
Axiomatische Semantik von WHILE

Insbesondere: ...Korrektheit und Vollständigkeit der axiomatischen Semantik

Erinnerung:

- *Hoare-Tripel* (syntaktische Sicht) bzw. *Korrektheitsformeln* (semantische Sicht) der Form

$$\{p\} \pi \{q\} \quad \text{bzw.} \quad [p] \pi [q]$$

- Gültigkeit einer Korrektheitsformel im Sinne
 - *partieller* Korrektheit
 - *totaler* Korrektheit

Definition partieller Korrektheit

Sei $\pi \in \mathbf{Prg}$ ein WHILE-Programm:

Ein Hoaresche Zusicherung $\{p\} \pi \{q\}$ heißt

- *gültig (im Sinne der partiellen Korrektheit) oder kurz (partiell) korrekt* gdw. für jeden Anfangszustand σ gilt: ist die Vorbedingung p in σ erfüllt **und** terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär in einem Endzustand σ' , **dann** ist auch die Nachbedingung q in σ' erfüllt.

Definition totaler Korrektheit

Sei $\pi \in \mathbf{Prg}$ ein WHILE-Programm:

Ein Hoaresche Zusicherung $[p] \pi [q]$ heißt

- *gültig* (im Sinne der totalen Korrektheit) oder kurz (*total*) *korrekt* gdw. für jeden Anfangszustand σ gilt: ist die Vorbedingung p in σ erfüllt, **dann** terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär mit einem Endzustand σ' **und** die Nachbedingung q ist in σ' erfüllt.

Intuitiv

“Totale Korrektheit = Partielle Korrektheit + Terminierung”

Partielle und totale Korrektheit

- Die Zustandsmenge

$$Ch(p) =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid \llbracket p \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt}\}$$

heißt *Charakterisierung* von $p \in \mathbf{Bexp}$.

- *Semantik von Korrektheitsformeln:*

Eine Korrektheitsformel $\{p\} \pi \{q\}$ heißt

- *partiell korrekt* (in Zeichen: $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$), falls $\llbracket \pi \rrbracket(Ch(p)) \subseteq Ch(q)$
- *total korrekt* (in Zeichen: $\models_{tk} \{p\} \pi \{q\}$), falls $\{p\} \pi \{q\}$ partiell korrekt ist und $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \supseteq Ch(p)$ gilt. Dabei bezeichnet $Def(\llbracket \pi \rrbracket)$ die Menge aller Zustände, für die π regulär terminiert.

Konvention: $\llbracket \pi \rrbracket(Ch(p)) =_{df} \{\llbracket \pi \rrbracket(\sigma) \mid \sigma \in Ch(p)\}$

Erinnerung

...an einige Sprechweisen:

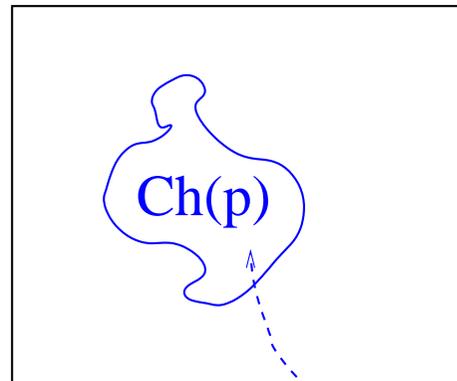
Ein (deterministisches) Programm π

- angesetzt auf einen Anfangszustand σ *terminiert regulär* gdw. π nach endlich vielen Schritten in einem Zustand $\sigma' \in \Sigma$ endet.
- angesetzt auf einen Anfangszustand σ *terminiert irregulär* gdw. π nach endlich vielen Schritten zur Konfiguration *undef* führt.
- Ein Programm π heißt *divergent* gdw. π terminiert für keinen Anfangszustand regulär.

