Stärkste Nachbedingungen, schwächste Vorbedingungen

In der Folge:

Präzisierung von...

- Stärkste Nachbedingungen
- Schwächste Vorbedingungen

Zunächst:

- Ein Rückblick (R.blick)

R.blick: Definition partieller Korrektheit

Sei $\pi \in$ **Prg** ein WHILE-Programm:

Ein Hoaresche Zusicherung $\{p\}\ \pi\ \{q\}$ heißt

- *gültig* (*im Sinne der partiellen Korrektheit*) oder kurz (*partiell*) *korrekt* gdw. für jeden Anfangszustand σ gilt: ist die Vorbedingung p in σ erfüllt **und** terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär in einem Endzustand σ', **dann** ist auch die Nachbedingung q in σ' erfüllt.

R.blick: Definition totaler Korrektheit

Sei $\pi \in$ **Prg** ein WHILE-Programm:

Ein Hoaresche Zusicherung $[p]\ \pi\ [q]$ heißt

- *gültig* (*im Sinne der totalen Korrektheit*) oder kurz (*total*) *korrekt* gdw. für jeden Anfangszustand σ gilt: ist die Vorbedingung p in σ erfüllt, **dann** terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär mit einem Endzustand σ' **und** die Nachbedingung q ist in σ' erfüllt.

R.blick: Partielle und totale Korrektheit

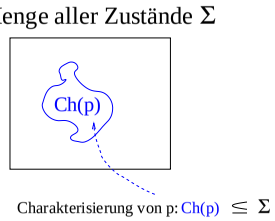
- Die Zustandsmenge
$$Ch(p) =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid [\![p]\!]_B(\sigma) = \mathtt{tt}\}$$
heißt *Charakterisierung von* $p \in$ **Bexp**.

- *Semantik von Korrektheitsformeln:*
Eine Korrektheitsformel $\{p\}\ \pi\ \{q\}$ heißt
  - *partiell korrekt* (in Zeichen: $\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$), falls $[\![\pi]\!](Ch(p)) \subseteq Ch(q)$
  - *total korrekt* (in Zeichen: $\models_{tk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$), falls $\{p\}\ \pi\ \{q\}$ partiell korrekt ist und $Def([\![\pi]\!]) \supseteq Ch(p)$ gilt.
  Dabei bezeichnet $Def([\![\pi]\!])$ die Menge aller Zustände, für die π regulär terminiert.

  Konvention: $[\![\pi]\!](Ch(p)) =_{df} \{[\![\pi]\!](\sigma) \mid \sigma \in Ch(p)\}$

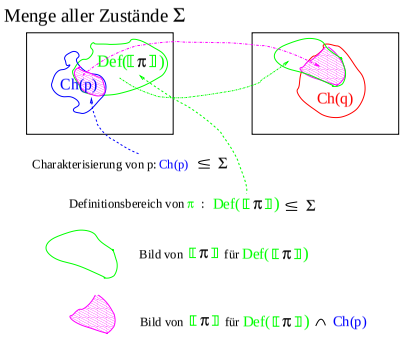
R.blick: Veranschaulichung (1)

...der Charakterisierung $Ch(p)$ einer logischen Formel p:



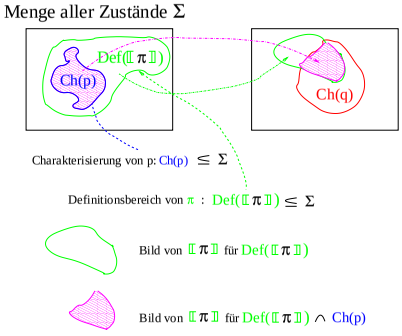
R.blick: Veranschaulichung (2)

...der Gültigkeit eine Hoareschen Zusicherung $\{p\}\ \pi\ \{q\}$ im Sinne partieller Korrektheit:



R.blick: Veranschaulichung (3)

...der Gültigkeit eine Hoareschen Zusicherung $[p]\ \pi\ [q]$ im Sinne totaler Korrektheit:



Stärkste Nach- und schwächste Vorbedingungen (1)

In der Situation der vorigen Abbildungen gilt:

- $[\![\pi]\!](Ch(p))$ heißt *stärkste Nachbedingung* von π bezüglich p.
- $[\![\pi]\!]^{-1}(Ch(q))$ heißt *schwächste Vorbedingung* von π bezüglich q, wobei $[\![\pi]\!]^{-1}(\Sigma') =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid [\![\pi]\!](\sigma) \in \Sigma'\}$
- $[\![\pi]\!]^{-1}(Ch(q)) \cup C(Def([\![\pi]\!]))$ heißt *schwächste liberale Vorbedingung* von π bezüglich q, wobei C den Mengenkomplementoperator (bzgl. der Grundmenge Σ) bezeichnet.

