

## Semantikdefinitionsstile (1)

Es gibt unterschiedliche Stile, die Semantik einer Programmiersprache festzulegen. Sie richten sich an unterschiedliche Adressaten und deren spezifische Sicht auf die Semantik...

Insbesondere unterscheiden wir den...

- *denotationellen*
- *operationellen*
- *axiomatischen*

Stil.

## Semantikdefinitionsstile (2)

- *Sprachentwicklersicht*
  - Denotationelle Semantik
- *Sprach- und Anwendungsimplementiersicht*
  - Operationelle Semantik
    - \* Strukturell operationelle Semantik (small steps semantics)
    - \* Natürliche Semantik (big steps semantics)
- *Programmierer- und Verifiziersicht*
  - Axiomatische Semantik

## Strukturell operationelle Semantik (1)

...noch einmal wiederholt für das Beispiel von WHILE:

$$\begin{aligned}
 [\text{skip}_{\text{sos}}] & \frac{}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma} \\
 [\text{abort}_{\text{sos}}] & \frac{}{\langle \text{abort}, \sigma \rangle \Rightarrow \text{error}} \\
 [\text{ass}_{\text{sos}}] & \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma) / x]} \\
 [\text{comp}_{\text{sos}}^1] & \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_1', \sigma' \rangle}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_1; \pi_2, \sigma' \rangle} \\
 [\text{comp}_{\text{sos}}^2] & \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma'}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_2, \sigma' \rangle}
 \end{aligned}$$

## Strukturell operationelle Semantik (2)

$$\begin{aligned}
 [\text{if}_{\text{sos}}^{\text{tt}}] & \frac{}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_1, \sigma \rangle} & \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt} \\
 [\text{if}_{\text{sos}}^{\text{ff}}] & \frac{}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_2, \sigma \rangle} & \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{ff} \\
 [\text{while}_{\text{sos}}] & \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \text{if } b \text{ then } \pi; \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od else skip fi}, \sigma \rangle}
 \end{aligned}$$

## Strukturell operationelle Semantik (3)

Der Fokus liegt auf...

- *individuellen Schritten* einer Berechnungsfolge, d.h. auf der Ausführung von Zuweisungen und Tests

Intuitive Bedeutung der Transitionsrelation...

$$\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \gamma$$

...mit  $\gamma$  von der Form  $\langle \pi', \sigma' \rangle$  oder  $\sigma'$  oder *error* beschreibt den *ersten* Schritt der Berechnungsfolge von  $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$ . Folgende Übergänge sind möglich:

- $\gamma$  von der Form  $\langle \pi', \sigma' \rangle$ : Abarbeitung von  $\pi$  nicht vollständig; das Restprogramm  $\pi'$  ist auf  $\sigma'$  anzusetzen
- $\gamma$  von der Form  $\sigma'$ : Abarbeitung von  $\pi$  vollständig;  $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$  terminiert in einem Schritt in  $\sigma'$
- $\gamma$  von der Form *error*: Abarbeitung von  $\pi$  terminiert irregulär

## Natürliche Semantik (2)

$$\begin{aligned}
 [\text{if}_{\text{ns}}^{\text{tt}}] & \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} & \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt} \\
 [\text{if}_{\text{ns}}^{\text{ff}}] & \frac{\langle \pi_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} & \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{ff} \\
 [\text{while}_{\text{ns}}^{\text{tt}}] & \frac{\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma', \langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma''}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''} & \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt} \\
 [\text{while}_{\text{ns}}^{\text{ff}}] & \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma} & \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{ff}
 \end{aligned}$$

## Natürliche Semantik (1)

...ebenfalls für das Beispiel von WHILE:

$$\begin{aligned}
 [\text{skip}_{\text{ns}}] & \frac{}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma} \\
 [\text{abort}_{\text{ns}}] & \frac{}{\langle \text{abort}, \sigma \rangle \rightarrow \text{error}} \\
 [\text{ass}_{\text{ns}}] & \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \rightarrow \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma) / x]} \\
 [\text{comp}_{\text{ns}}] & \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma', \langle \pi_2, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma''}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''}
 \end{aligned}$$

## Natürliche Semantik (3)

Der Fokus liegt auf...

- Zusammenhang von *initialem* und *finalelem* Zustand einer Berechnungsfolge

Intuitive Bedeutung von...

$$\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \gamma$$

...mit  $\gamma$  von der Form  $\sigma'$  oder *error* ist:  $\pi$  angesetzt auf initialen Zustand  $\sigma$  terminiert schließlich im finalen Zustand  $\sigma'$  bzw. terminiert irregulär.

