WHILE – Denotationelle Semantik (1)

- Π ...bezeichne die Menge aller Programme der Sprache **WHILE**

Denotationelle Semantik

$$[\![\ ]\!]_{ds} : \Pi \to (\Sigma \to \Sigma)$$

Somit...

- Die *denotationelle Semantik* eines **WHILE**-Programms ist eine (partiell definierte) *Zustandstransformation*, wobei die Menge der *Zustände* gegeben ist durch

$$\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : V \to D\}$$

Beachte...

- Auch die operationelle (die strukturell operationelle wie auch die natürliche) Semantik eines **WHILE**-Programms ist eine (partiell definierte) *Zustandstransformation* auf Σ, nicht aber die axiomatische Semantik.

WHILE – Denotationelle Semantik (2)

Erinnerung:

$[\![\ skip\ ]\!]_{ds} = id$

$[\![\ abort\ ]\!]_{ds} = undef$

$[\![\ x := t\ ]\!]_{ds}(\sigma) = \sigma[[\![\ t\ ]\!]_A(\sigma)/x]$

$[\![\ \Pi_1;\ \Pi_2\ ]\!]_{ds} = [\![\ \Pi_2\ ]\!]_{ds} \circ [\![\ \Pi_1\ ]\!]_{ds}$

$[\![\ \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ \Pi_1\ \textbf{else}\ \Pi_2\ \textbf{fi}\ ]\!]_{ds} = cond([\![\ b\ ]\!]_{\mathcal{B}}, [\![\ \Pi_1\ ]\!]_{ds}, [\![\ \Pi_2\ ]\!]_{ds})$

$[\![\ \textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ \Pi\ \textbf{od}\ ]\!]_{ds} = FIX\ F$

where $F\ g = cond([\![\ b\ ]\!]_{\mathcal{B}}, g \circ [\![\ \Pi\ ]\!]_{ds}, id)$

WHILE – Denotationelle Semantik (3)

Noch offen...

- Die Bedeutung von...
  - $cond$ und
  - $FIX\ F$

Diese Bedeutung wollen wir in der Folge aufklären...

Zur Bedeutung von cond

Hilfsfunktion $cond$...

Funktionalität...

$$cond : (\Sigma \to \mathbb{B}) \times (\Sigma \to \Sigma) \times (\Sigma \to \Sigma) \to (\Sigma \to \Sigma)$$

Definiert durch...

$$cond(p, g_1, g_2)\ \sigma =_{df} \begin{cases} g_1\ \sigma & \text{if } p\ \sigma = \texttt{tt} \\ g_2\ \sigma & \text{if } p\ \sigma = \texttt{ff} \end{cases}$$

Zu den Argumenten und zum Resultat von $cond$...

- 1. Argument: Prädikat (in unserem Szenario total definiert; siehe Vorlesungsteil 1)
- 2.&3. Argument: Je eine partiell definierte Zustandstransformation
- Resultat: Wieder eine partiell definierte Zustandstransformation

Damit erhalten wir

...für die Bedeutung der Fallunterscheidung

$[\![\, \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ \Pi_1\ \mathbf{else}\ \Pi_2\ \mathbf{fi}\,]\!]_{ds}\ \sigma$

$$
\begin{array}{cl}
= & cond([\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}, [\![\, \Pi_1 \,]\!]_{ds}, [\![\, \Pi_2 \,]\!]_{ds})\ \sigma \\
= & \begin{cases} \sigma' & \text{if } ([\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}\ \sigma = \mathtt{tt}\ \wedge\ [\![\, \Pi_1 \,]\!]_{\mathrm{ds}}\ \sigma = \sigma') \\ & \quad \vee\ ([\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}\ \sigma = \mathtt{ff}\ \wedge\ [\![\, \Pi_2 \,]\!]_{\mathrm{ds}}\ \sigma = \sigma') \\ undef & \text{if } ([\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}\ \sigma = \mathtt{tt}\ \wedge\ [\![\, \Pi_1 \,]\!]_{\mathrm{ds}}\ \sigma = \mathtt{undef}) \\ & \quad ([\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}\ \sigma = \mathtt{ff}\ \wedge\ [\![\, \Pi_2 \,]\!]_{\mathrm{ds}}\ \sigma = \mathtt{undef}) \end{cases}
\end{array}
$$

Erinnerung:

- $[\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}$ ist in unserem Szenario total definiert; $[\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}\ \sigma$ ist daher stets von $undef$ verschieden.