Veranschaulichung (1)

...der Charakterisierung $Ch(p)$ einer logischen Formel p :

Menge aller Zustände Σ

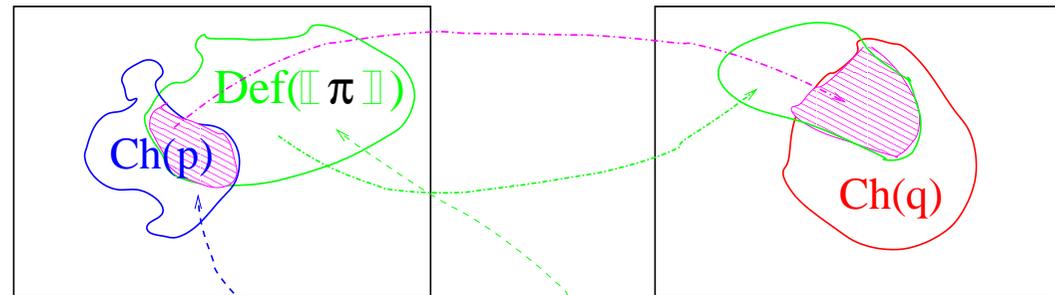


Charakterisierung von p : $Ch(p) \subseteq \Sigma$

Veranschaulichung (2)

...der Gültigkeit eine Hoareschen Zusicherung $\{p\} \pi \{q\}$ im Sinne partieller Korrektheit:

Menge aller Zustände Σ



Charakterisierung von p : $\text{Ch}(p) \subseteq \Sigma$

Definitionsbereich von π : $\text{Def}(\llbracket \pi \rrbracket) \subseteq \Sigma$



Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $\text{Def}(\llbracket \pi \rrbracket)$

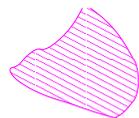
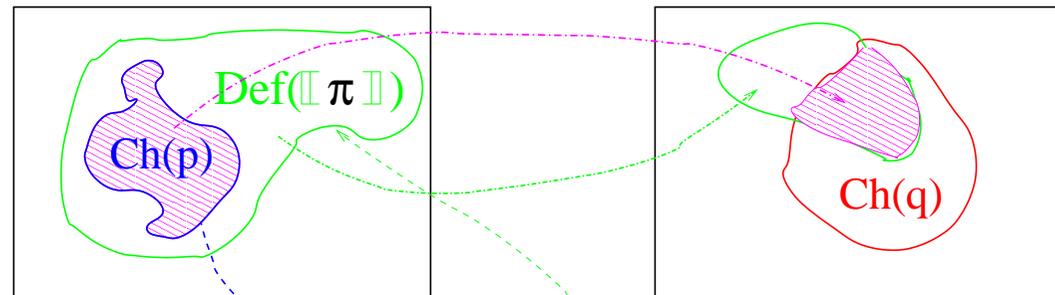


Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $\text{Def}(\llbracket \pi \rrbracket) \wedge \text{Ch}(p)$

Veranschaulichung (3)

...der Gültigkeit eine Hoareschen Zusicherung $[p] \pi [q]$ im Sinne totaler Korrektheit:

Menge aller Zustände Σ



Charakterisierung von p : $Ch(p) \subseteq \Sigma$

Definitionsbereich von π : $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \subseteq \Sigma$

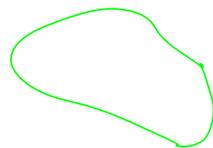


Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket)$

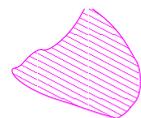


Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \cap Ch(p)$

Hoare-Kalkül HK_{PK} für partielle Korrektheit

$$[\text{skip}] \frac{\overline{\quad}}{\{p\} \text{ skip } \{p\}}$$

$$[\text{abort}] \frac{\overline{\quad}}{\{p\} \text{ abort } \{q\}}$$

$$[\text{ass}] \frac{\overline{\quad}}{\{p[t \setminus x]\} x := t \{p\}}$$

$$[\text{comp}] \frac{\{p\} \pi_1 \{r\}, \{r\} \pi_2 \{q\}}{\{p\} \pi_1; \pi_2 \{q\}}$$

$$[\text{ite}] \frac{\{p \wedge b\} \pi_1 \{q\}, \{p \wedge \neg b\} \pi_2 \{q\}}{\{p\} \text{ if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } \{q\}}$$

$$[\text{while}] \frac{\{I \wedge b\} \pi \{I\}}{\{I\} \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}}$$

$$[\text{cons}] \frac{p \Rightarrow p_1, \{p_1\} \pi \{q_1\}, q_1 \Rightarrow q}{\{p\} \pi \{q\}}$$

