

# Analyse und Verifikation

LVA 185.276, VU 2.0, ECTS 3.0

SS 2021

(Stand: 25.03.2021)

Jens Knoop



Technische Universität Wien  
Information Systems Engineering  
Compilers and Languages



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Inhaltsverzeichnis

## Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Inhaltsverzeichnis (1)

## Teil I: Motivation

### ► Kap. 1: Grundlagen

- 1.1 Motivation
- 1.2 Modellsprache **W**HILE
- 1.3 Semantik von Numeralen
- 1.4 Semantik arithmetischer Ausdrücke
- 1.5 Semantik Boolescher Ausdrücke
- 1.6 Eigenschaften von  $\llbracket \cdot \rrbracket_N$ ,  $\llbracket \cdot \rrbracket_A$ ,  $\llbracket \cdot \rrbracket_B$
- 1.7 Syntaktische und semantische Substitution
- 1.8 Induktive Beweisprinzipien
  - 1.8.1 Vollständige Induktion
  - 1.8.2 Verallgemeinerte Induktion
  - 1.8.3 Strukturelle Induktion
  - 1.8.4 Gleichwertigkeit
- 1.9 Ausblick
- 1.10 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

3/1698

# Inhaltsverzeichnis (2)

- ▶ Kap. 2: Operationelle Semantik von **W**HILE
  - 2.1 Strukturell operationelle Semantik (SOS)
  - 2.2 Natürliche Semantik (NS)
  - 2.3 Äquivalenz von SO- und N-Semantik
  - 2.4 Vergleich von SO- und N-Semantik
  - 2.5 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen
- ▶ Kap. 3: Denotationelle Semantik von **W**HILE
  - 3.1 Denotationelle Semantik (DS)
  - 3.2 Wohldefiniertheit von **FIX** F
  - 3.3 Äquivalenz denotationeller und operationeller Semantik
  - 3.4 Eindeutigkeit der Semantik von **W**HILE
  - 3.5 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

# Inhaltsverzeichnis (3)

## Teil II: Verifikation

- Kap. 4: Axiomatische Semantik von WHILE
  - 4.1 Korrektheitsbegriffe, Programmverifikation
  - 4.2 Direkte Programmverifikation
  - 4.3 Axiomatische Programmverifikation
    - 4.3.1 Partielle und totale Korrektheit
    - 4.3.2 Stärkste Nachbedingungen, schwächste und schwächste liberale Vorbedingungen
    - 4.3.3 Korrektheit, Vollständigkeit von Ableitungskalkülen
  - 4.4 Ableitungskalkül  $HK_{pk}$  für partielle Korrektheit
  - 4.5 Korrektheit und Vollständigkeit von  $HK_{pk}$
  - 4.6 Partielle Korrektheitsbeweise
    - 4.6.1 Fakultät und ganzzahlige Division mit Rest
    - 4.6.2 Ableitungsbäume
    - 4.6.3 Lineare Beweisskizzen
  - 4.7 Ableitungskalküle  $HK'_{TK}$ ,  $HK_{TK}$  für totale Korrektheit
  - 4.8 Korrektheit und Vollständigkeit von  $HK'_{TK}$ ,  $HK_{TK}$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

5/1698

# Inhaltsverzeichnis (4)

## ► Kap. 4: Axiomatische Semantik, Verifikation (fgs.)

### 4.9 Totale Korrektheitsbeweise

4.9.1 Fakultät und ganzzahlige Division mit Rest

4.9.2 Ableitungsbäume

4.9.3 Lineare Beweisskizzen

4.10 Ansätze, Werkzeuge für (semi-) automatische axiomatische Programmverifikation

4.11 Historische Meilensteine der Programmverifikation

4.12 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

## ► Kap. 5: Axiomatische Ausführungsaufwandsanalyse

5.1 Motivation

5.2 Aufwandsbewusste Ausdruckssemantik

5.3 Aufwandsbewusste natürliche Semantik

5.4 Aufwandsbewusste axiomatische Semantik

5.5 Aufwandsbewusste totale Korrektheitsbeweise

5.6 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Inhaltsverzeichnis (5)

## Teil III: Analyse

### ► Kap. 6: Programmanalyse

6.1 Motivation, Problem

6.2 Ausblick, Lichtblick

6.3 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

### ► Kap. 7: Datenflussanalyse

7.1 Vorbereitung

7.1.1 Flussgraphen

7.2.2 Vollständige Verbände

7.2 Lokale DFA-Semantik

7.3 DFA-Spezifikation

7.4 Operationelle globale DFA-Semantik

7.4.1 Aufsammlungsemantik

7.4.2 Schnitt-über-alle-Pfade-Semantik

7.4.3 Vereinigung-über-alle-Pfade-Semantik

7.4.4 *SUP*- und *VUP*-Semantik als spezifizierende Lösungen von DFA-Problemen

7.4.5 Unentscheidbarkeit von *SUP*- und *VUP*-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

7/1698

# Inhaltsverzeichnis (6)

- ▶ Kap. 7: Datenflussanalyse (fgs.)
  - 7.5 Denotationelle globale DFA-Semantik
    - 7.5.1 Maximale Fixpunktsemantik
    - 7.5.2 Minimale Fixpunktsemantik
  - 7.6 Generischer Fixpunktalgorithmus
    - 7.6.1 Algorithmus
    - 7.6.2 Terminierung
  - 7.7 Sicherheit, Koinzidenz
  - 7.8 Korrektheit, Vollständigkeit
  - 7.9 DFA-Rahmen-, Werkzeugkistensicht
  - 7.10 Anwendungsbeispiele
    - 7.10.1 Verfügbare Ausdrücke: Distributives DFA-Problem
    - 7.10.2 Einfache Konstanten: Monotones DFA-Problem
  - 7.11 Zusammenfassung, Ausblick
  - 7.12 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen



# Inhaltsverzeichnis (7)

## ► Kap. 8: Reverse Datenflussanalyse

### 8.1 Vorbereitung

### 8.2 Induzierte reverse lokale DFA-Semantik

### 8.3 Reverse DFA-Spezifikation

### 8.4 Reverse operationelle globale DFA-Semantik

#### 8.4.1 Reverse Aufsammlungsemantik

#### 8.4.2 Reverse Vereinigung-über-alle-Pfade-Semantik

#### 8.4.3 Reverse Schnitt-über-alle-Pfade-Semantik

#### 8.4.4 *RVUP*- und *RSUP*-Semantik als spezifizierende Lösungen reverser DFA-Probleme

### 8.5 Reverse denotationelle globale DFA-Semantik

#### 8.5.1 Reverse minimale Fixpunktsemantik

#### 8.5.2 Reverse maximale Fixpunktsemantik

### 8.6 Generischer reverser Fixpunktalgorithmus

#### 8.6.1 Algorithmus

#### 8.6.2 Terminierung

### 8.7 Reverse Sicherheit und Koinzidenz

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Inhaltsverzeichnis (8)

- ▶ Kap. 8: Reverse Datenflussanalyse (fgs.)
  - 8.8 Zusammenhang, Rückführbarkeit von DFA auf RDFA
    - 8.8.1 Korrektheit, Vollständigkeit reverser DFA bzgl. induzierender DFA
    - 8.8.2 Distributives Verbindungstheorem
  - 8.9 Anwendungsbeispiele
    - 8.9.1 Verfügbare Ausdrücke
    - 8.9.2 'Hot Spot'-Analysatoren, -optimierer
    - 8.9.3 Fehlersucher
    - 8.9.4 Anforderungsgetriebene Datenflussanalyse
  - 8.10 Zusammenfassung, Ausblick
  - 8.11 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen
- ▶ Kap. 9: Parallele Datenflussanalyse
  - 9.1 Motivation
  - 9.2 Der funktionale denotationelle Semantikansatz
  - 9.3 Parallele Flussgraphen
    - 9.3.1 Vereinbarungen, Bezeichnungen
    - 9.3.2 Rang paralleler Graphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Inhaltsverzeichnis (9)

## ► Kap. 9: Parallele Datenflussanalyse (fgs.)

### 9.3 Parallele Flussgraphen (fgs.)

#### 9.3.3 Sequentialisierte Graphen

#### 9.3.4 Verschränkte Vorgänger

#### 9.3.5 Parallele Pfade

### 9.4 Operationelle globale parallele DFA-Semantik

#### 9.4.1 Parallele Aufsammlungsemantik

#### 9.4.2 Schnitt-über-alle-parallele-Pfade-Semantik

#### 9.4.3 Vereinigung-über-alle-parallele-Pfade-Semantik

### 9.5 Denotationelle globale parallele DFA-Semantik für unidirektionale Bitvektorprobleme

#### 9.5.1 Unidirektionale Bitvektoranalysen

#### 9.5.2 Interferenz und Synchronisation

#### 9.5.3 Maximale parallele Fixpunktsemantik

#### 9.5.4 Minimale parallele Fixpunktsemantik

### 9.6 Unidirektionale Bitvektoranalysen: Koinzidenz

### 9.7 Anwendungen

### 9.8 Zusammenfassung

### 9.9 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Inhaltsverzeichnis (10)

- ▶ Kap. 10: Programmanalyse, Programmverifikation: Datenflussanalyse, axiomatische Verifikation gegenübergestellt

## Teil IV: Fixpunkte, Transformationen, Optimalität

- ▶ Kap. 11: Chaotische Fixpunktiteration
  - 11.1 Motivation
  - 11.2 Chaotisches Fixpunktiterationstheorem
  - 11.3 Anwendungen
    - 11.3.1 Vektor-Iterationen
    - 11.3.2 Datenflussanalyse
  - 11.4 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen
- ▶ Kap. 12: Unnötige Anweisungen
  - 12.1 Motivation
  - 12.2 Unerreichbare Anweisungen
    - 12.2.1 Statisch unerreichbare Anweisungen
    - 12.2.2 Dynamisch unerreichbare Anweisungen
    - 12.2.3 Senken, Sackgassen und schwarze Löcher

# Inhaltsverzeichnis (11)

## ► Kap. 12: Unnötige Anweisungen (fgs.)

### 12.3 Partiell tote und geisterhafte Anweisungen

#### 12.3.1 Motivation

#### 12.3.2 Beispiele

#### 12.3.3 Elementartransformationen

#### 12.3.4 Effekte zweiter Ordnung

#### 12.3.5 EPTA/EPGA: Transformationen

#### 12.3.6 EPTA/EPGA: Besser, best, optimal

#### 12.3.7 EPTA/EPGA: Optimalität

#### 12.3.8 EPTA/EPGA: Implementierung

### 12.4 Partiell redundante Anweisungen

#### 12.4.1 Motivation

#### 12.4.2 Elementartransformationen

#### 12.4.3 Effekte zweiter Ordnung

#### 12.4.4 EPRA: Transformation

#### 12.4.5 EPRA: Besser, best, optimal

#### 12.4.6 EPRA: Optimalität

#### 12.4.7 EPRA: Implementierung

### 12.5 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Inhaltsverzeichnis (12)

## ► Kap. 13: Transformationskombinationen

### 13.1 EPTRA: EPTA/EPRA-Kombination

13.1.1 EPTA, EPRA: Grundtransformationen

13.1.2 EPTRA: Transformation

13.1.3 EPTRA: Besser, best, optimal

13.1.4 EPTRA: Optimalität

13.1.5 EPTRA: Purismus vs. Pragmatismus

### 13.2 EPRAA: EPRA/EPRA<sub>d</sub>-Kombination

13.2.1 EPRA, EPRA<sub>d</sub>: Grundtransformationen

13.2.2 EPRAA: Transformation

13.2.3 EPRAA: Beispiel

13.2.4 EPRAA: Optimalität

### 13.3 Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

13.3.1 Motivation

13.3.2 Drei-Adress-Code vs. allgemeiner Code

13.3.3 Basisblock- vs. Instruktionsgraphen, knoten-  
vs. kantenbenannte Graphen

### 13.4 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/1698

# Inhaltsverzeichnis (13)

## ► Kap. 14: Konstantenanalyse auf nicht-klassischen Programm- und Datenstrukturen

### 14.1 Motivation

### 14.2 Konstantenanalyse auf dem Wertegraphen

#### 14.2.1 VG-Basiskonstantenanalyse

#### 14.2.2 Volle VG-Konstantenanalyse

### 14.3 Konstantenanalyse auf dem prädikatierten Wertegraph

#### 14.3.1 Hyperblöcke, Hypergraphen

#### 14.3.2 Lokale Hyperblock-Konstantenanalyse

#### 14.3.3 PVG-Basiskonstantenanalyse

#### 14.3.4 Volle PVG-Konstantenanalyse

#### 14.3.5 Variationen zur Performanzverbesserung

### 14.4 Zusammenfassung

### 14.5 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Inhaltsverzeichnis (14)

## Teil V: Abstrakte Interpretation und Modellprüfung

### ► Kap. 15: Abstrakte Interpretation und Datenflussanalyse

#### 15.1 Motivation

#### 15.2 Theorie abstrakter Interpretation

##### 15.2.1 Galois-Verbindungen

##### 15.2.2 Galois-Passungen

#### 15.3 Systematische Konstruktion von Galois-Verbindungen

##### 15.3.1 Erschaffende Methoden

##### 15.3.2 Kombinierende Methoden

#### 15.4 Galois-Systeme

#### 15.5 Systeme abstrakter Interpretationen

#### 15.6 Korrektheit und Vollständigkeit abstrakter Interpretationen

#### 15.7 Optimalität abstrakter Interpretationen

#### 15.8 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Inhaltsverzeichnis (15)

- ▶ Kap. 16: Modellprüfung und Datenflussanalyse
  - 16.1 Motivation
  - 16.2 Modellprüfer, Modellprüfung
  - 16.3 Modell- und Formelsprachen
  - 16.4 Modellprüfung und DFA: Eine Analogie
  - 16.5 Zusammenfassung
  - 16.6 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen
- ▶ Kap. 17: Modellprüfung und Abstrakte Interpretation
  - 17.1 Eine Symbiose
  - 17.2 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

# Inhaltsverzeichnis (16)

## Teil VI: Abschluss und Ausblick

- ▶ Kap. 18: Resümee, Perspektiven
  - 18.1 Rückschau, Vorschau
  - 18.2 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen
- ▶ Literaturverzeichnis

## Anhänge

- ▶ A Mathematische Grundlagen
- ▶ B Pragmatik: Flussgraphvarianten

# Inhaltsverzeichnis (17)

## ► A Mathematische Grundlagen

### A.1 Relationen

### A.2 Geordnete Mengen, Ordnungen

#### A.2.1 Halbordnungen, partielle Ordnungen

#### A.2.2 Hasse-Diagramme

#### A.2.3 Schranken und extreme Elemente

#### A.2.4 Noethersche und Artinsche Ordnungen

#### A.2.5 Ketten

#### A.2.6 Gerichtete Mengen

#### A.2.7 Abbildungen auf partiellen Ordnungen

#### A.2.8 Ordnungshomomorphismen und -isomorphismen

### A.3 Vollständige partielle Ordnungen

#### A.3.1 Kettenvollständige, gerichtete vollständige partielle Ordnungen

#### A.3.2 Abbildungen auf vollständigen partiellen Ordnungen

#### A.3.3 Konstruktionsmechanismen für vollständige partielle Ordnungen

# Inhaltsverzeichnis (18)

## ► A Mathematische Grundlagen (fgs.)

### A.4 Verbände

A.4.1 Verbände, vollständige Verbände

A.4.2 Distributive, additive Abbildungen auf Verbänden

A.4.3 Verbandshomomorphismen und -isomorphismen

A.4.4 Modulare, distributive und Boolesche Verbände

A.4.5 Konstruktionsmechanismen für Verbände

A.4.6 Ordnungstheoretische und algebraische Verbandssicht

### A.5 Fixpunkttheoreme

A.5.1 Fixpunkte, Türme

A.5.2 Fixpunkttheoreme für vollständige partielle Ordnungen

A.5.3 Fixpunkttheoreme für Verbände

### A.6 Fixpunktinduktion

### A.7 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Inhaltsverzeichnis (19)

## ► B Pragmatik: Flussgraphvarianten

### B.1 Motivation

#### B.1.1 Flussgraphvarianten

#### B.1.2 Flussgraphvarianten: Welche sollten wir wählen?

### B.2 *SUP*- und *MaxFP*-Ansatz

#### B.2.1 Kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen

#### B.2.2 Knotenbenannte Basisblockgraphen

### B.3 Verfügbare Ausdrücke

#### B.3.1 Knotenbenannte Basisblockgraphen

#### B.3.2 Knotenbenannte Einzelanweisungsgraphen

#### B.3.3 Kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen

#### B.3.4 Zwischenfazit

### B.4 Konstantenanalyse

#### B.4.1 Kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen

#### B.4.2 Knotenbenannte Basisblockgraphen

### B.5 Geistervariablenanalyse

### B.6 Zusammenfassung, Schlussfolgerungen

### B.7 Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

#### Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

This software comes “without warranty of any kind, expressed or implied, including but not limited to, the implied warranties of merchantability and fitness for a particular purpose.”

# Teil I

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 1

## Grundlagen

Inhalt

Teil I

**Kap. 1**

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Kapitel 1.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

**1.1**

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9



# Programmiersprachen

...festgelegt durch Angabe von **Syntax** und **Semantik**.

- ▶ **Syntax**: Regelwerk zur präzisen Beschreibung wohlgeformter Programme.
- ▶ **Semantik**: Regelwerk zur präzisen Beschreibung der Bedeutung oder des Verhaltens wohlgeformter Programme oder Programmteile (aber auch von Hardware).

**Vorteilhaft**: Festlegung von **Syntax** und **Semantik** durch

- ▶ **formale** Regelwerke.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Vorteil

...formaler Regelwerke: **Rigorosität!**

Die (**mathematische**) **Rigorosität** formaler Regelwerke für **Syntax** und **Semantik** von Programmiersprachen

- ▶ erlaubt Mehrdeutigkeiten, Über- und Unterspezifikationen natürlichsprachlicher Beschreibungen in **Syntax** und **Semantik** aufzudecken und aufzulösen.
- ▶ schafft die Grundlage für vertrauenswürdige Implementierungen der Programmiersprache, für die **Analyse**, **Verifikation** und **Transformation** von Programmen.

Als Programmiersprache werden wir die **Modellsprache WHILE** betrachten, anhand derer wir die Festlegung von **Syntax** und **Semantik** mit formalen Regelwerken beispielhaft illustrieren und demonstrieren.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Kapitel 1.2

## Modellsprache WHILE

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

**1.2**

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# W<sub>H</sub>ILE

...der sog. 'while'-Kern imperativer Programmiersprachen, besitzt:

- Zuweisungen (einschließlich der leeren Anweisung)
- Fallunterscheidungen
- while-Schleifen (namensgebend für die Sprache)
- Sequentielle Komposition

Beachte: W<sub>H</sub>ILE ist 'schlank', doch Turing-mächtig!

# Syntax von WHILE

...festgelegt durch folgende Backus-Naur-Regel (BNF), die die Menge wohlgeformter WHILE -Programme beschreibt:

|           |                                     |                            |
|-----------|-------------------------------------|----------------------------|
| $\pi ::=$ | $x := a$                            | (Zuweisung)                |
|           | <i>skip</i>                         | (Leere Anweisung)          |
|           | if $b$ then $\pi_1$ else $\pi_2$ fi | (Fallunterscheidung)       |
|           | while $b$ do $\pi_1$ od             | (while-Schleife)           |
|           | $\pi_1; \pi_2$                      | (Sequentielle Komposition) |
|           | $(\pi_1)$                           | (Klammerung)               |

wobei

- $a$  für arithmetische Ausdrücke über Numeralen, Variablen und arithmetischen Operatoren
- $b$  für Wahrheitswertausdrücke über Booleschen Konstantensymbolen, arithmetischen Relatoren und logischen Operatoren

stehen.

# Syntax von Numeralen und Ausdrücken

...beschrieben durch folgende BNF-Regeln.