Stärkste Nach- und schwächste Vorbedingungen (2)

Lemma

Ist $[\![\pi]\!]$ total definiert, d.h. gilt $Def([\![\pi]\!]) = \Sigma$, dann gilt für alle Formeln p und q:

$$[\![\pi]\!](Ch(p)) \subseteq Ch(q) \iff [\![\pi]\!]^{-1}(Ch(q)) \supseteq Ch(p)$$

Beweis: Übungsaufgabe

Partielle vs. totale Korrektheit

Lemma

Für deterministische Programme π gilt:

$$[p]\ \pi\ [q] \quad \Rightarrow \quad \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

d.h. für deterministische Programme impliziert totale Korrektheit bzgl. eines Paars aus Vor- und Nachbedingung auch partielle Korrektheit bzgl. dieses Paars aus Vor- und Nachbedingung.

Schwächste Vor- und stärkste Nachbedingungen

...noch einmal anders betrachtet:

Definition

Seien A, B, A_1, A_2, ... (logische) Formeln

- A heißt *schwächer* als B, wenn gilt: $B \Rightarrow A$
- A_i heißt *schwächste* Formel in $\{A_1, A_2, \ldots\}$, wenn gilt: $A_j \Rightarrow A_i$ für alle j.

Schwächste Vorbedingungen

Definition

Sei π ein Programm und q eine Formel.

Dann heißt

- $wp(\pi, q)$ *schwächste Vorbedingung* für totale Korrektheit von π bezüglich (der Nachbedingung) q, wenn
  $$[wp(\pi, q)]\ \pi\ [q]$$
  total korrekt ist und $wp(\pi, q)$ die schwächste Formel mit dieser Eigenschaft ist.
- $wlp(\pi, q)$ *schwächste liberale Vorbedingung* für partielle Korrektheit von π bezüglich (der Nachbedingung) q, wenn
  $$\{wlp(\pi, q)\}\ \pi\ \{q\}$$
  partiell korrekt ist und $wlp(\pi, q)$ die schwächste Formel mit dieser Eigenschaft ist.

Stärkste Nachbedingungen (1)

Analog zu A ist *schwächer* als B lässt sich definieren:

- A heißt *stärker* als B, wenn gilt: B ist schwächer als A, d.h. wenn gilt: $A \Rightarrow B$
- A_i heißt *stärkste* Formel in $\{A_1, A_2, \ldots\}$, wenn gilt: $A_i \Rightarrow A_j$ für alle j.

Zum Überlegen:

Ist es sinnvoll, den Begriff der stärksten (liberalen) Nachbedingung $spo(p, \pi)$ bzw. $slpo(p, \pi)$ "in genau gleicher Weise" zum Begriff der schwächsten (liberalen) Vorbedingung $wp(\pi, q)$ bzw. $wlp(\pi, q)$ zu gegebenem Programm π und Vorbedingung p zu betrachten?

Stärkste Nachbedingungen (2)

Betrachte...

Definition(sversuch)

Sei π ein Programm und p eine Formel.

Dann heißt

- $spo(p, \pi)$ *stärkste Nachbedingung* für totale Korrektheit von π bezüglich (der Vorbedingung) p, wenn
  $$[p]\ \pi\ [spo(p, \pi)]$$
  total korrekt ist und $spo(p, \pi)$ die stärkste Formel mit dieser Eigenschaft ist.
- $slpo(p, \pi)$ *stärkste liberale Nachbedingung* für partielle Korrektheit von π bezüglich (der Vorbedingung) p, wenn
  $$\{p\}\ \pi\ \{slpo(p, \pi)\}$$
  partiell korrekt ist und $slpo(p, \pi)$ die stärkste Formel mit dieser Eigenschaft ist.

Stärkste Nachbedingungen (3)

Fragen

- Gibt es Programme π und Formeln p derart, dass
  - $spo(p, \pi)$
  - $slpo(p, \pi)$

  unterscheidbar, d.h. logisch nicht äquivalent sind?
- Wie passen die hier betrachteten Begriffe von schwächsten Vor- und stärksten Nachbedingungen mit denen auf Folie 13 von diesem Vorlesungsteil betrachteten zusammen?

Totale Korrektheit: HK_{TK} (1)

Zur Erinnerung sei hier der Hoare-Kalkül HK_{TK} für totale Korrektheit noch einmal wiederholt...