Hoare-Kalkül HK_{TK} für totale Korrektheit

...identisch mit HK_{PK} , wobei aber Regel [while] ersetzt ist durch:

$$[\text{while}_{TK}] \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v], \{I \wedge b \wedge t=w\} \pi \{I \wedge t < w\}}{\{I\} \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}}$$

wobei

- u Boolescher Ausdruck über der Variablen v ,
- t Term,
- w Variable, die in I , b , π und t nicht frei vorkommt,
- $M =_{df} \{\sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma \wedge \llbracket u \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt}\}$ noethersch geordnete Menge (sog. noethersche Halbordnung).

Korrektheit und Vollständigkeit von HK_{PK} und HK_{TK}

Sei K ein Kalkül für partielle bzw. totale Korrektheit

Zentral sind dann die Fragen der...

- *Korrektheit*: ...ist jede mithilfe von K ableitbare Korrektheitsformel partiell bzw. total korrekt?
- *Vollständigkeit*: ...ist jede partiell bzw. total korrekte Korrektheitsformel mithilfe von K ableitbar?

Speziell:

- Sind HK_{PK} und HK_{TK} korrekt und vollständig?

Hauptresultate

Zur Korrektheit:

Theorem [Korrektheit von HK_{PK} und HK_{TK}]

1. HK_{PK} ist korrekt, d.h. jede mit HK_{PK} ableitbare Korrektheitsformel ist gültig im Sinne partieller Korrektheit.
2. HK_{TK} ist korrekt, d.h. jede mit HK_{TK} ableitbare Korrektheitsformel ist gültig im Sinne totaler Korrektheit.

Beweis ...durch Induktion über die Anzahl der Regelanwendungen im Beweisbaum zur Ableitung der Korrektheitsformel.

Zur Vollständigkeit:

Für Korrektheitskalküle ist i.a. nur sog. *relative* Vollständigkeit beweisbar. Das gilt auch für HK_{PK} und HK_{TK} . Details dazu später.

Beispiele 1(2)

...Beweis partieller Korrektheit von Hoareschen Zusicherungen anhand zweier Programme zur Berechnung

- der Fakultät und
- der ganzzahligen Division mit Rest

Beispiele 2(2)

Im Detail:

Beweise, dass die beiden Hoareschen Zusicherungen

$$\begin{array}{c} \{a > 0\} \\ x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{c} \{x \geq 0 \wedge y > 0\} \\ q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od} \\ \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\} \end{array}$$

gültig sind im Sinne partieller Korrektheit.

In der Folge geben wir die Beweise dafür in baumartiger Notation an...

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (1)

