Heutiges Thema...

Fortführung vom letzten Mal, d.h. mehr über Haskell, insbesondere über...

- Funktionen
  - ...und darüber wie man sie definieren/notieren kann
    - $\leadsto$ *Notationelle Alternativen* (*siehe Vorlesungsteil 1*)
    - $\leadsto$ *Funktionssignaturen, Funktionsausdrücke, Klammereinsparungsregeln*
    - $\leadsto$ Ergänzungen zu Funktionstermen & -signaturen, curryfizierte vs. uncurryfizierte Funktionsdarst.
    - $\leadsto$ Layout-Konventionen, Abseitsregel
  - Klassifikation von Rekursionstypen
  - Anmerkungen zu Effektivität und Effizienz
  - Komplexitätsklassen

Hinweis: Die beiden kursiv hervorgehobenen Punkte sind bereits in der Vorlesung am 17.10.2006 besprochen worden.

Ergänzungen zu Funktionstermen (1)

Betrachten wir noch einmal die Funktion `add`:

```
add  :: Int -> (Int -> Int)
add m n = m+n
```

...und die Frage nach der "Existenz(berechtigung)" von

```
add 2 :: Int -> Int
```

...welches eine Funktion auf ganzen Zahlen ist, die ihr um `2` erhöhtes Argument als Resultat liefert.

Wir können diese Funktion `doubleInc` nennen...

Ergänzungen zu Funktionstermen (2)

...und in natürlicherweise wie folgt definieren:

```
doubleInc :: Int -> Int
doubleInc n = 2+n
```

Wir können die Definition von `doubleInc` aber auch auf die Funktion `(add 2)` abstützen:

```
doubleInc :: Int -> Int
doubleInc n = (add 2) n
```

...oder noch kürzer argumentlos (als Identität von Funktionen) einführen:

```
doubleInc :: Int -> Int
doubleInc = (add 2)
```

Beobachtung: `doubleInc` ist (nur noch) ein anderer Name für die Funktion `(add 2)`, die hier und in den obigen Bsp. nur der Deutlichkeit halber geklammert ist.

Ergänzungen zu Funktionstermen (3)

Vergleiche `doubleInc`, `add 2`

```
doubleInc :: Int -> Int
doubleInc = add 2
```

mit

```
\n -> add 2 n
```

Beobachtung: `doubleInc`, `add 2` und `\n -> add 2 n` sind...

- i.w. gleichwertige Formulierungen derselben Funktion
- i.w. dadurch unterschieden, dass `doubleInc` eine herkömmlich und im gewohnten Sinn benannte Funktion ist, wohingegen `(add 2)` und `(\n -> (add 2) n)` unbenannt, zumindest nicht im gewohnten Sinn mit einem Namen benannt sind; die Funktion `(\n -> (add 2) n)` speziell ist im Haskell-Jargon eine sog. *anonyme Funktion*!

“Erfahrenheits”-Faustregel

Die Implementierung einer Funktion wie `doubleInc`

- durch

  ```
  doubleInc :: Int -> Int
  doubleInc n = 2+n
  ```

  ...deutet darauf hin, dass vermutlich noch wenig Erfahrung mit funktionaler Programmierung vorliegt

- durch

  ```
  doubleInc :: Int -> Int        doubleInc :: Int -> Int
  doubleInc = (+) 2              doubleInc = (+2)  -- sog. operator section
  ```

  ...deutet darauf hin, dass vermutlich bereits mehr Erfahrung mit funktionaler Programmierung vorliegt

- durch

  ```
  \n -> 2+n
  ```

  ...deutet gleichfalls darauf hin, dass schon mehr Erfahrung mit funktionaler Programmierung vorliegt, und darüberhinaus, dass in der konkreten Anwendungssituation ein Name, unter dem auf die Funktion mit der Bedeutung “doubleInc” zugegriffen werden könnte, keine Rolle spielt.

Als Ausblick... (1)

...ein kleines Beispiel schon jetzt:

```
map :: (Int -> Int) -> [Int] -> [Int]
map f [] = []
map f (x:xs) = (f x) : (map f xs)
```

Anwendung:

```
map (\n -> 2+n) [1,2,3]   =>   [3,4,5]
```

...oder genausogut

```
map (add 2) [1,2,3]   =>   [3,4,5]
map (2+) [1,2,3]      =>   [3,4,5]
```

Machen Sie sich klar, dass die Typisierung von `add'` folgendes nicht zuläßt:

```
map (add' 2) [1,2,3]
```

⇝ später mehr dazu unter dem Stichwort "Funktionale", speziell Funktionale auf Listen...

Als Ausblick... (2)

Als Beispiel aussagekräftiger und überzeugender:

```
map (\n -> 3*n+42) [1,2,3]     =>   [45,48,51]
```

Wird eine Funktion mit der Abbildungsvorschrift von `(\n ->3*n+42)` ansonsten nicht gebraucht, spart man sich durch Verwendung der anonymen Funktion wie oben die Deklaration einer ansonsten nur genau einmal benutzten Funktion wie `dreifachPlus42`:

```
dreifachPlus42 :: Int -> Int
dreifachPlus42 n = 3*n+42

map dreifachPlus42 [1,2,3]   =>   [45,48,51]
```

Ein anderer Nachtrag: Operatoren in Haskell

Operatoren in Haskell sind...

- ...grundsätzlich *Präfixoperatoren*, insbesondere alle selbstdeklarierten Operatoren (*vulgo*: selbstdeklarierte Funktionen)

  Beispiele: `fac 5`, `imax 2 3`, `tripleMax 2 5 3`,...

- ...in einigen wenigen Fällen *Infixoperatoren*, dies gilt insbesondere für arithmetische Operatoren

  Beispiele: `2+3`, `3*5`, `7-4`, `5^3`,...

Binäre Operatoren in Haskell: Infix- vs. Präfix

Für binäre Operatoren in Haskell gilt...