## Determinismus der NS-Regeln

### Lemma 2.1

$\forall \pi \in \mathbf{Prg}, \sigma \in \Sigma, \gamma, \gamma' \in \Gamma. \langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \gamma \wedge \langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$

### Korollar 2.2

Die von den NS-Regeln für eine Konfiguration induzierte finale Konfiguration ist (sofern definiert) eindeutig bestimmt, d.h. *deterministisch*.

Salopper, wenn auch weniger präzise:

*Die (N-) Semantik von WHILE ist deterministisch!*

## Das Semantikfunktional $\llbracket \cdot \rrbracket_{ns}$

Korollar 2.2 erlaubt uns festzulegen:

- Die natürliche Semantik von WHILE ist gegeben durch das Funktional

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ns} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

welches definiert wird durch:

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}, \sigma \in \Sigma. \llbracket \pi \rrbracket_{ns}(\sigma) =_{df} \begin{cases} \sigma' & \text{falls } \langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \\ error & \text{falls } \langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow error \\ undef & \text{sonst} \end{cases}$$

## Variante induktiver Beweisführung

Induktion über die Form von Ableitungsbäumen:

- Induktionsanfang**
  - Beweise, dass  $A$  für die Axiome des Transitionssystems gilt (und somit für alle nichtzusammengesetzte Ableitungsbäume).
- Induktionsschritt**
  - Beweise für jede echte Regel des Transitionssystems unter der Annahme, dass  $A$  für jede Prämisse dieser Regel gilt (*Induktionshypothese!*),  $A$  auch für die Konklusion dieser Regel gilt, sofern die (ggf. vorhandenen) Randbedingungen der Regel erfüllt sind.

## Anwendung

- Induktive Beweisführung über die Form von Ableitungsbäumen ist typisch zum Nachweis von Aussagen über Eigenschaften natürlicher Semantik.

Ein Beispiel dafür ist der Beweis von **Lemma 2.1!**

## Denotationelle Semantik (1)

...auch für das Beispiel von WHILE:

$$\llbracket skip \rrbracket_{ds} = Id$$

$$\llbracket abort \rrbracket_{ds} = Error$$

$$\llbracket x := t \rrbracket_{ds}(\sigma) = \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma)/x]$$

$$\llbracket \pi_1; \pi_2 \rrbracket_{ds} = \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}$$

$$\llbracket \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \rrbracket_{ds} = cond(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}, \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds})$$

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = FIX F$$

$$\text{where } F g = cond(\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, Id)$$

## Denotationelle Semantik (2)

Es bezeichnen:

- $Id : \Sigma_\varepsilon \rightarrow \Sigma_\varepsilon$  die identische Zustandstransformation:
$$\forall \sigma \in \Sigma_\varepsilon. Id(\sigma) =_{df} \sigma$$
- $Error : \Sigma_\varepsilon \rightarrow \Sigma_\varepsilon$  die konstante Zustandstransformation mit:
$$\forall \sigma \in \Sigma_\varepsilon. Error(\sigma) =_{df} error$$

## Denotationelle Semantik (3)

Zur Hilfsfunktion  $cond...$

Funktionalität...

$$cond : (\Sigma \rightarrow \mathbf{B}) \times (\Sigma \rightarrow \Sigma) \times (\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$$

Definiert durch...

$$cond(p, g_1, g_2) \sigma =_{df} \begin{cases} g_1 \sigma & \text{falls } p \sigma = \mathbf{tt} \\ g_2 \sigma & \text{falls } p \sigma = \mathbf{ff} \end{cases}$$

Zu den Argumenten und zum Resultat von  $cond...$

- 1. Argument: Prädikat (in unserem Szenario total definiert; siehe Vorlesungsteil 1)
- 2.&3. Argument: Je eine partiell definierte Zustandstransformation
- Resultat: Wieder eine partiell definierte Zustandstransformation

## Denotationelle Semantik (4)

Zur Hilfsfunktion  $FIX...$

Funktionalität...

$$FIX : ((\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$$

Definiert durch...

$$F g = cond(\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, Id)$$

Daraus ergibt sich...

- $FIX$  ist ein Funktional ("Zustandstransformationsfunktional")
- Die denotationelle Semantik der while-Schleife ist ein Fixpunkt des Funktionals  $F$  (und zwar der kleinste!)