Erster Beweis

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{} \\
 \frac{}{} \text{Ass} \quad \frac{}{} \text{Ass} \\
 \frac{\{(y*x)^{(x-1)}!=a! \ \& \ (x-1)>0\} \ y:=y*x \ \{(y^{(x-1)}!=a! \ \& \ (x-1)>0\}}{\{(y*x)^{(x-1)}!=a! \ \& \ (x-1)>0\}} \text{Ass} \quad \frac{\{y^{(x-1)}!=a! \ \& \ (x-1)>0\} \ x:=x-1 \ \{y*x!=a! \ \& \ x>0\}}{\{y^{(x-1)}!=a! \ \& \ (x-1)>0\}} \text{Ass} \\
 \frac{\{y*x!=a! \ \& \ x>0 \ \& \ x>1 \implies (y*x)^{(x-1)}!=a! \ \& \ (x-1)>0\} \quad \{(y*x)^{(x-1)}!=a! \ \& \ (x-1)>0\} \ y:=y*x; \ x:=x-1 \ \{y*x!=a! \ \& \ x>0\}}{\{y*x!=a! \ \& \ x>0 \ \& \ x>1\}} \text{Comp} \\
 \frac{\{y*x!=a! \ \& \ x>0 \ \& \ x>1\} \ y:=y*x; \ x:=x-1 \ \{y*x!=a! \ \& \ x>0\}}{\{y*x!=a! \ \& \ x>0 \ \& \ x>1\}} \text{Cons} \\
 \frac{\{y*x!=a! \ \& \ x>0\} \ \text{WHILE } x>1 \ \text{DO } y:=y*x; \ x:=x-1 \ \text{OD } \{y*x!=a! \ \& \ x>0 \ \& \ \sim(x>1)\} \quad \{y*x!=a! \ \& \ x>0 \ \& \ \sim(x>1)\} \implies y=a!}{\{y*x!=a! \ \& \ x>0\} \ \text{WHILE } x>1 \ \text{DO } y:=y*x; \ x:=x-1 \ \text{OD } \{y=a!\}} \text{While} \\
 \frac{\{a>0\} \ x:=a; \ y:=1 \ \{y*x!=a! \ \& \ x>0\}}{\{a>0\} \ x:=a; \ y:=1 \ \{y*x!=a! \ \& \ x>0\}} \text{Cons} \\
 \frac{\{y*x!=a! \ \& \ x>0\} \ \text{WHILE } x>1 \ \text{DO } y:=y*x; \ x:=x-1 \ \text{OD } \{y=a!\}}{\{a>0\} \ x:=a; \ y:=1; \ \text{WHILE } x>1 \ \text{DO } y:=y*x; \ x:=x-1 \ \text{OD } \{y=a!\}} \text{Comp} \\
 \frac{}{} \text{Comp}
 \end{array}$$

wobei

$$\mathbf{T} \equiv \left\{ \frac{\frac{\frac{\{1*a!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ a=a\} \ x:=a \ \{1*x!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ x=a\}}{\{1*a!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ a=a\}} \text{Ass} \quad \frac{\{1*x!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ x=a\} \ y:=1 \ \{y*x!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ x=a\}}{\{1*x!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ x=a\}} \text{Ass}}{\{1*a!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ a=a\} \ x:=a; \ y:=1 \ \{y*x!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ x=a\}} \text{Comp} \\
 \frac{\{1*a!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ a=a\} \ x:=a; \ y:=1 \ \{y*x!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ x=a\} \quad \{y*x!=a! \ \& \ a>0 \ \& \ x=a\} \implies y*x!=a! \ \& \ x>0}{\{a>0\} \ x:=a; \ y:=1 \ \{y*x!=a! \ \& \ x>0\}} \text{Cons}
 \end{array}$$

& : Logisches und
 ~ : Logisches nicht

Bew. partieller Korrektheit: Division

	<hr style="width: 100%;"/>		<hr style="width: 100%;"/>
Ass	$\{x=(q+1)*y+r-y \ \& \ r-y \geq 0\} \ q:=q+1 \ \{x=q*y+r-y \ \& \ r-y \geq 0\} \ \{x=q*y+r-y \ \& \ r-y \geq 0\} \ r:=r-y \ \{x=q*y+r \ \& \ r \geq 0\}$	Ass	
Comp			
	$(x=q*y+r \ \& \ r \geq 0 \ \& \ r > y) \Rightarrow (x=(q+1)*y+r-y \ \& \ r-y \geq 0) \ \{x=(q+1)*y+r-y \ \& \ r-y \geq 0\} \ q:=q+1; \ r:=r-y \ \{x=q*y+r \ \& \ r \geq 0\}$		
Cons			
	$\{x=q*y+r \ \& \ r \geq 0 \ \& \ r > y\} \ q:=q+1; \ r:=r-y \ \{x=q*y+r \ \& \ r \geq 0\}$		
While			
	$\{x=q*y+r \ \& \ r \geq 0\} \ \text{WHILE } r > y \ \text{DO } q:=q+1; \ r:=r-y \ \text{OD } \{x=q*y+r \ \& \ r \geq 0 \ \& \ \sim(r > y)\} \ (x=q*y+r \ \& \ r \geq 0 \ \& \ \sim(r > y)) \Rightarrow (x=q*y+r \ \& \ r \geq 0 \ \& \ r < y)$		
Cons			



