzt auf initialen Zustand σ terminiert schließlich im finalen Zustand σ' bzw. terminiert irregulär.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

8

Natürliche Semantik (1)

...ebenfalls für das Beispiel von WHILE:

$$[\text{skip}]_{\text{NS}} \quad \frac{}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

$$[\text{abort}]_{\text{NS}} \quad \frac{}{\langle \text{abort}, \sigma \rangle \rightarrow \text{error}}$$

$$[\text{assns}] \quad \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \quad \llbracket t \rrbracket_A(\sigma) / x}$$

$$[\text{comp}]_{\text{NS}} \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma', \langle \pi_2, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma'' \quad \langle \text{comp}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

6

Denotationelle Semantik (3)

Zur Hilfsfunktion $cond$...

Funktionalität...

$$cond : (\Sigma \rightarrow B) \times (\Sigma \rightarrow \Sigma) \times (\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$$

Definiert durch...

$$cond(p, g_1, g_2) \sigma =_{df} \begin{cases} g_1 \sigma & \text{falls } p \sigma = tt \\ g_2 \sigma & \text{falls } p \sigma = ff \end{cases}$$

Zu den Argumenten und zum Resultat von $cond$...

- 1. Argument: Prädikat (in unserem Szenario total definiert; siehe Vorlesungsteil 1)
- 2.&3. Argument: Je eine partiell definierte Zustandstransformation
- Resultat: Wieder eine partiell definierte Zustandstransformation

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

17

Denotationelle Semantik (4)

Zur Hilfsfunktion FIX ...

Funktionalität...

$$FIX : ((\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$$

Definiert durch...

$$F g = cond(\llbracket b \rrbracket_{B^g}, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, Id)$$

Daraus ergibt sich...

- FIX ist ein Funktional ("Zustandstransformationsfunktional")
- Die denotationelle Semantik der while-Schleife ist ein Fixpunkt des Funktions F (und zwar der kleinste!)

Mehr Details zu FIX und Co. später!

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

18

Denotationelle Semantik (5)

- *Operationelle Semantik*

...der Fokus liegt darauf, wie ein Programm ausgeführt wird

- *Denotationelle Semantik*

...der Fokus liegt auf dem *Effekt*, den die Ausführung eines Programms hat: Für jedes *syntaktische* Konstrukt gibt es eine *semantische* Funktion, die ersterem ein *mathematisches Objekt* zuweist, i.a. eine Funktion, die den Effekt der Ausführung des Konstrukts beschreibt (jedoch nicht, wie dieser Effekt erreicht wird).

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

19

Denotationelle Semantik (6)

Zentral für denotationelle Semantiken: **Kompositionalität!**

Intuitiv:

- Für jedes Element der elementaren syntaktischen Konstrukts/Kategorien gibt es eine zugehörige semantische Funktion
- Für jedes Element eines zusammengesetzten syntaktischen Konstrukts/Kategorie gibt es eine semantische Funktion, die über die semantischen Funktionen der Komponenten des zusammengesetzten Konstrukts definiert ist.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

20

Hauptergebnisse

Theorem

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}: \llbracket \pi \rrbracket_{sos} = \llbracket \pi \rrbracket_{ns} = \llbracket \pi \rrbracket_{ds}$$

Die Äquivalenz der strukturell operationellen, natürlichen und denotationellen Semantik von WHILE legt es nahe, den semantikangebenden Index in der Folge fortzulassen und vereinfachend von $\llbracket \cdot \rrbracket$ als der Semantik der Sprache WHILE zu sprechen:

$$\llbracket \cdot \rrbracket : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

definiert durch

$$\llbracket \cdot \rrbracket =_{df} \llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

21

WHILE – Denotationelle Semantik (1)

- \mathbf{Prg} ...bezeichne die Menge aller Programme der Sprache **WHILE**

Denotationelle Semantik

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

Somit...

- Die *denotationelle Semantik* eines **WHILE**-Programms ist eine (partiell definierte) *Zustandstransformation*, wobei die Menge der *Zustände* gegeben ist durch

$$\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : V \rightarrow D\}$$

Beachte...

- Auch die operationelle (die strukturell operationelle wie auch die natürliche) Semantik eines **WHILE**-Programms ist eine (partiell definierte) *Zustandstransformation* auf Σ , nicht aber die axiomatische Semantik.

