
Axiomatische Semantik von WHILE

Insbesondere: ...Korrektheit und Vollständigkeit der axiomatischen Semantik

Erinnerung:

- *Hoare-Tripel* (syntaktische Sicht) bzw. *Korrektheitsformeln* (semantische Sicht) der Form

$$\{p\} \pi \{q\} \quad \text{bzw.} \quad [p] \pi [q]$$

- Gültigkeit einer Korrektheitsformel im Sinne
 - *partieller* Korrektheit
 - *totaler* Korrektheit

Definition partieller Korrektheit

Sei $\pi \in \mathbf{Prg}$ ein WHILE-Programm:

Ein Hoaresche Zusicherung $\{p\} \pi \{q\}$ heißt

- *gültig* (im Sinne der *partiellen Korrektheit*) oder kurz (*partiell*) *korrekt* gdw. für jeden Anfangszustand σ gilt: ist die Vorbedingung p in σ erfüllt **und** terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär in einem Endzustand σ' , **dann** ist auch die Nachbedingung q in σ' erfüllt.

Definition totaler Korrektheit

Sei $\pi \in \mathbf{Prg}$ ein WHILE-Programm:

Ein Hoaresche Zusicherung $[p] \pi [q]$ heißt

- *gültig* (im Sinne der *totalen Korrektheit*) oder kurz (*total*) *korrekt* gdw. für jeden Anfangszustand σ gilt: ist die Vorbedingung p in σ erfüllt, **dann** terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär mit einem Endzustand σ' **und** die Nachbedingung q ist in σ' erfüllt.

Intuitiv

“Totale Korrektheit = Partielle Korrektheit + Terminierung”

Partielle und totale Korrektheit

- Die Zustandsmenge

$$Ch(p) =_{df} \{ \sigma \in \Sigma \mid \llbracket p \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt} \}$$

heißt *Charakterisierung von $p \in \mathbf{Bexp}$* .

- Semantik von Korrektheitsformeln:*

Eine Korrektheitsformel $\{p\} \pi \{q\}$ heißt

- *partiell korrekt* (in Zeichen: $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$), falls $\llbracket \pi \rrbracket(Ch(p)) \subseteq Ch(q)$
- *total korrekt* (in Zeichen: $\models_{tk} \{p\} \pi \{q\}$), falls $\{p\} \pi \{q\}$ partiell korrekt ist und $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \supseteq Ch(p)$ gilt. Dabei bezeichnet $Def(\llbracket \pi \rrbracket)$ die Menge aller Zustände, für die π regulär terminiert.

Konvention: $\llbracket \pi \rrbracket(Ch(p)) =_{df} \{ \llbracket \pi \rrbracket(\sigma) \mid \sigma \in Ch(p) \}$

Erinnerung

...an einige Sprechweisen:

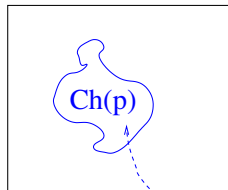
Ein (deterministisches) Programm π

- angesetzt auf einen Anfangszustand σ *terminiert regulär* gdw. π nach endlich vielen Schritten in einem Zustand $\sigma' \in \Sigma$ endet.
- angesetzt auf einen Anfangszustand σ *terminiert irregulär* gdw. π nach endlich vielen Schritten zur Konfiguration *undef* führt.
- Ein Programm π heißt *divergent* gdw. π terminiert für keinen Anfangszustand regulär.

Veranschaulichung (1)

...der Charakterisierung $Ch(p)$ einer logischen Formel p :

Menge aller Zustände Σ

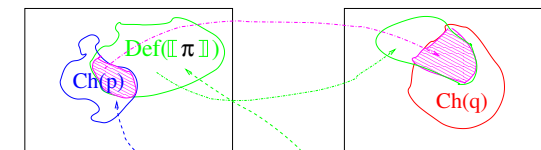


Charakterisierung von p : $Ch(p) \subseteq \Sigma$

Veranschaulichung (2)

...der Gültigkeit einer Hoareschen Zusicherung $\{p\} \pi \{q\}$ im Sinne partieller Korrektheit:

Menge aller Zustände Σ



Charakterisierung von p : $Ch(p) \subseteq \Sigma$

Definitionsbereich von π : $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \subseteq \Sigma$