	<hr style="width: 100%;"/>		<hr style="width: 100%;"/>
Ass	$\{x=0*y+x \ \& \ x > 0\} \ q:=0 \ \{x=q*y+x \ \& \ x > 0\} \ \{x=q*y+x \ \& \ x > 0\} \ r:=x \ \{x=q*y+r \ \& \ r > 0\}$	Ass	
Comp			
	$(x > 0 \ \& \ y > 0) \Rightarrow (x=0*y+x \ \& \ x > 0) \ \{x=0*y+x \ \& \ x > 0\} \ q:=0; \ r:=x \ \{x=q*y+r \ \& \ r > 0\}$		
Cons			
	$\{x > 0 \ \& \ y > 0\} \ q:=0; \ r:=x \ \{x=q*y+r \ \& \ r > 0\}$	$\{x=q*y+r \ \& \ r > 0\} \ \text{WHILE } r > y \ \text{DO } q:=q+1; \ r:=r-y \ \text{OD } \{x=q*y+r \ \& \ r > 0 \ \& \ r < y\}$	Comp
	$\{x > 0 \ \& \ y > 0\} \ q:=0; \ r:=x; \ \text{WHILE } r > y \ \text{DO } q:=q+1; \ r:=r-y \ \text{OD } \{x=q*y+r \ \& \ r > 0 \ \& \ r < y\}$		

& : Logisches und
 ~ : Logisches nicht

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (1)

- Die unmittelbare baumartige Notation von Hoareschen Korrektheitsbeweisen ist i.a. unhandlich.
- Alternativ hat sich deshalb eine Notationsvariante eingebürgert, bei der in den Programmtext Zusicherungen als Annotationen eingestreut werden.
- In der Folge demonstrieren wir diesen Notationsstil am Beispiel des Nachweises der partiellen Korrektheit unseres Fakultätsprogramms bezüglich der angegebenen Vor- und Nachbedingung. Man spricht auch von einem sog. *linearen Beweis* bzw. *linearen Beweisskizze*.

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (2)

Beweise, dass das Hoare-Tripel

$$\begin{array}{c} \{a > 0\} \\ x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\} \end{array}$$

gültig ist im Sinne partieller Korrektheit.

Wir entwickeln den Beweis in der Folge Schritt für Schritt!

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (3)

Schritt 1

“Träumen” der Invariante...

- $\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$

...um die [while]-Regel anwenden zu können.

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (4)

Schritt 2

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife...

Der Nachweis der Gültigkeit von

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad y := y * x; \\ & \quad x := x - 1; \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \end{aligned}$$

erlaube mithilfe der [while]-Regel den Übergang zu:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad y := y * x; \\ & \quad \quad x := x - 1; \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od [while]} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (5)

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife im Detail:

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (6)

Wegen *Rückwärtszuweisungsregel* wird der Rumpf der while-Schleife von hinten nach vorne bearbeitet:

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$y := y * x;$$

$$\{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\}$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (7)

Nach abermaliger Anwendung der [ass]-Regel erhalten wir...

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$\{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\}$$

$$y := y * x; \text{ [ass]}$$

$$\{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\}$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

...wobei noch eine "Beweislücke" verbleibt!