WHILE – Denotationelle Semantik (2)

Erinnerung:

$$\llbracket skip \rrbracket_{ds} = Id$$

$$\llbracket abort \rrbracket_{ds} = Error$$

$$\llbracket x := t \rrbracket_{ds}(\sigma) = \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma)/x]$$

$$\llbracket \pi_1; \pi_2 \rrbracket_{ds} = \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}$$

$$\llbracket \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \rrbracket_{ds} = cond(\llbracket b \rrbracket_{B^g}, \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}, \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds})$$

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = FIX F$$

$$\text{where } F g = cond(\llbracket b \rrbracket_{B^g}, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, Id)$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

24

WHILE – Denotationelle Semantik (3)

Noch offen...

- Die Bedeutung von...

– *cond* und
– *FIX F*

Diese Bedeutung wollen wir in der Folge aufklären...

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

25

Zur Bedeutung von *cond*

Hilfsfunktion *cond*...

Funktionalität...

$$cond : (\Sigma \rightarrow B) \times (\Sigma \rightarrow \Sigma) \times (\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$$

Definiert durch...

$$cond(p, g_1, g_2) \sigma = \begin{cases} g_1 \sigma & \text{if } p \sigma = \text{tt} \\ g_2 \sigma & \text{if } p \sigma = \text{ff} \end{cases}$$

Zu den Argumenten und zum Resultat von *cond*...

- 1. Argument: Prädikat (in unserem Szenario total definiert; siehe Vorlesungsteil 1)
- 2. & 3. Argumente: Je eine partiell definierte ZustandsTransformation
- Resultat: Wieder eine partiell definierte ZustandsTransformation

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

26

Damit erhalten wir

...für die Bedeutung der Fallunterscheidung

$$\begin{aligned} & \llbracket \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \rrbracket_{ds} \sigma \\ &= cond(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}, \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds}) \sigma \\ &= \begin{cases} \sigma' & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{tt} \wedge \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds} \sigma = \sigma') \\ & \vee (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{ff} \wedge \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \sigma = \sigma') \\ error & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{tt} \wedge \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds} \sigma = error) \\ & \vee (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{ff} \wedge \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \sigma = error) \\ undef & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{tt} \wedge \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds} \sigma = undef) \\ & \vee (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{ff} \wedge \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \sigma = undef) \end{cases} \end{aligned}$$

Erinnerung:

- $\llbracket b \rrbracket_B$ ist in unserem Szenario total definiert; $\llbracket b \rrbracket_B \sigma$ ist daher stets von *undef* verschieden.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

27

Schrittweise zur denotationellen Semantik der while-Schleife

Dazu folgende Beobachtung...

- while *b* do π od muss dieselbe Bedeutung haben wie...
if *b* then (τ ; while *b* do π od) else *skip* fi

Daraus folgt...

- $\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = cond(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, Id)$

Und daraus schließlich...

- $\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds}$ muss Fixpunkt des Funktionals *F* sein, dass definiert ist durch

$$F g = cond(\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, Id)$$

Oder anders ausgedrückt, es muss gelten:

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = F(\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds})$$

...Was uns wie gewünscht zu einer *kompositionellen* Definition von $\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds}$ und damit von $\llbracket \rrbracket_{ds}$ insgesamt führen wird.

Folgende drei Argumente...

...werden dafür entscheidend sein

1. $\llbracket \Sigma \rightarrow \Sigma \rrbracket$ kann vollständig partiell geordnet werden.
2. *F* im Anwendungskontext ist stetig
3. Fixpunktbildung im Anwendungskontext wird ausschließlich auf stetige Funktionen angewendet.

Insgesamt ergibt sich dann daraus die Wohldefiniertheit von

$$\llbracket \rrbracket_{ds} : \text{Prog} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

31

Etwas formaler: Unser Arbeitsplan

Erforderlich...

- Einige Resultate aus der *Fixpunkttheorie*

Zu tun...

- Nachzuweisen, dass diese Resultate auf unsere Situation anwendbar sind.

Anschließend bleibt nachzuholen...

- Der mathematische Hintergrund (Ordnungen, CPOS, Stetigkeit von Funktionen) und die benötigten Resultate (Fixpunktsatz)

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

30

Ordnung auf Zustandsformationenen

Bezeichne...

- $\llbracket \Sigma \rightarrow \Sigma \rrbracket$ die Menge der partiell definierten Zustandsformationen.

Wir definieren...

$$g_1 \sqsubseteq g_2 \iff \forall \sigma \in \Sigma. g_1 \sigma \text{ definiert} = \sigma' \Rightarrow g_2 \sigma \text{ definiert} = \sigma' \\ \text{mit } g_1, g_2 \in \llbracket \Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon \rrbracket$$

Lemma 1

1. $(\llbracket \Sigma \rightarrow \Sigma \rrbracket, \sqsubseteq)$ ist eine partielle Ordnung.