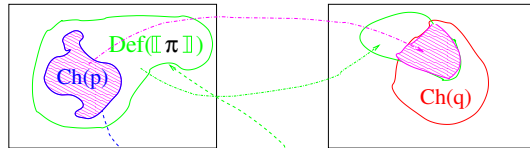
Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket)$

Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \wedge Ch(p)$

Veranschaulichung (3)

...der Gültigkeit eine Hoareschen Zusicherung $[p] \pi [q]$ im Sinne totaler Korrektheit:

Menge aller Zustände Σ



Charakterisierung von $p: \text{Ch}(p) \subseteq \Sigma$

Definitionsbereich von $\pi: \text{Def}(\llbracket \pi \rrbracket) \subseteq \Sigma$

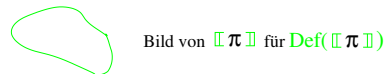


Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $\text{Def}(\llbracket \pi \rrbracket)$

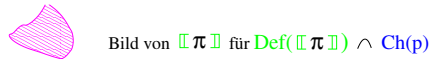


Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $\text{Def}(\llbracket \pi \rrbracket) \wedge \text{Ch}(p)$

Hoare-Kalkül HK_{PK} für partielle Korrektheit

$$\begin{array}{l}
 [\text{skip}] \frac{}{\{p\} \text{skip} \{p\}} \\
 [\text{abort}] \frac{}{\{p\} \text{abort} \{q\}} \\
 [\text{ass}] \frac{}{\{p[t/x]\} x:=t \{p\}} \\
 [\text{comp}] \frac{\{p\} \pi_1 \{r\}, \{r\} \pi_2 \{q\}}{\{p\} \pi_1; \pi_2 \{q\}} \\
 [\text{ite}] \frac{\{p \wedge b\} \pi_1 \{q\}, \{p \wedge \neg b\} \pi_2 \{q\}}{\{p\} \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } \{q\}} \\
 [\text{while}] \frac{\{I \wedge b\} \pi \{I\}}{\{I\} \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}} \\
 [\text{cons}] \frac{p \Rightarrow p_1, \{p_1\} \pi \{q_1\}, q_1 \Rightarrow q}{\{p\} \pi \{q\}}
 \end{array}$$

Analyse und Verifikation (WS 2006/2007) / 3. Teil (24.10.2006)

10

Hoare-Kalkül HK_{TK} für totale Korrektheit

...identisch mit HK_{PK} , wobei aber Regel [while] ersetzt ist durch:

$$[\text{while}_{TK}] \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v], \{I \wedge b \wedge t=w\} \pi \{I \wedge t < w\}}{\{I\} \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}}$$

wobei

- u Boolescher Ausdruck über der Variablen v ,
- t Term,
- w Variable, die in I , b , π und t nicht frei vorkommt,
- $M \stackrel{\text{df}}{=} \{\sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma \wedge \llbracket u \rrbracket_B(\sigma) = \text{tt}\}$ noethersch geordnete Menge (sog. noethersche Halbordnung).

Analyse und Verifikation (WS 2006/2007) / 3. Teil (24.10.2006)

11

Korrektheit und Vollständigkeit von HK_{PK} und HK_{TK}

Sei K ein Kalkül für partielle bzw. totale Korrektheit

Zentral sind dann die Fragen der...

- *Korrektheit*: ...ist jede mithilfe von K ableitbare Korrektheitsformel partiell bzw. total korrekt?
- *Vollständigkeit*: ...ist jede partiell bzw. total korrekte Korrektheitsformel mithilfe von K ableitbar?

Speziell:

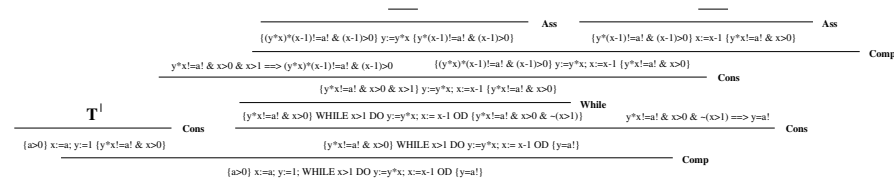
- Sind HK_{PK} und HK_{TK} korrekt und vollständig?