Zur Bedeutung von FIX F

Funktionalität...

$$FIX : ((\Sigma \to \Sigma) \to (\Sigma \to \Sigma)) \to (\Sigma \to \Sigma)$$

Definiert durch...

$$F\ g = cond([\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}, g \circ [\![\, \Pi \,]\!]_{ds}, id)$$

Daraus ergibt sich...

- FIX ist ein Funktional ("Zustandstransformationsfunktional")
- Die denotationelle Semantik der while-Schleife ist ein Fixpunkt des Funktionals F (und zwar der kleinste!)

Schrittweise zur denotationellen Semantik der while-Schleife

Dazu folgende Beobachtung...

- $\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ \Pi\ \mathbf{od}$ muss dieselbe Bedeutung haben wie...
  $\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ (\Pi;\ \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ \Pi\ \mathbf{od})\ \mathbf{else}\ skip\ \mathbf{fi}$

Daraus folgt...

- $[\![\, \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ \Pi\ \mathbf{od} \,]\!]_{ds} = cond([\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}, [\![\, \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ \Pi\ \mathbf{od} \,]\!]_{ds} \circ [\![\, \Pi \,]\!]_{ds}, id)$

Und daraus schließlich...

- $[\![\, \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ \Pi\ \mathbf{od} \,]\!]_{ds}$ muss Fixpunkt des Funktionals F sein, dass definiert ist durch

  $$F\ g = cond([\![\, b \,]\!]_{\mathcal{B}}, g \circ [\![\, \Pi \,]\!]_{ds}, id)$$

  Oder anders ausgedrückt, es muss gelten:

  $$[\![\, \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ \Pi\ \mathbf{od} \,]\!]_{ds} = F([\![\, \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ \Pi\ \mathbf{od} \,]\!]_{ds})$$

  ...was uns wie gewünscht zu einer *kompositionellen* Definition von $[\![\, \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ \Pi\ \mathbf{od} \,]\!]_{ds}$ und damit von $[\![\ \ ]\!]_{ds}$ insgesamt führen wird.

Etwas formaler: Unser Arbeitsplan

Erforderlich...

- Einige Resultate aus der *Fixpunkttheorie*

Bereits erledigt...

- Der mathematische Hintergrund (Ordnungen, CPOs, Stetigkeit von Funktionen) und die benötigten Resultate (Fixpunktsatz)
  $\rightsquigarrow$ ...siehe Vorlesungsteil 3 vom 04.11.2004

Somit bleibt an dieser Stelle zu tun...

- Nachzuweisen, dass diese Resultate auf unsere Situation anwendbar sind.

Folgende drei Argumente...

...werden dafür entscheidend sein

1. $[\Sigma \to \Sigma]$ kann vollständig partiell geordnet werden.

2. F im Anwendungskontext ist stetig

3. Fixpunktbildung im Anwendungskontext wird ausschließlich auf stetige Funktionen angewendet.

Insgesamt ergibt sich dann daraus die Wohldefiniertheit von

$$[\![\ ]\!]_{ds} : \Pi \to (\Sigma \to \Sigma)$$

Ordnung auf Zustandstransformationen

Bezeichne...

- $[\Sigma \to \Sigma]$ die Menge der partiell definierten Zustandstransformationen.

Wir definieren...

$$g_1 \sqsubseteq g_2 \iff \forall\, \sigma \in \Sigma.\ g_1\ \sigma\ \mathit{definiert}\ = \sigma' \Rightarrow g_2\ \sigma\ \mathit{definiert}\ = \sigma'$$
$$\text{mit } g_1, g_2 \in [\Sigma \to \Sigma]$$

Lemma 1

1. $([\Sigma \to \Sigma], \sqsubseteq)$ ist eine partielle Ordnung.

2. Die *total undefinierte* (d.h. nirgends definierte) Funktion $\bot : \Sigma \to \Sigma$ mit $\bot\ \sigma = \mathit{undef}$ für alle $\sigma \in \Sigma$ ist *kleinstes* Element in $([\Sigma \to \Sigma], \sqsubseteq)$

Ordnung auf Zustandstransformationen

Sogar...