2. Die *total undefinierte* (d.h. nirgends definierte) Funktion $\perp : \Sigma \rightarrow \Sigma$ mit $\perp \sigma = \text{undef}$ für alle $\sigma \in \Sigma$ ist *kleinstes* Element in $(\llbracket \Sigma \rightarrow \Sigma \rrbracket, \sqsubseteq)$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

32

Ordnung auf Zustandsformationenen

Sogar...

Lemma 2

Das Paar $(\Sigma \rightarrow \Sigma, \sqsubseteq)$ ist eine vollständige partielle Ordnung (CPO) mit kleinstem Element \perp .

Weiter gilt: Die kleinste obere Schranke $\sqcup Y$ einer Kette Y ist gegeben durch

$$\text{graph}(\sqcup Y) = \cup \{ \text{graph}(g) \mid g \in Y \}$$

Das heißt: $(\sqcup Y) \sigma = \sigma' \iff \exists g \in Y. g \sigma = \sigma'$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

33

Einschub: Graph einer Funktion

Der Graph einer totalen Funktion $f : M \rightarrow N$ ist definiert durch

$$\text{graph}(f) =_{df} \{ \langle m, n \rangle \in M \times N \mid f m = n \}$$

Es gilt:

- $\langle m, n \rangle \in \text{graph}(f) \wedge \langle m, n' \rangle \in \text{graph}(f) \Rightarrow n = n'$ (rechtseindeutig)
- $\forall m \in M. \exists n \in N. \langle m, n \rangle \in \text{graph}(f)$ (linkstotal)

Der Graph einer partiellen Funktion $f : M \rightarrow N$ mit Definitionsbereich $M_f \subseteq M$ ist definiert durch

$$\text{graph}(f) =_{df} \{ \langle m, n \rangle \in M \times N \mid f m = n \wedge m \in M_f \}$$

Vereinbarung...

Für $f : M \rightarrow N$ partiell definierte Funktion auf $M_f \subseteq M$ schreiben wir

- $f m = n$, falls $\langle m, n \rangle \in \text{graph}(f)$
- $f m = \text{undef}$, falls $m \notin M_f$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

34

Stetigkeitsresultate (1)

Lemma 3

Sei $g_0 \in [\Sigma \rightarrow \Sigma]$, sei $p \in [\Sigma \rightarrow B]$ und sei F definiert durch

$$F g = \text{cond}(p, g, g_0)$$

Dann gilt: F ist stetig.

Zur Erinnerung: Seien (C, \sqsubseteq_C) und (D, \sqsubseteq_D) zwei CPOs und sei $f : C \rightarrow D$ eine Funktion von C nach D .

Dann heißt f ...

- *monoton* gdw. $\forall c, c' \in C. c \sqsubseteq_C c' \Rightarrow f(c) \sqsubseteq_D f(c')$
(Erhalt der Ordnung der Elemente)
- *stetig* gdw. $\forall C' \subseteq C. f(\sqcup_{C'} C') =_D \sqcup_{C'} f(C')$
(Erhalt der kleinsten oberen Schranken)

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

35

Stetigkeitsresultate (2)

Lemma 4

Sei $g_0 \in [\Sigma \rightarrow \Sigma]$ und sei F definiert durch

$$F g = g \circ g_0$$

Dann gilt: F ist stetig.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

36

Zusammen mit...

Lemma 5

Die Gleichungen zur Festlegung der denotationellen Semantik von WHILE (vgl. Folie 15 von heute) definieren eine totale Funktion

$$\llbracket _ \rrbracket_{ds} \in [\mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)]$$

...sind wir durch! Wir können beweisen:

$$\llbracket _ \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

ist wohldefiniert!

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

37

Und somit wie anfangs angedeutet...

Aus...

1. Die Menge $[\Sigma \rightarrow \Sigma]$ der partiell definierten Zustandsformationen bildet zusammen mit der Ordnung \sqsubseteq eine CPO.

2. Funktional F mit " $F g = \text{cond}(p, g, g_0)$ " und " $g \circ g_0$ " ist stetig

3. In der Definition von $\llbracket _ \rrbracket_{ds}$ wird die Fixpunktbildung ausschließlich auf stetige Funktionen angewendet.

...ergibt sich wie gewünscht:

$$\llbracket _ \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

...ist wohldefiniert!

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

38

Nachträge

Mathematische Grundlagen im Zusammenhang mit der...

1. Definition abstrakter Semantiken für Programmanalysen
2. Definition der denotationellen Semantik von WHILE im Detail

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

39

Wichtig insbesondere...

