

Axiomatische Semantik von WHILE

Insbesondere: ...Korrektheit und Vollständigkeit der axiomatischen Semantik

Erinnerung:

- *Hoare-Tripel* (syntaktische Sicht) bzw. *Korrektheitsformel* (semantische Sicht) der Form
 $\{p\} \pi \{q\}$ bzw. $[p] \pi [q]$
- Gültigkeit einer Korrektheitsformel im Sinne
 - *partieller* Korrektheit
 - *totaler* Korrektheit

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007) 1

Definition partieller Korrektheit

Sei $\pi \in \text{Prg}$ ein WHILE-Programm:

Ein Hoaresche Zusicherung $\{p\} \pi \{q\}$ heißt

- *gültig* (im Sinne der *partiellen Korrektheit*) oder kurz (*partiell*) *korrekt* gdw. für jeden Anfangszustand σ gilt: ist die Vorbedingung p in σ erfüllt **und** terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär in einem Endzustand σ' , **dann** ist auch die Nachbedingung q in σ' erfüllt.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007) 2

Definition totaler Korrektheit

Sei $\pi \in \text{Prg}$ ein WHILE-Programm:

Ein Hoaresche Zusicherung $[p] \pi [q]$ heißt

- *gültig* (im Sinne der *totalen Korrektheit*) oder kurz (*total*) *korrekt* gdw. für jeden Anfangszustand σ gilt: ist die Vorbedingung p in σ erfüllt, **dann** terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär mit einem Endzustand σ' **und** die Nachbedingung q ist in σ' erfüllt.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007) 3

Intuitiv

“Totale Korrektheit \equiv Partielle Korrektheit + Terminierung”

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007) 4

Partielle und totale Korrektheit

- Die Zustandsmenge

$$Ch(p) =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid \llbracket p \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt}\}$$

heißt *Charakterisierung von p* in **Bexp**.

- *Semantik von Korrektheitsformeln:*
 - Eine Korrektheitsformel $\{p\} \pi \{q\}$ heißt
 - *partiell korrekt* (in Zeichen: $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$), falls $\llbracket \pi \rrbracket(Ch(p)) \subseteq Ch(q)$
 - *total korrekt* (in Zeichen: $\models_{tk} \{p\} \pi \{q\}$), falls $\{p\} \pi \{q\}$ partiell korrekt ist und $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \supseteq Ch(p)$ gilt. Dabei bezeichnet $Def(\llbracket \pi \rrbracket)$ die Menge aller Zustände, für die π regulär terminiert.
 - *Konvention:* $\llbracket \pi \rrbracket(Ch(p)) =_{df} \llbracket \pi \rrbracket(\sigma) \mid \sigma \in Ch(p)$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007) 5

Erinnerung

...an einige Sprechweisen:

Ein (deterministisches) Programm π

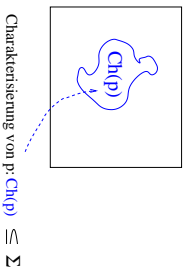
- angesetzt auf einen Anfangszustand σ *terminiert regulär* gdw. π nach endlich vielen Schritten in einem Zustand $\sigma' \in \Sigma$ endet.
- angesetzt auf einen Anfangszustand σ *terminiert irregulär* gdw. π nach endlich vielen Schritten zur Konfiguration *undef.* führt.
- Ein Programm π heißt *divergent* gdw. π terminiert für keinen Anfangszustand regulär.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007) 6

Veranschaulichung (1)

...der Charakterisierung $Ch(p)$ einer logischen Formel p :

Menge aller Zustände Σ

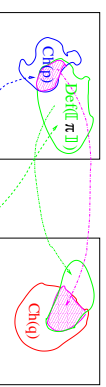


Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007) 7

Veranschaulichung (2)

...der Gültigkeit eine Hoareschen Zusicherung $\{p\} \pi \{q\}$ im Sinne partieller Korrektheit:

Menge aller Zustände Σ



Charakterisierung von p : $Ch(p) \subseteq \Sigma$

Definitionsbereich von π : $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \subseteq \Sigma$

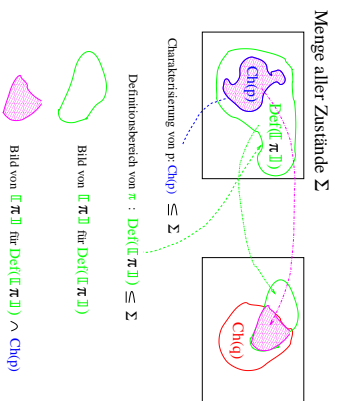
Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket)$

Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \wedge Ch(p)$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007) 8

Veranschaulichung (3)

... der Gültigkeit eine Hoareschen Zusicherung $[p] \pi [q]$ im Sinne totaler Korrektheit:



Hoare-Kalkül HK_{TK} für totale Korrektheit

...identisch mit HK_{PK} , wobei aber Regel [while] ersetzt ist durch:

$$[while_{TK}] \quad I \wedge b \Rightarrow w \llbracket I/w \rrbracket, \{ I \wedge b \wedge I = w \} \pi \{ I \wedge I < w \}$$

wobei

- w Boolescher Ausdruck über der Variablen v ,
- t Term,
- w Variable, die in I, b, π und t nicht frei vorkommt,
- $M = \mu r. \{ \sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma \wedge \llbracket w \rrbracket_{B(\sigma)} = \text{tt} \}$ noethersche geordnete Menge (sog. noethersche Halbordnung).

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

Hoare-Kalkül HK_{PK} für partielle Korrektheit

$$\begin{aligned}
 [\text{skip}] & \quad \frac{}{\{p\} \text{skip} \{p\}} \\
 [\text{abort}] & \quad \frac{}{\{p\} \text{abort} \{q\}} \\
 [\text{ass}] & \quad \frac{}{\{p\} [x:=t] \{p\}} \\
 [\text{comp}] & \quad \frac{}{\{p\} \pi_1 \{r\}, \{r\} \pi_2 \{q\}} \\
 [\text{ite}] & \quad \frac{}{\{p \wedge b\} \pi_1 \{q_1\}, \{p \wedge \neg b\} \pi_2 \{q_2\}} \\
 [\text{while}] & \quad \frac{}{\{I\} \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}} \\
 [\text{cons}] & \quad \frac{}{p \Rightarrow p_1, \{p_1\} \pi \{q_1\}, q_1 \Rightarrow q}
 \end{aligned}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

Korrektheit und Vollständigkeit von HK_{PK} und HK_{TK}

Sei K ein Kalkül für partielle bzw. totale Korrektheit

Zentral sind dann die Fragen der...

- **Korrektheit:** ... ist jede mithilfe von K ableitbare Korrektheitsformel partiell bzw. total korrekt?
- **Vollständigkeit:** ... ist jede partiell bzw. total korrekte Korrektheitsformel mithilfe von K ableitbar?
- **Speziell:**
 - Sind HK_{PK} und HK_{TK} korrekt und vollständig?

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

Hauptresultate

Zur Korrektheit:

Theorem [Korrektheit von HK_{PK} und HK_{TK}]

1. HK_{PK} ist korrekt, d.h. jede mit HK_{PK} ableitbare Korrektheitsformel ist gültig im Sinne partieller Korrektheit.
2. HK_{TK} ist korrekt, d.h. jede mit HK_{TK} ableitbare Korrektheitsformel ist gültig im Sinne totaler Korrektheit.

Beweis ...durch Induktion über die Anzahl der Regelanwendungen im Beweisbaum zur Ableitung der Korrektheitsformel.

Zur Vollständigkeit:

Für Korrektheitskalküle ist i.a. nur sog. *relative* Vollständigkeit beweisbar. Das gilt auch für HK_{PK} und HK_{TK} . Details dazu später.