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (8)

Schluss der “Beweislücke” in der zugrundeliegenden Theorie:

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

↓ [cons]

$$\{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\}$$

$y := y * x$; [ass]

$$\{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\}$$

$x := x - 1$; [ass]

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (9)

Anwendung der [while]-Regel liefert nun wie gewünscht:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \quad \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (10)

Schritt 3

Zur gewünschten Nachbedingung verbleibt offenbar ebenfalls eine Beweislücke:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \quad \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (11)

Schluss der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x \leq 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x = 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (12)

Aus Platzgründen etwas verkürzt dargestellt:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (13)

Schritt 4

Es verbleibt, die Beweislücke zur gewünschten Vorbedingung zu schließen:

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \quad x := a; \\ & \quad y := 1; \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (14)

Einmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \quad x := a; \\ & \quad \{1 * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \quad y := 1; \text{ [ass]} \\ & \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \quad \Downarrow \text{ [cons]} \\ & \quad \quad \quad \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad \quad \quad y := y * x; \text{ [ass]} \\ & \quad \quad \quad \quad \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad \quad \quad \quad x := x - 1; \text{ [ass]} \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \quad \quad \quad \text{od [while]} \\ & \quad \quad \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \quad \quad \Downarrow \text{ [cons]} \\ & \quad \quad \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (15)

Abermalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\{a > 0\}$$

$$\{1 * a! = a! \wedge a > 0\}$$

$$x := a; \text{ [ass]}$$

$$\{1 * x! = a! \wedge x > 0\}$$

$$y := 1; \text{ [ass]}$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

while $x > 1$ do

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

↓ [cons]

$$\{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\}$$

$$y := y * x; \text{ [ass]}$$

$$\{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\}$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

od [while]

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\}$$

↓ [cons]

$$\{y = a!\}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (16)

Schluss der letzten Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie:

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{1 * a! = a! \wedge a > 0\} \\ & \quad x := a; [\text{ass}] \\ & \{1 * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Überblick (17)

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{1 * a! = a! \wedge a > 0\} \\ & \quad x := a; [\text{ass}] \\ & \{1 * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x \leq 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x = 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (18)

Damit haben wir insgesamt wie gewünscht gezeigt:

Das Hoaresche Tripel

$$\begin{array}{c} \{a > 0\} \\ x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\} \end{array}$$

ist gültig im Sinne partieller Korrektheit.

Linearer vs. baumartiger Beweisstil

Vorteil linearen gegenüber baumartigen Beweisnotationsstils:

- wenig Redundanz
- daher insgesamt knappere Beweise

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (1)

Hoaresche Zusicherungen sind von einer der zwei Formen

- $\{p\} \pi \{q\}$ und
- $[p] \pi [q]$

wobei

- p, q logische Formeln sind (meist prädikatenlogische Formeln 1. Stufe) und
- π ein Programm ist.

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (2)

In einer Hoareschen Zusicherung von einer der Formen

- $\{p\} \pi \{q\}$ und
- $[p] \pi [q]$

heißen

- p und q *Vor-* bzw. *Nachbedingung*.

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (3)

In einer Hoareschen Zusicherung werden üblicherweise

- geschweifte Klammern wie in

$$\{p\} \pi \{q\}$$

für Tripel im Sinne *partieller Korrektheit* und

- eckige Klammern wie in

$$[p] \pi [q]$$

für Tripel im Sinne *totaler Korrektheit*

benutzt.

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (4)

Zwei Beispiele Hoarescher Zusicherungen:

$$\begin{array}{c} \{a > 0\} \\ x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\} \end{array}$$

...zum Ausdruck partieller Korrektheit von π bzgl. der Vorbedingung $a > 0$ und der Nachbedingung $y = a!$

$$\begin{array}{c} [a > 0] \\ x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ [y = a!] \end{array}$$

...zum Ausdruck totaler Korrektheit von π bzgl. der Vorbedingung $a > 0$ und der Nachbedingung $y = a!$

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (5)

Die Wortwahl

- *Hoaresches Tripel* oder kurz *Hoare-Tripel* bzw.
- *Hoaresche Zusicherung* oder kurz *Korrektivformel*

betont jeweils die

- syntaktische bzw.
- semantische Sicht

auf

- $\{p\} \pi \{q\}$ bzw. $[p] \pi [q]$