- Mengen, Relationen, Verbände
- Partielle und vollständige partielle Ordnungen
- Schranken, Fixpunkte und Fixpunktheoreme

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

40

Mengen und Relationen 1(2)

Sei M eine Menge und R eine Relation auf M , d.h. $R \subseteq M \times M$.
Dann heißt R ...

- *reflexiv* gdw. $\forall m \in M: m R m$
- *transitiv* gdw. $\forall m, n, p \in M: m R n \wedge n R p \Rightarrow m R p$
- *antisymmetrisch* gdw. $\forall m, n \in M: m R n \wedge n R m \Rightarrow m = n$

Darüberhinaus... (in der Folge allerdings weniger wichtig)

- *symmetrisch* gdw. $\forall m, n \in M: m R n \Leftrightarrow n R m$
- *total* gdw. $\forall m, n \in M: m R n \vee n R m$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

41

Mengen und Relationen 2(2)

Eine Relation R auf M heißt

- *Quasiordnung* gdw. R ist reflexiv und transitiv
- *partielle Ordnung* gdw. R ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch

Zur Vollständigkeit sei ergänzt...

- *Äquivalenzrelation* gdw. R ist reflexiv, transitiv und symmetrisch

...: eine partielle Ordnung ist also eine antisymmetrische Quasiordnung, eine Äquivalenzrelation eine symmetrische Quasiordnung.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

42

Schranken, kleinste, größte Elemente

Sei (Q, \sqsubseteq) eine Quasiordnung, sei $q \in Q$ und $Q' \subseteq Q$.

Dann heißt q ...

- *obere (untere) Schranke* von Q' , in Zeichen: $q' \sqsubseteq q$ ($q \sqsubseteq q'$), wenn für alle $q' \in Q'$ gilt: $q' \sqsubseteq q$ ($q \sqsubseteq q'$)
- *kleinste obere (größte untere) Schranke* von Q' , wenn q obere (untere) Schranke von Q' ist und für jede andere obere (untere) Schranke \hat{q} von Q' gilt: $q \sqsubseteq \hat{q}$ ($\hat{q} \sqsubseteq q$)
- *größtes (kleinstes) Element* von Q , wenn gilt: $Q \sqsubseteq q$ ($q \sqsubseteq Q$)

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

43

Eindeutigkeit von Schranken

- In partiellen Ordnungen sind kleinste obere und größte untere Schranken eindeutig bestimmt, wenn sie existieren.

• Existenz (und damit Eindeutigkeit) vorausgesetzt, wird die kleinste obere (größte untere) Schranke einer Menge $P' \subseteq P$ der Grundmenge einer partiellen Ordnung (P, \sqsubseteq) mit $\sqcup P'$ ($\sqcap P'$) bezeichnet. Man spricht dann auch vom *Supremum* und *Infimum* von P' .

- Analog für kleinste und größte Elemente. Existenz vorausgesetzt, werden sie üblicherweise mit \perp und \top bezeichnet.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

44

Verbände und vollständige Verbände

Sei (P, \sqsubseteq) eine partielle Ordnung.

Dann heißt (P, \sqsubseteq) ...

- *Verband*, wenn jede *endliche* Teilmenge P' von P eine kleinste obere und eine größte untere Schranke in P besitzt
- *vollständiger Verband*, wenn *jede* Teilmenge P' von P eine kleinste obere und eine größte untere Schranke in P besitzt

... (vollständige) Verbände sind also spezielle partielle Ordnungen.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

45

Vollständige partielle Ordnungen

... ein etwas schwächerer, aber in der Informatik oft ausreichender und daher angemessenerer Begriff.

Sei (P, \sqsubseteq) eine partielle Ordnung.

Dann heißt (P, \sqsubseteq) ...

- *vollständig*, kurz *CPO* (von engl. complete partial order), wenn jede aufsteigende Kette $K \subseteq P$ eine kleinste obere Schranke in P besitzt.

Es gilt:

- Eine CPO (C, \sqsubseteq) (genauer wäre: "kettenvollständige partielle Ordnung (engl. chain complete partial order (CCPO))" besitzt stets ein kleinstes Element, eindeutig bestimmt als Supremum der leeren Kette und üblicherweise mit \perp bezeichnet: $\perp =_{df} \sqcup \emptyset$.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

46

Ketten

Sei (P, \sqsubseteq) eine partielle Ordnung.

Eine Teilmenge $K \subseteq P$ heißt...

- *Kette* in P , wenn die Elemente in K total geordnet sind. Für $K = \{k_0 \sqsubseteq k_1 \sqsubseteq k_2 \sqsubseteq \dots\}$ ($\{k_0 \supseteq k_1 \supseteq k_2 \supseteq \dots\}$) spricht man auch genauer von einer *aufsteigenden* (*absteigenden*) Kette in P .