Beispiele 2(2)

Im Detail:

Beweis, dass die beiden Hoareschen Zusicherungen

$$\begin{aligned}
 & \{a > 0\} \\
 x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\
 & \{y = a!\}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \{x \geq 0 \wedge y > 0\} \\
 q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od} \\
 & \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}
 \end{aligned}$$

gültig sind im Sinne partieller Korrektheit.

In der Folge geben wir die Beweise dafür in baumartiger Notation an...

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

Beispiele 1(2)

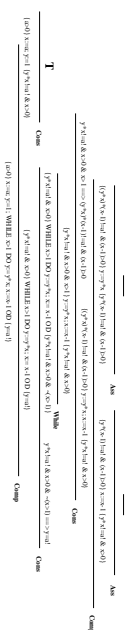
...Beweis partieller Korrektheit von Hoareschen Zusicherungen anhand zweier Programme zur Berechnung

- der Fakultät und
- der ganzzahligen Division mit Rest

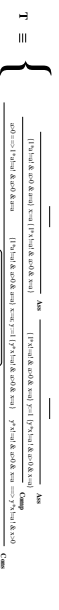
Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (1)

Einzelbeweis



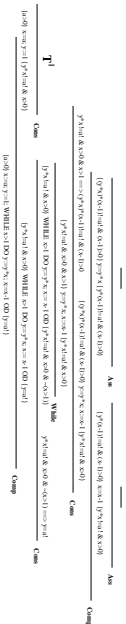
w/def



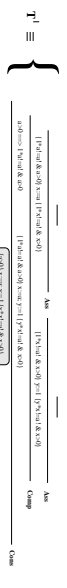
Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (2)

Anderer Beweis



Wolke!



! - logisches und
- logisches nicht

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

17

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (1)

- Die unmittelbare baumartige Notation von Hoareschen Korrektheitsbeweisen ist i.a. unhandlich.
- Alternativ hat sich deshalb eine Notationsvariante eingebürgert, bei der in den Programmtext Zusicherungen als Annotationen eingestreut werden.
- In der Folge demonstrieren wir diesen Notationsstil am Beispiel des Nachweises der partiellen Korrektheit unseres Fakultätsprogramms bezüglich der angegebenen Vor- und Nachbedingung. Man spricht auch von einem sog. *linearen Beweis* bzw. *linearen Beweisskizze*.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

19

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (3)

Schritt 1

“Träumen“ der Invariante...

- $\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$

...um die [while]-Regel anwenden zu können.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

21

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (5)

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife im Detail:

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$y := y * x;$$

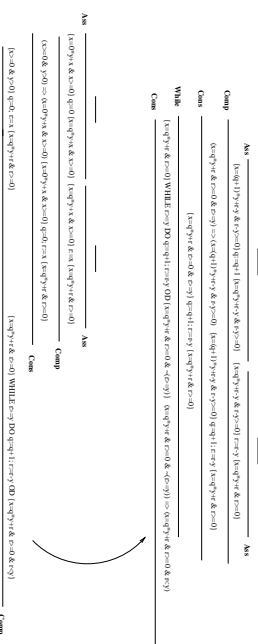
$$x := x - 1;$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

23

Bew. partieller Korrektheit: Division



! - logisches und
- ! logisches nicht

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

18

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (2)

Beweise, dass das Hoare-Tripel

$$\{a > 0\}$$

$x := a; y := 1; \text{while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$

$$\{y = a!\}$$

gütig ist im Sinne partieller Korrektheit.

Wir entwickeln den Beweis in der Folge Schritt für Schritt!

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

20

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (4)

Schritt 2

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife...

Der Nachweis der Gültigkeit von

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

erlaube mithilfe der [while]-Regel den Übergang zu:

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$\text{while } x > 1 \text{ do}$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

$$\text{od [while]}$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

22

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (6)

Wegen Rückwärtszuweisungsregel wird der Rumpf der while-Schleife von hinten nach vorne bearbeitet:

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$y := y * x;$$

$$\{y * (x - 1) = a! \wedge x - 1 > 0\}$$

$$x := x - 1; \text{[ass]}$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

24

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (7)

Nach abermaliger Anwendung der [ass]-Regel erhalten wir...