Analyse und Verifikation (WS 2006/2007) / 3. Teil (24.10.2006)

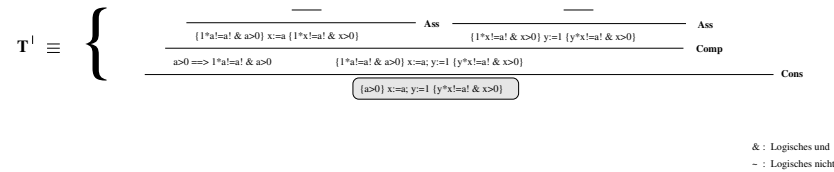
12

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (2)

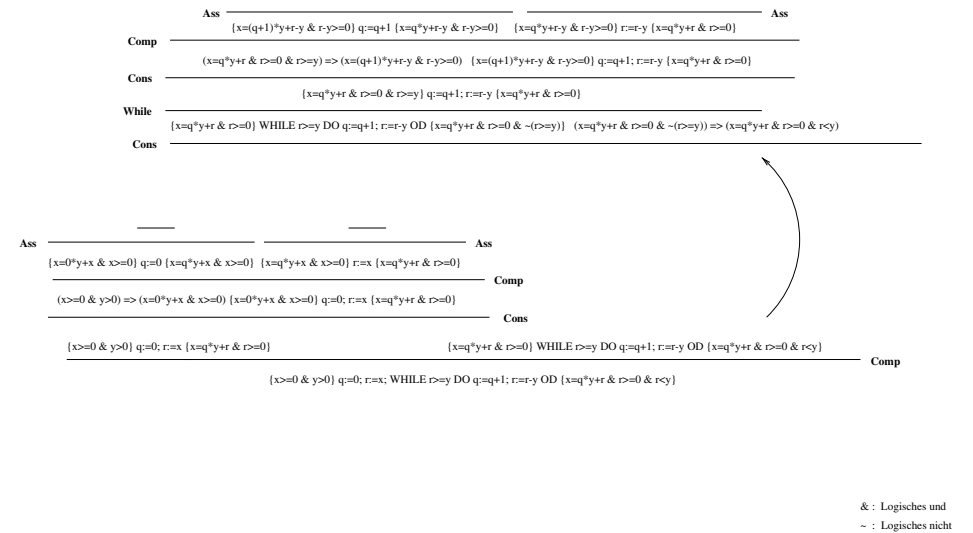
Zweiter Beweis



wobei



Bew. partieller Korrektheit: Division



Bew. part. Korrektheit: Fakultät (1)

- Die unmittelbare baumartige Notation von Hoareschen Korrektheitsbeweisen ist i.a. unhandlich.
- Alternativ hat sich deshalb eine Notationsvariante eingebürgert, bei der in den Programmtext Zusicherungen als Annotationen eingestreut werden.
- In der Folge demonstrieren wir diesen Notationsstil am Beispiel des Nachweises der partiellen Korrektheit unseres Fakultätsprogramms bezüglich der angegebenen Vor- und Nachbedingung. Man spricht auch von einem sog. *linearen Beweis* bzw. *linearen Beweisskizze*.

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (2)

Beweise, dass das Hoare-Tripel

$$\{a > 0\} \\
 x := a; \ y := 1; \ \text{while } x > 1 \ \text{do } y := y * x; \ x := x - 1 \ \text{od} \\
 \{y = a!\}$$

gültig ist im Sinne partieller Korrektheit.

Wir entwickeln den Beweis in der Folge Schritt für Schritt!

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (3)

Schritt 1

“Träumen” der Invariante...

- $\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$

...um die [while]-Regel anwenden zu können.

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (4)

Schritt 2

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife...

Der Nachweis der Gültigkeit von

$$\begin{aligned} &\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ &\quad y := y * x; \\ &\quad x := x - 1; \\ &\{y * x! = a! \wedge x > 0\} \end{aligned}$$

erlaubte mithilfe der [while]-Regel den Übergang zu:

$$\begin{aligned} &\{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ &\quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ &\quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ &\quad \quad y := y * x; \\ &\quad \quad x := x - 1; \\ &\quad \text{od [while]} \\ &\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (5)

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife im Detail:

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (6)

Wegen Rückwärtszuweisungsregel wird der Rumpf der while-Schleife von hinten nach vorne bearbeitet:

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\}$$

$$y := y * x;$$

$$\{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\}$$

$$x := x - 1; [\text{ass}]$$

$$\{y * x! = a! \wedge x > 0\}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (7)

Nach abermaliger Anwendung der [ass]-Regel erhalten wir...

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; \text{ [ass]} \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; \text{ [ass]} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \end{aligned}$$

...wobei noch eine "Beweislücke" verbleibt!