Eine Kette K heißt...

- *endlich*, wenn K endlich ist, sonst *unendlich*.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

47

Kettenendlichkeit, endliche Elemente

Eine partielle Ordnung (P, \sqsubseteq) heißt

- *ketteneendlich* gdw. P enthält keine unendlichen Ketten

Ein Element $p \in P$ heißt

- *endlich* gdw. die Menge $Q =_{df} \{q \in P \mid q \sqsubseteq p\}$ keine unendliche Kette enthält
- *endlich relativ zu* $r \in P$ gdw. die Menge $Q =_{df} \{q \in P \mid r \sqsubseteq q \sqsubseteq p\}$ keine unendliche Kette enthält

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

48

Fixpunktsatz

Theorem (Knaster/Tarski, Kleene)

Sei (C, \sqsubseteq) eine CPO und sei $f : C \rightarrow C$ eine stetige Funktion auf C .

Dann hat f einen kleinsten Fixpunkt μf und dieser Fixpunkt ergibt sich als kleinste obere Schranke der Kette (sog. Kleene-Kette) $\{\perp, f(\perp), f^2(\perp), \dots\}$, d.h.

$$\mu f = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) = \bigsqcup \{\perp, f(\perp), f^2(\perp), \dots\}$$

Beweis des Fixpunktsatzes 1(4)

Zu zeigen: $\mu f \dots$

1. existiert
2. ist Fixpunkt
3. ist kleinster Fixpunkt

Beweis des Fixpunktsatzes 2(4)

1. Existenz

- Es gilt $f^0 \perp = \perp$ und $\perp \sqsubseteq c$ für alle $c \in C$.
- Durch vollständige Induktion lässt sich damit zeigen:
 $f^n \perp \sqsubseteq f^m c$ für alle $c \in C$.
- Somit gilt $f^n \perp \sqsubseteq f^m \perp$ für alle n, m mit $n \leq m$. Somit ist $\{f^n \perp \mid n \geq 0\}$ eine (nichtleere) Kette in C .
- Damit folgt die Existenz von $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp)$ aus der CPO-Eigenschaft von (C, \sqsubseteq) .

Beweis des Fixpunktsatzes 3(4)

2. Fixpunkteigenschaft

$$\begin{aligned} f(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp)) &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f(f^i \perp) \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_1} f^i \perp \\ (K \text{ Kette } \Rightarrow \bigsqcup K = \perp \sqcup \bigsqcup K) &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_1} f^i \perp \sqcup \perp \\ (f^0 = \perp) &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i \perp \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) \end{aligned}$$

Beweis des Fixpunktsatzes 4(4)

3. Kleinster Fixpunkt

- Sei c beliebig gewählter Fixpunkt von f . Dann gilt $\perp \sqsubseteq c$ und somit auch $f^n \perp \sqsubseteq f^n c$ für alle $n \geq 0$.
- Folglich gilt $f^n \perp \sqsubseteq c$ wg. der Wahl von c als Fixpunkt von f .
- Somit gilt auch, dass c eine obere Schranke von $\{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ist.
- Da $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp)$ nach Definition die kleinste obere Schranke dieser Kette ist, gilt wie gewünscht $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) \sqsubseteq c$.

Bedingte Fixpunkte

Theorem (Endliche Fixpunkte)

Sei (C, \sqsubseteq) eine CPO, sei $f : C \rightarrow C$ eine stetige, inflationäre Funktion auf C und sei $d \in C$.

Dann hat f einen kleinsten bedingten Fixpunkt μf_d , und dieser Fixpunkt ergibt sich als kleinste obere Schranke der Kette $\{d, f(d), f^2(d), \dots\}$, d.h.

$$\mu f_d = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(d) = \bigsqcup \{d, f(d), f^2(d), \dots\}$$

Endliche Fixpunkte

Theorem (Endliche Fixpunkte)

Sei (C, \sqsubseteq) eine CPO und sei $f : C \rightarrow C$ eine stetige Funktion auf C .

Dann gilt: Sind in der Kleene-Kette von f zwei aufeinanderfolgende Glieder gleich, etwa $f^i(\perp) = f^{i+1}(\perp)$, so gilt $\mu f = f^i(\perp)$.

Existenz endlicher Fixpunkte

Hinreichende Bedingungen für die Existenz endlicher Fixpunkte sind...

- Endlichkeit von Definitions- und Wertebereich von f
- f ist von der Form $f(c) = c \sqcup g(c)$ für monotonen g über ketteneindlichem Wertebereich

In der Folge

Von Verifikation zu Analyse...