[skip] $\dfrac{}{\{p\}\ skip\ \{p\}}$

[ass] $\dfrac{}{\{p[t\backslash x]\}\ x{:=}t\ \{p\}}$

[comp] $\dfrac{\{p\}\ \pi_1\ \{r\},\ \{r\}\ \pi_2\ \{q\}}{\{p\}\ \pi_1;\pi_2\ \{q\}}$

[ite] $\dfrac{\{p \wedge b\}\ \pi_1\ \{q\},\ \{p \wedge \neg b\}\ \pi_2\ \{q\}}{\{p\}\ \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}\ \{q\}}$

[cons] $\dfrac{p \Rightarrow p_1,\ \{p_1\}\ \pi\ \{q_1\},\ q_1 \Rightarrow q}{\{p\}\ \pi\ \{q\}}$

Zum Überlegen: Warum fehlt eine Regel für abort?

Totale Korrektheit: HK_{TK} (2)

$$[\text{while}_{TK}]\quad \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v],\ \{I \wedge b \wedge t{=}w\}\ \pi\ \{I \wedge t{<}w\}}{\{I\}\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ \{I \wedge \neg b\}}$$

wobei

- u Boolescher Ausdruck über der Variablen v,
- t arithmetischer Term,
- w Variable, die in I, b, π und t nicht frei vorkommt,
- $M =_{df} \{\sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma \ \wedge\ [\![u]\!]_B(\sigma) = \mathtt{tt}\}$ noethersch geordnete Menge (sog. noethersche Halbordnung).
  $\leadsto$ *Terminationsordnung*!

Bemerkung: In den obigen Regeln verwenden wir geschweifte statt eckiger Klammern für zugesicherte Eigenschaften, um einen Bezeichnungskonflikt mit der ebenfalls durch eckige Klammern bezeichneten *syntaktischen Substitution* zu vermeiden.

Wohlfundierte oder Noethersche Ordnungen (1)

Definition

Sei P eine Menge und sei $<$ eine irreflexive und transitive Relation auf P.

Dann ist das Paar $(P, <)$ eine *irreflexive partielle Ordnung*.

Beispiele:

- $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Z}, >)$, $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}, >)$

Wohlfundierte oder Noethersche Ordnungen (2)

Definition

Sei $(P, <)$ eine irreflexive partielle Ordnung und sei W eine Teilmenge von P.

Dann heißt die Relation $<$ auf W *wohlfundiert*, wenn es keine unendlich absteigende Kette

$$\ldots < w_2 < w_1 < w_0$$

von Elementen $w_i \in W$ gibt.

Das Paar $(W, <)$ heißt dann eine *wohlfundierte Struktur* oder auch eine *wohlfundierte* oder *Noethersche Ordnung*.

Sprechweise: Gilt $w < w'$ für $w, w' \in W$, sagen wir, w *ist kleiner als* w' oder w' *ist größer als* w.

Beispiele:

- $(\mathbb{N}, <)$, aber nicht $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Z}, >)$ oder $(\mathbb{N}, >)$

Wohlfundierte oder Noethersche Ordnungen (3)

Konstruktionsprinzipien für wohlfundierte Ordnungen aus gegebenen wohlfundierten Ordnungen...

Lemma

Seien $(W_1, <_1)$ und $(W_2, <_2)$ zwei wohlfundierte Ordnungen.

Dann sind auch

- $(W_1 \times W_2, <_{com})$ mit *komponentenweiser* Ordnung definiert durch
  $$(m_1, m_2) <_{com} (n_1, n_2) \ \text{ gdw. } \ m_1 <_1 n_1 \wedge m_2 <_2 n_2$$
- $(W_1 \times W_2, <_{lex})$ mit *lexikographischer* Ordnung def. durch
  $$(m_1, m_2) <_{lex} (n_1, n_2) \ \text{ gdw.}$$
  $$(m_1 <_1 n_1) \ \vee \ (m_1 = n_1 \wedge m_2 <_2 n_2)$$

wohlfundierte Ordnungen.

Anmerkungen zu...

...den der

- Konsequenzregel [cons] und der
- Schleifenregeln [while$_{PK}$] und [while$_{TK}$]

von HK_{PK} bzw. HK_{TK} zugrundeliegenden Intuitionen.