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \{ (y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad y := y * x; [ass] \\ & \{ y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad x := x - 1; [ass] \\ & \{ y * x! = a! \wedge x > 0 \} \end{aligned}$$

...wobei noch eine "Beweislücke" verbleibt!

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

25

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (8)

Schluss der "Beweislücke" in der zugrundeliegenden Theorie:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{ (y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad y := y * x; [ass] \\ & \{ y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad x := x - 1; [ass] \\ & \{ y * x! = a! \wedge x > 0 \} \end{aligned}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

26

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (9)

Anwendung der [while]-Regel liefert nun wie gewünscht:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{ (y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad y := y * x; [ass] \\ & \quad \quad \{ y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad x := x - 1; [ass] \\ & \quad \quad \{ y * x! = a! \wedge x > 0 \} \\ & \quad \quad \text{od [while]} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \end{aligned}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

27

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (10)

Schritt 3

Zur gewünschten Nachbedingung verbleibt offenbar ebenfalls eine Beweislücke:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{ (y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad y := y * x; [ass] \\ & \quad \quad \{ y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad x := x - 1; [ass] \\ & \quad \quad \{ y * x! = a! \wedge x > 0 \} \\ & \quad \quad \text{od [while]} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (11)

Schluss der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{ (y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad y := y * x; [ass] \\ & \quad \quad \{ y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad x := x - 1; [ass] \\ & \quad \quad \{ y * x! = a! \wedge x > 0 \} \\ & \quad \quad \text{od [while]} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x \leq 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x = 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

29

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (12)

Aus Platzgründen etwas verkürzt dargestellt:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{ (y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad y := y * x; [ass] \\ & \quad \quad \{ y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad x := x - 1; [ass] \\ & \quad \quad \{ y * x! = a! \wedge x > 0 \} \\ & \quad \quad \text{od [while]} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

30

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (13)

Schritt 4

Es verbleibt, die Beweislücke zur gewünschten Vorbedingung zu schließen:

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \quad x := a; \\ & \quad y := 1; \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \quad \{ (y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad \quad y := y * x; [ass] \\ & \quad \quad \quad \{ y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad \quad x := x - 1; [ass] \\ & \quad \quad \quad \{ y * x! = a! \wedge x > 0 \} \\ & \quad \quad \quad \text{od [while]} \\ & \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (14)

Einmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\begin{aligned} & \{1 * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad y := 1; [ass] \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \quad \{ (y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad \quad y := y * x; [ass] \\ & \quad \quad \quad \{ y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0 \} \\ & \quad \quad \quad x := x - 1; [ass] \\ & \quad \quad \quad \{ y * x! = a! \wedge x > 0 \} \\ & \quad \quad \quad \text{od [while]} \\ & \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

31

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (15)

Abermalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

```
{a > 0}
{1 * a! = a! ∧ a > 0}
x := a; [ass]
{1 * x! = a! ∧ x > 0}
y := 1; [ass]
{y * x! = a! ∧ x > 0}
while x > 1 do
  {y * x! = a! ∧ x > 0 ∧ x > 1}
  ↓ [cons]
  {y * x * (x - 1)! = a! ∧ x - 1 > 0}
  y := y * x; [ass]
{y * (x - 1)! = a! ∧ x - 1 > 0}
x := x - 1; [ass]
{y * x! = a! ∧ x > 0}
od [while]
{y * x! = a! ∧ x > 0 ∧ ¬(x > 1)}
↓ [cons]
{y = a!}
```

