Nachträge

- Beweis des Fixpunktsatzes
- Definition schwächste Vorbedingungen
- Besprechung der bisherigen Übungsblätter

Zur Erinnerung: Der Fixpunktsatz

Theorem (Knaster/Tarski, Kleene)
Sei $(C, \sqsubseteq)$ eine CPO und sei $f : C \to C$ eine stetige Funktion auf C.

Dann hat f einen kleinsten Fixpunkt μf und dieser Fixpunkt ergibt sich als kleinste obere Schranke der Kette (sog. *Kleene-*Kette) $\{\perp, f(\perp), f^2(\perp), \ldots\}$, d.h.

$$\mu f = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) = \bigsqcup\{\perp, f(\perp), f^2(\perp), \ldots\}$$

Beweis des Fixpunktsatzes 1(4)

Zu zeigen: $\mu f \ldots$

1. existiert
2. ist Fixpunkt
3. ist kleinster Fixpunkt

Beweis des Fixpunktsatzes 2(4)

1. *Existenz*
   - Es gilt $f^0 \perp = \perp$ und $\perp \sqsubseteq c$ für alle $c \in C$.
   - Durch vollständige Induktion lässt sich damit zeigen: $f^n \perp \sqsubseteq f^n c$ für alle $c \in C$.
   - Somit gilt $f^n \perp \sqsubseteq f^m \perp$ für alle n, m mit $n \leq m$. Somit ist $\{f^n \perp \mid n \geq 0\}$ eine (nichtleere) Kette in C.
   - Damit folgt die Existenz von $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp)$ aus der CPO-Eigenschaft von $(C, \sqsubseteq)$.

Beweis des Fixpunktsatzes 3(4)

2. *Fixpunkteigenschaft*

$$
\begin{array}{rcl}
 & & f(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_0} f^i(\bot)) \\
(f \text{ stetig}) & = & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_0} f(f^n\bot) \\
 & = & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_1} f^n\bot \\
(K \text{ Kette} \Rightarrow \bigsqcup K = \bot \sqcup \bigsqcup K) & = & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_1} f^n\bot \;\sqcup\; \bot \\
(f^0 = \bot) & = & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_0} f^n\bot \\
 & = & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_0} f^i(\bot)
\end{array}
$$

Beweis des Fixpunktsatzes 4(4)

3. *Kleinster Fixpunkt*
   - Sei c beliebig gewählter Fixpunkt von f. Dann gilt $\bot \sqsubseteq c$ und somit auch $f^n\bot \sqsubseteq f^n c$ für alle $n \geq 0$.
   - Folglich gilt $f^n\bot \sqsubseteq c$ wg. der Wahl von c als Fixpunkt von f.
   - Somit gilt auch, dass c eine obere Schranke von $\{f^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ist.
   - Da $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_0} f^i(\bot)$ nach Definition die kleinste obere Schranke dieser Kette ist, gilt wie gewünscht $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_0} f^i(\bot) \sqsubseteq c$.

Schwächste Vorbedingungen

Definition 1

Seien A, B, A_1, A_2, ... (logische) Formeln

- A heißt *schwächer* als B, wenn gilt: $B \Rightarrow A$
- A_i heißt *schwäche* Formel in $\{A_1, A_2, \ldots\}$, wenn gilt: $A_j \Rightarrow A_i$ für alle j.

Definition 2

Sei Π ein Programm und q eine Formel.

Dann heißt $wp(\Pi, q)$ *schwächste Vorbedingung* von Π bezüglich (der Nachbedingung) q, wenn

$$\{wp(\Pi, q)\}\ \Pi\ \{q\}$$

partiell korrekt ist und $wp(\Pi, q)$ die schwächste Formel p mit der Eigenschaft ist, dass $\{p\}\ \Pi\ \{q\}$ partiell korrekt ist.

Zum Überlegen...

Analog zu A ist *schwächer* als B lässt sich definieren:

- A heißt *stärker* als B, wenn gilt: B ist schwächer als A, d.h. wenn gilt: $A \Rightarrow B$

Frage:

Ist es sinnvoll, analog zum Begriff der schwächsten Vorbedingung $wp(\Pi, q)$ auch den Begriff der stärksten Nachbedingung $sp(p, \Pi)$ zu gegebenem Programm Π und Vorbedingung p zu betrachten?