## Numerale (Zahlwörter)

$$\begin{aligned} z &::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots \mid 9 && \text{(Ziffer)} \\ n &::= z \mid n z && \text{(Numeral)} \end{aligned}$$

## Arithmetische Ausdrücke

$$\begin{aligned} a &::= n && \text{(Numeral)} \\ &\mid x && \text{(Variable)} \\ &\mid a_1 + a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1 / a_2 \mid \dots \end{aligned}$$

## Wahrheitswertausdrücke (Boolesche Ausdrücke)

$$\begin{aligned} b &::= true && \text{(Konstantensymbol)} \\ &\mid false && \text{(Konstantensymbol)} \\ &\mid a_1 = a_2 \mid a_1 \neq a_2 \\ &\mid a_1 < a_2 \mid a_1 \leq a_2 \mid \dots \\ &\mid b_1 \wedge b_2 \mid b_1 \vee b_2 \mid \neg b_1 \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Bezeichnungen

- **Var**, Menge der Variablen,  $x \in \mathbf{Var}$
- **Num**, Menge der Zahlwörter,  $n \in \mathbf{Num}$
- **Aexpr**, Menge arithmetischer Ausdrücke,  $a \in \mathbf{Aexpr}$
- **Bexpr**, Menge Boolescher Ausdrücke,  $b \in \mathbf{Bexpr}$
- **Prg**, Menge aller WHILE -Programme,  $\pi \in \mathbf{Prg}$

# Die Semantikfestlegung für WHILE

...stützt sich auf die **Bedeutung** (oder: **Semantik**) von

- Zahlwörtern
- arithmetische Ausdrücken
- Wahrheitswertausdrücken

und den Begriff von

- Speicherzuständen

Wir legen deshalb zunächst diese Begriffe fest.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9



# Kapitel 1.3

## Semantik von Numeralen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

**1.3**

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Semantik von Numeralen (oder Zahlwörtern)

...gegeben durch eine induktiv definierte **totale Abbildung**

$$\llbracket \cdot \rrbracket_N : \mathbf{Num} \rightarrow \mathbb{Z}$$

definiert durch:

$$\llbracket 0 \rrbracket_N =_{df} 0$$

...

$$\llbracket 9 \rrbracket_N =_{df} 9$$

$$\llbracket n\ i \rrbracket_N =_{df} (\llbracket n \rrbracket_N \mathbf{mal}\ 10) \mathbf{plus}\ \llbracket i \rrbracket_N, \ i \in \{0, \dots, 9\}$$

$$\llbracket -n \rrbracket_N =_{df} 0 \mathbf{minus}\ \llbracket n \rrbracket_N$$

wobei

$$\mathbf{plus} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (\text{Addition auf } \mathbb{Z})$$

$$\mathbf{mal} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (\text{Multiplikation auf } \mathbb{Z})$$

$$\mathbf{minus} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (\text{Subtraktion auf } \mathbb{Z})$$

- Bemerkung:** – Zeichen  $=_{df}$  steht für 'definitionsgemäß gleich'.  
– Operationen **plus**, **mal**, ... werden infix-verwendet.

# Bemerkung: Syntakt. vs. Semant. Entitäten

## Syntaktische Entitäten

- 0, 1, 2, ... bezeichnen **syntaktische** Entitäten, Darstellungen von Zahlen.
- — bezeichnet eine **syntaktische** Entität, die Darstellung eines (syntaktischen) **Operators** (dem als Semantik der 'Vorzeichenwechsel' zugeordnet wird).

## Semantische Entitäten

- **0, 1, 2, ...** bezeichnen **semantische** Entitäten, hier ganze Zahlen:  $\mathbb{Z} =_{df} \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .
- **plus, mal, minus** :  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , bezeichnen (semantische) **Operationen**, hier die übliche Addition, Multiplikation und Subtraktion auf  $\mathbb{Z}$ .

**Beachte:** Die Semantik von Numeralen ist **zustandsunabhängig**.

# Kapitel 1.4

## Semantik arithmetischer Ausdrücke

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

**1.4**

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Semantik arithmetischer Ausdrücke (1)

...gegeben durch eine induktiv definierte **totale** Abbildung

$$\llbracket \cdot \rrbracket_A : \mathbf{Aexpr} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{Z})$$

mit

- $\mathbb{Z} =_{df} \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  Menge **ganzer Zahlen**
- $\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{Var} \rightarrow \mathbb{Z}\}$  Menge der **Zustände** (oder: **Speicherzustände**) über  $\mathbb{Z}$

**Notationelle Konvention:** Der gerade Pfeil  $\rightarrow$  bezeichnet **totale** Funktionen, der Hakenpfeil  $\hookrightarrow$  **partielle** Funktionen.

# Semantik arithmetischer Ausdrücke (2)

...wobei  $\llbracket \cdot \rrbracket_A : \mathbf{Aexpr} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{Z})$  definiert ist durch:

$$\begin{aligned}\llbracket n \rrbracket_A &=_{df} \lambda\sigma. \llbracket n \rrbracket_N \quad (\text{Wert von } n \text{ zustandsunabhängig!}) \\ \llbracket x \rrbracket_A &=_{df} \lambda\sigma. \sigma(x) \quad (\text{Wert von } x \text{ zustandsabhängig!}) \\ \llbracket a_1 + a_2 \rrbracket_A &=_{df} \lambda\sigma. \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) \textbf{ plus } \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma) \\ \llbracket a_1 * a_2 \rrbracket_A &=_{df} \lambda\sigma. \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) \textbf{ mal } \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma) \\ \llbracket a_1 - a_2 \rrbracket_A &=_{df} \lambda\sigma. \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) \textbf{ minus } \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma)\end{aligned}$$

...weitere arithmetische Operatoren ( $/$ ,  $mod$ ,  $\wedge$ , ...) analog.

Beachte auch hier wieder den Unterschied zwischen syntaktischen und semantischen Entitäten:

- $+$ ,  $*$ ,  $-$  bezeichnen syntaktische Entitäten: Operatoren.
- **plus**, **mal**, **minus** bezeichnen semantische Entitäten: Operationen (hier auf  $\mathbb{Z}$ ).

# Kapitel 1.5

## Semantik Boolescher Ausdrücke

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

**1.5**

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Semantik Boolescher Ausdrücke (1)

...gegeben durch eine induktiv definierte **totale Abbildung**

$$\llbracket \cdot \rrbracket_B : \mathbf{Bexpr} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \mathbf{IB})$$

mit

- $\mathbf{IB} =_{df} \{\mathbf{wahr}, \mathbf{falsch}\}$  Menge der **Wahrheitswerte**
- $\mathbb{Z} =_{df} \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  Menge **ganzer Zahlen**
- $\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{Var} \rightarrow \mathbb{Z}\}$  Menge der **Zustände** (oder **Speicherzustände**) über  $\mathbb{Z}$



# Semantik Boolescher Ausdrücke (2)

...wobei  $\llbracket \cdot \rrbracket_B : \mathbf{Bexpr} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{B})$  definiert ist durch:

$$\llbracket \text{wahr} \rrbracket_B =_{df} \lambda\sigma. \mathbf{wahr}$$

$$\llbracket \text{falsch} \rrbracket_B =_{df} \lambda\sigma. \mathbf{falsch}$$

$$\llbracket a_1 = a_2 \rrbracket_B =_{df} \lambda\sigma. \begin{cases} \mathbf{wahr} & \text{falls } \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma) \\ \mathbf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket a_1 \neq a_2 \rrbracket_B =_{df} \lambda\sigma. \begin{cases} \mathbf{wahr} & \text{falls } \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) \neq \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma) \\ \mathbf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

...weitere **arithmetische Relatoren** ( $>$ ,  $\geq$ ,  $<$ ,  $\leq$ , ...) analog.

$$\llbracket b_1 \wedge b_2 \rrbracket_B =_{df} \lambda\sigma. \llbracket b_1 \rrbracket_B(\sigma) \mathbf{und} \llbracket b_2 \rrbracket_B(\sigma)$$

$$\llbracket b_1 \vee b_2 \rrbracket_B =_{df} \lambda\sigma. \llbracket b_1 \rrbracket_B(\sigma) \mathbf{oder} \llbracket b_2 \rrbracket_B(\sigma)$$

$$\llbracket \neg b \rrbracket_B =_{df} \lambda\sigma. \mathbf{nicht} (\llbracket b \rrbracket_B(\sigma))$$

$$\llbracket b_1 = b_2 \rrbracket_B =_{df} \lambda\sigma. \begin{cases} \mathbf{wahr} & \text{falls } \llbracket b_1 \rrbracket_B(\sigma) = \llbracket b_2 \rrbracket_B(\sigma) \\ \mathbf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket b_1 \neq b_2 \rrbracket_B =_{df} \lambda\sigma. \mathbf{nicht} (\llbracket b_1 = b_2 \rrbracket_B(\sigma))$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Semantik Boolescher Ausdrücke (3)

Dabei bezeichnen:

|              |  |   |
|--------------|--|---|
| <b>und</b>   | : $IB \times IB \rightarrow IB$                            | (Logische Konjunktion)                      |
| <b>oder</b>  | : $IB \times IB \rightarrow IB$                            | (Logische Disjunktion)                      |
| <b>nicht</b> | : $IB \rightarrow IB$                                      | (Logische Negation)                         |
| <b>=</b>     | : $ID \times ID \rightarrow IB, ID \in \{\mathbb{Z}, IB\}$ | (Gleichheitsrelation auf $\mathbb{Z}, IB$ ) |

Bemerkung:

- Beachte die Überladung der
  - **Relatorsymbole** = und  $\neq$ .
  - **Relationssymbole** = und  $\neq$ .
- Statt  $=, \neq$  werden wir später oft einfacher  $=, \neq$  schreiben; der Kontext macht jeweils deutlich, ob z.B.  $=$  als
  - **Relator**symbol wie in  $\llbracket a_1 = a_2 \rrbracket_B(\sigma)$
  - **Relation**symbol wie in  $\llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma)$verwendet wird.
- Operationen **und**, **oder** und Relationen  $=, \neq, \dots$  werden infix-verwendet.

# Semantik Boolescher Ausdrücke (4)

Beachte wieder den Unterschied zwischen **syntaktischen** und **semantischen** Entitäten:

## Syntaktische Entitäten:

- *wahr*, *falsch* bezeichnen **syntaktische** Entitäten: **Konstantensymbole**.
- $=$ ,  $\neq$ ,  $>$ , etc. bezeichnen **syntaktische** Entitäten: **Relatoren**.
- $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$  bezeichnen **syntaktische** Entitäten: **Operatoren**.

## Semantische Entitäten:

- **wahr**, **falsch** bezeichnen **semantische** Entitäten: **Wahrheitswerte** (aus IB).
- $=$ ,  $\neq$ , etc. bezeichnen **semantische** Entitäten: **Relationen** (auf  $\mathbb{Z}$  bzw. IB).
- **und**, **oder**, **nicht** bezeichnen **semantische** Entitäten: **Operationen** (auf IB).

# Kapitel 1.6

Eigenschaften von  $\llbracket \cdot \rrbracket_N$ ,  $\llbracket \cdot \rrbracket_A$ ,  $\llbracket \cdot \rrbracket_B$

# Freie Variablen

...arithmetischer Ausdrücke:

$$FV(n) = \emptyset$$

$$FV(x) = \{x\}$$

$$FV(a_1 + a_2) = FV(a_1) \cup FV(a_2)$$

...

...Boolescher Ausdrücke:

$$FV(true) = \emptyset$$

$$FV(false) = \emptyset$$

$$FV(a_1 = a_2) = FV(a_1) \cup FV(a_2)$$

...

$$FV(b_1 \wedge b_2) = FV(b_1) \cup FV(b_2)$$

$$FV(b_1 \vee b_2) = FV(b_1) \cup FV(b_2)$$

$$FV(\neg b_1) = FV(b_1)$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Eigenschaften von $\llbracket \cdot \rrbracket_N$ , $\llbracket \cdot \rrbracket_A$ , $\llbracket \cdot \rrbracket_B$

## Lemma 1.6.1

Sei  $n \in \mathbf{Num}$  und  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ . Dann gilt:

$$\llbracket n \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket n \rrbracket_A(\sigma') = \llbracket n \rrbracket_N.$$

## Lemma 1.6.2

Sei  $a \in \mathbf{Aexpr}$  und  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  mit  $\sigma(x) = \sigma'(x)$  für alle  $x \in FV(a)$ . Dann gilt:  $\llbracket a \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket a \rrbracket_A(\sigma')$ .

## Lemma 1.6.3

Sei  $b \in \mathbf{Bexpr}$  und  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  mit  $\sigma(x) = \sigma'(x)$  für alle  $x \in FV(b)$ . Dann gilt:  $\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \llbracket b \rrbracket_B(\sigma')$ .

**Beachte:** Die Gleichheitsrelation  $=$  auf  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbf{IB}$  wird hier bereits einfacher mit dem überladenen Symbol  $=$  bezeichnet.

# Übungsaufgabe 1.6.4

Was besagen

1. Lemma 1.6.1
2. Lemma 1.6.2
3. Lemma 1.6.3

anschaulich?

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

**1.6**

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Kapitel 1.7

## Syntaktische und semantische Substitution

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

**1.7**

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9



# Substitution

...ein Begriff von **zentraler Bedeutung** in zwei Varianten:

- ▶ **Syntaktische** Substitution
- ▶ **Semantische** Substitution

Das

- ▶ **Substitutionslemma 1.7.3**

beschreibt den Zusammenhang zwischen **syntaktischer** und **semantischer Substitution**.

# Syntaktische Substitution

...für arithmetische Ausdrücke.

## Definition 1.7.1 (Syntaktische Substitution)

Die **syntaktische Substitution** für arithmetische Ausdrücke ist eine dreistellige Abbildung

$$\cdot[\cdot/\cdot] : \mathbf{Aexpr} \times \mathbf{Aexpr} \times \mathbf{Var} \rightarrow \mathbf{Aexpr}$$

die induktiv definiert ist durch:

$$\forall a, a' \in \mathbf{Aexpr}. \forall x \in \mathbf{Var}.$$

$$n[a'/x] =_{df} n \quad \text{falls } a = n \in \mathbf{Num}$$

$$y[a'/x] =_{df} \begin{cases} a' & \text{falls } y = x \\ y & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{falls } a = y \in \mathbf{Var}$$

$$(a_1 \text{ op } a_2)[a'/x] =_{df} (a_1[a'/x] \text{ op } a_2[a'/x]) \quad \text{falls } a = (a_1 \text{ op } a_2), \\ \text{op} \in \{+, *, -, \dots\}$$

# Semantische Substitution

...für arithmetische Ausdrücke.

## Definition 1.7.2 (Semantische Substitution)

Die **semantische Substitution** für arithmetische Ausdrücke ist eine dreistellige Abbildung

$$\cdot[\cdot/\cdot] : \Sigma \times \mathbb{Z} \times \mathbf{Var} \rightarrow \Sigma$$

die definiert ist durch:

$$\forall \sigma \in \Sigma. \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}. \forall x \in \mathbf{Var}. \sigma[\mathbf{z}/x](y) =_{df} \begin{cases} \mathbf{z} & \text{falls } y = x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Substitutionslemma für arithmet. Ausdrücke

...Zusammenhang syntaktischer und semantischer Substitution für arithmetische Ausdrücke:

## Lemma 1.7.3 (Substitutionslemma für $\llbracket \cdot \rrbracket_A$ )

$$\forall a, a' \in \mathbf{Aexpr}. \forall \sigma \in \Sigma. \underbrace{\llbracket a[a'/x] \rrbracket_A(\sigma)}_{\text{Substituierter Ausdruck}} = \llbracket a \rrbracket_A(\underbrace{\sigma[\llbracket a' \rrbracket_A(\sigma)/x]}_{\text{Substituierter Zustand}})$$

wobei

- $[a'/x]$  die syntaktische Substitution
- $[\llbracket a' \rrbracket_A(\sigma)/x]$  die semantische Substitution

bezeichnen.

# Substitutionslemma für Boolesche Ausdrücke

...die Begriffe **syntaktischer** und **semantischer Substitution** lassen sich analog für **Boolesche Ausdrücke** definieren.

...für den Zusammenhang **syntaktischer** und **semantischer Substitution** für **Boolesche Ausdrücke** erhalten wir:

## Lemma 1.7.4 (Substitutionslemma für $\llbracket \cdot \rrbracket_B$ )

$\forall b \in \mathbf{Bexpr}. \forall a' \in \mathbf{Aexpr}. \forall \sigma \in \Sigma.$

$$\underbrace{\llbracket b[a'/x] \rrbracket_B(\sigma)}_{\text{Substituierter Ausdruck}} = \llbracket b \rrbracket_B(\underbrace{\sigma[\llbracket a' \rrbracket_A(\sigma)/x]}_{\text{Substituierter Zustand}})$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Kapitel 1.8

## Induktive Beweisprinzipien

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

**1.8**

1.8.1

1.8.2

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Grundlegende induktive Beweisprinzipien

...für den Beweis von Eigenschaften und Aussagen wie in Kapitel 1.6 und 1.7:

- ▶ Vollständige Induktion
- ▶ Verallgemeinerte Induktion
- ▶ Strukturelle Induktion

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

1.8.2

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Chapter 1.8.1

## Vollständige Induktion

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

**1.8.1**

1.8.2

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6



# Das Prinzip vollständiger Induktion

Sei  $\mathbb{N}$  die Menge natürlicher Zahlen und  $E$  eine Eigenschaft natürlicher Zahlen.

Das Prinzip vollständiger Induktion:

$$\underbrace{E(1)}_{\text{Induktionsanfang}} \wedge \left[ \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}. \underbrace{E(n)}_{\text{Induktionshypothese}} \Rightarrow \underbrace{E(n+1)}_{\text{Induktionsschritt}}}^{\text{Induktiver Fall}} \right] \Rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}. E(n)}_{\text{Folgerung}}$$

# Beispiel: Illustration vollständiger Induktion

## Lemma 1.8.1.1

$$\forall n \in \mathbb{N}. \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

**1.8.1**

1.8.2

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Beweis von Lemma 1.8.1.1 (1)

**Induktionsanfang:** Sei  $n = 1$ . In diesem Fall erhalten wir die Gleichheit von linker und rechter Seite der Aussage des Lemmas wie folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (2k - 1) &= \sum_{k=1}^1 (2k - 1) \\ &= 2 * 1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \\ &= 1^2 \\ &= n^2\end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

1.8.2

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Beweis von Lemma 1.8.1.1 (2)

Induktionsschritt: Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Aufgrund der Induktionshypothese (IH) können wir die Gleichheit  $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$  annehmen. Damit können wir den Beweis wie folgt vervollständigen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) &= 2(n + 1) - 1 + \sum_{k=1}^n (2k - 1) \\ \text{(IH)} &= 2(n + 1) - 1 + n^2 \\ &= 2n + 2 - 1 + n^2 \\ &= 2n + 1 + n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= n^2 + n + n + 1 \\ &= (n + 1)(n + 1) \\ &= (n + 1)^2\end{aligned}$$



# Übungsaufgabe 1.8.1.2

Beweise durch vollständige Induktion:

## Lemma 1.8.1.3

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.

$$\forall n \in \mathbb{N}. \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

# Chapter 1.8.2

## Verallgemeinerte Induktion

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

**1.8.2**

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Das Prinzip verallgemeinerter Induktion

Sei  $\mathbb{N}$  die Menge natürlicher Zahlen und  $E$  eine Eigenschaft natürlicher Zahlen.

Das Prinzip verallgemeinerter Induktion:

(Induktiver) Fall

$$\forall n \in \mathbb{N}. \left[ \underbrace{(\forall m < n. E(m))}_{\text{Induktionshypothese}} \Rightarrow \underbrace{E(n)}_{\text{Induktionsschritt}} \right] \Rightarrow \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}. E(n)}_{\text{Folgerung}}$$

**Beachte:** Für die kleinste natürliche Zahl  $\hat{n}$  ( $\mathbb{N}_0$  vs.  $\mathbb{N}_1$ ) reduziert sich die Induktionshypothese auf 'wahr', d.h.  $E(\hat{n})$  muss ohne Rückgriff auf besondere Voraussetzungen bewiesen werden.

# Bsp: Illustration verallgemeinerter Induktion

Die Fibonacci-Funktion  $fib : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  ist definiert durch:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0. fib(n) =_{df} \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

## Lemma 1.8.2.1

$$\forall n \in \mathbb{N}_0. fib(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Beweis durch verallgemeinerte Induktion.



# Schlüssel z. Beweis v. Lemma 1.8.2.1 f. $n \geq 2$

...ist es, gemäß der **Induktionshypothese (IH)** für  $m = n - 1$  und  $m = n - 2$  die Gleichheit

$$fib(m) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{\sqrt{5}}$$

auszunutzen.

(**Beachte:** Für  $n \geq 2$  könnten wir diese Gleichheit aufgrund der Induktionshypothese sogar für alle  $m < n$  ausnutzen (statt nur für  $m = n - 1$  und  $m = n - 2$ ), was aber nicht erforderlich ist, um den Beweis erfolgreich abzuschließen.)

# Beweis von Lemma 1.8.2.1 (1)

Fall 1: Sei  $n = 0$ . Wir erhalten wie gewünscht:

$$\text{fib}(0) = 0 = \frac{0}{\sqrt{5}} = \frac{1 - 1}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}}$$

(Beachte: Für den Beweis von Fall 1 liefert uns die Induktionshypothese nichts über die Gültigkeit der Aussage des Lemmas; glücklicherweise wird auch nichts benötigt.)

Fall 2: Sei  $n = 1$ . Wir erhalten auch hier wie gewünscht:

$$\text{fib}(1) = 1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}}$$

(Beachte: Für den Beweis von Fall 2 hätten wir aufgrund der Induktionshypothese die Aussage des Lemmas für  $n = 0$  ausnutzen können; das ist aber nicht erforderlich.)