Zur Konsequenzregel (1)

$$[\text{cons}]\quad \frac{p \Rightarrow p_1,\ \{p_1\}\ \pi\ \{q_1\},\ q_1 \Rightarrow q}{\{p\}\ \pi\ \{q\}}$$

Intuitiv:

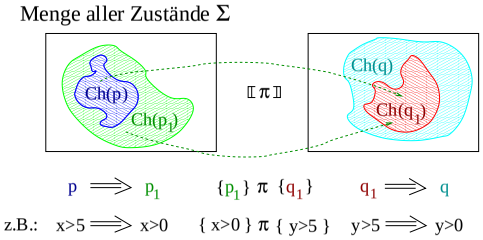
Die Konsequenzregel

- ...stellt die Schnittstelle zwischen Programmverifikation und den logischen Formeln der Zusicherungssprache dar
- ...erlaubt es,
  - Vorbedingungen zu *verstärken*
    (Übergang von p_1 zu p möglich, falls $p \Rightarrow p_1$ ($\Leftrightarrow\ Ch(p) \subseteq Ch(p_1)$)
  - Nachbedingungen *abzuschwächen*
    (Übergang von q_1 zu q möglich, falls $q_1 \Rightarrow q$ ($\Leftrightarrow\ Ch(q_1) \subseteq Ch(q)$)

  ...um so die Anwendung anderer Beweisregeln zu ermöglichen.

Zur Konsequenzregel (2)

Veranschaulichung von Verstärkung und Abschwächung:



Zur while-Regel in HK_{PK}

$$[\text{while}]\quad \frac{\{I \wedge b\}\ \pi\ \{I\}}{\{I\}\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ \{I \wedge \neg b\}}$$

Intuitiv:

- Das durch I beschriebene Prädikat gilt
  - ...*vor* und *nach* jeder Ausführung des Rumpfes der while-Schleife
  - ...und wird deswegen als *Invariante* der while-Schleife bezeichnet.
- Die while-Regel besagt weiter, dass
  - wenn zusätzlich (zur Invarianten) auch b vor jeder Ausführung des Schleifenrumpfs gilt, dass nach Beendigung der while-Schleife $\neg\, b$ wahr ist.

Zur while-Regel in HK_{TK} (1)

Erinnerung:

$$[\text{while}_{TK}]\quad \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v],\ \{I \wedge b \wedge t{=}w\}\ \pi\ \{I \wedge t{<}w\}}{\{I\}\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ \{I \wedge \neg b\}}$$

wobei

- u Boolescher Ausdruck über der Variablen v,
- t arithmetischer Term,
- w Variable, die in I, b, π und t nicht frei vorkommt,
- $M {=}_{df} \{\sigma(v) \,|\, \sigma \in \Sigma \ \wedge\ [\![u]\!]_B(\sigma) = \mathtt{tt}\}$ noethersch geordnete Menge (sog. noethersche Halbordnung).
  $\leadsto$ *Terminationsordnung*!

Zur while-Regel in HK_{TK} (2)

- Prämisse 1: $I \wedge b \Rightarrow u[t/v]$
  Wann immer der Schleifenrumpf noch einmal ausgeführt wird (d.h. $I \wedge b$ ist wahr), gilt, dass $u[t/v]$ wahr ist, woraus aufgrund der Definition von M folgt, dass der Wert von t Element einer noethersch geordneten Menge ist.
- Prämisse 2: $\{I \wedge b \wedge t = w\}\ \pi\ \{I \wedge t < w\}$
  - w speichert den initialen Wert von t (w ist sog. *logische Variable*), d.h. den Wert, den t vor Eintritt in die Schleife hat (gilt, da w als logische Variable insbesondere nicht in π vorkommt)
  - Zusammen damit, dass der Wert von w (als logische Variable) invariant unter der Ausführung des Schleifenrumpfs ist, garantiert $t < w$ in der Nachbedingung von Prämisse 2, dass der Wert von t nach jeder Ausführung des Schleifenrumpfs bzgl. der noetherschen Ordnung abgenommen hat.
- Zusammen implizieren die obigen beiden Punkte die Terminierung der while-Schleife, da es in einer noethersch geordneten Menge keine unendlich absteigenden Ketten gibt. Folglich kann die Bedingung $I \wedge b$ in Prämisse 1 nicht unendlich oft wahr sein, da dies zusammen mit Prämisse 2 ein unendliches Absteigen erforderte.)

Programm- vs. logische Variablen

Wir unterscheiden in Zusicherungen $\{p\}\ \pi\ \{q\}$ zwischen...

- *Programmvariablen*
  ...Variablen, die in π vorkommen
- *logischen Variablen*
  ...Variablen, die in π nicht vorkommen

Logische Variablen erlauben...

- sich *initiale* Werte von Programmvariablen zu "merken", um in Nachbedingungen geeignet darauf Bezug zu nehmen.