- Binäre Operatoren `bop`, die standardmäßig als...
  - Präfixoperatoren verwendet werden, können in der Form `’bop’` als Infixoperator verwendet werden

    Beispiel: `2 ’imax’ 3` (statt standardmäßig `imax 2 3`)
  - Infixoperatoren verwendet werden, können in der Form `(bop)` als Präfixoperator verwendet werden

    Beispiel: `(+) 2 3` (statt standardmäßig `2+3`)

Abschließend zu Funktionstermen (1)

Betrachten wir noch einmal die Funktionen `add` und `add'`:

```
add  :: Int -> (Int -> Int)

add' :: (Int,Int) -> Int
```

Abschließend zu Funktionstermen (2)

...hier noch einmal zusammen mit ihren Implementierungen:

```
add  :: Int -> (Int -> Int)
add m n = m+n

add' :: (Int,Int) -> Int
add' (m,n) = m+n
```

Sprechweise: Die Funktion...

- `add` ist *curryfiziert*
- `add'` ist *uncurryfiziert*

Curryfiziert vs. uncurryfiziert (1)

Idee: ...ziehe die Art der Konsumation mehrerer Argumente zur Klassifizierung von Funktionen heran

Erfolgt die Konsumation mehrerer Argumente durch Funktionen...

- einzeln Argument für Argument: *curryfiziert*
- gebündelt als Tupel: *uncurryfiziert*

Beispiele:

```
Funktion add curryfiziert:     add 2 3     bzw. (add 2) 3
Funktion add' uncurryfiziert:  add' (2,3)
```

Curryfiziert vs. uncurryfiziert (2)

Zentral sind die beiden *Funktionale* (synonym: *Funktionen höherer Ordnung*) `curry` und `uncurry`...

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry g (x,y) = g x y
```

Intuitiv:

- *Curryfizieren* ersetzt Produkt-/Tupelbildung "$\times$" durch Funktionspfeil "$\rightarrow$".
- *Decurryfizieren* ersetzt Funktionspfeil "$\rightarrow$" durch Produkt-/Tupelbildung "$\times$".

Bemerkung: Die Bezeichnung geht auf Haskell B. Curry zurück, die (weit ältere) Idee auf M. Schönfinkel aus der Mitte der 20er-Jahre.

Curryfiziert vs. uncurryfiziert (3)

Die Funktionale `curry` und `uncurry` bilden...

- uncurryfiziert vorliegende Funktionen auf ihr curryfiziertes Gegenstück ab, d.h.
  ...für uncurryfiziertes `f :: (a,b) -> c` ist
  `curry f :: a -> b -> c` curryfiziert.

- curryfiziert vorliegende Funktionen auf ihr uncurryfiziertes Gegenstück ab, d.h.
  ...für curryfiziertes `g :: a -> b -> c` ist
  `uncurry g :: (a,b) -> c` uncurryfiziert.

```
curry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
curry f x y = f (x,y)

curry f :: a -> b -> c

uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a,b) -> c)
uncurry g (x,y) = g x y

uncurry g :: (a,b) -> c
```

Im Beispiel...

```
add  :: Int -> (Int -> Int)
add m n = m+n

add' :: (Int,Int) -> Int
add' (m,n) = m+n
```

Damit gilt:

```
curry add' :: Int -> Int -> Int

uncurry add :: (Int,Int) -> Int
```

...und somit sind die folgenden Aufrufe gültige Aufrufe:

```
curry add' 17 4
   ⇒ add' (17,4) ⇒ 17+4 ⇒ 21

uncurry add (17,4)
   ⇒ add 17 4 ⇒ 17+4 ⇒ 21
```

Curryfiziert oder uncurryfiziert?

...das ist hier die Frage.

Zum einen...

- Geschmackssache (sozusagen eine notationelle Spielerei)
  ...sicher, auch das, aber: die Verwendung curryfizierter Formen ist in der Praxis vorherrschend
  $\leadsto$ `f x`, `f x y`, `f x y z`,... möglicherweise eleganter als `f x`, `f (x,y)`, `f (x,y,z)`,...?

Zum anderen (und weit wichtiger!) folgendes...

- Sachargument
  ...(nur) Funktionen in curryfizierter Darstellung unterstützen *partielle Auswertung*
  $\leadsto$ Funktionen liefern Funktionen als Ergebnis!

  Beispiel: `add 4711 :: Int -> Int`

  ...ist eine einstellige Funktion auf den ganzen Zahlen, die ihr Argument um 4711 erhöht als Resultat zurückliefert.

Layout-Konventionen für Haskell-Programme

Für die meisten gängigen Programmiersprachen gilt:

- Das Layout eines Programms hat einen Einfluss
  - auf seine Leserlichkeit, Verständlichkeit, Wartbarkeit
  - aber nicht auf seine Bedeutung

Für Haskell gilt das nicht!

- Das Layout eines Programms trägt in Haskell Bedeutung!
- Reminiszenz an Cobol, Fortran. Layoutabhängigkeit aber auch zu finden in modernen Sprachen wie z.B. occam.
- Für Haskell ist für diesen Aspekt des Sprachentwurfs eine grundsätzlich andere Entwurfsentscheidung getroffen worden als z.B. für Java, Pascal, C, etc.

Abseitsregel (engl. offside rule) (1)

...layout-abhängige Syntax als notationelle Besonderheit in Haskell

"Abseits"-Regel...

- Erstes Zeichen einer Deklaration (bzw. nach `let`, **`where`**):
  ...Startspalte neuer "Box" wird festgelegt

- Neue Zeile...
  - gegenüber der aktuellen Box nach rechts eingerückt: *...aktuelle Zeile wird fortgesetzt*
  - genau am linken Rand der aktuellen Box: *...neue Deklaration wird eingeleitet*
  - weiter links als die aktuelle Box: *...aktuelle Box wird beendet* (*"Abseitssituation"*)

Ein Beispiel zur Abseitsregel (1)

Unsere Funktion `kVA` zur Berechnung von Volumen und Oberfläche einer Kugel mit Radius `r`:

```
kVA r =
  ((4/3) * myPi * rcube r, 4 * myPi * square r)
  where
  myPi     = 3.14
  rcube x  = x *
     square x

square x = x * x
```

...nicht schön, aber korrekt. Das Layout genügt der Abseitsregel von Haskell und damit den Layout-Konventionen.

Abseitsregel (2)

Graphische Veranschaulichung der Abseitsregel...