# Beweis von Lemma 1.8.2.1 (2)

Fall 3: Sei  $n \geq 2$ . Mithilfe der **Ind.-Hypothese** f.  $n-2$ ,  $n-1$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{fib}(n) &= \text{fib}(n-2) + \text{fib}(n-1) \\ (2 \times \text{IH}) &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left[1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left[1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\ (*) &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

□

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

1.8.2

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

67/1698

# Beweis von (\*)

Gleichheit (\*) gilt aufgrund der Gleichheiten (1) und (2):

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

die sich mithilfe der **Binomialformeln (BF)** zeigen lassen.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \stackrel{(BF)}{=} \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \stackrel{(BF)}{=} \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

# Übungsaufgabe 1.8.2.2

Sei Funktion  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  definiert durch:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0. f(n) =_{df} \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} f(k) & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

Beweise durch **vollständige Induktion**:

## Lemma 1.8.2.3

$$(\forall n \in \mathbb{N}. n \geq 3). \sum_{k=0}^{n-3} 2^k = 2^{n-2} - 1$$

Beweise mit **verallgemeinerter Induktion** (und Lemma 1.8.2.3):

## Lemma 1.8.2.4

$$(\forall n \in \mathbb{N}. n \geq 2). f(n) = 2^{n-2}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

**1.8.2**

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 1.8.3

## Strukturelle Induktion

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

1.8.2

**1.8.3**

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Das Prinzip struktureller Induktion

Seien  $A$  und  $O$  eine Menge von Atomen und Operatoren; sei  $M$  die Menge der aus Elementen von  $A$  und  $O$  induktiv konstruierbaren Elemente. Bezeichne  $sub(m) \subseteq M$ ,  $m \in M$ , die Menge der Elemente, aus denen  $m$  konstruiert ist, und sei  $E$  eine Eigenschaft der Elemente von  $M$ .

Das Prinzip struktureller Induktion:

$$\forall m \in M. \left[ \underbrace{(\forall m' \in sub(m). E(m'))}_{\text{Induktionshypothese}} \Rightarrow \underbrace{E(m)}_{\text{Induktionsschritt}} \right] \Rightarrow \underbrace{\forall m \in M. E(m)}_{\text{Folgerung}}$$

(Induktiver) Fall

Beachte: Für die Atome  $\hat{m}$  aus  $M$ , die 'einfachsten' Elemente von  $M$ , gilt  $sub(\hat{m}) = \emptyset$ . Für diese Elemente reduziert sich die Induktionshypothese auf 'wahr', d.h.  $E(\hat{m})$  muss ohne besondere Voraussetzungen bewiesen werden.

# Beispiel: Lemma 1.6.2

...zur Bequemlichkeit hier wiederholt:

## Lemma 1.6.2

Sei  $a \in \mathbf{Aexpr}$  und  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  mit  $\sigma(x) = \sigma'(x)$  für alle  $x \in FV(a)$ . Dann gilt:

$$\llbracket a \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket a \rrbracket_A(\sigma')$$

Beweis durch strukturelle Induktion (über den induktiven Aufbau arithmetischer Ausdrücke).



# Beweis von Lemma 1.6.2 (1)

Sei  $a \in \mathbf{Aexpr}$  und seien  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  mit  $\sigma(x) = \sigma'(x)$  für alle  $x \in FV(a)$ .

**Fall 1:** Sei  $a = n$ ,  $n \in \mathbf{Num}$ . Mithilfe der Definitionen von  $\llbracket \cdot \rrbracket_A$  und  $\llbracket \cdot \rrbracket_N$  erhalten wir unmittelbar die Gleichheit der rechten und linken Seite der Aussage des Lemmas:

$$\llbracket a \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket n \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket n \rrbracket_N = \llbracket n \rrbracket_A(\sigma') = \llbracket a \rrbracket_A(\sigma')$$

**Fall 2:** Sei  $a = x$ ,  $x \in \mathbf{Var}$ . Wie in Fall 1) erhalten wir auch hier mithilfe der Definition von  $\llbracket \cdot \rrbracket_A$  die geforderte Gleichheit von rechter und linker Seite der Aussage des Lemmas:

$$\llbracket a \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket x \rrbracket_A(\sigma) = \sigma(x) = \sigma'(x) = \llbracket x \rrbracket_A(\sigma') = \llbracket a \rrbracket_A(\sigma')$$

## Beweis von Lemma 1.6.2 (2)

Fall 3: Sei  $a = a_1 + a_2$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbf{Aexpr}$ . Aufgrund der **Induktionshypothese (IH)** dürfen wir die Gleichheiten  $\llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma')$  und  $\llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma')$  annehmen. Das erlaubt uns, den Beweis wie folgt abzuschließen:

$$\begin{aligned} & \llbracket a \rrbracket_A(\sigma) \\ (\text{Wahl von } a) &= \llbracket a_1 + a_2 \rrbracket_A(\sigma) \\ (\text{Def. von } \llbracket \cdot \rrbracket_A) &= \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) \textbf{ plus } \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma) \\ (\text{IH für } a_1, a_2) &= \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma') \textbf{ plus } \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma') \\ (\text{Def. von } \llbracket \cdot \rrbracket_A) &= \llbracket a_1 + a_2 \rrbracket_A(\sigma') \\ (\text{Wahl von } a) &= \llbracket a \rrbracket_A(\sigma') \end{aligned}$$

Fälle für weitere arithmetische Operatoren: Analog.



# Übungsaufgabe 1.8.3.1

Beweise durch **strukturelle Induktion** (über den **induktiven Aufbau Boolescher Ausdrücke**):

## Lemma 1.6.3

Sei  $b \in \mathbf{Bexpr}$  und  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  mit  $\sigma(x) = \sigma'(x)$  für alle  $x \in FV(b)$ . Dann gilt:

$$\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \llbracket b \rrbracket_B(\sigma')$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

1.8.2

**1.8.3**

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Übungsaufgabe 1.8.3.2

Beweise durch **strukturelle Induktion** über den **induktiven Aufbau arithmetischer Ausdrücke**):

**Lemma 1.7.3 (Substitutionslemma für  $\llbracket \cdot \rrbracket_A$ )**

$$\forall a, a' \in \mathbf{Aexpr}. \forall \sigma \in \Sigma. \llbracket a[a'/x] \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket a \rrbracket_A(\sigma[\llbracket a' \rrbracket_A(\sigma)/x])$$

Beweise durch **strukturelle Induktion** über den **induktiven Aufbau Boolescher Ausdrücke**):

**Lemma 1.7.4 (Substitutionslemma für  $\llbracket \cdot \rrbracket_B$ )**

$$\forall b \in \mathbf{Bexpr}. \forall a' \in \mathbf{Aexpr}. \forall \sigma \in \Sigma.$$

$$\llbracket b[a'/x] \rrbracket_B(\sigma) = \llbracket b \rrbracket_B(\sigma[\llbracket a' \rrbracket_A(\sigma)/x])$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

1.8.2

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

76/1698

# Übungsaufgabe 1.8.3.3

Was besagen

1. Substitutionslemma 1.7.3
2. Substitutionslemma 1.7.4

anschaulich?

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

1.8.2

**1.8.3**

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 1.8.4

## Gleichwertigkeit

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

1.8.2

1.8.3

**1.8.4**

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Die Prinzipien

...vollständiger Induktion:

$$E(1) \wedge [\forall n \in \mathbb{N}. E(n) \Rightarrow E(n+1)] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}. E(n)$$

...verallgemeinerter Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}. [(\forall m < n. E(m)) \Rightarrow E(n)] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}. E(n)$$

...struktureller Induktion:

$$\forall m \in M. [(\forall m' \in \text{sub}(m). E(m')) \Rightarrow E(m)] \Rightarrow \forall m \in M. E(m)$$

sind gleich mächtig, gleich ausdruckskräftig.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.8.1

1.8.2

1.8.3

1.8.4

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Abhängig

...vom Anwendungsfall ist meist **eines**

- ▶ der **Induktionsprinzipien** unmittelbarer, einfacher und deshalb **zweckmäßiger** anwendbar.

Zum Beweis von Aussagen oder Eigenschaften

- ▶ über induktiv definierten Datenstrukturen ist i.a. das Prinzip **struktureller Induktion**

am zweckmäßigsten.



# Kapitel 1.9

## Ausblick

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

**1.9**

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Die Semantik von WHILE

...als Bedeutung von **WHILE** werden wir ein **Semantikfunktional**

$$\llbracket \cdot \rrbracket : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

festlegen, das jedem **WHILE**-Programm  $\pi$  eine (partielle) Zustandstransformation

$$\llbracket \pi \rrbracket : \Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

auf der Menge der **Zustände** über der **Variablenmenge** **Var** und einem geeigneten **Datenbereich** **ID**

$$\Sigma =_{df} \{ \sigma \mid \sigma : \mathbf{Var} \rightarrow \mathbf{ID} \}$$

als Bedeutung zuordnet; für **ID** werden wir meist die Menge ganzer Zahlen  $\mathbb{Z}$  betrachten.

# Semantikdefinitionsstile (1)

...die **Semantik** einer Programmiersprache lässt sich wie deren **Syntax** auf verschiedene Weise festlegen. Man spricht von unterschiedlichen **Definitionsstilen**, die eine unterschiedliche Sicht auf die Bedeutung der Sprache gewähren und sich implizit an unterschiedliche **Adressaten** richten.

Von besonderer Wichtigkeit sind hier der

- ▶ **operationelle** (s. **Kap. 2**)
- ▶ **denotationelle** (s. **Kap. 3**)

und mit abweichendem Fokus

- ▶ **axiomatische** (s. **Kap. 4**)

**Semantikdefinitionsstil.**

# Semantikdefinitionsstile (2)

## ► Operationelle Semantik

Die Bedeutung eines (programmiersprachlichen) Konstrukts ist durch die Berechnung beschrieben, die es bei seiner Ausführung auf der Maschine induziert. Wichtig ist insbesondere, **wie** der Effekt der Berechnung erzeugt wird.

## ► Denotationelle Semantik

Die Bedeutung eines Konstrukts wird durch mathematische Objekte modelliert, die den Effekt der Ausführung der Konstrukte repräsentieren. Wichtig ist **einzig** der Effekt, nicht wie er bewirkt wird.

## ► Axiomatische Semantik

Bestimmte Eigenschaften des Effekts der Ausführung eines Konstrukts werden in Form von **Zusicherungen** ausgedrückt. Nicht relevante andere Aspekte der Ausführung werden dabei i.a. ignoriert.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Semantikdefinitionsstile (3)

...und ihre Adressaten bzw. besondere Eignung für:

Sprachimplementiersicht/Sprachimplementierung:

- ▶ Operationelle Semantik
  - Natürliche Semantik (Großschrittsemantik)
  - Strukturell operationelle Semantik (Kleinschrittsemantik)

Sprachentwicklersicht/Sprachdesign:

- ▶ Denotationelle Semantik

Verifiziersicht/Anwendungsprogrammierung

- ▶ Axiomatische Semantik
  - Beweiskalküle für partielle und totale Korrektheit
  - Korrektheit, Vollständigkeit

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Zurück zur Semantik von WHILE (1)

...wir werden ein Semantikfunktional für **W**HILE in jedem dieser Stile einführen:

## 1. Operationelle Semantik (Kap. 2)

### 1.1 Natürliche Semantik (Kap. 2.1)

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ns} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

### 1.2 Strukturell operationelle Semantik (Kap. 2.2)

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{sos} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

## 2. Denotationelle Semantik (Kap. 3)

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

Als **Hauptergebnis** wird sich herausstellen, dass die eingeführten Semantiken allesamt gleich sind, d.h.:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ns} = \llbracket \cdot \rrbracket_{sos} = \llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$$

# Zurück zur Semantik von WHILE (2)

Die Gleichheit von  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ns}$ ,  $\llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$  und  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$  erlaubt es, von **der** Semantik von **WHILE** zu sprechen und den Index an den Funktionalen fallen zu lassen:

$$\llbracket \cdot \rrbracket : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

Bei Bedarf können wir stets die für eine Anwendung jeweils zweckmäßigste Variante wählen.

Im Anschluss an die Semantikdefinition von **WHILE** werden wir die

## 3. Axiomatische Semantik (Kap. 4)

betrachten, die einen abweichenden Fokus auf **Programmverifikation** legt.

# Literaturhinweise für Kapitel 1 bis 5

## ...als Textbücher verwendbar:

- Hanne R. Nielson, Flemming Nielson. [Semantics with Applications: An Appetizer](#). Springer-V., 2007.
- Hanne R. Nielson, Flemming Nielson. [Semantics with Applications: A Formal Introduction](#). Wiley Professional Computing, Wiley, 1992.

Bem.: Eine (überarbeitete) Version ist frei erhältlich auf:  
[www.daimi.au.dk/~bra8130/Wiley\\_book/wiley.html](http://www.daimi.au.dk/~bra8130/Wiley_book/wiley.html)

## Verwandt, aber nicht austauschbar:

- Flemming Nielson, Hanne R. Nielson. [Formal Methods: An Appetizer](#). Springer-V., 2019.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9



# Literaturhinweise besonders für Kapitel 4 (1)

## ...ein Lehrbuchklassiker:

- Jacques Loeckx, Kurt Sieber. *The Foundations of Program Verification*. Wiley, 1984.

## ...zwei Überblicksklassiker:

- Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part 1*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 3(4):431-483, 1981.
- Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part II: Nondeterminism*. Theoretical Computer Science 28(1-2):83-109, 1984.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Literaturhinweise besonders für Kapitel 4 (2)

...ergänzend, weiterführend, vertiefend:

- Krzysztof R. Apt, Frank S. de Boer, Ernst-Rüdiger Olderog. [Verification of Sequential and Concurrent Programs](#). 3. Auflage, Springer-V., 2009.
- Krzysztof R. Apt, Ernst-Rüdiger Olderog. [Programmverifikation – Sequentielle, parallele und verteilte Programme](#). Springer-V., 1994.
- Ernst-Rüdiger Olderog, Bernhard Steffen. [Formale Semantik und Programmverifikation](#). In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 145-166, 2006.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Kapitel 1.10

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III



Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 1 (1)

-  Mordechai Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science*. 2. Auflage, Springer-V., 2001. (Chapter 9.2, Semantics of Programming Languages)
-  Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, Jèrôme Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Minè, Xavier Rival. *Static Analysis and Verification of Aerospace Software by Abstract Interpretation*. In Proceedings AIAA Infotech@Aerospace (AIAA I@A 2010), AIAA-2010-3385, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1-38, April 2010.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 1 (2)



Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, J  r  me Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Min  , Xavier Rival. *Static Analysis by Abstract Interpretation of Embedded Critical Software*. ACM Software Engineering Notes 36(1):1-8, 2011.



Al Bessey, Ken Block, Ben Chelf, Andy Chou, Bryan Fulton, Seth Hallem, Charles Henri-Gros, Asya Kamsky, Scott McPeak, Dawson Engler. *A Few Billion Lines of Code Later: Using Static Analysis to Find Bugs in the Real World*. Communications of the ACM 53(2):66-75, 2010.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III




Kap. 6

Kap. 7





Kap. 8

Kap. 9

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 1 (3)

-  Gilles Dowek. *Principles of Programming Languages*. Springer-V, 2009. (Chapter 1, Imperative Core; Chapter 1.1, Five Constructs)
-  Gerhard Goos, Wolf Zimmermann. *Programmiersprachen*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 515-562, 2006. (Kapitel 2.2, Elemente von Programmiersprachen: Syntax, Semantik und Pragmatik, Syntaktische Eigenschaften, Semantische Eigenschaften)
-  Carl A. Gunter. *Semantics of Programming Languages: Structures and Techniques*. MIT Press, 1992.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 1 (4)

-  Steve P. Miller, Michael W. Whalen, Darren D. Cofer. *Software Model Checking Takes Off*. Communications of the ACM 53(2):58-64, 2010.
-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Formal Methods: An Appetizer*. Springer-V., 2019.
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992.  
(Chapter 1, Introduction)
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 1, Introduction)

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 1 (5)



Caitlin Sadowski, Edward Aftandilian, Alex Eagle, Liam Miller-Cushon, Ciera Jaspán. *Lessons from Building Static Analysis Tools at Google*. Communications of the ACM 61(4):58-66, 2018.



Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. MIT Press, 1993. (Chapter 3, Some principles of induction; Chapter 4, Inductive definitions)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9



# Kapitel 2

## Operationelle Semantik von WHILE

Inhalt

Teil I

Kap. 1

**Kap. 2**

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11  
97/1698

# Operationelle Semantik von WHILE

...die *Bedeutung* eines *programmiersprachlichen Konstrukts* ist durch die *Berechnung* beschrieben, die es bei seiner Ausführung auf der Maschine induziert. Wichtig ist, **wie** der Effekt der Berechnung erzeugt wird.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11  
98/1698

# Kapitel 2.1

## Strukturell operationelle Semantik (SOS)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Strukturell operationelle Semantik

*...beschreibt den Ablauf jedes einzelnen **Berechnungsschritts**, der stattfindet; daher auch die Bezeichnung **Kleinschritt-Semantik**.*

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# WHILE : Strukturell operationelle Semantik

...das Funktional der strukturell operationellen Semantik (kurz: SO-Semantik) von WHILE :

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{SOS}} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

ordnet jedem Programm  $\pi$  als Bedeutung eine partiell definierte Zustandstransformation zu:

$$\llbracket \pi \rrbracket_{\text{SOS}} : \Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

die wir in der Folge definieren.

# Die SO-Semantik von WHILE

...beschreibt den Berechnungsvorgang von WHILE -Programmen als Folge elementarer

- Speicherzustandsübergänge

in Form von

- Konfigurationen, Paaren von (Rest-) Programm und (Zwischen-) Zustand bzw. Endzuständen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Konfigurationen

## Definition 2.1.1 (Konfigurationen)

- Paare  $\langle \pi, \sigma \rangle$  oder Zustände  $\sigma$  mit  $\pi \in \mathbf{Prg}$  WHILE -Programm und  $\sigma \in \Sigma$  Zustand, heißen **Konfiguration**.
- $\Gamma =_{df} (\mathbf{Prg} \times \Sigma) \cup \Sigma$  bezeichnet die Menge aller Konfigurationen,  $\gamma$  eine einzelne Konfiguration.

## Definition 2.1.2 (Nichtterminale, terminale Konfig.)

- Konfigurationen der Form  $\langle \pi, \sigma \rangle$  heißen **nichtterminal** (oder: **Zwischenkonfiguration**):  
...das (Rest-) Programm  $\pi$  ist auf den (Zwischen-) Zustand  $\sigma$  anzuwenden.
- Konfigurationen der Form  $\sigma$  heißen **terminal** (oder: **final**):  
...Zustand  $\sigma$  ist der nach Ende einer (regulär terminierenden) Programmausführung erreichte Zustand.

# Das SOS-Regelwerk für WHILE : Axiome (1)

$$[\text{skip}_{\text{SOS}}] \quad \frac{}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma}$$

$$[\text{ass}_{\text{SOS}}] \quad \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma) / x]}$$

$$[\text{iftt}_{\text{SOS}}] \quad \frac{}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_1, \sigma \rangle}$$

$$[\text{ifff}_{\text{SOS}}] \quad \frac{}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi_2, \sigma \rangle}$$

$$[\text{while}_{\text{SOS}}] \quad \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \text{if } b \text{ then } \pi; \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od else skip fi}, \sigma \rangle}$$

$\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{wahr}$

$\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{falsch}$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11



# Das SOS-Regelwerk für WHILE : Regeln (2)

$$[\text{comp}_{\text{sos}}^1] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \Rightarrow \Rightarrow \langle \pi'_1, \sigma' \rangle}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Rightarrow \Rightarrow \langle \pi'_1; \pi_2, \sigma' \rangle}$$

$$[\text{comp}_{\text{sos}}^2] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \Rightarrow \Rightarrow \sigma'}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Rightarrow \Rightarrow \langle \pi_2, \sigma' \rangle}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Regelwerke: Axiome und Regeln

...wir unterscheiden:

- Prämissenlose Regeln, sog. **Axiome**, der Form:

$$[Axiomsname] \quad \frac{}{\text{Konklusion}} \quad [Randbedingung(en)]$$

- Prämissenbehaftete Regeln, sog. **(echte) Regeln**, der Form:

$$[Regelname] \quad \frac{\text{Prämisse(n)}}{\text{Konklusion}} \quad [Randbedingung(en)]$$

jeweils mit optionalen **Randbedingungen** (oder: **Seitenbedingungen**) wie z.B. im Axiom  $[if_{sos}^{ff}]$  in Form von

$$\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \mathbf{falsch}$$

# Das SOS-Regelwerk von WHILE

...besteht aus:

- 5 Axiomen

...eins für die leere Anweisung, eins für die Zuweisung, zwei für die Fallunterscheidung, eins für die while-Schleife.

- 2 Regeln

...für die sequentielle Komposition.