- *Worst-Case Execution Time*-Analyse als erstes Beispiel
- ...nach
- Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson, *Semantics with Applications – A Formal Introduction*, Wiley, 1992.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

65

Worst-Case Execution Time (WCET)-Analyse

Motivation:

- In vielen Anwendungsbereichen sind Aussagen über die Ausführungszeit erforderlich.
- Der Nachweis totaler Korrektheit garantiert zwar Terminierung, sagt aber nichts über den Ressourcen-, speziell den Zeitbedarf aus.

In der Folge:

- Erweiterung und Adaptierung des Beweissystems für totale Korrektheit, um solche Aussagen zu ermöglichen.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

66

Die grundlegende Idee (1)

...zur Zuordnung von Ausführungszeiten:

- *Leere Anweisung*
...Ausführungszeit in $\mathcal{O}(1)$, d.h. Ausführungszeit ist beschränkt durch eine Konstante.
- *Zuweisung*
...Ausführungszeit in $\mathcal{O}(1)$.
- (*Sequentielle*) *Komposition*
...Ausführungszeit entspricht, bis auf einen konstanten Faktor, der Summe der Ausführungszeiten der Komponenten.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

67

Die grundlegende Idee (2)

- *Fallunterscheidung*
...Ausführungszeit entspricht, bis auf einen konstanten Faktor, der größeren der Ausführungszeiten der beiden Zweige.

- (*while*)-*Schleife*
...Ausführungszeit der Schleife entspricht, bis auf einen konstanten Faktor, der Summe der wiederholten Ausführungszeiten des Rumpfes der Schleife.

Bemerkung: Verfeinerungen sind offenbar möglich.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

68

Formalisierung

...dieser grundlegenden Idee in 3 Schritten:

1. Angabe einer Semantik, die die Auswertungszeit arithmetischer und Boolescher Ausdrücke beschreibt.
2. Erweiterung und Adaption der natürlichen Semantik von WHILE zur Bestimmung der Ausführungszeit eines Programms.
3. Erweiterung und Adaption des Beweissystems für totale Korrektheit zum Nachweis über die Größenordnung der Ausführungszeit von Programmen.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

69

Erster Schritt

Festlegung von Semantikfunktionen

- $\llbracket \cdot \rrbracket_{TA} : \mathbf{Aexpr} \rightarrow \mathbb{Z}$ und
- $\llbracket \cdot \rrbracket_{TB} : \mathbf{Bexpr} \rightarrow \mathbb{Z}$

zur Beschreibung der Auswertungszeit arithmetischer und Boolescher Ausdrücke (in Zeiteinheiten einer abstrakten Maschine).

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

70

Semantik zur Ausführungszeit der Auswertung arithmetischer Ausdrücke

$\llbracket \cdot \rrbracket_{TA} : \mathbf{Aexpr} \rightarrow \mathbb{Z}$ induktiv definiert durch

- $\llbracket n \rrbracket_{TA} =_{df} \mathbf{1}$
 - $\llbracket x \rrbracket_{TA} =_{df} \mathbf{1}$
 - $\llbracket a_1 + a_2 \rrbracket_{TA} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{TA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{TA} + \mathbf{1}$
 - $\llbracket a_1 * a_2 \rrbracket_{TA} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{TA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{TA} + \mathbf{1}$
 - $\llbracket a_1 - a_2 \rrbracket_{TA} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{TA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{TA} + \mathbf{1}$
 - $\llbracket a_1 / a_2 \rrbracket_{TA} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{TA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{TA} + \mathbf{1}$
- ... (andere Operatoren analog, ggf. auch mit operationsspezifischen Kosten)

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

71

Anmerkungen zu $\llbracket \cdot \rrbracket_{TA}$ und $\llbracket \cdot \rrbracket_{TB}$

Die Semantikfunktionen

- $\llbracket \cdot \rrbracket_{TA}$ und $\llbracket \cdot \rrbracket_{TB}$

...beschreiben intuitiv die Anzahl der Zeiteinheiten, die eine (hier nicht spezifizierte) abstrakte Maschine zur Auswertung arithmetischer und Boolescher Ausdrücke benötigt.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

72

Semantik zur Ausführungszeit der Auswertung Boolescher Ausdrücke

$\llbracket \cdot \rrbracket_{TB} : \text{Bexpr} \rightarrow \mathbb{Z}$ induktiv definiert durch