```
------------------------------------------------
|
kVA r =
|  ((4/3) * myPi * rcube r, 4 * myPi * square r)
   ---------------------------------
|  |
|  where
|  myPi     = 3.14
|  rcube x  = x *
|  |   square x
|  --------------------->
------------------------------------>
------------------------------------------------
square x = x * x
|
\/
```

Layout-Konventionen

...bewährt hat es sich, eine Layout-Konvention nach folgendem Muster einzuhalten:

```
funName f1 f2... fn
  | g1   = e1
  | g2   = e2
  ...
  | gk   = ek

funName f1 f2... fn
  | diesIsteinGanz
    BesondersLanger
    Waechter
       = diesIstEinEbenso
         BesondersLangerAusdruck
  | g2        = e2
  ...
  | otherwise = ek
```

Verantwortung des Programmierers (1)

...die Auswahl einer angemessenen Notation. Vergleiche...

```
triMax :: Integer -> Integer -> Integer -> Integer

a) triMax = \p q r ->
     if p>=q then (if p>=r then p
                           else r)
             else (if q>=r then q
                           else r)
b) triMax p q r =
     if (p>=q) && (p>=r) then p
                         else
     if (q>=p) && (q>=r) then q
                         else r

c) triMax p q r
     | (p>=q) && (p>=r)    = p
     | (q>=p) && (q>=r)    = q
     | (r>=p) && (r>=q)    = r
```

Auswahlkriterium: Welche Variante lässt sich am einfachsten verstehen?

Verantwortung des Programmierers (2)

Hilfreich ist auch eine Richtschnur von C.A.R. Hoare:

Programme können grundsätzlich auf zwei Arten geschrieben werden:

- So einfach, dass sie offensichtlich keinen Fehler enthalten
- So kompliziert, dass sie keinen offensichtlichen Fehler enthalten

Es liegt am Programmierer, welchen Weg er einschlägt.

Rekursion

..speziell in funktionalen Sprachen

- Das zentrale Ausdrucksmittel/Sprachmittel, Wiederholungen auszudrücken. *Beachte:* Wir haben keine Schleifen in funktionalen Sprachen.

- Erlaubt oft sehr elegante Lösungen, oft wesentlich einfacher als schleifenbasierte Lösungen. Typisches Beispiel: *Türme von Hanoi*.

- Insgesamt so wichtig, dass eine *Klassifizierung* von Rekursionstypen angezeigt ist.

Eine solche Klassifizierung wird uns in der Folge beschäftigen.

Zuvor aber zwei Beispiele: Quicksort und Türme von Hanoi

Quicksort

...ein Beispiel, für das Rekursion auf eine elegante Lösung führt:

```
quickSort :: [Int] -> [Int]