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (8)

Schluss der "Beweislücke" in der zugrundeliegenden Theorie:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \Downarrow \text{ [cons]} \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; \text{ [ass]} \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; \text{ [ass]} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (9)

Anwendung der [while]-Regel liefert nun wie gewünscht:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow \text{ [cons]} \\ & \quad \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad y := y * x; \text{ [ass]} \\ & \quad \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad x := x - 1; \text{ [ass]} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od [while]} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (10)

Schritt 3

Zur gewünschten Nachbedingung verbleibt offenbar ebenfalls eine Beweislücke:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \quad \Downarrow \text{ [cons]} \\ & \quad \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad y := y * x; \text{ [ass]} \\ & \quad \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad \quad x := x - 1; \text{ [ass]} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od [while]} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (11)

Schluss der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x \leq 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x = 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (12)

Aus Platzgründen etwas verkürzt dargestellt:

$$\begin{aligned} & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (13)

Schritt 4

Es verbleibt, die Beweislücke zur gewünschten Vorbedingung zu schließen:

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \quad x := a; \\ & \quad y := 1; \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (14)

Einmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \quad x := a; \\ & \{1 * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (15)

Abermalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \downarrow [\text{cons}] \\ & \{1 * a! = a! \wedge a > 0\} \\ & \quad x := a; [\text{ass}] \\ & \{1 * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (16)

Schluss der letzten Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie:

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \downarrow [\text{cons}] \\ & \{1 * a! = a! \wedge a > 0\} \\ & \quad x := a; [\text{ass}] \\ & \{1 * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Überblick (17)

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \downarrow [\text{cons}] \\ & \{1 * a! = a! \wedge a > 0\} \\ & \quad x := a; [\text{ass}] \\ & \{1 * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{while } x > 1 \text{ do} \\ & \quad \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x > 1\} \\ & \quad \downarrow [\text{cons}] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 > 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge \neg(x > 1)\} \\ & \quad \downarrow [\text{cons}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x > 0 \wedge x \leq 1\} \\ & \quad \downarrow [\text{cons}] \\ & \{y * x! = a! \wedge x = 1\} \\ & \quad \downarrow [\text{cons}] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Bew. part. Korrektheit: Fakultät (18)

Damit haben wir insgesamt wie gewünscht gezeigt:

Das Hoaresche Tripel

$$\begin{aligned} & \{a > 0\} \\ & \quad x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

ist gültig im Sinne partieller Korrektheit.

Linearer vs. baumartiger Beweisstil

Vorteil linearen gegenüber baumartigen Beweisnotationsstils:

- wenig Redundanz
- daher insgesamt knappere Beweise

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (1)

Hoaresche Zusicherungen sind von einer der zwei Formen

- $\{p\} \pi \{q\}$ und
- $[p] \pi [q]$

wobei

- p, q logische Formeln sind (meist prädikatenlogische Formeln 1. Stufe) und
- π ein Programm ist.

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (2)

In einer Hoareschen Zusicherung von einer der Formen

- $\{p\} \pi \{q\}$ und
- $[p] \pi [q]$

heißen

- p und q Vor- bzw. Nachbedingung.

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (3)

In einer Hoareschen Zusicherung werden üblicherweise

- geschweifte Klammern wie in $\{p\} \pi \{q\}$ für Tripel im Sinne *partieller Korrektheit* und
- eckige Klammern wie in $[p] \pi [q]$ für Tripel im Sinne *totaler Korrektheit*

benutzt.

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (4)

Zwei Beispiele Hoarescher Zusicherungen:

$$\begin{array}{l} \{a > 0\} \\ x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\} \end{array}$$

...zum Ausdruck partieller Korrektheit von π bzgl. der Vorbedingung $a > 0$ und der Nachbedingung $y = a!$

$$\begin{array}{l} [a > 0] \\ x := a; y := 1; \text{ while } x > 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ [y = a!] \end{array}$$

...zum Ausdruck totaler Korrektheit von π bzgl. der Vorbedingung $a > 0$ und der Nachbedingung $y = a!$

Sprechweisen im Zshg. mit Hoare-Tripeln (5)

Die Wortwahl

- *Hoaresches Tripel* oder kurz *Hoare-Tripel* bzw.
- *Hoaresche Zusicherung* oder kurz *Korrektivformel*

betont jeweils die

- syntaktische bzw.
- semantische Sicht

auf

- $\{p\} \pi \{q\}$ bzw. $[p] \pi [q]$