Beispiel:

- $\{x = n\}\ y := 1;\ \text{while}\ x \neq 1\ \text{do}\ y := y{*}x; x := x{-}1\ \text{od}\ \{y = n! \wedge n > 0\}$
  ...die Nachbedingung macht eine Aussage über den Zusammenhang des Anfangswertes von x (gespeichert in n) und des schließlichen Wertes von y.
- $\{x = n\}\ y := 1;\ \text{while}\ x \neq 1\ \text{do}\ y := y{*}x; x := x{-}1\ \text{od}\ \{y = x! \wedge x > 0\}$
  ...die Nachbedingung macht eine Aussage über den Zusammenhang der schließlichen Werte von x und y. (*Beachte*: nur mit Programmvariablen keine Aussage über die Fakultätsberechnung in diesem Bsp.!)

HK_{TK} versus HK_{PK}

Beachte:

HK_{TK} und HK_{PK} sind bis auf die Schleifenregel (und die Regel für *abort*) identisch...

- *Totale Korrektheit*: $[\text{while}_{TK}]$
  $$[\text{while}_{TK}]\quad \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v],\ \{I \wedge b \wedge t{=}w\}\ \pi\ \{I \wedge t{<}w\}}{\{I\}\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ \{I \wedge \neg b\}}$$
- *Partielle Korrektheit*: $[\text{while}_{PK}]$
  $$[\text{while}_{PK}]\quad \frac{\{I \wedge b\}\ \pi\ \{I\}}{\{I\}\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ \{I \wedge \neg b\}}$$

Bew. totale Korrektheit: Fakultät (1)

Beweise, dass das Hoare-Tripel

$$[a > 0]$$
$$x := a;\ \ y := 1;\ \ \text{while}\ x > 1\ \text{do}\ y := y{*}x; x := x - 1\ \text{od}$$
$$[y = a!]$$

gültig ist im Sinne totaler Korrektheit.

Wir entwickeln den Beweis in der Folge Schritt für Schritt!

Wahl von Invariante und Terminierungsterm

Schritt 1

"Träumen"...

- der Invariante: $y * x! = a! \wedge x > 0$
- des Terminierungsterms: $t \equiv x$
- von u: $u \equiv v \geq 0$

...um die [while]-Regel anwenden zu können.

Beachte:

- Aus der Wahl von $u \equiv v \geq 0$ und von $b \equiv x > 1$ folgt:
  - $M = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
  - $(v \geq 0)[x/v] \equiv x \geq 0$

  ...und somit insgesamt: $I \wedge b \Rightarrow x \in M$ mit $(M, <)$ Noethersch geordnet.

Hinweis zur Notation: $\equiv$ steht für *syntaktisch gleich*

Wahl von Invariante und Terminierungsterm

Mit der vorherigen Wahl von I, t und u gilt:

$$\begin{array}{rcl} M & =_{df} & \{\sigma(v) \,|\, \sigma \in \Sigma \ \wedge\ [\![u]\!]_B(\sigma) = \mathtt{tt}\} \\ & = & \{\sigma(v) \,|\, \sigma \in \Sigma \ \wedge\ [\![v \geq 0]\!]_B(\sigma) = \mathtt{tt}\} \\ & = & \{\sigma(v) \,|\, \sigma \in \Sigma \ \wedge\ \mathit{groessergleich}([\![v]\!]_A(\sigma), [\![0]\!]_A(\sigma))\} \\ & = & \{\sigma(v) \,|\, \sigma \in \Sigma \ \wedge\ \mathit{groessergleich}(\sigma(v), \mathbf{0}) = \mathtt{tt}\} \\ & = & \{\sigma(v) \,|\, \sigma \in \Sigma \ \wedge\ \sigma(v) \geq \mathbf{0}\} \\ & = & \mathbb{N} \cup \{\mathbf{0}\} \end{array}$$

Damit haben wir insbesondere:

- $(M, <) = (\mathbb{N} \cup \{\mathbf{0}\}, <)$ ist noethersch geordnet.
- $u[t/x] = (v \geq 0)[x/v] = x \geq 0$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (4)

Schritt 2

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife...

Der Nachweis der Gültigkeit von

$$\begin{array}{c} y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0 \\ [y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w] \\ y := y * x; \\ x := x - 1; \\ [y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w] \end{array}$$

erlaubte mithilfe der [while]-Regel den Übergang zu:

$$\begin{array}{c} [y * x! = a! \wedge x > 0] \\ \text{while}\ x > 1\ \text{do} \\ y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0 \\ [y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w] \\ y := y * x; \\ x := x - 1; \\ [y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w] \\ \text{od}\ [\text{while}] \\ [y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)] \end{array}$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (5)

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife im Detail:

$$y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w]$$

$$y := y * x;$$
$$x := x - 1;$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w]$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (6)

Wegen *Rückwärts*zuweisungsregel wird der Rumpf der while-Schleife von hinten nach vorne bearbeitet:

$$y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w]$$

$$y := y * x;$$
$$[y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w]$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (7)

Nach abermaliger Anwendung der [ass]-Regel erhalten wir...

$$y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w]$$

$$[(y * x) * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$y := y * x; \text{ [ass]}$$
$$[y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w]$$

...wobei noch eine "Beweislücke" verbleibt!