quickSort []     = []
quickSort (x:xs) =
    quickSort [ y | y<-xs, y<=x ] ++
                     [x] ++ quickSort [ y | y<-xs, y>x ]
```

Türme von Hanoi (1)

...ein anderes Beispiel, für das Rekursion auf eine elegante Lösung führt:

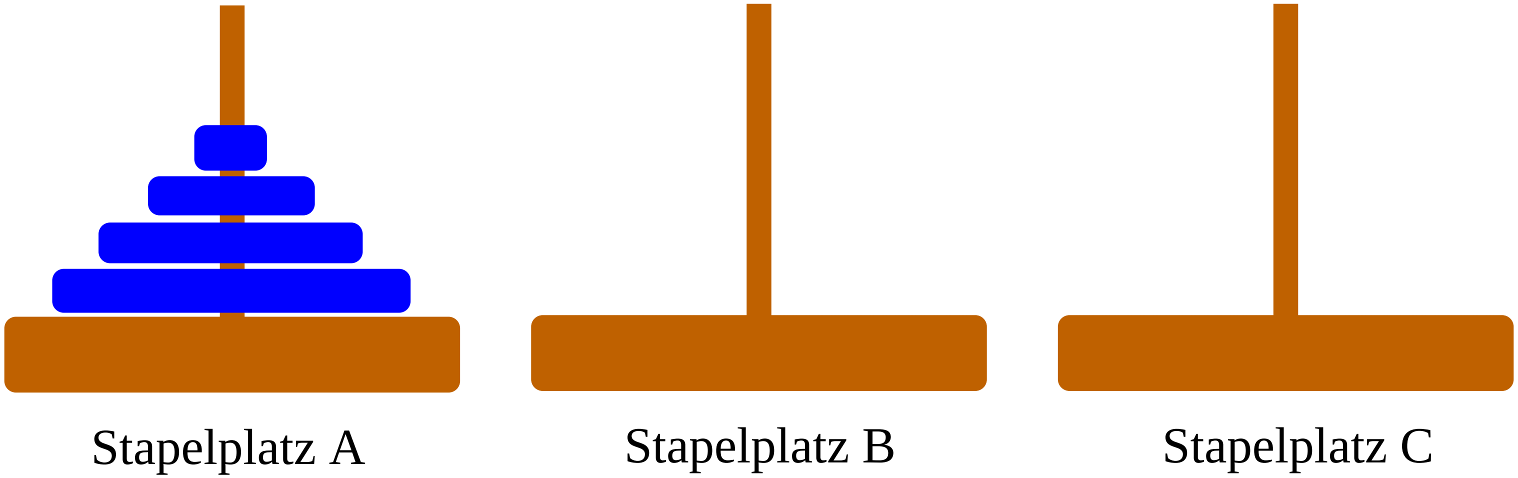
- *Ausgangssituation*:
  Gegeben sind drei Stapelplätze A, B und C. Auf Platz A liegt ein Stapel unterschiedlich großer Scheiben, die ihrer Größe nach sortiert aufgeschichtet sind, d.h. die Größe der Scheiben nimmt von unten nach oben sukzessive ab.

- *Aufgabe*: Verlege unter Zuhilfenahme von Platz B den Stapel von Scheiben von Platz A auf Platz C, wobei Scheiben stets nur einzeln verlegt werden dürfen und zu keiner Zeit eine größere Scheibe oberhalb einer kleineren Scheibe auf einem der drei Plätze liegen darf.

Lösung: Übungsaufgabe

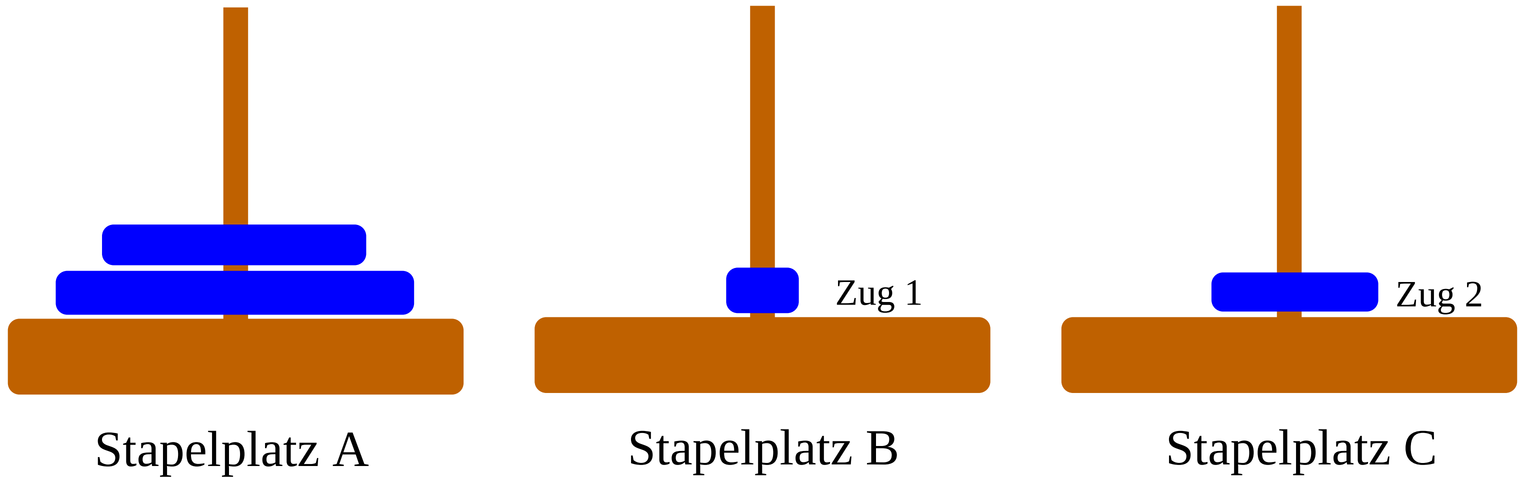
Türme von Hanoi (2)

Veranschaulichung:



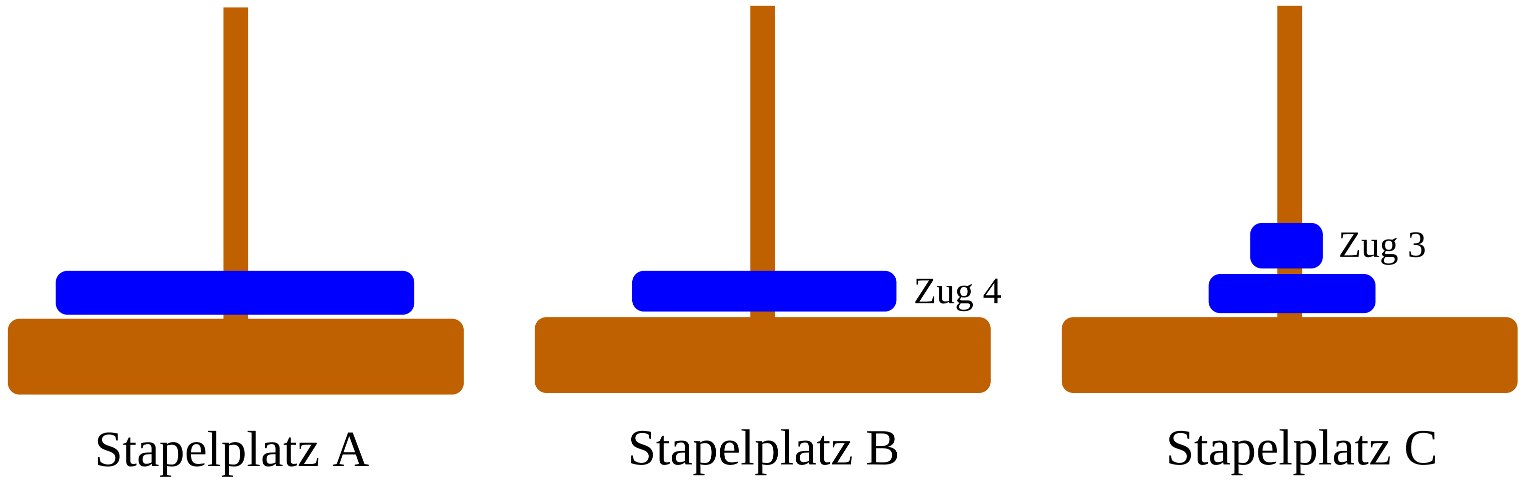
Türme von Hanoi (3)

Nach zwei Zügen:



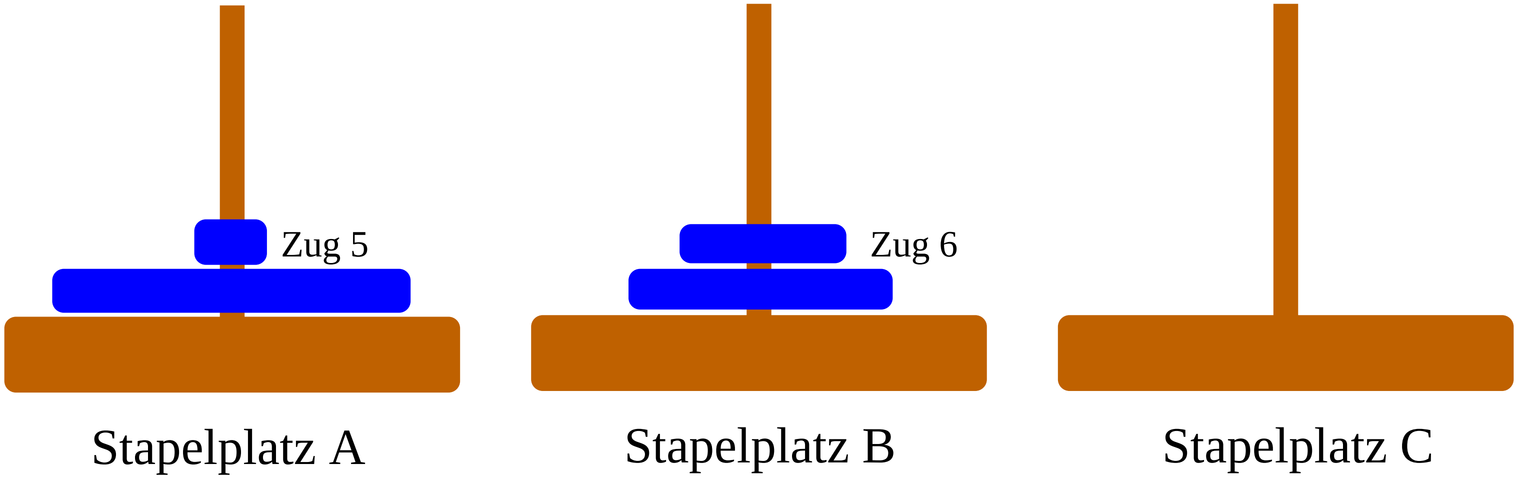
Türme von Hanoi (4)

Nach vier Zügen:



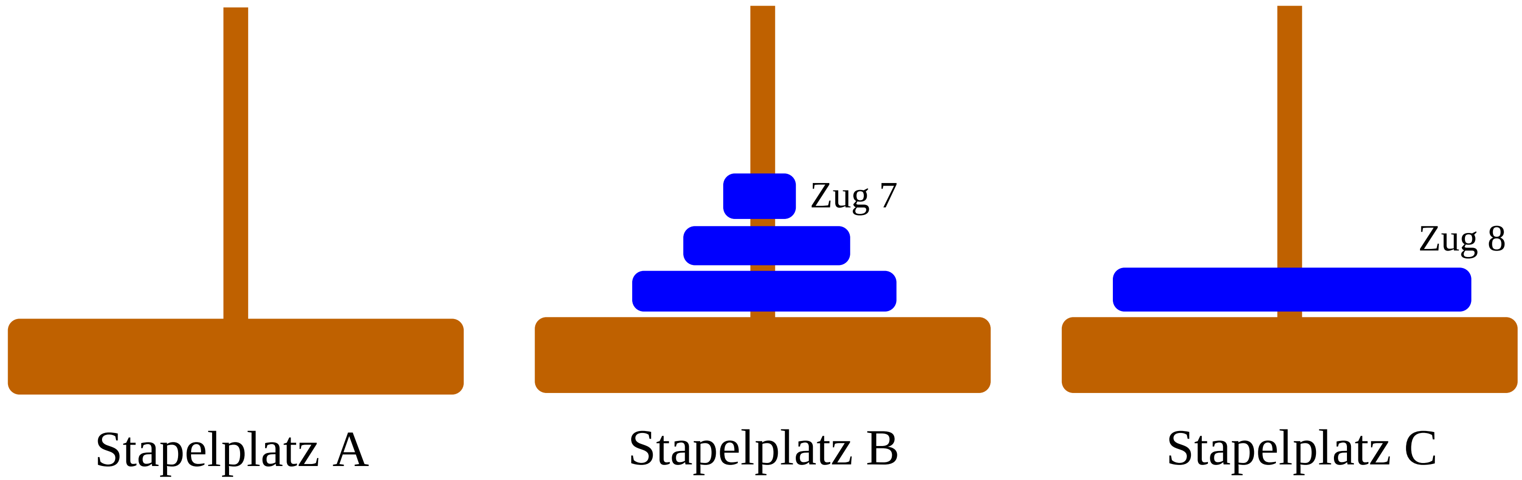
Türme von Hanoi (5)

Nach sechs Zügen:



Türme von Hanoi (6)

Nach acht Zügen:



Klassifikation der Rek.typen (1)

Generell...

...eine Rechenvorschrift heißt *rekursiv*, wenn sie in ihrem Rumpf (direkt oder indirekt) aufgerufen wird.

Dabei können wir unterscheiden...

- *Mikroskopische* Struktur
  ...betrachtet einzelne Rechenvorschriften und die syntaktische Gestalt der rekursiven Aufrufe

- *Makroskopische* Struktur
  ...betrachtet Systeme von Rechenvorschriften und ihre gegenseitigen Aufrufe

Rek.typen: Mikroskopische Struktur (2)

Üblich sind folgende Sprechweisen...

1. *Repetitive* (*schlichte*) *Rekursion*
   ...pro Zweig höchstens ein rekursiver Aufruf und zwar jeweils als äußerste Operation

   Bsp:

```
ggt :: Integer -> Integer -> Integer
ggt m n
  | n == 0          = m
  | m >= n          = ggt (m-n) n
  | m < n           = ggt (n-m) m
```

Rek.typen: Mikroskopische Struktur (3)

2. *Lineare Rekursion*

   ...pro Zweig höchstens ein rekursiver Aufruf, jedoch nicht notwendig als äußerste Operation

   Bsp:

```
powerThree :: Integer -> Integer
powerThree n
  | n == 0     = 1
  | n > 0      = 3 * powerThree (n-1)
```

Beachte: ...im Zweig $n > 0$ ist "$*$" die äußerste Operation, nicht `powerThree`!

Rek.typen: Mikroskopische Struktur (4)

3. *Geschachtelte Rekursion*

   ...rekursive Aufrufe enthalten rekursive Aufrufe als Argumente

   Bsp:

```
fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
  | n > 100    = n - 10
  | n <= 100   = fun91(fun91(n+11))
```

Preisfrage: Warum heißt die Funktion wohl `fun91`?

Rek.typen: Mikroskopische Struktur (5)

4. *Baumartige* (*kaskadenartige*) *Rekursion*
   ...pro Zweig können mehrere rekursive Aufrufe nebeneinander vorkommen

   Bsp:

```
binom :: (Integer,Integer) -> Integer
binom (n,k)
  | k==0 || n==k   = 1
  | otherwise      = binom (n-1,k-1) + binom (n-1,k)
```

Rek.typen: Makroskopische Struktur (6)

1. *Direkte Rekursion*
   ...entspricht Rekursion (Präzisierung!)

2. *Indirekte* oder auch *verschränkte* (*wechselweise*) *Rekursion*
   ...zwei oder mehr Funktionen rufen sich wechselweise auf

   Bsp:

```
isEven :: Integer -> Bool
isEven n
  | n == 0    = True
  | n > 0     = isOdd (n-1)

isOdd :: Integer -> Bool
isOdd n
  | n == 0    = False
  | n > 0     = isEven (n-1)
```

Anm. zu Effektivität & Effizienz (1)

Viele Probleme lassen sich...

- elegant rekursiv lösen (z.B. Türme von Hanoi)
- jedoch nicht immer effizient ($\neq$ effektiv!)

Als Faustregel gilt...

- Unter Effizienzgesichtspunkten ist...
  - repetitive Rekursion am (kosten-) günstigsten
  - geschachtelte und baumartige Rekursion am ungünstigsten

Anm. zu Effektivität & Effizienz (2)

(*Oft*) *folgende Abhilfe bei ineffizienten Implementierungen möglich*:

$\leadsto$ Umformulieren! Ersetzen ungünstiger durch günstigere Rekursionsmuster!

Etwa...

- Rückführung *linearer* Rekursion auf *repetitive* Rekursion

Anm. zu Effektivität & Effizienz (3)

...am Beispiel der Fakultätsfunktion:

Naheliegende Formulierung mit *linearem* Rekursionsmuster...

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = if n == 0 then 1 else (n * fac(n-1))
```

Effizientere Formulierung mit *repetitivem* Rekursionsmuster...

```
fac :: Integer -> Integer
fac n = facRep (n,1)

facRep :: (Integer,Integer) -> Integer
facRep (p,r) = if p == 0 then r else facRep (p-1,p*r)
```

$\leadsto$ "*Trick*" ...Rechnen auf Parameterposition!

Aber: Überlagerungen mit anderen Effekten sind möglich, so dass sich der Effizienzgewinn nicht realisiert! (Zur Übung: Wie ist das im obigen Beispiel?)

Kaskaden- oder baumartige Rekursion

...oft anfällig für unnötige Mehrfachberechnungen.

...in der Folge illustriert am Beispiel der Berechnung der Folge der *Fibonacci-Zahlen*:

Die Folge $f_0, f_1, \ldots$ der *Fibonacci-Zahlen* ist definiert durch...

$$f_0 = 0, f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

Fibonacci-Zahlen (1)

Die naheliegende Implementierung...

```
fib :: Integer -> Integer
fib n
  | n == 0   = 0
  | n == 1   = 1
  | otherwise  = fib (n-1) + fib (n-2)
```

...führt auf kaskaden- bzw. baumartige Rekursion

$\leadsto$ ...und ist sehr, seeehr laaaangsaaaam (ausprobieren!)

Fibonacci-Zahlen (2)

Veranschaulichung ...durch manuelle Auswertung

```
fib 0   =>  0  --  1 Aufrufe von fib

fib 1   =>  1  --  1 Aufrufe von fib

fib 2   =>  fib 1 + fib 0
        =>  1 + 0
        =>  1  --  3 Aufrufe von fib

fib 3   =>  fib 2 + fib 1
        =>  (fib 1 + fib 0) + 1
        =>  (1 + 0) + 1
        =>  2  --  5 Aufrufe von fib
```

Fibonacci-Zahlen (3)

```
fib 4   =>  fib 3 + fib 2
        =>  (fib 2 + fib 1) + (fib 1 + fib 0)
        =>  ((fib 1 + fib 0) + 1) + (1 + 0)
        =>  ((1 + 0) + 1) + (1 + 0)
        =>  3  -- 9 Aufrufe von fib

fib 5   =>  fib 4 + fib 3
        =>  (fib 3 + fib 2) + (fib 2 + fib 1)
        =>  ((fib 2 + fib 1) + (fib 1 + fib 0))
                        + ((fib 1 + fib 0) + 1)
        =>  (((fib 1 + fib 0) + 1) + (1 + 0)) + ((1 + 0) + 1)
        =>  (((1 + 0) + 1) + (1 + 0)) + ((1 + 0) + 1)
        =>  5  --  15 Aufrufe von fib
```

Fibonacci-Zahlen (4)

```
fib 8  =>  fib 7 + fib 6
       =>  (fib 6 + fib 5) + (fib 5 + fib 4)
       =>  ((fib 5 + fib 4) + (fib 4 + fib 3))
           + ((fib 4 + fib 3) + (fib 3 + fib 2))
       =>  (((fib 4 + fib 3) + (fib 3 + fib 2))
             + (fib 3 + fib 2) + (fib 2 + fib 1)))
           + (((fib 3 + fib 2) + (fib 2 + fib 1))
             + ((fib 2 + fib 1) + (fib 1 + fib 0)))
       =>  ... --  60 Aufrufe von fib
```

Offensichtliche Probleme

- viele Mehrfachberechnungen
- exponentielles Wachstum!

Abhilfe

Programmiertechniken wie

- Dynamische Programmierung
- Memoization

Zentrale Idee:

- Speicherung und Wiederverwendung bereits berechneter (Teil-) Ergebnisse statt deren Wiederberechnung.

Komplexitätsklassen (1)

Nach P. Pepper. *Funktionale Programmierung in OPAL, ML, Haskell und Gofer*, 2. Auflage, 2003, Kapitel 11.