*Mehr Details zu FIX und Co. später!*

## Denotationelle Semantik (5)

- *Operationelle Semantik*  
...der Fokus liegt darauf, wie ein Programm ausgeführt wird
- *Denotationelle Semantik*  
...der Fokus liegt auf dem *Effekt*, den die Ausführung eines Programms hat: Für jedes *syntaktische* Konstrukt gibt es eine *semantische* Funktion, die ersterem ein *mathematisches Objekt* zuweist, i.a. eine Funktion, die den Effekt der Ausführung des Konstrukts beschreibt (jedoch nicht, wie dieser Effekt erreicht wird).

## Denotationelle Semantik (6)

Zentral für denotationelle Semantiken: **Kompositionalität!**

*Intuitiv:*

- Für jedes Element der elementaren syntaktischen Konstrukte/Kategorien gibt es eine zugehörige semantische Funktion
- Für jedes Element eines zusammengesetzten syntaktischen Konstrukts/Kategorie gibt es eine semantische Funktion, die über die semantischen Funktionen der Komponenten des zusammengesetzten Konstrukts definiert ist.

## Denotationelle Semantik (7)

### Lemma 2.2

Für alle  $\pi \in \mathbf{Prg}$  ist durch die Gleichungen von Folie "Denotationelle Semantik (1)" eine (partielle) Funktion  $\llbracket \pi \rrbracket_{ds}$  definiert, die denotationelle Semantik von  $\pi$ .

## Hauptergebnisse

### Theorem

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \llbracket \pi \rrbracket_{sos} = \llbracket \pi \rrbracket_{ns} = \llbracket \pi \rrbracket_{ds}$$

Die Äquivalenz der strukturell operationellen, natürlichen und denotationellen Semantik von WHILE legt es nahe, den semantikangehenden Index in der Folge fortzulassen und vereinfachend von  $\llbracket \cdot \rrbracket$  als der Semantik der Sprache WHILE zu sprechen:

$$\llbracket \cdot \rrbracket : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

definiert durch

$$\llbracket \cdot \rrbracket =_{df} \llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$$

## WHILE – Denotationelle Semantik (1)

- **Prg** ...bezeichne die Menge aller Programme der Sprache **WHILE**

*Denotationelle Semantik*

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

Somit...

- Die *denotationelle Semantik* eines **WHILE**-Programms ist eine (partiell definierte) *Zustandstransformation*, wobei die Menge der *Zustände* gegeben ist durch

$$\Sigma =_{df} \{ \sigma \mid \sigma : V \rightarrow D \}$$

Beachte...

- Auch die operationelle (die strukturell operationelle wie auch die natürliche) Semantik eines **WHILE**-Programms ist eine (partiell definierte) *Zustandstransformation* auf  $\Sigma$ , nicht aber die axiomatische Semantik.

## WHILE – Denotationelle Semantik (2)

*Erinnerung:*

$$\llbracket \text{skip} \rrbracket_{ds} = Id$$

$$\llbracket \text{abort} \rrbracket_{ds} = Error$$

$$\llbracket x := t \rrbracket_{ds}(\sigma) = \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma)/x]$$

$$\llbracket \pi_1; \pi_2 \rrbracket_{ds} = \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}$$

$$\llbracket \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \rrbracket_{ds} = \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}, \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds})$$

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = FIX F$$

$$\text{where } F.g = \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, Id)$$

## WHILE – Denotationelle Semantik (3)

Noch offen...

- Die Bedeutung von...
  - *cond* und
  - *FIX F*

Diese Bedeutung wollen wir in der Folge aufklären...

## Zur Bedeutung von cond

Hilfsfunktion *cond*...

*Funktionalität*...

$$\text{cond} : (\Sigma \rightarrow \mathbf{B}) \times (\Sigma \rightarrow \Sigma) \times (\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$$

Definiert durch...

$$\text{cond}(p, g_1, g_2) \sigma =_{df} \begin{cases} g_1 \sigma & \text{if } p \sigma = \text{tt} \\ g_2 \sigma & \text{if } p \sigma = \text{ff} \end{cases}$$

Zu den Argumenten und zum Resultat von *cond*...