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (8)

Schluss der "Beweislücke" in der zugrundeliegenden Theorie:

$$y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w]$$
$$\Downarrow \text{ [cons]}$$
$$[(y * x) * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$y := y * x; \text{ [ass]}$$
$$[y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w]$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (9)

Anwendung der [while]-Regel liefert nun wie gewünscht:

$$[y * x! = a! \wedge x > 0]$$
$$\text{while } x > 1 \text{ do}$$
$$y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w]$$
$$\Downarrow \text{ [cons]}$$
$$[(y * x) * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$y := y * x; \text{ [ass]}$$
$$[y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w]$$
$$\text{od [while]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)]$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (10)

Schritt 3

Zur gewünschten Nachbedingung verbleibt offenbar ebenfalls eine Beweislücke:

$$[y * x! = a! \wedge x > 0]$$
$$\text{while } x > 1 \text{ do}$$
$$y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w]$$
$$\Downarrow \text{ [cons]}$$
$$[(y * x) * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$y := y * x; \text{ [ass]}$$
$$[y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w]$$
$$\text{od [while]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)]$$

$$\{y = a!\}$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (11)

Schluss der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie:

$$[y * x! = a! \wedge x > 0]$$
$$\text{while } x > 1 \text{ do}$$
$$y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w]$$
$$\Downarrow \text{ [cons]}$$
$$[(y * x) * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$y := y * x; \text{ [ass]}$$
$$[y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w]$$
$$\text{od [while]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)]$$
$$\Downarrow \text{ [cons]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x \leq 1]$$
$$\Downarrow \text{ [cons]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x = 1]$$
$$\Downarrow \text{ [cons]}$$
$$[y = a!]$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (12)

Aus Platzgründen etwas verkürzt dargestellt:

$$[y * x! = a! \wedge x > 0]$$
$$\text{while } x > 1 \text{ do}$$
$$y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w]$$
$$\Downarrow \text{ [cons]}$$
$$[(y * x) * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$y := y * x; \text{ [ass]}$$
$$[y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w]$$
$$\text{od [while]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)]$$
$$\Downarrow \text{ [cons]}$$
$$[y = a!]$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (13)

Schritt 4

Es verbleibt, die Beweislücke zur gewünschten Vorbedingung zu schließen:

$$
\begin{array}{c}
[a > 0] \\
\\
x := a; \\
y := 1; \\
[y * x! = a! \wedge x > 0] \\
\text{while } x > 1 \text{ do} \\
y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0 \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
y := y * x; \text{ [ass]} \\
[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
x := x - 1; \text{ [ass]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w] \\
\text{od [while]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[y = a!]
\end{array}
$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (14)

Einmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$
\begin{array}{c}
[a > 0] \\
\\
x := a; \\
[1 * x! = a! \wedge x > 0] \\
y := 1; \text{ [ass]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0] \\
\text{while } x > 1 \text{ do} \\
y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0 \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
y := y * x; \text{ [ass]} \\
[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
x := x - 1; \text{ [ass]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w] \\
\text{od [while]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[y = a!]
\end{array}
$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (15)

Abermalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$
\begin{array}{c}
[a > 0] \\
\\
[1 * a! = a! \wedge a > 0] \\
x := a; \text{ [ass]} \\
[1 * x! = a! \wedge x > 0] \\
y := 1; \text{ [ass]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0] \\
\text{while } x > 1 \text{ do} \\
y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0 \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
y := y * x; \text{ [ass]} \\
[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
x := x - 1; \text{ [ass]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w] \\
\text{od [while]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[y = a!]
\end{array}
$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (16)

Schluss der letzten Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie:

$$
\begin{array}{c}
[a > 0] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[1 * a! = a! \wedge a > 0] \\
x := a; \text{ [ass]} \\
[1 * x! = a! \wedge x > 0] \\
y := 1; \text{ [ass]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0] \\
\text{while } x > 1 \text{ do} \\
y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0 \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
y := y * x; \text{ [ass]} \\
[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
x := x - 1; \text{ [ass]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w] \\
\text{od [while]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[y = a!]
\end{array}
$$