**Beachte:** Mit Ausnahme der Axiome  $[\text{skip}_{\text{SOS}}]$  und  $[\text{ass}_{\text{SOS}}]$  sind alle Axiome und Regeln von der Form

$$\frac{\dots}{\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi' \sigma' \rangle}$$

wobei die Konklusion einen SOS-Transitionsübergang in eine **Zwischenkonfiguration** zeigt, in der ein Restprogramm  $\pi'$  auf einen Zwischenzustand  $\sigma'$  anzuwenden bleibt, deshalb **Kleinschrittsemantik**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11  
107/169

# Berechnungsschritt, Berechnungsfolge

## Definition 2.1.3 (Berechnungsschritt)

Ein (SOS-) **Berechnungsschritt** ist von der Form

$$- \langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma \in \Gamma_{=df} (\mathbf{Prg} \times \Sigma) \cup \Sigma$$

Mit  $\Rightarrow^*$  bezeichnen wir die reflexiv-transitive Hülle von  $\Rightarrow$ .

## Definition 2.1.4 (Berechnungsfolge)

Eine (SOS-) **Berechnungsfolge** eines Programms  $\pi \in \mathbf{Prg}$  angesetzt auf einen (Anfangs-) Zustand  $\sigma \in \Sigma$  ist eine

- **endliche Folge**  $\gamma_0, \dots, \gamma_k$  von **Konfigurationen** mit:  
 $\gamma_0 = \langle \pi, \sigma \rangle$  und  $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$  für alle  $i \in \{0, \dots, k-1\}$

oder eine

- **unendliche Folge**  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$  von **Konfigurationen** mit:  
 $\gamma_0 = \langle \pi, \sigma \rangle$  und  $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ .

# Terminierung und Divergenz

## Definition 2.1.5 (Terminierung und Divergenz)

Eine **maximale** (d.h. nicht mehr verlängerbare) **Berechnungsfolge** heißt

- **regulär terminierend**, wenn sie endlich ist und die letzte Konfiguration aus  $\Sigma$  ist.
- **divergierend**, wenn sie unendlich ist.
- **irregulär terminierend** sonst.

(z.B. wegen Nichtauswertbarkeit der Bedingung einer Fallunterscheidung aufgrund einer Division durch **0**:

$\langle \text{if } a/0 = 42 \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle$  hat keine Folgekonfiguration: Weder  $[if_{sos}^{tt}]$  noch  $[if_{sos}^{ff}]$  ist anwendbar, da für beide Axiome die Auswertung der Randbedingung scheitert.)

# Beispiel: Illustration der SO-Semantik (1)

## Gegeben:

- Programm  $\pi \in \mathbf{Prg}$ :  
 $\pi \equiv y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$   
(Bemerkung:  $\equiv$  steht für 'syntaktisch ident')
- Anfangszustand  $\sigma \in \Sigma$ :

$$\sigma(z) = \begin{cases} 3 & \text{falls } z = x \\ z & z \in \mathbb{Z} \text{ beliebig, falls } z \neq x \end{cases}$$

**Gesucht:** Die von der Anfangskonfiguration  $\langle \pi, \sigma \rangle$  (lies: ' $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$ ')

$\langle y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle$   
ausgehende Berechnungsfolge.

## Behauptung:

$\langle y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle \Rightarrow^* \sigma[6/y][3/x]$

# Beispiel: Illustration der SO-Semantik (2)

...die die Behauptung beweisende **Berechnungsfolge** gemäß des SOS-Regelwerks:

$\langle y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle$   
 $\Rightarrow \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma[1/y] \rangle$   
 $\Rightarrow \langle \text{if } x \neq 1$   
     $\text{then } y := y * x; x := x - 1;$   
         $\text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$   
     $\text{else skip fi}, \sigma[1/y] \rangle$   
 $\Rightarrow \langle y := y * x; x := x - 1;$   
     $\text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma[1/y] \rangle$   
 $\Rightarrow \langle x := x - 1;$   
     $\text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[1/y])[3/y] \rangle$   
 $(\hat{=} \langle x := x - 1;$   
     $\text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma[3/y] \rangle )$

# Beispiel: Illustration der SO-Semantik (3)

$\Rightarrow\Rightarrow\langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[3/y])[2/x] \rangle$

$\Rightarrow\Rightarrow\langle \text{if } x \neq 1$

then  $y := y * x; x := x - 1;$

while  $x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$

else *skip* fi,  $(\sigma[3/y])[2/x] \rangle$

$\Rightarrow\Rightarrow\langle y := y * x; x := x - 1;$

while  $x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[3/y])[2/x] \rangle$

$\Rightarrow\Rightarrow\langle x := x - 1;$

while  $x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[6/y])[2/x] \rangle$

$\Rightarrow\Rightarrow\langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[6/y])[1/x] \rangle$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11  
112/169



# Beispiel: Illustration der SO-Semantik (4)

$\Rightarrow\Rightarrow$   $\langle \text{if } x \neq 1$   
     $\text{then } y := y * x; \ x := x - 1;$   
         $\text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od}$   
     $\text{else skip fi, } (\sigma[6/y])[1/x] \rangle$   
 $\Rightarrow\Rightarrow$   $\langle \text{skip, } (\sigma[6/y])[1/x] \rangle$   
 $\Rightarrow\Rightarrow$   $(\sigma[6/y])[1/x]$   
     $= \sigma[6/y][1/x]$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Korrektheitsargument voll aufgebrochen (1)

Der Berechnungsschritt:

$$\begin{aligned} [\text{while}_{\text{SOS}}] \quad \Rightarrow \quad & \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[1/y] \rangle \\ & \langle \text{if } x \neq 1 \\ & \quad \text{then } y := y * x; \ x := x - 1; \\ & \quad \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od} \\ & \quad \text{else skip fi}, \sigma[1/y] \rangle \end{aligned}$$

... mit angegebener angewendeter Regel steht abkürzend und vereinfachend für den **Ableitungbaum**:

$$\begin{array}{c} [\text{while}_{\text{SOS}}] \quad \frac{\quad}{\langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[1/y] \rangle \Rightarrow \langle \text{if } x \neq 1 \text{ then } y := y * x; \ x := x - 1; \\ \quad \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od} \\ \quad \text{else skip fi}, \sigma[1/y] \rangle} \end{array}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Korrektheitsargument voll aufgebrochen (2)

Der **Berechnungsschritt**:

$$\begin{array}{l} \langle y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle \\ [ass_{sos}], \\ [comp_{sos}^2] \implies \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[1/y] \rangle \end{array}$$

...mit angegebenen angewendeten Regeln steht abkürzend und vereinfachend für den **Ableitungbaum**:

$$\begin{array}{c} [ass_{sos}] \frac{\langle y := 1, \sigma \rangle \implies \sigma[1/y]}{[comp_{sos}^2] \frac{\langle y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle \implies \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[1/y] \rangle} \end{array}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Korrektheitsargument voll aufgebrochen (3)

Der Berechnungsschritt:

$$\langle (y := y * x; x := x - 1);$$

$$\text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma[1/y] \rangle$$

$$\begin{aligned} & [\text{ass}_{\text{sos}}], \\ & [\text{comp}_{\text{sos}}^2], \\ & [\text{comp}_{\text{sos}}^1] \Rightarrow \langle x := x - 1; \\ & \quad \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \\ & \quad (\sigma[1/y])[3/y] \rangle \end{aligned}$$

...mit angegebenen angewendeten Regeln steht abkürzend und vereinfachend für den Ableitungbaum:

$$\begin{aligned} & [\text{ass}_{\text{sos}}] \frac{}{\langle y := y * x, \sigma[1/y] \rangle \Rightarrow (\sigma[1/y])[3/y]} \\ & [\text{comp}_{\text{sos}}^2] \frac{}{\langle y := y * x; x := x - 1, \sigma[1/y] \rangle \Rightarrow \langle x := x - 1, (\sigma[1/y])[3/y] \rangle} \\ & [\text{comp}_{\text{sos}}^1] \frac{}{\langle (y := y * x; x := x - 1); \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma[1/y] \rangle \Rightarrow} \\ & \quad x := x - 1; \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[1/y])[3/y] \rangle \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# SOS-Regeln: Determiniertheit, Determinismus

## Lemma 2.1.6

$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \forall \sigma \in \Sigma. \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma.$

$$\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \gamma \wedge \langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

## Korollar 2.1.7

Die vom SOS-Regelwerk für eine Konfiguration induzierte Berechnungsfolge ist eindeutig bestimmt, d.h. determiniert.

Salopper: Die SO-Semantik von WHILE ist deterministisch!

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Das Semantikfunktional $\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{SOS}}$

...dank [Korollar 2.1.7](#) ist folgende Festlegung sinnvoll:

## Definition 2.1.8 (SO-Semantik von WHILE)

Die [strukturell operationelle Semantik](#) (oder: [SO-Semantik](#)) von [WHILE](#) ist durch das in folgender Weise definierte Funktional:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{SOS}} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

gegeben:

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \llbracket \pi \rrbracket_{\text{SOS}} =_{df} \lambda \sigma. \begin{cases} \sigma' & \text{falls } \langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow^* \sigma' \\ \text{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

(Anm.:  $\Rightarrow^*$  bezeichnet die [reflexiv-transitive Hülle](#) von  $\Rightarrow$ )

# Induktion über Längen von Berechnungsfolgen

...als Variante induktiver Beweisführung.

Induktion über die Länge von Berechnungsfolgen:

## ► Induktionsanfang

- Beweise, dass Eigenschaft  $E$  für Berechnungsfolgen der Länge  $0$  gilt.

## ► Induktionsschritt

- Beweise unter der Annahme, dass  $E$  für Berechnungsfolgen der Länge kleiner  $k$  gilt (**Induktionshypothese!**), dass  $E$  auch für Berechnungsfolgen der Länge  $k$  gilt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Induktive Beweisführung

...über die Länge von Berechnungsfolgen ist typisch für den Nachweis von Aussagen oder Eigenschaften im Zusammenhang mit strukturell operationeller Semantik.

Ein typisches Beispiel ist der Beweis von:

## Lemma 2.1.9

$$\begin{aligned} \forall \pi, \pi' \in \mathbf{Prg}. \forall \sigma, \sigma'' \in \Sigma. \forall k \in \mathbb{N}. (\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Rightarrow^k \sigma'') \Rightarrow \\ \exists \sigma' \in \Sigma. \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}. (k_1 + k_2 = k \wedge \\ \langle \pi_1, \sigma \rangle \Rightarrow^{k_1} \sigma' \wedge \\ \langle \pi_2, \sigma' \rangle \Rightarrow^{k_2} \sigma'') \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11



# Übungsaufgabe 2.1.10

Beweise mithilfe einer Induktion über die Länge von Berechnungsfolgen die Aussage von [Lemma 2.1.9](#).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Kapitel 2.2

## Natürliche Semantik (NS)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

**2.2**

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Natürliche Semantik

*...beschreibt, wie sich das **Gesamtergebnis der Programmausführung** ergibt; daher auch die Bezeichnung **Großschritt-Semantik**.*

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# WHILE : Natürliche Semantik

...das Funktional der natürlichen Semantik (kurz: N-Semantik) von WHILE :

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ns} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

ordnet jedem Programm  $\pi$  als Bedeutung eine partiell definierte Zustandstransformation zu:

$$\llbracket \pi \rrbracket_{ns} : \Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

die wir in der Folge definieren.

# Die N-Semantik von WHILE

...beschreibt den Berechnungsvorgang von **WHILE -Programmen** unmittelbar durch den Zusammenhang zwischen

- **initialem** (oder: **Anfangszustand**)
- **finalem** (oder: **Endzustand**)

**Speicherzustand** der Berechnung eines Programms.

Auch hier ist der bereits von der **SO-Semantik** bekannte Begriff der

- **Konfigurationen** (s. **Definition 2.1.1**)

zentral.

# Das NS-Regelwerk für WHILE : Axiome (1)

$$[\text{skip}_{ns}] \quad \frac{}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

$$[\text{ass}_{ns}] \quad \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \rightarrow \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma) / x]}$$

$$[\text{while}_{ns}^{ff}] \quad \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \mathbf{falsch}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Das NS-Regelwerk für WHILE : Regeln (2)

$$[\text{while}_{ns}^{tt}] \quad \frac{\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma', \langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma''}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{wahr}$$

$$[\text{if}_{ns}^{tt}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{wahr}$$

$$[\text{if}_{ns}^{ff}] \quad \frac{\langle \pi_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{falsch}$$

$$[\text{comp}_{ns}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma', \langle \pi_2, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma''}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

127/169

# Das NS-Regelwerk von WHILE

...besteht aus:

- 3 Axiomen

...eins für die leere Anweisung, eins für die Zuweisung, eins für die while-Schleife.

- 4 Regeln

...eins für die while Schleife, zwei für die Fallunterscheidung, eins für die sequentielle Komposition.

**Beachte:** Alle Axiome und Regeln sind von der Form

$$\frac{\dots}{\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

wobei die Konklusion einen NS-Transitionsübergang in einem Schritt in eine finale Konfiguration  $\sigma'$  zeigt, deshalb Großschrittsemantik.



# Beispiel: Illustration der N-Semantik (1)

## Gegeben:

- Programm  $\pi \in \mathbf{Prg}$ :  
 $\pi \equiv y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$   
(Bemerkung:  $\equiv$  steht für 'syntaktisch ident')
- Anfangszustand  $\sigma \in \Sigma$ :

$$\sigma(z) = \begin{cases} 3 & \text{falls } z = x \\ z & z \in \mathbb{Z} \text{ beliebig, falls } y \neq x \end{cases}$$

**Gesucht:** Der von der Anfangskonfiguration  $\langle \pi, \sigma \rangle$  (lies: ' $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$ ')

$\langle y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle$   
ausgehend erreichte finale Zustand.

## Behauptung:

$\langle y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[6/y][3/x]$



# NS-Regeln: Determiniertheit, Determinismus

## Lemma 2.2.1

$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \forall \sigma \in \Sigma. \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma. \langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{\text{yellow}} \gamma \wedge \langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{\text{yellow}} \gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$

## Korollar 2.2.2

Die vom **NS-Regelwerk** für eine Konfiguration induzierte finale Konfiguration ist (sofern definiert) eindeutig bestimmt, d.h. determiniert.

Salopper: Die N-Semantik von **WHILE** ist deterministisch!

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Das Semantikfunktional $\llbracket \cdot \rrbracket_{ns}$

...dank [Korollar 2.2.2](#) ist folgende Festlegung sinnvoll:

## Definition 2.2.3 (N-Semantik von WHILE)

Die [natürliche Semantik](#) (oder: [N-Semantik](#)) von [WHILE](#) ist durch das in folgender Weise definierte Funktional:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ns} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

gegeben:

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \llbracket \pi \rrbracket_{ns} =_{df} \lambda \sigma. \begin{cases} \sigma' & \text{falls } \langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \\ \text{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

# Induktion über Ableitungsbäume

....als Variante induktiver Beweisführung.

Induktion über den Aufbau von Ableitungsbäumen:

## ► Induktionsanfang

- Beweise, dass Eigenschaft  $E$  für die Axiome des Regelwerks gilt (und somit für alle nichtzusammengesetzten Ableitungsbäume).

## ► Induktionsschritt

- Beweise für jede echte Regel des Regelwerks unter der Annahme, dass  $E$  für jede Prämisse dieser Regel gilt (**Induktionshypothese!**), dass  $E$  auch für die Konklusion dieser Regel gilt, sofern die (optional vorhandenen) Randbedingungen der Regel erfüllt sind.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Induktive Beweisführung

...über den **Aufbau von Ableitungsbäumen** ist typisch für den Nachweis von **Aussagen** oder **Eigenschaften** im Zusammenhang mit **natürlicher Semantik**.

Ein typisches Beispiel ist der Beweis von **Lemma 2.2.1**, das wir nachstehend wiederholen:

## Lemma 2.2.1

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \forall \sigma \in \Sigma. \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma. \langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{\gamma} \gamma \wedge \langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{\gamma'} \gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

# Übungsaufgabe 2.2.4

Beweise induktiv über den Aufbau von Ableitungsbäumen die Aussage von [Lemma 2.2.1](#).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Kapitel 2.3

## Äquivalenz von SO- und N-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

**2.3**

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11



# Zusammenhang von $\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{SOS}}$ und $\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{ns}}$

## Lemma 2.3.1

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma. \langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{\text{orange}} \sigma' \Rightarrow \langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow^*_{\text{green}} \sigma'$$

**Beweis** durch strukturelle Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums für  $\langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{\text{orange}} \sigma'$ .

## Lemma 2.3.2

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma. \forall k \in \mathbb{N}. \langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow^k_{\text{green}} \sigma' \Rightarrow \langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{\text{orange}} \sigma'$$

**Beweis** durch Induktion über die Länge der Berechnungsfolge  $\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow^k_{\text{green}} \sigma'$ , d.h. durch vollständige Induktion über  $k$ .

# Äquivalenz von SO- und N-Semantik

...aus Lemma 2.3.1 und Lemma 2.3.2 folgt sofort:

Theorem 2.3.3 (Gleichheit von  $\llbracket \pi \rrbracket_{sos}$  und  $\llbracket \pi \rrbracket_{ns}$ )

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \llbracket \pi \rrbracket_{sos} = \llbracket \pi \rrbracket_{ns}$$

...und somit Gleichheit der SO- und N-Semantikfunktionale:

Theorem 2.3.4 (Gleichheit von  $\llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$  und  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ns}$ )

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{sos} = \llbracket \cdot \rrbracket_{ns}$$

# Kapitel 2.4

## Vergleich von SO- und N-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

**2.4**

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Der Fokus strukturell operationeller Semantik

...liegt auf den

- individuellen Schritten einer Berechnungsfolge (der Ausführung von Zuweisungen und Tests) beschrieben durch Transitionen.

Intuitiv beschreibt eine Transition  $\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \gamma$

- den ersten Schritt der von  $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$  ausgehenden Berechnungsfolge.

$\gamma$  kann dabei von einer von zwei Formen sein:

- $\langle \pi', \sigma' \rangle$ : Die Abarbeitung von  $\pi$  ist nicht vollständig; das Restprogramm  $\pi'$  ist auf  $\sigma'$  anzusetzen. Ist von  $\langle \pi', \sigma' \rangle$  kein Transitionsübergang möglich (z.B. Division durch 0), so terminiert die Abarbeitung von  $\pi$  in  $\langle \pi', \sigma' \rangle$  irregulär.
- $\sigma'$ : Die Abarbeitung von  $\pi$  ist vollständig;  $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$  terminiert in einem Schritt in  $\sigma'$  regulär.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11  
140/169

# Der Fokus natürlicher Semantik

...liegt auf dem

- Zusammenhang von **initialem** und **finalem** Zustand einer Berechnungsfolge.

Intuitiv hat eine **Transition**  $\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$  folgende Bedeutung:

- $\pi$  angesetzt auf den **initialen Zustand**  $\sigma$  terminiert im **finalen Zustand**  $\sigma'$ .
- Existiert ein solches  $\sigma'$  nicht, so ist die **N-Semantik** für den **initialen Zustand**  $\sigma$  **undefiniert**.

Nichtdefiniertsein der **N-Semantik** für eine Anfangskonfiguration  $\langle \pi, \sigma \rangle$  entspricht Nichtterminierung oder irregulärer Terminierung der **SO-Semantik** für  $\langle \pi, \sigma \rangle$  und umgekehrt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Grundlegende Arbeiten

...zur **strukturell operationellen Semantik**:

- Gordon D. Plotkin. **A Structural Approach to Operational Semantics**. Lecture notes, DAIMI FN-19, Aarhus University, Dänemark, 1981 (auch als Nachdruck von 1991).  
(Die 'Ursprungsreferenz' für strukturell operationelle Semantik)
- Gordon D. Plotkin. **An Operational Semantics for CSP**. In Proceedings of the TC-2 Working Conference on Formal Description of Programming Concepts II, Dines Bjørner (Hrsg.), North-Holland, Amsterdam, 199-226, 1982.

In **konsolidierter** Form:

- Gordon D. Plotkin. **The Origins of Structural Operational Semantics**. Journal of Logic and Algebraic Programming 60-61:3-15, 2004.
- Gordon D. Plotkin. **A Structural Approach to Operational Semantics**. Journal of Logic and Algebraic Programming 60-61:17-139, 2004. (i.w. Überarbeitung von DAIMI FN-19)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Grundlegende Arbeiten

...zur natürlichen Semantik:

- Dominique Clément, Joëlle Despeyroux, Thierry Despeyroux, Gilles Kahn. [A Simple Applicative Language: Mini-ML](#). In Proceedings of the Int. ACM Conference on Lisp and Functional Programming (LFP'86), 13-27, 1986.

This paper presents a formal description of the central part of the ML language in Natural Semantics...

Konsolidierter:

- Gilles Kahn. [Natural Semantics](#). In Proceedings of the 4th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'87), Springer-V., LNCS 247, 22-39, 1987.

...many researchers have begun to present semantic specifications in a style [...] advocated by [Plotkin](#). The purpose of this paper is to introduce in an intuitive manner the essential ideas of the method that we call now [Natural Semantics](#)...