- $\llbracket \text{true} \rrbracket_{TB} =_{df} \mathbf{1}$
- $\llbracket \text{false} \rrbracket_{TB} =_{df} \mathbf{1}$
- $\llbracket a_1 = a_2 \rrbracket_{TB} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{TA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{TA} + \mathbf{1}$
- $\llbracket a_1 < a_2 \rrbracket_{TB} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{TA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{TA} + \mathbf{1}$
- ... (andere Relatoren (z.B. \leq, \dots) analog)
- $\llbracket -b \rrbracket_{TB} =_{df} \llbracket b \rrbracket_{TB} + \mathbf{1}$
- $\llbracket b_1 \wedge b_2 \rrbracket_{TB} =_{df} \llbracket b_1 \rrbracket_{TB} + \llbracket b_2 \rrbracket_{TB} + \mathbf{1}$
- $\llbracket b_1 \vee b_2 \rrbracket_{TB} =_{df} \llbracket b_1 \rrbracket_{TB} + \llbracket b_2 \rrbracket_{TB} + \mathbf{1}$

Idee

Übergang zu Transitionen der Form

$$\langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{t} \sigma'$$

mit der Bedeutung, dass π angesetzt auf σ nach t Zeiteinheiten in σ' terminiert.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

75

Natürliche Semantik erweitert um den Ausführungszeitaspekt (2)

$$\begin{array}{l} \llbracket f_{true}^t \rrbracket \\ \llbracket f_{false}^t \rrbracket \\ \llbracket \text{while}_{true}^t \rrbracket \\ \llbracket \text{while}_{false}^t \rrbracket \end{array} \begin{array}{l} \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \xrightarrow{t} \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \llbracket b \rrbracket_{TB} + t + \mathbf{1} \sigma'} \\ \frac{\langle \pi_2, \sigma \rangle \xrightarrow{t} \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \llbracket b \rrbracket_{TB} + t + \mathbf{1} \sigma'} \\ \frac{\langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{t} \sigma', \langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma' \rangle \xrightarrow{t} \sigma''}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \llbracket b \rrbracket_{TB} + t + \mathbf{1} + 2 \sigma''} \\ \frac{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \llbracket b \rrbracket_{TB} + 3 \sigma}{\llbracket \text{while}_{true}^t \rrbracket} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = tt \end{array}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

77

Beispiel zur nat. "Zeit"-Semantik (2)

Das gleiche Beispiel in etwas gefälligerer Darstellung:

$$\begin{array}{c} \text{Sem}_1 \\ \frac{\langle \text{true}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \llbracket b \rrbracket_{TB} + t + \mathbf{1} \sigma'} \\ \text{Sem}_2 \\ \frac{\langle \text{true}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \llbracket b \rrbracket_{TB} + t + \mathbf{1} \sigma'} \\ \text{Sem}_3 \\ \frac{\langle \text{true}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \sigma', \langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma' \rangle \xrightarrow{-t} \sigma''}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \llbracket b \rrbracket_{TB} + t + \mathbf{1} + 2 \sigma''} \\ \text{Sem}_4 \\ \frac{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \xrightarrow{-t} \llbracket b \rrbracket_{TB} + 3 \sigma}{\llbracket \text{while}_{true}^t \rrbracket} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = tt \end{array}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

79

Zweiter Schritt

Erweiterung und Adaption der

- natürlichen Semantik von WHILE zur Bestimmung der Ausführungszeit von Programmen.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

74

Natürliche Semantik erweitert um den Ausführungszeitaspekt (1)

...für das Beispiel von WHILE:

$$\begin{array}{l} \llbracket \text{skip}_{true} \rrbracket \\ \llbracket \text{abort}_{true} \rrbracket \\ \llbracket \text{ass}_{true} \rrbracket \\ \llbracket \text{comp}_{true} \rrbracket \end{array} \begin{array}{l} \frac{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma}{\langle \text{skip}_{true}, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma} \\ \frac{\langle \text{abort}, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma'}{\langle \text{abort}_{true}, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma'} \\ \frac{\langle x := t, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \llbracket t \rrbracket_{TA} + \mathbf{1} \sigma, \llbracket t \rrbracket_A(\sigma) / x}{\langle x := t, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \llbracket t \rrbracket_{TA} + \mathbf{1} \sigma} \\ \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma', \langle \pi_2, \sigma' \rangle \xrightarrow{-1} \sigma''}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \mathbf{1} + t + 2 \sigma''} \end{array}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

76

Beispiel zur nat. "Zeit"-Semantik (1)

Sei $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(x) = 3$.