- 1. Argument: Prädikat (in unserem Szenario total definiert; siehe Vorlesungsteil 1)
- 2.&3. Argument: Je eine partiell definierte Zustandstransformation
- Resultat: Wieder eine partiell definierte Zustandstransformation

## Damit erhalten wir

...für die Bedeutung der Fallunterscheidung

$$\begin{aligned} & \llbracket \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \rrbracket_{ds} \sigma \\ &= \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}, \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds}) \sigma \\ &= \begin{cases} \sigma' & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{tt} \wedge \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds} \sigma = \sigma') \\ & \vee (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{ff} \wedge \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \sigma = \sigma') \\ \text{error} & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{tt} \wedge \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds} \sigma = \text{error}) \\ & \vee (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{ff} \wedge \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \sigma = \text{error}) \\ \text{undef} & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{tt} \wedge \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds} \sigma = \text{undef}) \\ & \vee (\llbracket b \rrbracket_B \sigma = \text{ff} \wedge \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \sigma = \text{undef}) \end{cases} \end{aligned}$$

Erinnerung:

- $\llbracket b \rrbracket_B$  ist in unserem Szenario total definiert;  $\llbracket b \rrbracket_B \sigma$  ist daher stets von  $\text{undef}$  verschieden.

## Zur Bedeutung von FIX F

Funktionalität...

$$\text{FIX} : ((\Sigma \rightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)) \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma)$$

Definiert durch...

$$F g = \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, \text{Id})$$

Daraus ergibt sich...

- $\text{FIX}$  ist ein Funktional ("Zustandstransformationsfunktional")
- Die denotationelle Semantik der while-Schleife ist ein Fixpunkt des Funktionals  $F$  (und zwar der kleinste!)

## Schrittweise zur denotationellen Semantik der while-Schleife

Dazu folgende Beobachtung...

- $\text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}$  muss dieselbe Bedeutung haben wie...  
 $\text{if } b \text{ then } (\pi; \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}) \text{ else skip fi}$

Daraus folgt...

- $\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, \text{Id})$

Und daraus schließlich...

- $\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds}$  muss Fixpunkt des Funktionals  $F$  sein, dass definiert ist durch

$$F g = \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, \text{Id})$$

Oder anders ausgedrückt, es muss gelten:

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = F(\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds})$$

...was uns wie gewünscht zu einer *kompositionellen* Definition von  $\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds}$  und damit von  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$  insgesamt führen wird.

## Etwas formaler: Unser Arbeitsplan

Erforderlich...

- Einige Resultate aus der *Fixpunkttheorie*

Beim nächsten Mal wird nachgeholt...

- Der mathematische Hintergrund (Ordnungen, CPOs, Stetigkeit von Funktionen) und die benötigten Resultate (Fixpunktsatz)  
~> ...siehe Vorlesungsteil 6 vom 28.11.2006

Somit bleibt an dieser Stelle zu tun...

- Nachzuweisen, dass diese Resultate auf unsere Situation anwendbar sind.

## Folgende drei Argumente...

...werden dafür entscheidend sein

1.  $[\Sigma \rightarrow \Sigma]$  kann vollständig partiell geordnet werden.
2.  $F$  im Anwendungskontext ist stetig
3. Fixpunktbildung im Anwendungskontext wird ausschließlich auf stetige Funktionen angewendet.

Insgesamt ergibt sich dann daraus die Wohldefiniertheit von

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

## Ordnung auf Zustandstransformationen

Bezeichne...

- $[\Sigma \rightarrow \Sigma]$  die Menge der partiell definierten Zustandstransformationen.

Wir definieren...

$$g_1 \sqsubseteq g_2 \iff \forall \sigma \in \Sigma. g_1 \sigma \text{ definiert} = \sigma' \Rightarrow g_2 \sigma \text{ definiert} = \sigma' \text{ mit } g_1, g_2 \in [\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon]$$

**Lemma 1**

1.  $([\Sigma \rightarrow \Sigma], \sqsubseteq)$  ist eine partielle Ordnung.
2. Die *total undefinierte* (d.h. nirgends definierte) Funktion  $\perp : \Sigma \rightarrow \Sigma$  mit  $\perp \sigma = \text{undef}$  für alle  $\sigma \in \Sigma$  ist *kleinstes Element* in  $([\Sigma \rightarrow \Sigma], \sqsubseteq)$

## Ordnung auf Zustandstransformationen

Sogar...

**Lemma 2**

Das Paar  $([\Sigma \rightarrow \Sigma], \sqsubseteq)$  ist eine vollständige partielle Ordnung (CPO) mit kleinstem Element  $\perp$ .