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Kapitel 2.5

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 2 (1)

-  Dominique Clément, Joëlle Despeyroux, Thierry Despeyroux, L. Hascoet, Gilles Kahn. *Natural Semantics on the Computer*. INRIA Research Report RR 416, INRIA, Sophia-Antipolis, June 1985.
-  Dominique Clément, Joëlle Despeyroux, Thierry Despeyroux, Gilles Kahn. *A Simple Applicative Language: Mini-ML*. In Proceedings of the International ACM Conference on Lisp and Functional Programming (LFP'86), 13-27, 1986.
-  Joëlle Despeyroux. *Proof of Translation in Natural Semantics*. In Proceedings of the 2nd International IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'86), 193-205, 1986.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8





Kap. 9

Kap. 10





Teil IV

Kap. 11

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 2 (2)

-  Matthew Hennessey. *The Semantics of Programming Languages: An Elementary Introduction using Structural Operational Semantics*. Wiley, 1991.
-  Gilles Kahn. *Natural Semantics*. In Proceedings of the 4th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'87), Springer-V., LNCS 247, 22-39, 1987.
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992.  
(Chapter 2, Operational Semantics)
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 2, Operational Semantics)

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 2 (3)

-  Gordon D. Plotkin. *A Structural Approach to Operational Semantics*. Lecture notes, DAIMI FN-19, Aarhus University, Dänemark, 1981, (als Nachdruck von 1991).
-  Gordon D. Plotkin. *An Operational Semantics for CSP*. In Proceedings of the TC-2 Working Conference on Formal Description of Programming Concepts II, Dines Bjørner (Hrsg.), North-Holland, Amsterdam, 199-226, 1982.
-  Gordon D. Plotkin. *The Origins of Structural Operational Semantics*. Journal of Logic and Algebraic Programming 60-61:3-15, 2004.
-  Gordon D. Plotkin. *A Structural Approach to Operational Semantics*. Journal of Logic and Algebraic Programming 60-61:17-139, 2004.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8



Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11  
147/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 2 (4)

-  Thierry Despeyroux. *Typol: A Formalism to Implement Natural Semantics*. INRIA Research Report 94, Roquencourt, France, 1988.
-  Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. MIT Press, 1993. (Chapter 2, Introduction to operational semantics)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

2.1

2.2

2.3

2.4

2.5

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Kapitel 3

## Denotationelle Semantik von WHILE

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

**Kap. 3**

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Denotationelle Semantik

*...die **Bedeutung** eines **programmiersprachlichen Konstrukts** wird durch mathematische Objekte, **Abbildungen**, modelliert, die den Effekt der Ausführung der Konstrukte beschreiben. Wichtig ist **einzig** der Effekt, nicht wie er bewirkt wird.*

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Vergleich operationelle, denotationelle Semantik

...der **Fokus (strukturell) operationeller Semantik** liegt darauf,

- wie ein Programm angesetzt auf einen (einzelnen) Zustand ausgeführt wird.
- Der Gesamteffekt des Programms, seine Bedeutung als Zustandstransformation (im Sinn einer Abbildung) bleibt im Dunkeln.

...der **Fokus denotationeller Semantik** liegt auf dem

- **Gesamteffekt** eines Programms, seiner Bedeutung als Zustandstransformation (im Sinn einer Abbildung).
- Wie das Programm angesetzt auf einen Zustand diese Abbildung erreicht, bleibt im Dunkeln.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Beispiel

...ist  $\pi$  ein Programm zur Berechnung der **Fakultätsfunktion**, so macht es eine

► (strukturell) operationelle Semantik für  $\pi$

- **einfach** zu erkennen, wie das Programm angesetzt auf einen Zustand das Resultat berechnet.
- **schwierig** zu erkennen, welche Bedeutung einzelne Programmteile haben und dass insgesamt die Fakultätsfunktion berechnet wird.

► denotationelle Semantik für  $\pi$

- **einfach** zu erkennen, welche Bedeutung einzelne Programmteile haben und dass insgesamt die Fakultätsfunktion berechnet wird.
- **schwierig** zu erkennen, wie dies für einen Zustand tatsächlich erreicht wird.



# Der denotationelle Semantikdefinitionsstil

...erreicht das, indem für jedes **syntaktische** Konstrukt eine **semantische** Funktion festgelegt wird, die dem syntaktischen Konstrukt ein **mathematisches Objekt**, eine **Abbildung** als Bedeutung zuweist; eine Abbildung, die den Effekt der Ausführung des Konstrukts beschreibt (nicht jedoch, wie dieser Effekt erreicht wird oder erreicht werden kann).

**Zusammengefasst:** Für jedes

- **elementare syntaktische Konstrukt** gibt es eine semantische Funktion, eine **Zustandstransformation**, die seinen Effekt, seine Bedeutung beschreibt.
- **zusammengesetzte syntaktische Konstrukt** gibt es eine semantische Funktion, die **kompositionell** über die semantischen Funktionen seiner Komponenten definiert ist, und seinen Effekt, seine Bedeutung beschreibt.
- **Zentral: Kompositionalität** der semantischen Funktionen.

# Kapitel 3.1

## Denotationelle Semantik (DS)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

**3.1**

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# WHILE : Denotationelle Semantik

...das Funktional der **denotationellen Semantik** (kurz: **D-Semantik**) von **WHILE** :

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

ordnet jedem Programm  $\pi$  als Bedeutung eine partiell definierte **Zustandstransformation** zu:

$$\llbracket \pi \rrbracket_{ds} : \Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

die wir in der Folge definieren.

# Die D-Semantik von WHILE

...beschreibt die Bedeutung von WHILE -Programmen unmittelbar in Form einer Zustandstransformation(sfunktion), die sich

- **kompositionell (!)** aus den Bedeutungsfunktionen (d.h. den Zustandstransformationsfunktionen) der Programmenteile ergibt.

Konfigurationen wie bei der SO- und N-Semantik spielen keine Rolle, ebenso wenig der konkrete Ausführungsprozess.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Das D-Regelwerk v. WHILE: Defin. Gleichungen

$$\llbracket \text{skip} \rrbracket_{ds} = id \quad (\text{Identität})$$

$$\llbracket x := t \rrbracket_{ds} = \lambda \sigma. \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma)/x] \quad (\text{Zustandssubstitution})$$

$$\llbracket \pi_1; \pi_2 \rrbracket_{ds} = \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds} \quad (\text{Kompositionalität!})$$

$$\llbracket \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \rrbracket_{ds} = cond(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}, \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds})$$

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = FIX F$$

$$\text{mit } F g = cond(\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, id)$$

mit:

- $id = \lambda \sigma. \sigma$ : Identische Zustandstransformation.
- $cond$ : Fallunterscheidungsfunktional.
- $F$ : Zustandstransformationsfunktional.
- $FIX$ : Fixpunktzustandstransformationsfunktional.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11  
157/169

# Die Funktionale *cond*, *F* und *FIX* im Detail

- $cond : (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{B}) \times (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \times (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$

...Fallunterscheidungsfunktional definiert durch:

$$cond(p, g_1, g_2) =_{df} \lambda \sigma. \begin{cases} g_1(\sigma) & \text{falls } p(\sigma) = \mathbf{wahr} \\ g_2(\sigma) & \text{falls } p(\sigma) = \mathbf{falsch} \\ undef & \text{sonst} \end{cases}$$

- $F : (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$

...Zustandstransformationsfunktional; einige Zustands-transf. werden von *F* ident abgebildet, sog. **Fixpunkte**.

- $FIX : ((\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)) \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$

...Fixpunktzustandstransformationsfunktional, das den kleinsten Fixpunkt des Argumentfunktionals liefert.

Intuitiv: Sind  $f : (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$  und  $g : (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$  zwei Funktionen, so gilt:

$$FIX f = g \iff \underbrace{f \ g = g}_{g \text{ Fixpunkt von } f} \quad \wedge \quad \underbrace{\forall g'. f \ g' = g' \Rightarrow g \sqsubseteq g'}_{g \text{ kleinster Fixpunkt von } f}$$

# Die D-Semantik der Fallunterscheidung

...ist im D-Regelwerk festgelegt durch:

$$\llbracket \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \rrbracket_{ds} = \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}, \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds})$$

Expandieren wir *cond* in dieser Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \llbracket \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \rrbracket_{ds} \\ &= \lambda \sigma. \begin{cases} \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}(\sigma) & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \mathbf{wahr}) \\ \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds}(\sigma) & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \mathbf{falsch}) \\ \text{undef} & \text{falls } \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{undef} \end{cases} \end{aligned}$$

was unserer Erwartung an die Bedeutung der Fallunterscheidung entspricht.

**Erinnerung:**  $\llbracket \cdot \rrbracket_B$  und  $\llbracket \cdot \rrbracket_A$  sind partiell definiert (z.B. Division durch 0, vgl. Kapitel 1.4 und 1.5).

# Das D-Semantik der while-Schleife

...ist im D-Regelwerk festgelegt durch:

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = \text{FIX } F$$

wobei das Argumentfunktional:

$$F : (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

des Fixpunktzustandstransformationsfunktionals definiert ist durch:

$$\begin{aligned} F g &= \text{cond} (\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, id) \\ &= \lambda \sigma. \begin{cases} (g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds})(\sigma) & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \mathbf{wahr}) \\ \sigma & \text{falls } (\llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \mathbf{falsch}) \\ \text{undef} & \text{falls } \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{undef} \end{cases} \end{aligned}$$

was auch unserer Erwartung an die Bedeutung der while-Schleife entspricht.



# Veranschaulichung (1)

...wir zeigen, dass bei 'vernünftiger' Festlegung der **D-Semantik** die Bedeutung der **while-Schleife** ein Fixpunkt des Funktionals  $F$  sein muss.

Wir haben die Erwartung, dass bei 'vernünftiger' Festlegung der **D-Semantik** von **Fallunterscheidung** und **while-Schleife** gilt:

Die **D-Semantiken** der Anweisungen **while  $b$  do  $\pi$  od** und **if  $b$  then  $(\pi; \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od})$  else *skip* fi** stimmen überein:

$$\text{A) } \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = \llbracket \text{if } b \text{ then } (\pi; \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}) \text{ else } \textit{skip} \text{ fi} \rrbracket_{ds}$$

Gleichheit A) liefert zusammen mit den **D-Semantiken** von **Fallunterscheidung**, **sequentieller Komposition** und ***skip*-Anweisung** Gleichheit B):

$$\text{B) } \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = \textit{cond} (\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, \textit{id})$$

## Veranschaulichung (2)

Die Definition v. Funktional  $F$  liefert zusätzlich Gleichheit C):

$$\text{C) } F \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} =_{df} \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, id)$$

Aus B) und C) folgt Gleichheit D):

$$\text{D) } \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = F \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds}$$

...was **wie angekündigt** bedeutet: Die **D-Semantik** der **while-Schleife** ist **Fixpunkt**, **ein Fixpunkt** des Funktionals  $F$  (i.a. gibt es mehr als einen Fixpunkt).

Das **D-Regelwerk** legt die **D-Semantik** der **while-Schleife** genauer als den **eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkt** von  $F$  fest (s. **Kapitel 3.2**):

$$\text{E) } \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} =_{df} \text{FIX } F$$

# D-Regeln: Determiniertheit, Determinismus

...unter Vorwegnahme der Ergebnisse aus Kapitel 3.2 zur Wohldefiniertheit von **FIX**  $F$  gilt, dass die Festlegungen des D-Regelwerks 'vernünftig' sind:

## Theorem 3.1.1 (Determiniertheit, Determinismus)

Das D-Regelwerk von **WHILE** legt für jedes **WHILE**-Programm  $\pi \in \mathbf{Prg}$  in eindeutiger Weise eine partielle Zustands-transformation

$$z_{\pi} : \Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

(als Bedeutung) fest.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Das Semantikfunktional $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$

...dank Theorem 3.1.1 ist folgende Festlegung sinnvoll:

## Definition 3.1.2 (D-Semantik von WHILE)

Die **denotationelle Semantik** (oder: **D-Semantik**) von **WHILE** ist gegeben durch das Funktional

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

wobei für alle  $\pi \in \mathbf{Prg}$

$$\llbracket \pi \rrbracket_{ds} : \Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

die gemäß Theorem 3.1.1 gegebene eindeutig bestimmte partielle Zustandstransformation  $z_\pi$  ist:

$$\llbracket \pi \rrbracket_{ds} = z_\pi$$

# Kapitel 3.2

## Wohldefiniertheit von FIX F

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

**3.2**

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Vorgehens- und Beweisskizze

Wir zeigen:

1. Die Menge  $\mathcal{Z}$  der partiellen Zustandstransformationen

$$\mathcal{Z} =_{df} [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]$$

ist durch die Ordnung  $\sqsubseteq_{\mathcal{Z}}$  auf  $\mathcal{Z}$  vollständig partiell geordnet, d.h.  $\sqsubseteq_{\mathcal{Z}} \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ ,  $(\mathcal{Z}, \sqsubseteq_{\mathcal{Z}})$  ist vollständige partielle Ordnung (VPO) (Definition 3.2.3, Lemma 3.2.13).

2. Das Funktional  $F : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$  auf  $\mathcal{Z}$  mit  $F g = \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, \text{id})$  ist stetig (Lemma 3.2.14, Lemma 3.2.15).
3. Stetige Funktionen auf VPOs besitzen nach Fixpunktsatz 3.2.12 von Knaster, Tarski und Kleene einen eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkt als kleinste obere Schranke der von  $\perp$  ausgehenden Kleene-Kette.

Aus 1.), 2.) und 3.) folgt die Wohldefiniiertheit von  $\text{FIX } F$  im Anwendungsfall; damit Theorem 3.1.1 u. die Wohldefiniiertheit des denot. Semantikfunktional:  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$ .

# Der Graph von Funktionen

..bezeichne  $\mathcal{F}$  die Menge aller (partiellen und totalen) Funktionen von  $M$  nach  $N$ .

## Definition 3.2.1 (Graph einer Funktion)

Der **Graph** einer

1. **totalen** Funktion  $f \in \mathcal{F}$  ist die Relation **graph** auf  $M \times N$  definiert durch:

$$\text{graph}(f) =_{df} \{ \langle m, n \rangle \mid f(m) = n \} \subseteq M \times N$$

2. **partiellen** Funktion  $f \in \mathcal{F}$  mit Definitionsbereich  $M_f \subseteq M$  ist die Relation **graph** auf  $M_f \times N$  definiert durch:

$$\text{graph}(f) =_{df} \{ \langle m, n \rangle \mid m \in M_f \wedge f(m) = n \} \subseteq M_f \times N$$

**Vereinbarung:** Für  $f \in \mathcal{F}$ ,  $M_f \subseteq M$ , schreiben wir:

$$f(m) = \begin{cases} n & \text{falls } \langle m, n \rangle \in \text{graph}(f) \\ \text{undef} & \text{falls } m \notin M_f \end{cases}$$

# Eigenschaften des Graphen einer Funktion

## Lemma 3.2.2 (Funktionsgrapheigenschaften)

Der Graph einer

1. **totalen** Funktion  $f \in \mathcal{F}$  ist:

1.1 **rechtseindeutig**, d.h.  $\forall m \in M. \forall n, n' \in N. \langle m, n \rangle \in \text{graph}(f) \wedge \langle m, n' \rangle \in \text{graph}(f) \Rightarrow n = n'$ .

1.2 **linkstotal**, d.h.  $\forall m \in M. \exists n \in N. \langle m, n \rangle \in \text{graph}(f)$ .

2. (echt) **partiellen** Funktion  $f : M \hookrightarrow N$  mit  $M_f \subset M$  ist **rechtseindeutig**, aber nicht **linkstotal**.

**Bemerkung:** Funktionen  $f \in \mathcal{F}$  können mit ihrem Graphen  $\text{graph}(f)$  identifiziert werden und umgekehrt.



# Partielle Ordnung auf $\mathcal{F}$

## Definition 3.2.3 (Ordnung auf $\mathcal{F}$ )

$$\forall f, g \in \mathcal{F}. f \sqsubseteq_{\mathcal{F}} g \iff_{df} \text{graph}(f) \subseteq \text{graph}(g)$$

## Lemma 3.2.4

$$\forall f, g \in \mathcal{F}. f \sqsubseteq_{\mathcal{F}} g \iff \\ \forall m \in M. f(m) \text{ definiert} = n \Rightarrow g(m) \text{ definiert} = n$$

## Lemma 3.2.5 (Part. Ordnung m. kleinstem Element)

Das Paar  $(\mathcal{F}, \sqsubseteq_{\mathcal{F}})$  ist eine partielle Ordnung mit kleinstem Element  $\perp_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ ,  $\perp_{\mathcal{F}} =_{df} \lambda m. \text{undef}$ , der total undefinierten Funktion.

# Ketten und Schranken in $\mathcal{F}$

## Definition 3.2.6 (Kette in $\mathcal{F}$ )

Sei  $F =_{df} \{f_1, f_2, f_3, \dots\} \subseteq \mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  heißt **Kette** (in  $\mathcal{F}$ ), wenn  $F$  bezüglich  $\sqsubseteq_{\mathcal{F}}$  total geordnet ist, d.h. die Elemente von  $F$  sich anordnen lassen in der Form:

$$f_1 \sqsubseteq_{\mathcal{F}} f_2 \sqsubseteq_{\mathcal{F}} f_3 \sqsubseteq_{\mathcal{F}} \dots$$

## Definition 3.2.7 ((Kleinste) obere Schranke in $\mathcal{F}$ )

Sei  $F \subseteq \mathcal{F}$ ,  $g \in \mathcal{F}$ .  $g$  heißt

1. **obere Schranke** von  $F$ , wenn gilt:  $\forall f \in F. f \sqsubseteq_{\mathcal{F}} g$ .
2. **kleinste obere Schranke** von  $F$ , wenn gilt:
  - 2.1  $g$  ist obere Schranke von  $F$ .
  - 2.2  $\forall f \in \mathcal{F}. f$  obere Schranke von  $F \Rightarrow g \sqsubseteq_{\mathcal{F}} f$ .

# Schranken von Ketten (partieller) Funktionen

## Lemma 3.2.8

Sei  $F \subseteq \mathcal{F}$  eine Kette (partieller oder totaler) Funktionen. Dann gilt: Die kleinste obere Schranke von  $F$ , in Zeichen:  $\bigsqcup F$ , existiert und ist gegeben durch:

$$\text{graph}(\bigsqcup F) \text{ existiert} = \bigcup \{\text{graph}(f) \mid f \in F\}$$

Identifizieren wir  $\text{graph}(\bigsqcup F)$  mit der Funktion  $\bigsqcup F$  selbst, erhalten wir:

$$\forall m \in M. (\bigsqcup F)(m) = n \iff \exists f \in F. f(m) = n$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Vollständige partielle Ordnungen

## Definition 3.2.9 (Vollständige partielle Ordnung)

Eine partielle Ordnung  $(P, \sqsubseteq)$  heißt **vollständige partielle Ordnung (VPO)**, falls jede (aufsteigende) Kette  $K \subseteq P$  eine kleinste obere Schranke  $\bigsqcup K$  in  $P$  besitzt, d.h.  $\bigsqcup K$  *existiert*  $\in P$ .

## Lemma 3.2.10 (VPO $(\mathcal{F}, \sqsubseteq_{\mathcal{F}})$ )

$(\mathcal{F}, \sqsubseteq_{\mathcal{F}})$  ist eine **vollständige partielle Ordnung (VPO)** (mit kleinstem Element  $\perp_{\mathcal{F}}$ ).

# Monotonie und Stetigkeit

...von Funktionen auf vollständigen partiellen Ordnungen.

## Definition 3.2.11 (Monotonie, Stetigkeit)

Seien  $(C, \sqsubseteq_C)$  und  $(D, \sqsubseteq_D)$  zwei VPOs und  $f$  eine Funktion von  $C$  nach  $D$ . Dann heißt  $f$

1. **monoton** gdw.  $\forall c, c' \in C. c \sqsubseteq_C c' \Rightarrow f(c) \sqsubseteq_D f(c')$   
(Erhalt der Ordnung der Elemente)
2. **stetig** gdw. (i)  $f$  monoton  
(ii)  $\forall C' \subseteq C. f(\bigsqcup_C C') =_D \bigsqcup_D f(C')$   
(Erhalt der kleinsten oberen Schranken)

# Existenz kleinster Fixpunkte stetiger Funktionen

## Fixpunktttheorem 3.2.12 (Knaster, Tarski, Kleene)

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  eine VPO und  $f \in [C \xrightarrow{\text{stet}} C]$  eine stetige Funktion auf  $C$ . Dann gilt:

$f$  hat einen eindeutig bestimmten **kleinsten Fixpunkt**  $\mu f \in C$ , der durch das **Supremum** der (sog.) **Kleene-Kette**  $\{\perp, f(\perp), f^2(\perp), f^3(\perp), \dots\}$  gegeben ist, d.h.:

$$\mu f = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) = \bigsqcup \{\perp, f(\perp), f^2(\perp), \dots\}$$

**Erinnerung:**  $f^0 =_{df} Id_C$ ;  $f^i =_{df} f \circ f^{i-1}$ ,  $i > 0$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Zustandstransformationen als VPO

...bezeichne  $\mathcal{Z} =_{df} [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]$  die Menge partieller Zustands-  
transformationen.