Dann gilt:

$$\langle y := 1; \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[6/y][3/x]$$

$$\begin{array}{c} \text{Sem}_1 \\ \frac{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma}{\langle \text{skip}_{true}, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma} \\ \text{Sem}_2 \\ \frac{\langle \text{abort}, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma'}{\langle \text{abort}_{true}, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma'} \\ \text{Sem}_3 \\ \frac{\langle x := t, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \llbracket t \rrbracket_{TA} + \mathbf{1} \sigma, \llbracket t \rrbracket_A(\sigma) / x}{\langle x := t, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \llbracket t \rrbracket_{TA} + \mathbf{1} \sigma} \\ \text{Sem}_4 \\ \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \sigma', \langle \pi_2, \sigma' \rangle \xrightarrow{-1} \sigma''}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \xrightarrow{-1} \mathbf{1} + t + 2 \sigma''} \end{array}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

78

Dritter Schritt

Erweiterung und Adaption der

- des Beweiskalküls für totale Korrektheit um den Ausführungszeitaspekt von Programmen.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

80

Idee (1)

Übergang zu Korrektheitsformeln der Form

$$\{p\} \pi \{e \Downarrow q\}$$

wobei

- p und q Prädikate (wie bisher!) und
- $e \in \text{Aexp}$ ein arithmetischer Ausdruck ist.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

81

Axiomatische Semantik zum Ausführungszeitaspekt (1)

$$[\text{skip}_e] \quad \overline{\{p\} \text{skip} \{1 \Downarrow p\}}$$

$$[\text{ass}_e] \quad \overline{\{p[\Delta^x]\} x := t \{1 \Downarrow p\}}$$

$$[\text{comp}_e] \quad \frac{\{p \wedge e'_1 = u\} \pi_1 \{e_1 \Downarrow u' \wedge e_2 \leq u\}, \{r\} \pi_2 \{e_2 \Downarrow q\}}{\{p\} \pi_1; \pi_2 \{e_1 + e_2 \Downarrow q\}}$$

wobei u frische logische Variable ist

$$[\text{ite}_e] \quad \frac{\{p \wedge b\} \pi_1 \{e \Downarrow q\}, \{p \wedge \neg b\} \pi_2 \{e \Downarrow q\}}{\{p\} \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } \{e \Downarrow q\}}$$

$$[\text{cons}_e] \quad \frac{\{p\} \pi \{e \Downarrow q'\}}{\{p\} \pi \{e \Downarrow q\}}$$

wobei (für eine natürliche Zahl k) $p \Rightarrow p' \wedge e' \leq k * e$ und $q' \Rightarrow q$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

83

Beispiele (1)

Die Korrektheitsformel

$$\{x=3\} y:=1; \text{ while } x/=1 \text{ do } y:=y**x; x:=x-1 \text{ od } \{1 \vee \text{True}\} \quad \perp \perp$$

beschreibt, dass die Ausführungszeit des Fakultätsprogramms angesetzt auf einen Zustand, in dem x den Wert 3 hat, von der Größenordnung von 1 ist, also durch eine Konstante beschränkt ist.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

85

Vorschau auf die nächsten Vorlesungstermine...

- Mo, 12.11.2007: *Keine Vorlesung!*
- Mo, 19.11.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude
- Mo, 26.11.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude
- Mo, 03.12.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude
- Mo, 10.12.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude
- Mo, 17.12./24.12./31.12.2007: *Keine Vorlesung(en)!* (*Ferienzeit*)

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

87

Idee (2)

Die Korrektheitsformel

$$\{p\} \pi \{e \Downarrow q\}$$

ist gültig gdw. für jeden Anfangszustand σ gilt: ist die Vorbedingung p in σ erfüllt, dann terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär mit einem Endzustand σ' und die Nachbedingung q ist in σ' erfüllt, und die benötigte Ausführungszeit ist in $O(e)$.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

82

Axiomatische Semantik zum Ausführungszeitaspekt (2)

$$[\text{while}_e] \quad \frac{\{p(z+1) \wedge e' = u\} \pi \{e \Downarrow p(z) \wedge e \leq u\}}{\{\exists z. p(z)\} \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{e \Downarrow p(0)\}}$$

wobei $p(z+1) \Rightarrow b \wedge e \geq e_1 + e'$, $p(0) \Rightarrow \neg b \wedge 1 \leq e$

u eine frische logische Variable ist und

z Werte aus den natürlichen Zahlen annimmt (d.h. $z \geq 0$)

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

84

Beispiele (2)

Die Korrektheitsformel

$$\{x>0\} y:=1; \text{ while } x/=1 \text{ do } y:=y**x; x:=x-1 \text{ od } \{x \vee \text{True}\} \quad \perp \perp$$

beschreibt, dass die Ausführungszeit des Fakultätsprogramms angesetzt auf einen Zustand, in dem x einen Wert größer als 0 hat, von der Größenordnung von x ist, also linear beschränkt ist.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 5. Teil (05.11.2007)

86