Überblick (17)

$$
\begin{array}{c}
[a > 0] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[1 * a! = a! \wedge a > 0] \\
x := a; \text{ [ass]} \\
[1 * x! = a! \wedge x > 0] \\
y := 1; \text{ [ass]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0] \\
\text{while } x > 1 \text{ do} \\
y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \Rightarrow x \geq 0 \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1 \wedge x = w] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
y := y * x; \text{ [ass]} \\
[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \wedge x - 1 < w] \\
x := x - 1; \text{ [ass]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x < w] \\
\text{od [while]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x \leq 1] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[y * x! = a! \wedge x = 1] \\
\Downarrow \text{[cons]} \\
[y = a!]
\end{array}
$$

Bew. totaler Korrektheit: Fakultät (18)

Damit haben wir wie gewünscht insgesamt gezeigt:

Die Hoaresche Zusicherung

$$
\begin{array}{c}
[a > 0] \\
x := a;\ y := 1;\ \text{while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\
[y = a!]
\end{array}
$$

ist gültig im Sinne totaler Korrektheit.

Nachtrag zur totalen Korrektheit (1)

Oft, insbesondere für die von uns betrachteten Beispiele, reicht folgende, weniger allgemeine Regel für while-Schleifen, um Terminierung und insgesamt totale Korrektheit zu zeigen.

$$
[\text{while}'_{TK}] \quad \frac{I \Rightarrow t{\geq}0,\ \{I \wedge b \wedge t{=}w\}\ \pi\ \{I \wedge t{<}w\}}{\{I\}\ \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}}
$$

wobei

- t arithmetischer Term über ganzen Zahlen,
- w ganzzahlige Variable, die in I, b, π und t nicht frei vorkommt,

Beachte: Statt beliebiger Terminationsordnungen hier Festlegung auf eine spezielle Noethersche Ordnung als Terminationsordnung, nämlich $(\mathbf{N}, <)$.

Nachtrag zur totalen Korrektheit (2)

Beweistechnische Anmerkung:

"Zerlegt" man $[\text{while}'_{TK}]$ wie folgt:

$$
[\text{while}''_{TK}] \quad \frac{I \Rightarrow t{\geq}0,\ \{I \wedge b\}\ \pi\ \{I\},\ \{I \wedge b \wedge t{=}w\}\ \pi\ \{t{<}w\}}{\{I\}\ \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}}
$$

wird deutlich, dass der Nachweis totaler Korrektheit einer Hoareschen Zusicherung besteht aus

- dem Nachweis ihrer partiellen Korrektheit
- dem Nachweis der Termination

Diese Trennung kann im Beweis explizit vollzogen werden. Der Gesamtbeweis wird dadurch modular. Oft gilt, dass der Terminationsnachweis einfach ist.

Randbemerkung: Die obige Trennung kann für $[\text{while}_{TK}]$ analog vorgenommen werden.

Zur Korrektheit und Vollständigkeit Hoarescher Beweiskalküle

Sei K ein Hoarescher Beweiskalkül (z.B. HK_{PK} und HK_{TK}).

Dann heißt K...

- *korrekt* (engl. *sound*), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel mit K herleitbar/beweisbar, dann ist sie auch semantisch gültig. In Zeichen:

$$\vdash \{p\}\ \pi\ \{q\} \Rightarrow \models \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

- *vollständig* (engl. *complete*), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel semantisch gültig, dann ist sie auch mit K herleitbar/beweisbar.

$$\models \{p\}\ \pi\ \{q\} \Rightarrow \vdash \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

Zur Korrektheit von HK_{PK} und HK_{TK}

Theorem [Korrektheit von HK_{PK} und HK_{TK}]

1. HK_{PK} ist korrekt, d.h. jede mit HK_{PK} ableitbare Korrektheitsformel ist gültig im Sinne partieller Korrektheit:

$$\vdash_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\} \Rightarrow \models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

2. HK_{TK} ist korrekt, d.h. jede mit HK_{TK} ableitbare Korrektheitsformel ist gültig im Sinne totaler Korrektheit:

$$\vdash_{tk} [p]\ \pi\ [q] \Rightarrow \models_{tk} [p]\ \pi\ [q]$$

Beweis ...durch Induktion über die Anzahl der Regelanwendungen im Beweisbaum zur Ableitung der Korrektheitsformel.

Zur Vollständigkeit Hoarescher Beweiskalküle

Generell müssen wir unterscheiden zwischen Vollständigkeit

- *extensionaler* und
- *intensionaler*

Ansätze.

Extensionale vs. intensionale Ansätze

- *Extensional*

  $\leadsto$ Vor- und Nachbedingungen sind durch *Prädikate* beschrieben.

- *Intensional*

  $\leadsto$ Vor- und Nachbedingungen sind durch *Formeln einer Zusicherungssprache* beschrieben.