Die Ordnung  $\sqsubseteq_{\mathcal{F}}$  auf  $\mathcal{F}$  überträgt sich für  $M = N$  und  $\Sigma = M$   
unmittelbar auf  $\mathcal{Z}$ :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathcal{Z}. z_1 \sqsubseteq_{\mathcal{Z}} z_2 \iff_{df} z_1 \sqsubseteq_{\mathcal{F}} z_2 \iff$$

$$\forall \sigma \in \Sigma. z_1(\sigma) \text{ definiert} = \sigma' \Rightarrow z_2(\sigma) \text{ definiert} = \sigma'$$

## Lemma 3.2.13 (VPO ( $\mathcal{Z}, \sqsubseteq_{\mathcal{Z}}$ ))

( $\mathcal{Z}, \sqsubseteq_{\mathcal{Z}}$ ) ist eine vollständige partielle Ordnung (VPO) (mit  
kleinstem Element  $\perp_{\mathcal{Z}} \in \mathcal{Z}$ ,  $\perp_{\mathcal{Z}} =_{df} \lambda \sigma. \text{undef}$ , der total  
undefinierten Zustandstransformation).

# Stetigkeitsresultate für Zustandstransformat.

## Lemma 3.2.14

Sei  $p \in [\Sigma \hookrightarrow \text{IB}]$ ,  $g, g_0 \in [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]$  und  $F$  definiert durch:

$$F g = \text{cond}(p, g, g_0)$$

Dann gilt:  $F$  ist stetig.

## Lemma 3.2.15

Sei  $g, g_0 \in [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]$  und  $F$  definiert durch:

$$F g = g \circ g_0$$

Dann gilt:  $F$  ist stetig.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11



# Zusammen

...mit:

## Lemma 3.2.16

Das **D-Regelwerk** von **W<sub>HILE</sub>** definiert eine totale Funktion:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} \in [\mathbf{Prg} \rightarrow \mathcal{Z}]$$

...sind wir durch. Wir erhalten:

## Theorem 3.2.17 (Wohldefiniiertheit von $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$ )

$\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$  ist wohldefiniert.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Grundlegende Darstellung

...der Theorie **denotationeller Semantik**:

- Joseph E. Stoy. **Denotational Semantics: The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory**. MIT Press, 1981.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Kapitel 3.3

## Äquivalenz denotationeller und operationeller Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

**3.3**

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Äquivalenz von  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$ ,  $\llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$ : (i)  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds} \subseteq \llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$

### Lemma 3.3.1

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \llbracket \pi \rrbracket_{ds} \subseteq \llbracket \pi \rrbracket_{sos}$$

**Beweis** durch strukturelle Induktion über den induktiven Aufbau von  $\pi$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

**3.3**

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Äquivalenz von $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$ , $\llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$ : (ii) $\llbracket \cdot \rrbracket_{sos} \subseteq \llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$

## Lemma 3.3.2

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \llbracket \pi \rrbracket_{sos} \subseteq \llbracket \pi \rrbracket_{ds}$$

Beweis von

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma. \langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow^* \sigma' \Rightarrow \llbracket \pi \rrbracket_{ds}(\sigma) = \sigma'$$

durch Induktion über die Länge  $k$  der Berechnungsfolge  $\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow^k \langle \pi', \sigma' \rangle$  unter Benutzung von 1.) und 2.), dass:

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma.$$

1.  $\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma' \Rightarrow \llbracket \pi \rrbracket_{ds}(\sigma) = \sigma'$

2.  $\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi', \sigma' \rangle \Rightarrow \llbracket \pi \rrbracket_{ds}(\sigma) = \llbracket \pi' \rrbracket_{ds}(\sigma')$

...die durch Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums für  $\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \sigma'$  bzw.  $\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow \langle \pi', \sigma' \rangle$  gezeigt werden.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11  
181/169

# Äquivalenz von $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$ , $\llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$ , $\llbracket \cdot \rrbracket_{ns}$

Lemma 3.3.1 und Lemma 3.3.2 liefern:

Theorem 3.3.3 (Äquivalenz von  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$  und  $\llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$ )

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \llbracket \pi \rrbracket_{ds} = \llbracket \pi \rrbracket_{sos}$$

Aus Theorem 3.3.3 und Theorem 2.3.3 folgt weitergehend:

Theorem 3.3.4 (Äquivalenz von  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$ ,  $\llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$ ,  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ns}$ )

$$\forall \pi \in \mathbf{Prg}. \llbracket \pi \rrbracket_{ds} = \llbracket \pi \rrbracket_{sos} = \llbracket \pi \rrbracket_{ns}$$

# Kapitel 3.4

## Eindeutigkeit der Semantik von WHILE

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

**3.4**

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Eindeutigkeit der Semantik von WHILE

...die Äquivalenz der strukturell operationellen, natürlichen und denotationellen Semantik von WHILE erlaubt, den semantik-angebenden Index in der Folge fortzulassen und vereinfachend von  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{WHILE}}$  als **der Semantik** von WHILE zu sprechen:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{WHILE}} : \mathbf{Prg} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

definiert (z.B.) für den

- Sprachentwickler in Form von:  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{WHILE}} =_{df} \llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$
- Sprachimplementierer in Form von:  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{WHILE}} =_{df} \llbracket \cdot \rrbracket_{sos}$

Da wir keine andere Sprache als WHILE betrachten, können wir statt  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{WHILE}}$  noch einfacher  $\llbracket \cdot \rrbracket$  schreiben.



# Kapitel 3.5

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

**3.5**

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8




Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 3 (1)

-  Michael J.C. Gordon. *The Denotational Description of Programming Languages*. Springer-V., 1979.
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992.  
(Chapter 4, Denotational Semantics)
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 5, Denotational Semantics; Chapter 6, More on Denotational Semantics)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8





Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11  
186/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 3 (2)

-  David A. Schmidt. *Denotational Semantics: A Methodology for Language Development*. Allyn & Bacon, 1986.
-  Joseph E. Stoy. *Denotational Semantics: The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory*. MIT Press, 1981.
-  Robert D. Tennent. *Semantics of Programming Languages*. Prentice Hall, 1991.
-  Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. MIT Press, 1993. (Chapter 5, The denotational semantics of IMP; Chapter 8, Introduction to domain theory)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

3.1

3.2

3.3

3.4

3.5

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

# Teil II

## Verifikation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

**Teil II**

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 4

## Axiomatische Semantik von WHILE

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Axiomatische Semantik von WHILE

*...bestimmte Eigenschaften des Effekts der Ausführung eines Konstrukts werden als **Zusicherungen** ausgedrückt; nicht dafür relevante andere Aspekte der Ausführung werden ignoriert. Die **Korrektheit** oder **Gültigkeit** der Zusicherungen wird bewiesen; man spricht von **Programmverifikation**.*

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

**Kap. 4**

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
190/169

# Kapitel 4.1

## Korrektheitsbegriffe, Programmverifikation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

**4.1**

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
191/169

# Programmverifikation

...beschäftigt sich damit zu beweisen, dass ein Programm bestimmte

- Eigenschaften

erfüllt (oder besitzt oder für diese Eigenschaften korrekt ist).

Dabei lässt sich zwischen

- partiellen
- totalen

Korrektheitseigenschaften unterscheiden.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8



# Partielle, totale Korrektheitseigenschaften

...für ein Programm  $\pi$ .

Partielle Korrektheitseigenschaften von  $\pi$  garantieren:

- Wird  $\pi$  angesetzt auf einen Zustand  $\sigma$  und terminiert  $\pi$  regulär in einem Zustand  $\sigma'$ , dann stehen die Werte der Variablen von  $\sigma$  und  $\sigma'$  in einer bestimmten Beziehung  $E$  zueinander;  $\pi$  heißt dann **partiell korrekt** für  $E$ .

Totale Korrektheitseigenschaften von  $\pi$  garantieren:

- Wird  $\pi$  angesetzt auf einen Zustand  $\sigma$ , dann terminiert  $\pi$  regulär in einem Zustand  $\sigma'$  und die Werte der Variablen von  $\sigma$  und  $\sigma'$  stehen in einer bestimmten Beziehung  $E$  zueinander.  $\pi$  heißt dann **total korrekt** für  $E$ .

Informell: Totale Korrektheit “gleich”

Partielle Korrektheit “plus” Reguläre Termination

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
193/169

# Beispiel: Programm und Programmeigenschaft

Sei  $\pi$  das (kanonische) Fakultätsprogramm:

$\pi \equiv x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$

Betrachte Eigenschaft  $E$ :

$$E : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \text{IB}$$

$$\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma. E(\sigma, \sigma') \iff_{df} \sigma'(y) = \sigma(a)!$$

wobei  $! : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_1$  die Fakultätsfunktion bezeichnet:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0. n! =_{df} \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

# Partielle, totale Korrektheit von $\pi$ bzgl. $E$

## Lemma 4.1.1 (Partielle Korrektheit von $\pi$ bzgl. $E$ )

$\pi$  ist **partiell korrekt** für  $E$ , d.h. **wird**  $\pi$  angesetzt auf einen Zustand  $\sigma \in \Sigma$  **und** terminiert  $\pi$  regulär in einem Zustand  $\sigma' \in \Sigma$ , **dann** gilt  $E(\sigma, \sigma')$ , d.h.:  $\sigma'(y) = \sigma(a)$ !

## Lemma 4.1.2 (Totale Korrektheit von $\pi$ bzgl. $E$ )

$\pi$  ist **total korrekt** für  $E$  für jeden Anfangszustand  $\sigma$  mit  $\sigma(a) \geq 0$ , d.h. **wird**  $\pi$  angesetzt auf einen Zustand  $\sigma \in \Sigma$  mit  $\sigma(a) \geq 0$ , **dann** terminiert  $\pi$  regulär in einem Zustand  $\sigma' \in \Sigma$  **und** es gilt  $E(\sigma, \sigma')$ , d.h.:  $\sigma'(y) = \sigma(a)$ !

# Aufgabe der Programmverifikation

...ist es nun, die Gültigkeit von [Lemma 4.1.1](#) und [Lemma 4.1.2](#) zu beweisen.

Das ist auf verschiedene Weise möglich, z.B. durch:

- ▶ [direkte Programmverifikation](#).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Kapitel 4.2

## Direkte Programmverifikation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

**4.2**

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Direkte Verifikation

...wegen  $\llbracket \cdot \rrbracket_{sos} = \llbracket \cdot \rrbracket_{ns} = \llbracket \cdot \rrbracket_{ds}$  (s. Äquivalenztheorem 3.3.4)  
haben wir Wahlfreiheit, die Gültigkeit von Lemma 4.1.1 und Lemma 4.1.2 zu zeigen bzgl. der

- strukturell operationellen
- natürlichen
- denotationellen

Semantik von  $\pi$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Beweisskizzen für Lemma 4.1.1 (1)

...bei Wahl der

- strukturell operationellen Semantik ist zu zeigen:

$$\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma. \langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow^* \sigma' \Rightarrow \sigma'(y) = \sigma(a)! \wedge \sigma(a) \geq \mathbf{0} \quad (*)$$

wobei  $(*)$  durch vollständige Induktion über die Länge der Ableitungsfolge von

$$\langle \pi, \sigma \rangle \Rightarrow^* \sigma'$$

bewiesen wird.

- natürlichen Semantik ist zu zeigen:

$$\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma. \langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \Rightarrow \sigma'(y) = \sigma(a)! \wedge \sigma(a) \geq \mathbf{0} \quad (**)$$

wobei  $(**)$  durch strukturelle Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums von

$$\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$$

bewiesen wird.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Beweisskizzen für Lemma 4.1.1 (2)

...bei Wahl der

- **denotationellen Semantik** ist zu zeigen:

$$\psi(\llbracket \pi \rrbracket_{ds}) = \mathbf{wahr} \quad (***)$$

wobei  $\psi : [(\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \rightarrow \mathbb{B}]$  ein Prädikat auf der Menge der Zustandstransformationen ist, das definiert ist durch:

$$\forall g \in [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]. \psi(g) = \mathbf{wahr} \iff_{df}$$

$$\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma. g(\sigma) = \sigma' \Rightarrow \sigma'(y) = \sigma(a)! \wedge \sigma(a) \geq \mathbf{0}$$

Nach Beweis der Zulässigkeit von  $\psi$  (s. Definition A.6.1) wird **(\*\*\*)** mittels **Fixpunktinduktion** (s. Anhang A.6) bewiesen.



# Übungsaufgabe 4.2.1

1. Vervollständige die Beweisskizzen für [Lemma 4.1.1](#) mit Wahl der
  - strukturell operationellen
  - natürlichen
  - denotationellen

Semantik für  $\pi$ .

2. Beweise in gleicher Weise die Gültigkeit von [Lemma 4.1.2](#).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

**4.2**

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Bobachtung

...anhand der (hier nicht) im Detail ausgeführten Beweise von [Lemma 4.1.1](#) und [Lemma 4.1.2](#):

Unabhängig von der Wahl

- strukturell operationeller
- natürlicher
- denotationeller

[Semantik](#) für die Beweisausführung, erscheinen die Beweise durch die enge Kopplung an die volle Semantik von [W](#)HILE detaillierter und kleinteiliger als es für den Beweis von 'lediglich' Eigenschaft [E](#) nötig erscheint.

Erleichterung schafft deshalb der Übergang von [direkter](#) zu [axiomatischer Programmverifikation](#), die von 'unwesentlichen' Details der Programmiersprachensemantik abstrahiert und deshalb 'einfachere' Beweise sog. [Zusicherungen](#) erlaubt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Kapitel 4.3

## Axiomatische Programmverifikation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

**4.3**

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Axiomatische Programmverifikation

...beschäftigt sich mit dem Beweis **partieller** und **totaler Korrektheitseigenschaften** von Programmen in Form sog. **Zusicherungen**, deren (**semantischer**) **Gültigkeit** und (**syntaktischer**) **Ableitbarkeit** mithilfe von **Kalkülen**.

**Grundlegende Begriffe:**

- ▶ **Hoare-Tripel** (**syntaktische Sicht**) bzw. **Korrekttheitsformeln** (**semantische Sicht**) der Form

$$\{p\} \pi \{q\} \quad \text{bzw.} \quad [p] \pi [q]$$

- ▶ **Gültigkeit** von Korrekttheitsformeln im Sinn
  - **partieller** ( $\{p\} \pi \{q\}$ )
  - **totaler Korrektheit** ( $[p] \pi [q]$ ).
- ▶ **Ableitungskalküle** (oder: **Beweiskalküle**) für partielle, totale Korrektheit
  - (Kalkül-) **Korrektheit**
  - (Kalkül-) **Vollständigkeit**

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

204/169

# Zentral für uns

...die Einführung von Begriff und Bedeutung von

- ▶ (Kalkül-) Korrektheit
- ▶ (Kalkül-) Vollständigkeit

am Beispiel von Ableitungskalkülen für

- ▶ partielle, totale Korrektheit

von Zusicherungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Aufbau von Zusicherungen

Zusicherungen sind von einer der Formen:

$$\{p\} \pi \{q\} \quad \text{oder} \quad [p] \pi [q]$$

mit

- $\pi$  Programm
- $p$  Prädikat oder logische Formel, sog. Vorbedingung
- $q$  Prädikat oder logische Formel, sog. Nachbedingung
- Vor- und Nachbedingung
  - geschweift geklammert: partielle Korrektheitszusicherung
  - eckig geklammert: totale Korrektheitszusicherung

Je nach Wahl der Grundmenge für Vor- und Nachbedingungen führt dies auf extensionale und intensionale Ansätze axiomatischer Programmverifikation.

# Extensionale vs. intentionale Ansätze

...axiomatischer Programmverifikation.

Extensionale Ansätze: **Prädikate** als Grundmenge

- $p, q$  **Prädikate** auf Zuständen, d.h.  $p, q \in [\Sigma \hookrightarrow \text{IB}]$ .

Intentionale Ansätze: **Logische Formeln** als Grundmenge

- $p, q$  **Formeln** einer Logik  $\mathcal{L}$ , einer sog. **Zusicherungssprache**:
  - Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (1. Stufe)
  - Prädikatenlogik 2. Stufe
  - ...

deren **Semantik** gegeben ist durch ein Funktional:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow \Sigma \hookrightarrow \text{IB}$$

d.h.  $\llbracket p \rrbracket_{\mathcal{L}}, \llbracket q \rrbracket_{\mathcal{L}} \in [\Sigma \rightarrow \text{IB}]$ .

**Beispiel:**  $\mathcal{L} =_{df} \mathbf{Bexpr}$  mit  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} =_{df} \llbracket \cdot \rrbracket_B$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

207/169

# Zur 'Erfüllt in'-Sprechweise

...für **Prädikate** und **logische Formeln** relativ zu einem Zustand.

Sei  $\sigma \in \Sigma$  ein Zustand.

- **Extensional**: Sei  $p : \Sigma \rightarrow \mathbb{B}$  ein **Prädikat**.

$p$  heißt **erfüllt in**  $\sigma \iff_{df} p(\sigma) = \mathbf{wahr} \ (\iff p(\sigma))$

- **Intensional**: Sei  $p \in \mathcal{L}$  eine **logische Formel**.

$p$  heißt **erfüllt in**  $\sigma \iff_{df} \llbracket p \rrbracket_{\mathcal{L}}(\sigma) = \mathbf{wahr} \ (\iff \llbracket p \rrbracket_{\mathcal{L}}(\sigma))$



# Zwei wegbereitende klassische Arbeiten

...zu Programmverifikation im Stil axiomatischer Semantik:

- Robert W. Floyd. *Assigning Meaning to Programs*. Proceedings of Symposium on Applied Mathematics, Mathematical Aspects of Computer Science, American Mathematical Society, New York, Vol. 19, 19-32, 1967.
- Charles A.R. Hoare. *An Axiomatic Basis for Computer Programming*. Communications of the ACM 12:576-580, 583, 1969.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 4.3.1

## Partielle und totale Korrektheit

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Partielle Korrektheit

Sei  $\pi$  ein **WHILE**-Programm,  $p, q$  zwei **logische Formeln** oder **Prädikate**:

## Definition 4.3.1.1 (Partielle Korrektheit)

Eine **Hoaresche Zusicherung** (oder: **Korrektheitsformel**)

$$\{p\} \pi \{q\}$$

heißt **gültig im Sinn partieller Korrektheit** (oder: **partiell korrekt**) (in Zeichen:  $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$ ) gdw für jeden Zustand  $\sigma \in \Sigma$  gilt:

Ist die **Vorbedingung**  $p$  in  $\sigma$  erfüllt **und** terminiert die Berechnung von  $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$  **regulär** im Endzustand  $\sigma'$ , **dann** ist die **Nachbedingung**  $q$  in  $\sigma'$  erfüllt.

# Totale Korrektheit

Sei  $\pi$  ein **WHILE** -Programm,  $p$ ,  $q$  zwei **logische Formeln** oder **Prädikate**:

## Definition 4.3.1.2 (Totale Korrektheit)

Eine **Hoaresche Zusicherung** (oder: **Korrektheitsformel**)

$$[p] \pi [q]$$

heißt **gültig im Sinn totaler Korrektheit** (oder: **total korrekt**)  
(in Zeichen:  $\models_{tk} [p] \pi [q]$ ) gdw für jeden Zustand  $\sigma \in \Sigma$  gilt:

Ist die **Vorbedingung**  $p$  in  $\sigma$  erfüllt, **dann** terminiert die Berechnung von  $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$  **regulär** im Endzustand  $\sigma'$  **und** die **Nachbedingung**  $q$  ist in  $\sigma'$  erfüllt.

# Erinnerung: Terminierung, Divergenz

Ein **WHILE**-Programm  $\pi$  angesetzt auf einen Zustand  $\sigma \in \Sigma$  terminiert

- **regulär** gdw  $\pi$  endet nach endlich vielen Schritten in einer finalen Konfiguration, d.h. in einem Zustand  $\sigma' \in \Sigma$ .
- **irregulär** gdw  $\pi$  endet nach endlich vielen Schritten in einer Zwischenkonfiguration  $\langle \pi', \sigma' \rangle$ , die keine Folgekonfiguration besitzt (die Berechnung bleibt in  $\langle \pi', \sigma' \rangle$  stecken).

Ein **WHILE**-Programm  $\pi$  angesetzt auf einen Zustand  $\sigma \in \Sigma$

- **divergiert** gdw  $\pi$  terminiert nicht (weder regulär noch irregulär).

Ein **WHILE**-Programm  $\pi$  heißt

- **divergent** gdw  $\pi$  divergiert für jeden Zustand  $\sigma \in \Sigma$ .

**Wichtig:** **WHILE**-Programme sind deterministisch!

# Zusammenhang

...von partieller und totaler Korrektheit:

## Lemma 4.3.1.3

Für **W**HILE -Programme  $\pi$  gilt:

$$\models_{tk} [p] \pi [q] \implies \models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$$

...d.h. totale Korrektheit eines **W**HILE -Programms bzgl. eines Paares aus Vor- und Nachbedingung impliziert auch partielle Korrektheit bzgl. dieses Vor- und Nachbedingungs-paares.