Lemma 2
Das Paar $([\Sigma \to \Sigma], \sqsubseteq)$ ist eine vollständige partielle Ordnung (CPO) mit kleinstem Element $\bot$.

Weiter gilt: Die kleinste obere Schranke $\bigsqcup Y$ einer Kette Y ist gegeben durch

$$\mathit{graph}(\bigsqcup Y) = \bigcup \{\mathit{graph}(g) \mid g \in Y\}$$

Das heißt: $(\bigsqcup Y)\,\sigma = \sigma' \iff \exists\, g \in Y.\ g\ \sigma = \sigma'$

Einschub: Graph einer Funktion

Der *Graph* einer totalen Funktion $f : M \to N$ ist definiert durch

$$\mathit{graph}(f) =_{df} \{\langle m, n\rangle \in M \times N \mid f\ m = n\}$$

Es gilt:

- $\langle m, n\rangle \in \mathit{graph}(f)\ \wedge\ \langle m, n'\rangle \in \mathit{graph}(f) \Rightarrow n = n'$
- $\forall\, m \in M.\ \exists\, n \in N.\ \langle m, n\rangle \in \mathit{graph}(f)$

Der *Graph* einer partiellen Funktion $f : M \to N$ mit Definitionsbereich $M_f \subseteq M$ ist definiert durch

$$\mathit{graph}(f) =_{df} \{\langle m, n\rangle \in M \times N \mid f\ m = n \wedge m \in M_f\}$$

Vereinbarung...

Für $f : M \to N$ partiell definierte Funktion auf $M_f \subseteq M$ schreiben wir

- $f\ m = n$, falls $\langle m, n\rangle \in \mathit{graph}(f)$
- $f\ m = \mathit{undef}$, falls $m \notin M_f$

Stetigkeitkeitsresultate (1)

Lemma 3
Sei $g_0 \in [\Sigma \to \Sigma]$, sei $p \in [\Sigma \to \mathbb{B}]$ und sei F definiert durch

$$F\ g = cond(p, g, g_0)$$

Dann gilt: F ist stetig.

Zur Erinnerung: Seien $(C, \sqsubseteq_C)$ und $(D, \sqsubseteq_D)$ zwei CPOs und sei $f : C \to D$ eine Funktion von C nach D.

Dann heißt f...

- *monoton* gdw. $\forall\, c, c' \in C.\ c \sqsubseteq_C c' \Rightarrow f(c) \sqsubseteq_D f(c')$
  (*Erhalt der Ordnung der Elemente*)
- *stetig* gdw. $\forall\, C' \subseteq C.\ f(\bigsqcup_C C') =_D \bigsqcup_D f(C')$
  (*Erhalt der kleinsten oberen Schranken*)

Stetigkeitkeitsresultate (2)

Lemma 4
Sei $g_0 \in [\Sigma \to \Sigma]$ und sei F definiert durch

$$F\ g = g \circ g_0$$

Dann gilt: F ist stetig.

Zusammen mit...

Lemma 5
Die Gleichungen zur Festlegung der denotationellen Semantik von WHILE (vgl. Folie 2 von heute) definieren eine totale Funktion

$$[\![\ ]\!]_{ds} \in [\Pi \to (\Sigma \to \Sigma)]$$

...sind wir durch! Wir können beweisen:

$$[\![\ ]\!]_{ds} : \Pi \to (\Sigma \to \Sigma)$$

ist wohldefiniert!

Und somit wie anfangs angedeutet...

Aus...

1. Die Menge $[\Sigma \to \Sigma]$ der partiell definierten Zustandstransformationen bildet zusammen mit der Ordnung $\sqsubseteq$ eine CPO.
2. Funktional F mit "$F\ g = cond(p, g, g_0)$" und "$g \circ g_0$" ist stetig
3. In der Definition von $[\![\ ]\!]_{ds}$ wird die Fixpunktbildung ausschließlich auf stetige Funktionen angewendet.

...ergibt sich wie gewünscht:

$$[\![\ ]\!]_{ds} : \Pi \to (\Sigma \to \Sigma)$$

...ist wohldefiniert!

Literaturhinweis

Zum Nachlesen empfohlen...

- Hanne R. Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992.

  Auch on-line verfügbar:
  `http://www.daimi.au.dk/~bra8130/Wiley_book/wiley.html`