Zur Vollständigkeit von HK_{PK} & HK_{TK}

Für den extensionalen Ansatz gilt:

Theorem [Vollständigkeit von HK_{PK} und HK_{TK}]

1. HK_{PK} ist vollständig, d.h. jede im Sinne partieller Korrektheit gültige Korrektheitsformel ist mit HK_{PK} ableitbar:

$$\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\} \Rightarrow \vdash_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

2. HK_{TK} ist vollständig, d.h. jede im Sinne totaler Korrektheit gültige Korrektheitsformel ist mit HK_{TK} ableitbar:

$$\models_{tk} [p]\ \pi\ [q] \Rightarrow \vdash_{tk} [p]\ \pi\ [q]$$

Beweis ...durch strukturelle Induktion über den Aufbau von π.

Zur Vollständigkeit von HK_{PK} & HK_{TK}

Für intensionale Ansätze (durch unterschiedliche Wahlen der Zusicherungssprache) gilt Vollständigkeit i.a. nur relativ zur *Entscheidbarkeit* und *Ausdruckskraft* der Zusicherungssprache.

Intuition

- *Entscheidbarkeit*

  ...ist die Gültigkeit von Formeln der Zusicherungssprache algorithmisch verifizierbar bzw. falsifizierbar?

- *Ausdruckskraft*

  ...lassen sich alle Prädikate, insbesondere schwächste und schwächste liberale Vorbedingungen und Terminationsfunktionen, durch Formeln der Zusicherungssprache beschreiben?

  $\leadsto$ *tieferliegende Frage*: ...lassen sich schwächste Vorbedingungen etc. syntaktisch ausdrücken?

Stichwort: *Relative Vollständigkeit im Sinne von Cook.*

Nachträge zu(r) Vorwärtszuweisungsregel(n)

- Eine *Vorwärtsregel* für die Zuweisung wie

  $[\text{ass}_{fwd}]\ \dfrac{}{\{p\}\ x{:=}t\ \{\exists z.\ p[z/x] \wedge x{=}t[z/x]\}}$

  mag natürlich erscheinen, ist aber beweistechnisch unangenehm durch das Mitschleppen quantifizierter Formeln.

- *Beachte*: Folgende scheinbar naheliegende quantorfreie Realisierung der Vorwärtszuweisungsregel ist nicht korrekt:

  $[\text{ass}_{naive}]\ \dfrac{}{\{p\}\ x{:=}t\ \{p[t/x]\}}$

  Beweis: Übungsaufgabe

Automatische Ansätze zur Programmverifikation (1)

...*Theorema*-Projekt am RISC, Linz: `http://www.theorema.org`

"The Theorema project aims at extending current computer algebra systems by facilities for supporting mathematical proving. The present early-prototype version of the Theorema software system is implemented in Mathematica . The system consists of a general higher-order predicate logic prover and a collection of special provers that call each other depending on the particular proof situations. The individual provers imitate the proof style of human mathematicians and produce human-readable proofs in natural language presented in nested cells. The special provers are intimately connected with the functors that build up the various mathematical domains.

The long-term goal of the project is to produce a complete system which supports the mathematician in creating interactive textbooks, i.e. books containing, besides the ordinary passive text, active text representing algorithms in executable format, as well as proofs which can be studied at various levels of detail, and whose routine parts can be automatically generated. This system will provide a uniform (logic and software) framework in which a working mathematician, without leaving the system, can get computer-support while looping through all phases of the mathematical problem solving cycle."

[...] (Zitat von `http://www.theorema.org`)

Automatische Ansätze zur Programmverifikation (2)

Einige Artikel zu Programmverifikation mit *Theorema*:

- Laura Ildico Kovacs and Tudor Jebelean. *Practical Aspects of Imperative Program Verification using Theorema*. In Proceedings of the 5th International Workshop on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2003), Timisoara, Romania, October 1-4, 2003.

  `apache.risc.uni-linz.ac.at/internals/ActivityDB/publications/download/risc_464/synasc03.pdf`

- Laura Ildico Kovacs and Tudor Jebelean. *Generation of Invariants in Theorema*. In Proceedings of the 10th International Symphosium of Mathematics and its Applications, Timisoara, Romania, November 6-9, 2003.

  `www.theorema.org/publication/2003/Laura/Poli_Timisoara_nov.pdf`

Vorschau auf die nächsten Vorlesungstermine...

- Mo, 05.11.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude
- *Mo, 12.11.2007: Keine Vorlesung!*
- Mo, 19.11.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude
- Mo, 26.11.2007: Vorlesung von 16:15 Uhr bis 17:45 Uhr im Hörsaal 14, TU-Hauptgebäude