Informell

Totale Korrektheit “gleich”

Partielle Korrektheit “plus” Reguläre Termination

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

214/169

# Charakterisierung logischer Formeln, Prädikate

...durch erfüllende Zustandsmengen.

## Definition 4.3.1.4 (Charakterisierung)

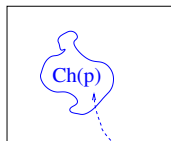
Die Zustandsmenge

1.  $Ch(p) =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid \llbracket p \rrbracket_B(\sigma) = \mathbf{wahr}\}$ ,  $p$  logische Formel
2.  $Ch(p) =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid p(\sigma) = \mathbf{wahr}\}$ ,  $p$  Prädikat

heißt **Charakterisierung** von  $p$ .

Veranschaulichung:

Menge aller Zustände  $\Sigma$



Charakterisierung von  $p$ :  $Ch(p) \subseteq \Sigma$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

215/169

# Partielle und totale Korrektheit

...ausgedrückt mithilfe der Charakterisierung von Vor- und Nachbedingungen von Korrektheitsformeln.

## Lemma 4.3.1.5 (Charakterisierungslemma)

Eine Korrektheitsformel  $\{p\} \pi \{q\}$  ist

1. partiell korrekt ( $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$ ), falls gilt:

$$\llbracket \pi \rrbracket(Ch(p)) \subseteq Ch(q)$$

mit  $\llbracket \pi \rrbracket(Ch(p)) =_{df} \{\llbracket \pi \rrbracket(\sigma) \mid \sigma \in Ch(p)\}$ .

2. total korrekt ( $\models_{tk} [p] \pi [q]$ ), falls gilt:

$$\{p\} \pi \{q\} \text{ partiell korrekt} \wedge Ch(p) \subseteq Def(\llbracket \pi \rrbracket)$$

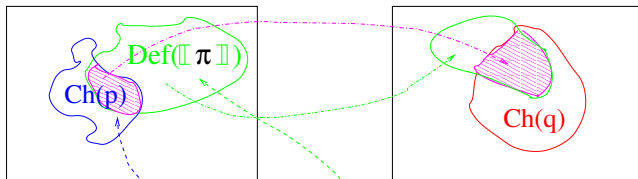
mit  $Def(\llbracket \pi \rrbracket) =_{df} \{\sigma \mid \pi \text{ angesetzt auf } \sigma, \sigma \in \Sigma, \text{ terminiert regulär}\}$  Definitionsbereich v.  $\pi$ .



# Veranschaulichung von Lemma 4.3.1.5(1)

...Gültigkeit von  $\{p\} \pi \{q\}$  im Sinn partieller Korrektheit:

Menge aller Zustände  $\Sigma$



Charakterisierung von  $p$ :  $Ch(p) \leq \Sigma$

Definitionsbereich von  $\pi$ :  $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \leq \Sigma$



Bild von  $\llbracket \pi \rrbracket$  für  $Def(\llbracket \pi \rrbracket)$

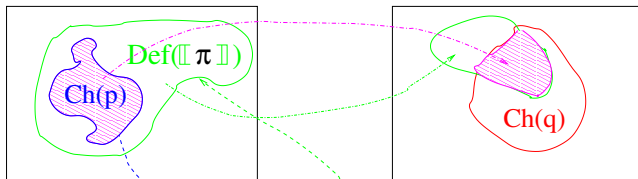


Bild von  $\llbracket \pi \rrbracket$  für  $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \cap Ch(p)$

# Veranschaulichung von Lemma 4.3.1.5(2)

...Gültigkeit von  $[p] \pi [q]$  im Sinn totaler Korrektheit:

Menge aller Zustände  $\Sigma$



Charakterisierung von  $p$ :  $\text{Ch}(p) \leq \Sigma$

Definitionsbereich von  $\pi$ :  $\text{Def}([\pi]) \leq \Sigma$



Bild von  $[\pi]$  für  $\text{Def}([\pi])$



Bild von  $[\pi]$  für  $\text{Def}([\pi]) \cap \text{Ch}(p)$

# Beispiele: Hoaresche Zusicherungen

...für das **W**HILE -Programm zur Berechnung der **F**akultätsfunktion.

## ► Partielle Korrektheit:

$$\begin{array}{c} \{true\} \\ x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\} \end{array}$$

## ► Totale Korrektheit:

$$\begin{array}{c} [a \geq 0] \\ x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ [y = a!] \end{array}$$

# Intensionales, extensionales Verständnis

...von Vor- und Nachbedingungen.

$$\{true\} / [a \geq 0]$$

$$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\} / [y = a!]$$

Wenn nicht ausdrücklich festgelegt, können die Vorbedingungen (im Bsp.  $true$ ,  $a \geq 0$ ) und die Nachbedingung (im Bsp.  $y = a!$ ) verstanden werden als:

- Logische Ausdrücke, hier Boolesche Ausdr. (intensional):  
 $true, (a \geq 0), (y = a!) \in \mathbf{Bexpr}$
- Prädikate (extensional):  
 $true, (a \geq 0), (y = a!) \in [\Sigma \rightarrow \mathbf{IB}]$  definiert durch
  - $\forall \sigma \in \Sigma. (true)(\sigma) =_{df} \mathbf{wahr}$
  - $\forall \sigma \in \Sigma. (a \geq 0)(\sigma) =_{df} \sigma(a) \geq 0$
  - $\forall \sigma \in \Sigma. (y = a!)(\sigma) =_{df} \sigma(y) = (\sigma(a))!$

# Für die Lesart von Vor- und Nachbedingungen

...als **Prädikate** werden diese als **Prädikatkurzschreibweisen** gemäß folgender Vereinbarungen angesehen:

|                       |          |      |            |   |
|-----------------------|----------|------|------------|---|
| $p_1 \wedge p_2$      | kurz für | $p$  | def. durch | $p(\sigma) =_{df} p_1(\sigma) \text{ und } p_2(\sigma)$   |
| $p_1 \vee p_2$        | kurz für | $p$  | def. durch | $p(\sigma) =_{df} p_1(\sigma) \text{ oder } p_2(\sigma)$  |
| $\neg p$              | kurz für | $p'$ | def. durch | $p'(\sigma) =_{df} \text{ nicht } p(\sigma)$  |
| $p[a/x]$              | kurz für | $p'$ | def. durch | $p'(\sigma) =_{df} p(\sigma[\llbracket a \rrbracket_A(\sigma)/x])$                              |
| $p_1 \Rightarrow p_2$ | kurz für | $p$  | def. durch | $p(\sigma) =_{df} p_1(\sigma) \text{ impl } p_2(\sigma)$  |
| $a_1 = a_2$           | kurz für | $p$  | def. durch | $p(\sigma) =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) = \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma)$    |
| $a_1 \neq a_2$        | kurz für | $p$  | def. durch | $p(\sigma) =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_A(\sigma) \neq \llbracket a_2 \rrbracket_A(\sigma)$ |
| ...                   | ...      | ...  | ...        | ...   |

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

221/169

# Programmvariablen vs. logische Variablen

...in **Zusicherungen**  $\{p\} \pi \{q\}$ ,  $[p] \pi [q]$  wird unterschieden zwischen:

- **Programmvariablen**

...Variablen, die in  $\pi$  vorkommen (und deren Wert möglicherweise durch  $\pi$  verändert wird).

- **logischen Variablen**

...Variablen, auf die von  $\pi$  nicht (oder höchstens lesend) zugegriffen wird (und deren Wert deshalb von  $\pi$  nicht verändert werden kann).

**Logische Variablen** erlauben es

- sich Werte von **Programmvariablen** von vor Ausführung eines Programm(stücks) zu 'merken' und sich in Nachbedingungen darauf zu beziehen.

# Veranschaulichung anhand zweier Beispiele

$$[x = n \wedge n \geq 0]$$
$$y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[y = n!]$$

...ist **gültiges** Hoare-Tripel: Die **Nachbedingung** trifft eine Aussage über den Zusammenhang des Werts der **logischen Variable**  $n$  (vor und nach Ausführung des Programms) und des Werts von **Programmvariable**  $y$  nach Ausführung des Programms.

$$[x = n \wedge n \geq 0]$$
$$y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[y = x!]$$

...ist **weder gültiges noch sinnvolles** Hoare-Tripel: Die **Nachbedingung** trifft eine (i.a. falsche) Aussage über den Zusammenhang der Werte der **Programmvariablen**  $x$  und  $y$  nach Ausführung des Programms; ein Zusammenhang zum Wert v.  $n$  fehlt.

# Zusammenfassung

Hoaresche Zusicherungen (oder: Korrektheitsformeln) sind Tripel der Form

- $\{p\} \pi \{q\}$  (für partielle Korrektheit)
- $[p] \pi [q]$  (für totale Korrektheit)

Die Sprechweisen

- Hoaresches Tripel (oder: Hoare-Tripel)
- Hoaresche Zusicherung (oder: Korrektheitsformel)

betonen jeweils die

- syntaktische ( $\vdash_{pk} \{p\} \pi \{q\}, \vdash_{tk} [p] \pi [q]$ )
- semantische ( $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}, \models_{tk} [p] \pi [q]$ )

Sicht auf die Tripel  $\{p\} \pi \{q\}$  bzw.  $[p] \pi [q]$ .



## Kapitel 4.3.2

### Stärkste Nachbedingungen, schwächste und schwächste liberale Vorbedingungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Formeln, Prädikate stärker/schwächer als

## Definition 4.3.2.1 (stärker als, schwächer als)

1. Seien  $p, q$  logische Formeln.

1.1  $p$  heißt **stärker** als  $q$  gdw  $p \Rightarrow q$ .

1.2  $p$  heißt **schwächer** als  $q$  gdw  $q \Rightarrow p$ .

2. Seien  $p, q$  Prädikate.

2.1  $p$  heißt **stärker** als  $q$  gdw  $\forall \sigma \in \Sigma. p(\sigma) \Rightarrow q(\sigma)$ .

2.2  $p$  heißt **schwächer** als  $q$  gdw  $\forall \sigma \in \Sigma. q(\sigma) \Rightarrow p(\sigma)$ .

Seien  $p, q$  logische Formeln oder Prädikate.

## Lemma 4.3.2.2

$$p \text{ stärker als } q \iff Ch(p) \subseteq Ch(q)$$

$$\iff Ch(q) \supseteq Ch(p)$$

$$\iff q \text{ schwächer als } p$$

## Definition 4.3.2.3 (Schwächste Vorbedingung)

Sei  $\pi$  ein Programm,  $q$  eine Formel oder Prädikat. Dann heißt  $wp(\pi, q)$  **schwächste Vorbedingung** von  $\pi$  bezüglich Nachbedingung  $q$ , wenn gilt:

1. Die Zusicherung  $[wp(\pi, q)] \pi [q]$  ist total korrekt.
2. Für alle  $p$  mit  $p$  Formel bzw. Prädikat und  $[p] \pi [q]$  total korrekt, gilt:  $wp(\pi, q)$  ist schwächer als  $p$ , d.h.:

$$p \Rightarrow wp(\pi, q) \wedge Ch(wp(\pi, q)) \supseteq Ch(p)$$

# Schwächste liberale Vorbedingungen

## Definition 4.3.2.4 (Schwächste liberale Vorbedingung)

Sei  $\pi$  ein Programm,  $q$  eine Formel oder Prädikat. Dann heißt  $wlp(\pi, q)$  **schwächste liberale Vorbedingung** von  $\pi$  bezüglich Nachbedingung  $q$ , wenn gilt:

1. Die Zusicherung  $\{wlp(\pi, q)\} \pi \{q\}$  ist partiell korrekt.
2. Für alle  $p$  mit  $p$  Formel bzw. Prädikat und  $\{p\} \pi \{q\}$  partiell korrekt, gilt:  $wlp(\pi, q)$  ist schwächer als  $p$ , d.h.:

$$p \Rightarrow wlp(\pi, q) \wedge Ch(wlp(\pi, q)) \supseteq Ch(p)$$

# Stärkste Nachbedingungen

## Definition 4.3.2.5 (Stärkste Nachbedingung)

Sei  $\pi$  ein Programm,  $p$  eine Formel oder Prädikat. Dann heißt  $sp(p, \pi)$  **stärkste Nachbedingung** von  $\pi$  bezüglich Vorbedingung  $p$ , wenn gilt:

1. Die Zusicherung  $\{p\} \pi \{sp(p, \pi)\}$  ist partiell korrekt.
2. Für alle  $q$  mit  $q$  Formel bzw. Prädikat und  $\{p\} \pi \{q\}$  partiell korrekt, gilt:  $sp(p, \pi)$  ist stärker als  $q$ , d.h.:

$$sp(p, \pi) \Rightarrow q \wedge Ch(sp(p, \pi)) \subseteq Ch(q)$$

# Stärkste Nach-, schwächste Vorbedingungen

...als Charakterisierung(smeng)en von Formeln, Prädikaten.

Mit den Bezeichnungen  $\llbracket \pi \rrbracket^{-1}$  und  $\mathcal{C}$ :

- $\forall \Sigma' \subseteq \Sigma. \llbracket \pi \rrbracket^{-1}(\Sigma') =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid \llbracket \pi \rrbracket(\sigma) \text{ def. } \in \Sigma'\}$
- $\mathcal{C}$  Mengenkomplementoperator (zur Grundmenge  $\Sigma$ ), d.h.:  
 $\forall \Sigma' \subseteq \Sigma. \mathcal{C}(\Sigma') =_{df} \Sigma \setminus \Sigma'$

gilt:

## Lemma 4.3.2.6 (Charakterisierungsmengen)

Sei  $\pi$  ein **WHILE**-Programm,  $p, q$  zwei logische Formeln oder Prädikate. Dann gilt:

1.  $Ch(wp(\pi, q)) = \llbracket \pi \rrbracket^{-1}(Ch(q))$
2.  $Ch(wlp(\pi, q)) = \llbracket \pi \rrbracket^{-1}(Ch(q)) \cup \mathcal{C}(Def(\llbracket \pi \rrbracket))$
3.  $Ch(sp(p, \pi)) = \llbracket \pi \rrbracket(Ch(p))$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

230/169

# Zusammenhang

...der Charakterisierungen von Vor- und Nachbedingungen:

## Lemma 4.3.2.7

Sei  $\pi$  ein **WHILE**-Programm,  $p$ ,  $q$  zwei logische Formeln oder Prädikate. Dann gilt:

$$\llbracket \pi \rrbracket(Ch(p)) \subseteq Ch(q) \iff \llbracket \pi \rrbracket^{-1}(Ch(q)) \supseteq Ch(p)$$

**Beweis:** Übungsaufgabe 4.3.2.8.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

231/169

# Bemerkung

## Die Definitionen

- schwächster/schwächster liberaler Vorbedingungen
- stärkster Nachbedingungen

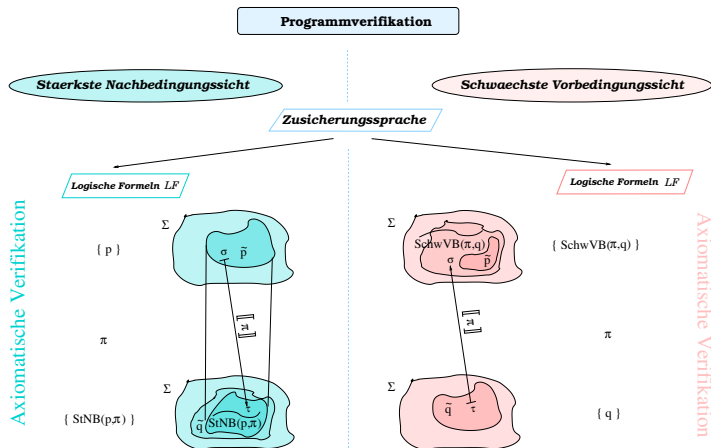
sind für **Prädikate** und **Formeln** in gleicher Weise getroffen.

Allerdings ist nicht gesichert, dass jede Charakterisierungsmenge schwächster Vor-/stärkster Nachbedingungen (i.S.v. **Lemma 4.3.2.6**) stets durch eine passende Formel der Zusage-  
sprache beschrieben werden kann, d.h. deren Charakterisierung mit der Charakterisierungsmenge der entsprechenden schwächsten Vor-/stärksten Nachbedingung übereinstimmt.

Die Darstellbarkeit einer Zustandsmenge als Formel ist an die **Ausdrucks-  
kraft** der Formelsprache, d.h. der gewählten Logik, gebunden (s. dazu auch Kap. 4.5 zur Vollständigkeit intensionaler Ableitungskalküle).



# Stärkste Nachbed.-, schwächste Vorbed.-Sicht



$StNB(p, \pi) \in LF$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{pv} \{ p \} \pi \{ StNB(p, \pi) \}$
- (2)  $\forall q \in LF. \models_{pv} \{ p \} \pi \{ q \}$  impliziert  $StNB(p, \pi) \Rightarrow q$

$SchwVB(\pi, q) \in LF$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{pv} \{ SchwVB(\pi, q) \} \pi \{ q \}$
- (2)  $\forall p \in LF. \models_{pv} \{ p \} \pi \{ q \}$  impliziert  $p \Rightarrow SchwVB(\pi, q)$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

233/169

# Übungsaufgabe 4.3.2.8

Beweise **Lemma 4.3.2.7**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

**4.3.2**

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 4.3.3

## Korrektheit, Vollständigkeit von Ableitungskalkülen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

**4.3.3**

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Korrektheits-, Vollständigkeitsfrage

...für **Ableitungs-** (oder (**Beweis-**) **Kalküle** oder **Regelwerke**)  $K$   
für **partielle** oder **totale** Korrektheit.

## Korrektheitsfrage:

- Ist jede mithilfe von  $K$  **ableitbare** (oder: **syntaktisch beweisbare**) (in Zeichen:  $\vdash_K$ ) Korrektheitsformel partiell/total korrekt?

## Vollständigkeitsfrage:

- Ist jede partiell/total korrekte Korrektheitsformel (in Zeichen:  $\models_{pk/tk}$ ) mithilfe von  $K$  **ableitbar** (oder: **syntaktisch beweisbar**)?

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

236/169

# Korrektheit und Vollständigkeit eines Kalküls

...für partielle Korrektheit.

## Definition 4.3.3.1 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Ein Beweiskalkül  $K_{pk}$  für partielle Korrektheit heißt

1. **korrekt** (engl. **sound**), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel mit  $K_{pk}$  **ableitbar** ( $\vdash_{K_{pk}} \{p\} \pi \{q\}$ ), dann ist sie **semantisch gültig** im Sinn partieller Korrektheit ( $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$ ), d.h.:

$$\vdash_{K_{pk}} \{p\} \pi \{q\} \implies \models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$$

2. **vollständig** (engl. **complete**), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel **semantisch gültig** im Sinn partieller Korrektheit ( $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$ ), dann ist sie mit  $K_{pk}$  **ableitbar** ( $\vdash_{K_{pk}} \{p\} \pi \{q\}$ ), d.h.:

$$\models_{pk} \{p\} \pi \{q\} \implies \vdash_{K_{pk}} \{p\} \pi \{q\}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

237/169

# Korrektheit und Vollständigkeit eines Kalküls

...für totale Korrektheit.

## Definition 4.3.3.2 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Ein Beweiskalkül  $K_{tk}$  für totale Korrektheit heißt

1. **korrekt** (engl. **sound**), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel mit  $K_{tk}$  **ableitbar** ( $\vdash_{K_{tk}} [p] \pi [q]$ ), dann ist sie auch **semantisch gültig** im Sinn totaler Korrektheit ( $\models_{tk} [p] \pi [q]$ ), d.h.:

$$\vdash_{K_{tk}} [p] \pi [q] \implies \models_{tk} [p] \pi [q]$$

2. **vollständig** (engl. **complete**), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel **semantisch gültig** im Sinn totaler Korrektheit ( $\models_{tk} [p] \pi [q]$ ), dann ist sie auch mit  $K_{tk}$  **ableitbar** ( $\vdash_{K_{tk}} [p] \pi [q]$ ), d.h.:

$$\models_{tk} [p] \pi [q] \implies \vdash_{K_{tk}} [p] \pi [q]$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.3.1

4.3.2

4.3.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

238/169

# Kapitel 4.4

Ableitungskalkül  $HK_{pk}$  für partielle  
Korrektheit

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

**4.4**

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
239/169

# Hoare-Kalkül $HK_{pk}$ für partielle Korrektheit

Seien  $p, q$  zwei logische Formeln oder Prädikate.