Überblick (17)

```
{a > 0}
↓ [cons]
{1 * a! = a! ∧ a > 0}
x := a; [ass]
{1 * x! = a! ∧ x > 0}
  y := 1; [ass]
  {y * x! = a! ∧ x > 0}
  while x > 1 do
    {y * x! = a! ∧ x > 0 ∧ x > 1}
    ↓ [cons]
    {{y * x * (x - 1)! = a! ∧ x - 1 > 0}
     y := y * x; [ass]
    {y * (x - 1)! = a! ∧ x - 1 > 0}
     x := x - 1; [ass]
    {y * x! = a! ∧ x > 0}
     od [while]
    {y * x! = a! ∧ x > 0 ∧ ¬(x > 1)}
    ↓ [cons]
    {y * x! = a! ∧ x > 0 ∧ x ≤ 1}
    ↓ [cons]
    {y * x! = a! ∧ x = 1}
    ↓ [cons]
    {y = a!}
```

Linearer vs. baumartiger Beweisstil

Vorteil linearen gegenüber baumartigen Beweisnotationsstils:

- wenig Redundanz
- daher insgesamt knappere Beweise

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

37

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (2)

In einer Hoareschen Zusicherung von einer der Formen

- $\{p\} \pi \{q\}$ und
- $[p] \pi [q]$ heißen
- p und q Vor- bzw. Nachbedingung.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

39

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (16)

Schluss der letzten Beweisstücke in der zugrundeliegenden Theorie:

```
{a > 0}
↓ [cons]
{1 * a! = a! ∧ a > 0}
x := a; [ass]
{1 * x! = a! ∧ x > 0}
y := 1; [ass]
{y * x! = a! ∧ x > 0}
while x > 1 do
  {y * x! = a! ∧ x > 0 ∧ x > 1}
  ↓ [cons]
  {{y * x * (x - 1)! = a! ∧ x - 1 > 0}
   y := y * x; [ass]
  {y * (x - 1)! = a! ∧ x - 1 > 0}
   x := x - 1; [ass]
  {y * x! = a! ∧ x > 0}
   od [while]
  {y * x! = a! ∧ x > 0 ∧ ¬(x > 1)}
  ↓ [cons]
  {y = a!}
```

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (18)

Damit haben wir insgesamt wie gewünscht gezeigt:

Das Hoaresche Tripel

```
{a > 0}
x := a; y := 1; while x > 1 do y := y * x; x := x - 1 od
{y = a!}
```

ist gültig im Sinne partieller Korrektheit.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

36

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (1)

Hoaresche Zusicherungen sind von einer der zwei Formen

- $\{p\} \pi \{q\}$ und
- $[p] \pi [q]$ wobei
- p, q logische Formeln sind (meist prädikatenlogische Formeln 1. Stufe) und
- π ein Programm ist.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

38

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (3)

In einer Hoareschen Zusicherung werden üblicherweise

- geschweifte Klammern wie in $\{p\} \pi \{q\}$ für Tripel im Sinne *partieller Korrektheit* und
- eckige Klammern wie in $[p] \pi [q]$ für Tripel im Sinne *totaler Korrektheit* benutzt.

Analyse und Verifikation (WS 2007/2008) / 3. Teil (08.&29.10.2007)

40

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (4)

Zwei Beispiele Hoarescher Zusicherungen:

$\{a > 0\}$
 $x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * a; x := x - 1 \text{ od}$
 $\{y = a!\}$

..zum Ausdruck partieller Korrektheit von π bzgl. der Vorbedingung $a > 0$ und der Nachbedingung $y = a!$

$[a > 0]$
 $x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * a; x := x - 1 \text{ od}$
 $[y = a!]$

..zum Ausdruck totaler Korrektheit von π bzgl. der Vorbedingung $a > 0$ und der Nachbedingung $y = a!$

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (5)

Die Wortwahl

- Hoaresches Tripel oder kurz Hoare-Tripel bzw.
- Hoaresche Zusicherung oder kurz Korrektheitsformel

betont jeweils die

- syntaktische bzw.
- semantische Sicht

auf

- $\{p\} \pi \{q\}$ bzw. $[p] \pi [q]$