Weiter gilt: Die kleinste obere Schranke  $\bigsqcup Y$  einer Kette  $Y$  ist gegeben durch

$$\text{graph}(\bigsqcup Y) = \bigcup \{ \text{graph}(g) \mid g \in Y \}$$

Das heißt:  $(\bigsqcup Y) \sigma = \sigma' \iff \exists g \in Y. g \sigma = \sigma'$

## Einschub: Graph einer Funktion

Der *Graph* einer totalen Funktion  $f : M \rightarrow N$  ist definiert durch

$$\text{graph}(f) =_{df} \{ \langle m, n \rangle \in M \times N \mid f m = n \}$$

Es gilt:

- $\langle m, n \rangle \in \text{graph}(f) \wedge \langle m, n' \rangle \in \text{graph}(f) \Rightarrow n = n'$  (*rechtseindeutig*)
- $\forall m \in M. \exists n \in N. \langle m, n \rangle \in \text{graph}(f)$  (*linkstotal*)

Der *Graph* einer partiellen Funktion  $f : M \rightarrow N$  mit Definitionsbereich  $M_f \subseteq M$  ist definiert durch

$$\text{graph}(f) =_{df} \{ \langle m, n \rangle \in M \times N \mid f m = n \wedge m \in M_f \}$$

Vereinbarung...

Für  $f : M \rightarrow N$  partiell definierte Funktion auf  $M_f \subseteq M$  schreiben wir

- $f m = n$ , falls  $\langle m, n \rangle \in \text{graph}(f)$
- $f m = \text{undef}$ , falls  $m \notin M_f$

---

## Stetigkeitsresultate (1)

### Lemma 3

Sei  $g_0 \in [\Sigma \rightarrow \Sigma]$ , sei  $p \in [\Sigma \rightarrow \mathbf{B}]$  und sei  $F$  definiert durch

$$F g = \text{cond}(p, g, g_0)$$

Dann gilt:  $F$  ist stetig.

Zur Erinnerung: Seien  $(C, \sqsubseteq_C)$  und  $(D, \sqsubseteq_D)$  zwei CPOs und sei  $f : C \rightarrow D$  eine Funktion von  $C$  nach  $D$ .

Dann heißt  $f$ ...

- *monoton* gdw.  $\forall c, c' \in C. c \sqsubseteq_C c' \Rightarrow f(c) \sqsubseteq_D f(c')$   
(Erhält der Ordnung der Elemente)
- *stetig* gdw.  $\forall C' \subseteq C. f(\bigsqcup_{C'} C') =_D \bigsqcup_{D'} f(C')$   
(Erhält der kleinsten oberen Schranken)

---

## Stetigkeitsresultate (2)

### Lemma 4

Sei  $g_0 \in [\Sigma \rightarrow \Sigma]$  und sei  $F$  definiert durch

$$F g = g \circ g_0$$

Dann gilt:  $F$  ist stetig.

---

## Zusammen mit...

### Lemma 5

Die Gleichungen zur Festlegung der denotationellen Semantik von WHILE (vgl. Folie 13 von heute) definieren eine totale Funktion

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} \in [\mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)]$$

...sind wir durch! Wir können beweisen:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

ist wohldefiniert!

---

## Und somit wie anfangs angedeutet...

Aus...

1. Die Menge  $[\Sigma \rightarrow \Sigma]$  der partiell definierten Zustandstransformationen bildet zusammen mit der Ordnung  $\sqsubseteq$  eine CPO.
2. Funktional  $F$  mit " $F g = \text{cond}(p, g, g_0)$ " und " $g \circ g_0$ " ist stetig
3. In der Definition von  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$  wird die Fixpunktbildung ausschließlich auf stetige Funktionen angewendet.

...ergibt sich wie gewünscht:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \rightarrow \Sigma_\varepsilon)$$

...ist wohldefiniert!

---

## Vorschau auf die nächsten Vorlesungstermine...

- Di, 28.11.2006, Vorlesung von 17:45 Uhr bis 19:15 Uhr, Bibliothek E185/1
- Di, 05.12.2006, Vorlesung von 17:45 Uhr bis 19:15 Uhr, Bibliothek E185/1
- Di, 12.12.2006, Vorlesung von 17:45 Uhr bis 19:15 Uhr, Bibliothek E185/1
- Di, 19.12.2006: Keine Vorlesung! (Ferialzeit)
- Di, 26.12.2006: Keine Vorlesung! (Ferialzeit)

---

## Vorschau auf die weiteren Vorlesungstermine...

- Di, 02.01.2007: Keine Vorlesung! (Ferialzeit)
- Di, 09.01.2007, Vorlesung von 17:45 Uhr bis 19:15 Uhr, Bibliothek E185/1
- Di, 16.01.2007, Vorlesung von 17:45 Uhr bis 19:15 Uhr, Bibliothek E185/1
- Di, 23.01.2007, Vorlesung von 17:45 Uhr bis 19:15 Uhr, Bibliothek E185/1
- Di, 30.01.2007, Vorlesung von 17:45 Uhr bis 19:15 Uhr, Bibliothek E185/1