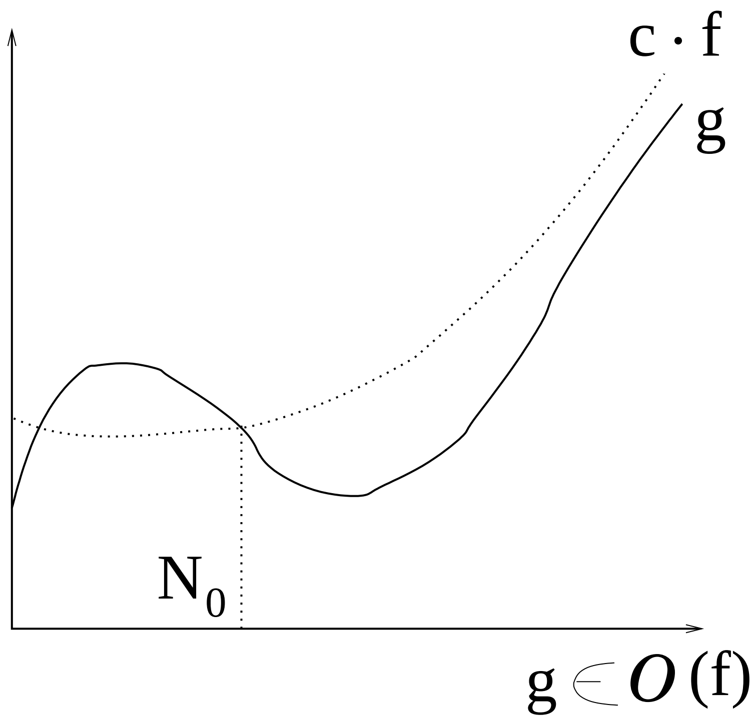
Erinnerung ...$\mathcal{O}$-Notation

- Sei f eine Funktion $f \; : \; \alpha \rightarrow I\!R^+$ von einem gegebenen Datentyp α in die Menge der positiven reellen Zahlen. Dann ist die Klasse $\mathcal{O}(f)$ die Menge aller Funktionen, die "langsamer wachsen" als f:

$$\mathcal{O}(f) =_{df} \{h \,|\, h(n) \leq c * f(n) \text{ für eine positive Konstante } c \text{ und alle } n \geq N_0\}$$

Komplexitätsklassen (2)

Veranschaulichung:



Komplexitätsklassen (3)

Beispiele häufig auftretender Kostenfunktionen...

Kürzel	Aufwand	Intuition: *vertausendfachte Eingabe heißt...*
$\mathcal{O}(c)$	konstant	... gleiche Arbeit
$\mathcal{O}(log\ n)$	logarithmisch	...nur zehnfache Arbeit
$\mathcal{O}(n)$	linear	...auch vertausendfachte Arbeit
$\mathcal{O}(n\ log\, n)$	"$n\ log\, n$"	...zehntausendfache Arbeit
$\mathcal{O}(n^2)$	quadratisch	...millionenfache Arbeit
$\mathcal{O}(n^3)$	kubisch	...milliardenfache Arbeit
$\mathcal{O}(n^c)$	polynomial	...gigantisch viel Arbeit (für großes c)
$\mathcal{O}(2^n)$	exponentiell	...hoffnungslos

Komplexitätsklassen (4)

...und was wachsende Eingaben in realen Zeiten in der Praxis bedeuten können:

n	linear	quadratisch	kubisch	exponentiell
1	1 μs	1 μs	1 μs	2 μs
10	10 μs	100 μs	1 ms	1 ms
20	20 μs	400 μs	8 ms	1 s
30	30 μs	900 μs	27 ms	18 min
40	40 μs	2 ms	64 ms	13 Tage
50	50 μs	3 ms	125 ms	36 Jahre
60	60 μs	4 ms	216 ms	36 560 Jahre
100	100 μs	10 ms	1 sec	$4 * 10^{16}$ Jahre
1000	1 ms	1 sec	17 min	sehr, sehr lange...

Fazit

Die vorigen Folien machen deutlich...

- ...Effizienz ist wichtig!
- ...Rekursionsmuster haben einen erheblichen Einfluss darauf (siehe baumartige Rekursion am Bsp. der Fibonacci-Zahlen)

Allerdings...

- Baumartig rekursive Funktionsdefinitionen bieten sich zur *Parallelisierung* an!
  Stichwort: ...*divide and conquer*!

Zur Übung empfohlen...

- Wie könnte die Berechnung der Folge der Fibonacci-Zahlen effizienter realisiert werden?

Struktur von Programmen

Programme funktionaler Programmiersprachen, speziell Haskell-Programme, sind zumeist

- Systeme (*wechselweiser*) *rekursiver* Rechenvorschriften, die sich *hierarchisch* oder/und *wechselweise* aufeinander abstützen.

Um sich über die *Struktur* solcher Systeme von Rechenvorschriften Klarheit zu verschaffen, ist neben der Untersuchung

- der *Rekursionstypen*

der beteiligten Rechenvorschriften insbesondere auch die Untersuchung

- ihrer *Aufrufgraphen*

geeignet.

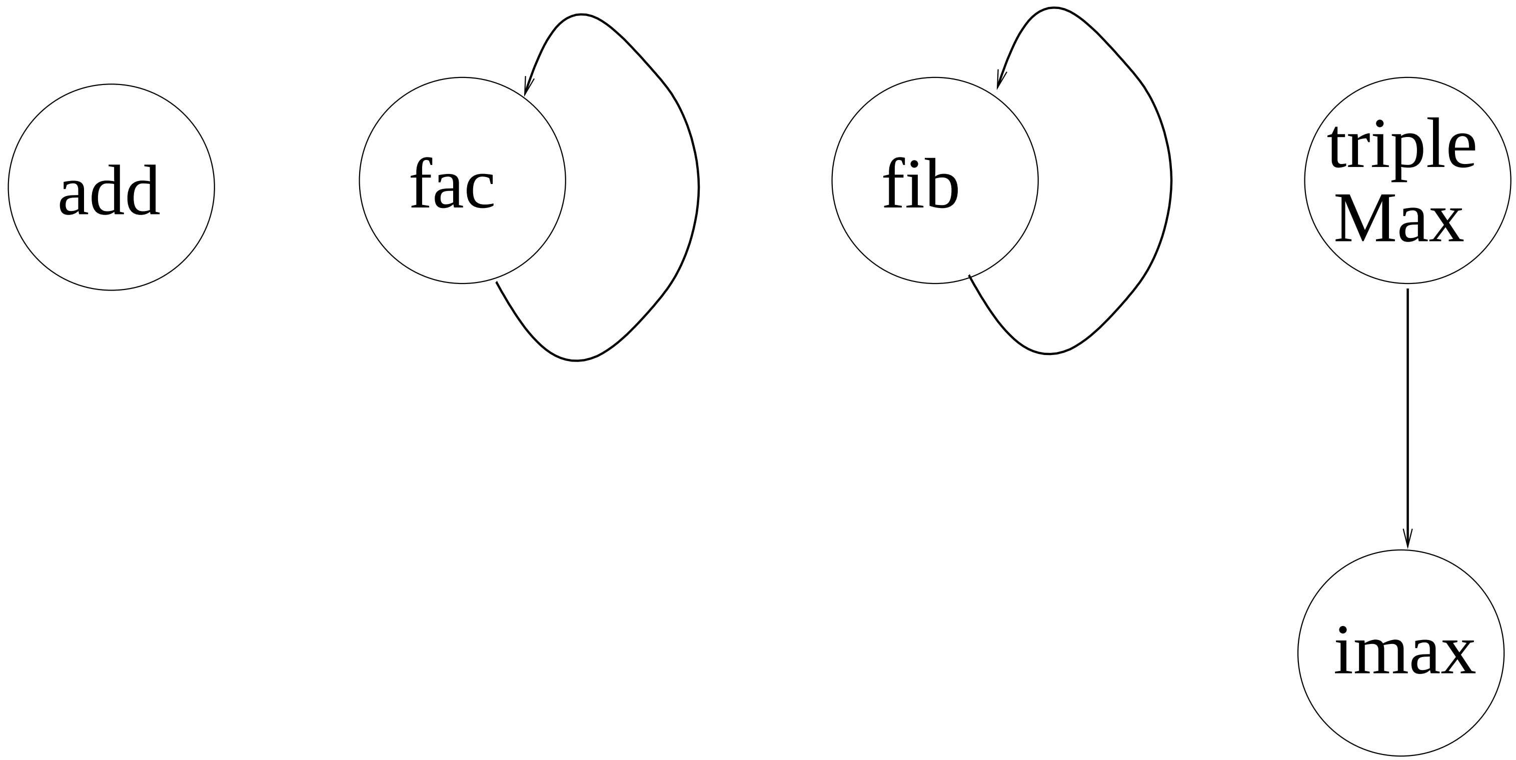
Aufrufgraphen

Der *Aufrufgraph* eines Systems S von Rechenvorschriften enthält

- einen *Knoten* für jede in S deklarierte Rechenvorschrift,
- eine gerichtete *Kante* vom Knoten f zum Knoten g genau dann, wenn im Rumpf der zu f gehörigen Rechenvorschrift die zu g gehörige Rechenvorschrift aufgerufen wird.

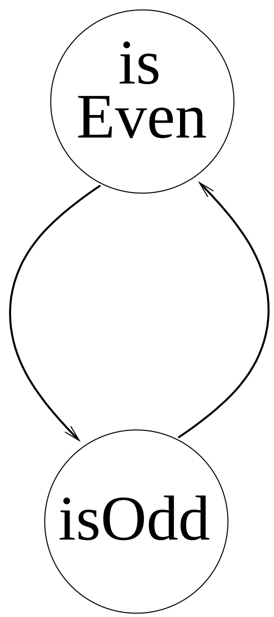
Beispiele von Aufrufgraphen (1)

...die Aufrufgraphen des Systems von Rechenvorschriften der Funktionen `add`, `fac`, `fib`, `imax` und `tripleMax`:



Beispiele von Aufrufgraphen (2)

...die Aufrufgraphen des Systems von Rechenvorschriften der Funktionen `isOdd` und `isEven`:



Beispiele von Aufrufgraphen (3)

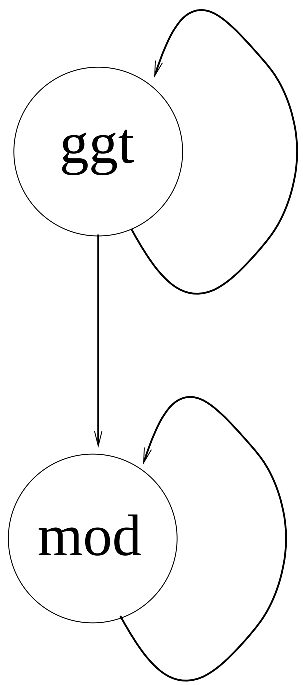
...das System von Rechenvorschriften der Funktionen `ggt` und `mod`:

```
ggt :: Int -> Int -> Int
ggt m n
    | n == 0 = m
    | n > 0  = ggt n (mod m n)

mod :: Int -> Int -> Int
mod m n
    | m < n  = m
    | m >= n = mod (m-n) n
```

Beispiele von Aufrufgraphen (3)

...und sein Aufrufgraph:



Auswertung von Aufrufgraphen

Aus dem Aufrufgraphen eines Systems von Rechenvorschriften ist u.a. ablesbar...

- *Direkte Rekursivität* einer Funktion: "Selbstkringel".
  ...z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `fac` und `fib`.
- *Wechselweise Rekursivität* zweier (oder mehrerer) Funktionen: Kreise (mit mehr als einer Kante)
  ...z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `isOdd` und `isEven`.
- *Direkte hierarchische Abstützung* einer Funktion auf eine andere: Es gibt eine Kante von Knoten f zu Knoten g, aber nicht umgekehrt.
  ...z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `tripleMax` und `imax`.
- *Indirekte hierarchische Abstützung* einer Funktion auf eine andere: Knoten g ist von Knoten f über eine Folge von Kanten erreichbar, aber nicht umgekehrt.
- *Wechselweise Abstützung*: Knoten g ist von Knoten f direkt oder indirekt über eine Folge von Kanten erreichbar und umgekehrt.
- *Unabhängigkeit/Isolation* einer Funktion: Knoten f hat (ggf. mit Ausnahme eines Selbstkringels) weder ein- noch ausgehende Kanten.
  ...z.B. bei den Aufrufgraphen der Funktionen `add`, `fac` und `fib`.
- ...

Vorschau auf die nächsten Vorlesungs-termine...

- Di, 24.10.2006, Vorlesung von 13:00 Uhr bis 14:00 Uhr im Informatik-Hörsaal
- *Do, 26.10.2006: Keine Vorlesung! (Nationalfeiertag)*
- Di, 31.10.2006, Vorlesung von 13:00 Uhr bis 14:00 Uhr im Informatik-Hörsaal + Besprechung von Aufgabenblatt 1
- *Do, 02.11.2006: Keine Vorlesung! (Allerseelentag)*
- Di, 07.11.2006, Vorlesung von 13:00 Uhr bis 14:00 Uhr im Informatik-Hörsaal
- Do, 09.11.2006, Vorlesung von 16:30 Uhr bis 18:00 Uhr im Radinger-Hörsaal