Axiome:

$$\begin{array}{l} [\text{skip}] \quad \frac{}{\{p\} \text{ skip } \{p\}} \\ [\text{ass}] \quad \frac{}{\{p[t/x]\} x:=t \{p\}} \end{array}$$

(Rückwärtssubstitution,  
Rückwärtsregel)

Regeln:

$$\begin{array}{l} [\text{comp}] \quad \frac{\{p\} \pi_1 \{r\}, \{r\} \pi_2 \{q\}}{\{p\} \pi_1; \pi_2 \{q\}} \\ [\text{ite}] \quad \frac{\{p \wedge b\} \pi_1 \{q\}, \{p \wedge \neg b\} \pi_2 \{q\}}{\{p\} \text{ if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } \{q\}} \\ [\text{while}_{pk}] \quad \frac{\{I \wedge b\} \pi \{I\}}{\{I\} \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}} \\ [\text{cons}] \quad \frac{p \Rightarrow p_1, \{p_1\} \pi \{q_1\}, q_1 \Rightarrow q}{\{p\} \pi \{q\}} \end{array}$$

( $I$  Invariante)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
240/169



# Anmerkungen zur while-Regel $[\text{while}_{pk}]$

$$[\text{while}_{pk}] \quad \frac{\{I \wedge b\} \pi \{I\}}{\{I\} \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}} \quad (I \text{ Invariante})$$

Informell:

Die Prämisse der while-Regel  $[\text{while}_{pk}]$  besagt:

- Gelten vor Ausführung des Schleifenrumpfs die Abbruchbedingung  $b$  der Schleife und die Formel bzw. das Prädikat  $I$ , so gilt  $I$  auch nach Ausführung des Schleifenrumpfs.

$I$  wird deshalb als **Schleifeninvariante** (oder **Invariante**) der while-Schleife bezeichnet.

Die Konklusion der while-Regel  $[\text{while}_{pk}]$  besagt:

- Die **Schleifeninvariante** gilt vor Eintritt in und nach Austritt aus der Schleife; zusätzlich gilt nach Austritt aus der Schleife die Negation der Abbruchbedingung  $b$  der Schleife, d.h. das Prädikat  $\neg b$ .

# Anmerkungen zur Konsequenzregel (1)

$$[\text{cons}] \quad \frac{p \Rightarrow p_1, \{p_1\} \pi \{q_1\}, q_1 \Rightarrow q}{\{p\} \pi \{q\}}$$

Informell: Die Konsequenzregel ist die

- Schnittstelle zwischen den programmbezogenen Axiomen und Regeln des Beweiskalküls und den logischen Formeln der Zusicherungssprache.

Sie erlaubt

- Vorbedingungen zu verstärken

...Übergang von  $p_1$  zu  $p$ : Möglich, falls

$$p \Rightarrow p_1 \quad ( \Leftrightarrow \quad Ch(p) \subseteq Ch(p_1) )$$

- Nachbedingungen abzuschwächen

...Übergang von  $q_1$  zu  $q$ : Möglich, falls

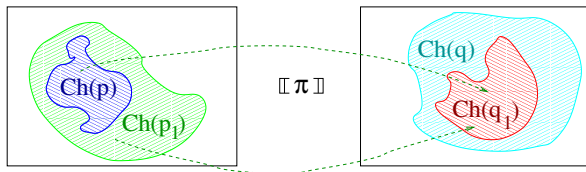
$$q_1 \Rightarrow q \quad ( \Leftrightarrow \quad Ch(q_1) \subseteq Ch(q) )$$

um so die Anwendung anderer Beweisregeln zu ermöglichen.

# Anmerkungen zur Konsequenzregel (2)

...Veranschaulichung von **Verstärkung** und **Abschwächung**:

Menge aller Zustände  $\Sigma$



$$p \implies p_1 \quad \{p_1\} \pi \{q_1\} \quad q_1 \implies q$$

$$\text{z.B.: } x > 5 \implies x > 0 \quad \{x > 0\} \pi \{y > 5\} \quad y > 5 \implies y > 0$$

# Anmerkungen zur Konsequenzregel (3)

Pragmatisch ist es vorteilhaft, zusätzlich zur Konsequenzregel

$$[\text{cons}] \quad \frac{p \Rightarrow p_1, \{p_1\} \pi \{q_1\}, q_1 \Rightarrow q}{\{p\} \pi \{q\}}$$

auch folgende Spezialisierungen der Konsequenzregel zum Beweiskalkül hinzuzunehmen:

$$[\text{cons}'] \quad \frac{p \Rightarrow p_1, \{p_1\} \pi \{q\}}{\{p\} \pi \{q\}}$$

$$[\text{cons}''] \quad \frac{\{p\} \pi \{q_1\}, q_1 \Rightarrow q}{\{p\} \pi \{q\}}$$

um das Mitschleppen der trivialen Implikationen  $p \Rightarrow p$  bzw.  $q \Rightarrow q$  zu vermeiden

In der Folge gehen wir davon aus, dass  $HK_{pk}$  (und später auch  $HK'_{tk}$ ,  $HK_{tk}$ ) die Konsequenzregeln  $[\text{cons}]$ ,  $[\text{cons}']$  und  $[\text{cons}']$  enthält.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
244/169

# Diskussion von Vorwärtszuweisungsregeln

Die (korrekte) Vorwärtsregel für die Zuweisung

$$[\text{ass}_{vw}] \quad \frac{}{\{p\} \ x:=t \ \{\exists z. p[z/x] \wedge x=t[z/x]\}} \quad (\text{'Vorwärtssubstitution'})$$

...mag natürlich erscheinen, ist aber beweistechnisch lästig durch das notwendige Mitschleppen quantifizierter Formeln.

Die möglicherweise naheliegend scheinende quantorfrem Variante der Vorwärtszuweisungsregel:

$$[\text{ass}_{vw-naiv}] \quad \frac{}{\{p\} \ x:=t \ \{p[t/x]\}}$$

...ist nicht korrekt (Beweis: Übungsaufgabe).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
245/169

# Kapitel 4.5

## Korrektheit und Vollständigkeit von $HK_{pk}$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

**4.5**

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
246/169

# Korrektheit von $HK_{pk}$

Sei  $\pi$  ein **WHILE**-Programm,  $p, q$  zwei **logische Formeln** oder **Prädikate**:

## Theorem 4.5.1 (Korrektheit von $HK_{pk}$ )

Der Ableitungskalkül  $HK_{pk}$  ist **korrekt**, d.h. jedes mit den Axiomen und Regeln von  $HK_{pk}$  ableitbare Hoaresche Tripel (in Zeichen:  $\vdash_{HK_{pk}} \{p\} \pi \{q\}$ ) ist gültig im Sinn partieller Korrektheit (in Zeichen:  $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$ ), d.h.:

$$\vdash_{HK_{pk}} \{p\} \pi \{q\} \implies \models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$$

**Beweis** durch strukturelle Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums der Korrektheitsformel  $\{p\} \pi \{q\}$ .

# Vollständigkeit von $HK_{pk}$

Sei  $\pi$  ein **WHILE**-Programm,  $p, q$  zwei **Prädikate** (**extensionaler Ansatz**):

## Theorem 4.5.2 (Vollständigkeit von $HK_{pk}$ )

Der Ableitungskalkül  $HK_{pk}$  ist **vollständig**, d.h. jede im Sinn partieller Korrektheit gültige Korrektheitsformel (in Zeichen:  $\models_{pk} \{p\} \pi \{q\}$ ) ist mit den Axiomen und Regeln von  $HK_{pk}$  ableitbar (in Zeichen:  $\vdash_{pk} \{p\} \pi \{q\}$ ), d.h.:

$$\models_{pk} \{p\} \pi \{q\} \implies \vdash_{pk} \{p\} \pi \{q\}$$

**Beweis** durch strukturelle Induktion über den Aufbau von  $\pi$ .



# Für den intensionalen Ansatz

...mit Wahl von **Bexpr** als Logik bzw. Zusicherungssprache und  $\llbracket \cdot \rrbracket_B$  als Semantik gilt **Vollständigkeitstheorem 4.5.2** nicht.

Wichtig ist folgende Beobachtung:

## Lemma 4.5.3

1.  $\forall \Sigma' \subseteq \Sigma. \exists p \in [\Sigma \rightarrow \text{IB}]. \text{Ch}(p) = \Sigma'$
2.  $\exists \Sigma' \subseteq \Sigma. \forall p \in \text{Bexpr}. \text{Ch}(p) \neq \Sigma'$

**Beweis** von

1. Sei  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  beliebig. Definiere  $p : \Sigma \rightarrow \text{IB}$  durch:

$$\forall \sigma \in \Sigma. p(\sigma) = \text{wahr} \iff_{df} \sigma \in \Sigma'$$

Wie man leicht sieht, gilt:  $\text{Ch}(p) = \Sigma'$ .

2. Beweis durch Reduktion auf das Halteproblem. □

# Die Aussage von Lemma 4.5.3(2)

...informell gedeutet:

- Anders als Prädikate ist **Bexpr** nicht ausdruckskräftig genug, jede Teilmenge  $\Sigma'$  von  $\Sigma$  durch eine Formel  $p$  zu beschreiben, d.h. durch eine Formel, deren Charakterisierung  $Ch(p)$  gerade  $\Sigma'$  ist.
- Anders als durch Prädikate sind daher insbesondere schwächste oder schwächste liberale Vorbedingungen für Paare aus Programm und Nachbedingung i.a. nicht durch Formeln aus **Bexpr** ausdrückbar.
- Daran scheitern Beweisversuche von Vollständigkeitstheorem 4.5.2 für den intensionalen Ansatz mit **Bexpr** als Zusageungssprache und  $\llbracket \cdot \rrbracket_B$  als Semantik.

## Zu Lem. 4.5.3(2): Halteproblemreduktion (1)

Sei  $\pi$  ein **WHILE**-Programm mit unentscheidbarem Halteproblem,  $\mathcal{L} =_{df}$  **Bexpr** die Zusicherungssprache mit Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}} =_{df} \llbracket \cdot \rrbracket_B$ .

Gemäß Definition 4.3.2.4 und 4.3.1.1 gilt:

Die Korrektheitsformel

$$\{wlp(\pi, false)\} \pi \{false\} \quad (a)$$

ist **partiell korrekt** gdw  $\pi$  terminiert nicht regulär angesetzt auf einen Zustand aus  $Ch(wlp(\pi, false))$ .

## Zu Lem. 4.5.3(2): Halteproblemreduktion (2)

Angenommen, es gibt  $f_\pi \in \mathcal{L}$  mit:

$$\forall \sigma \in \Sigma. \llbracket f_\pi \rrbracket_B(\sigma) = \mathbf{wahr} \iff \pi \text{ terminiert nicht regulär angesetzt auf } \sigma \quad (b)$$

Mit  $f_\pi \in \mathcal{L}$  ist auch  $\neg f_\pi \in \mathcal{L}$  mit:

$$\forall \sigma \in \Sigma. \llbracket \neg f_\pi \rrbracket_B(\sigma) = \mathbf{wahr} \iff \pi \text{ terminiert regulär angesetzt auf } \sigma \quad (c)$$

Aus (b), (c) folgt zusammen mit (a) und Definition 4.3.2.4:

$$Ch(f_\pi) = Ch(wlp(\pi, false))$$

$$Ch(\neg f_\pi) (= \mathcal{C}(Ch(wlp(\pi, false)))) = \Sigma \setminus Ch(wlp(\pi, false))$$

Da  $\llbracket f_\pi \rrbracket_B(\sigma)$ ,  $\llbracket \neg f_\pi \rrbracket_B(\sigma)$  für alle  $\sigma \in \Sigma$  berechenbar sind (s. Kap. 1.5) und somit  $Ch(f_\pi)$ ,  $Ch(\neg f_\pi)$  entscheidbar sind, ergibt sich ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit des Halteproblems für  $\pi$ . Folglich kann die Annahme  $f_\pi \in \mathcal{L}$  nicht richtig sein.

# Vollständigkeit intensionaler Ansätze

...erfordert den Übergang von **Bexpr** zu

– ausdruckskräftigeren

mächtigeren Logiken als Zusicherungssprachen.

Vollständigkeit intensionaler Ansätze ist deshalb i.a. nur relativ zur Ausdruckskraft der Zusicherungssprache und der Entscheidbarkeit (oder schwächer Aufzählbarkeit) der zugrundeliegenden Theorien (bei uns die Theorie Boolescher Ausdrücke über arithmetischen Ausdrücken und ganzen Zahlen) erreichbar.

Das ermöglicht Beweise

– relativer Vollständigkeit (im Sinn von Cook)

passender Hoarescher Ableitungs- (oder Beweis-) Kalküle.

Die Details relativer Vollständigkeiten sind für uns in der Folge nicht relevant und werden daher nicht näher betrachtet.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
253/169

# Übungsaufgabe 4.5.4

Warum führt der **prädikatenbasierte extensionale** Ansatz anders als der **formelbasierte intensionale** Ansatz nicht zum Widerspruch zur Unentscheidbarkeit des Halteproblems nach dem Muster der Überlegungen zu **Lemma 4.5.3(2)**?

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Kapitel 4.6

## Partielle Korrektheitsbeweise

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

**4.6**

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 4.6.1

## Fakultät und ganzzahlige Division mit Rest

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

**4.6.1**

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6



# Fakultäts-, Divisionsprogramm: Zusicherungen

## Lemma 4.6.1.1 (Fakultät)

Die Hoaresche Zusicherung

$$\begin{array}{c} \{true\} \\ x := a; \ y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; \ x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\} \end{array}$$

ist gültig im Sinn partieller Korrektheit.

## Lemma 4.6.1.2 (Ganzzahlige Division mit Rest)

Die Hoaresche Zusicherung

$$\begin{array}{c} \{x \geq 0 \wedge y > 0\} \\ q := 0; \ r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; \ r := r - y \text{ od} \\ \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\} \end{array}$$

ist gültig im Sinn partieller Korrektheit.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

257/169

# Beweisdarstellungen: Baum und lineare Skizze

**Aufgabe:** Beweis von [Lemma 4.6.1.1](#) und [4.6.1.2](#).

...d.h., zeigen, dass die [Hoareschen Tripel](#) für die Berechnung der [Fakultätsfunktion](#) und der [ganzzahligen Division mit Rest](#) gültig sind im Sinn [partieller Korrektheit](#).

Wir zeigen die Beweise in zwei notationellen Varianten. Als:

1. [Ableitungsbaum](#) (kanonische Variante) ([Kap. 4.6.2](#)).
2. [lineare Beweisskizze](#) (pragmatische Variante) ([Kap. 4.6.3](#)).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 4.6.2

## Ableitungsbäume

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

**4.6.2**

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Kanonischer Beweis (1)

...Beweis von Lemma 4.6.1.1.

Vorbereitung:

Schritt 1: Wahl einer ausreichend starken **Invariante**

“Träumen” einer (geeigneten) **Invariante**, hier:

$$- I \equiv (y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0$$

um die Regel  $[\text{while}_{pk}]$  anwenden und den Beweis erfolgreich abschließen zu können.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

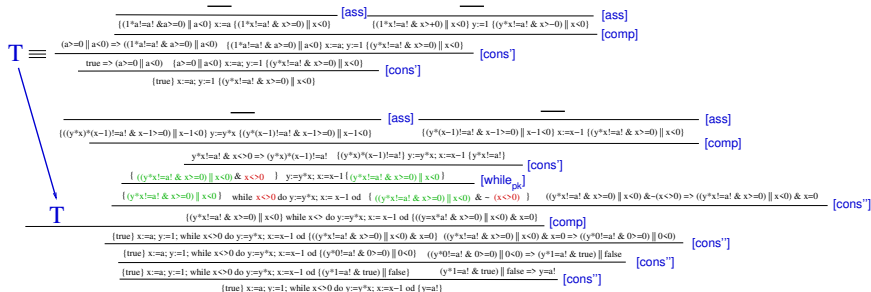
Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Kanonischer Beweis (2)

Beweis im engeren Sinn:

Schritt 2: Konstruktion des Ableitungsbaums



$\&$  : Logisches und       $\parallel$  : Logisches oder       $\sim$  : Logisches nicht       $<>$  : ungleich-Relator       $\geq$  : größergleich-Relator

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Kanonischer Beweis (3)

## Zusammenfassung:

Durch Konstruktion des **Ableitungsbaums** haben wir gezeigt:

Die **Hoaresche Zusicherung**

$$\{true\}$$

$$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\}$$

ist mit den Axiomen und Regeln von  $HK_{pk}$  ableitbar. Gemäß **Korrektheitstheorem 4.5.1** ist die Zusicherung damit **gültig** im Sinn **partieller Korrektheit** und der Beweis von **Lemma 4.6.1.1** somit erbracht.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Divisionsprogramm: Kanonischer Beweis (1)

...Beweis von Lemma 4.6.1.2.

Vorbereitung:

Schritt 1: Wahl einer ausreichend starken **Invariante**

“Träumen” einer (geeigneten) **Invariante**, hier:

$$- I \equiv x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y$$

um die Regel  $[\text{while}_{pk}]$  anwenden und den Beweis erfolgreich abschließen zu können.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

263/169

# Divisionsprogramm: Kanonischer Beweis (2)

Beweis im engeren Sinn:

## Schritt 2: Konstruktion des Ableitungsbaums

$$\begin{array}{c}
 \text{[ass]} \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \text{[ass]} \\
 \text{[comp]} \frac{\{x=(q+1)^*y+r-y \ \& \ r-y>0\} \ q:=q+1 \ \{x=q^*y+r-y \ \& \ r-y>0\} \quad \{x=q^*y+r-y \ \& \ r-y>0\} \ r:=r-y \ \{x=q^*y+r \ \& \ r>0\}}{(x=q^*y+r \ \& \ r>0 \ \& \ r>y) \Rightarrow (x=(q+1)^*y+r-y \ \& \ r-y>0) \quad \{x=(q+1)^*y+r-y \ \& \ r-y>0\} \ q:=q+1; \ r:=r-y \ \{x=q^*y+r \ \& \ r>0\}} \\
 \text{[cons']} \\
 \text{[while}_{pk}] \frac{\{x=q^*y+r \ \& \ r>0 \ \& \ r>y\} \quad q:=q+1; \ r:=r-y \quad \{x=q^*y+r \ \& \ r>0\}}{\{x=q^*y+r \ \& \ r>0\} \quad \text{while } r>y \text{ do } q:=q+1; \ r:=r-y \text{ od } \{x=q^*y+r \ \& \ r>0\} \ \& \ \sim(r>y)\} \quad (x=q^*y+r \ \& \ r>0 \ \& \ \sim(r>y) \Rightarrow (x=q^*y+r \ \& \ 0 \leq r \ \& \ r < y))} \\
 \text{[cons'']} \\
 \text{[cons'']} \frac{\{x=q^*y+r \ \& \ r>0\} \quad \text{while } r>y \text{ do } q:=q+1; \ r:=r-y \text{ od } \{x=q^*y+r \ \& \ 0 \leq r \ \& \ r < y\} \quad (x=q^*y+r \ \& \ 0 \leq r \ \& \ r < y) \Rightarrow (x=q^*r+r \ \& \ 0 \leq r < y)}{\{x=q^*y+r \ \& \ r>0\} \quad \text{while } r>y \text{ do } q:=q+1; \ r:=r-y \text{ od } \{x=q^*y+r \ \& \ 0 \leq r < y\}} \\
 \text{[ass]} \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \text{[ass]} \\
 \text{[comp]} \frac{\{x=0^*y+x \ \& \ x>0\} \ q:=0 \ \{x=q^*y+x \ \& \ x>0\} \quad \{x=q^*y+x \ \& \ x>0\} \ r:=x \ \{x=q^*y+r \ \& \ r>0\}}{\{x=0^*y+x \ \& \ x>0\} \Rightarrow (x=0^*y+x \ \& \ x>0) \ \{x=0^*y+x \ \& \ x>0\} \ q:=0; \ r:=x \ \{x=q^*y+r \ \& \ r>0\}} \\
 \text{[cons']} \\
 \text{[comp]} \frac{\{x>0 \ \& \ y>0\} \ q:=0; \ r:=x \ \{x=q^*y+r \ \& \ r>0\}}{\{x>0 \ \& \ y>0\} \ q:=0; \ r:=x; \text{ while } r>y \text{ do } q:=q+1; \ r:=r-y \text{ od } \{x=q^*y+r \ \& \ 0 \leq r < y\}}
 \end{array}$$

$\equiv T$

$T$

[comp]

$\&$  : Logisches und

$\sim$  : Logisches nicht

$>=$  : größergleich-Relator

$<=$  : kleinergleich-Relator

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6



# Divisionsprogramm: Kanonischer Beweis (3)

## Zusammenfassung:

Durch Konstruktion des **Ableitungsbaums** haben wir gezeigt:

Die **Hoaresche Zusicherung**

$$\{x \geq 0 \wedge y > 0\}$$

$q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od}$

$$\{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

ist mit den Axiomen und Regeln von  **$HK_{pk}$**  ableitbar. Gemäß **Korrektheitstheorem 4.5.1** ist die Zusicherung damit **gültig** im Sinn **partieller Korrektheit** und der Beweis von **Lemma 4.6.1.2** somit erbracht.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

265/169

# Lineare Beweise als Ableitungsbaumalternative

Die von den Kalkülregeln induzierte **kanonische Darstellung** **Hoarescher Korrektheitsbeweise** in Form von

- **Ableitungsbäumen**

ist i.a. schwerfällig und unhandlich.

Als Ergänzung hat sich deshalb eine **pragmatische notationelle Variante** eingebürgert, bei der

- **Zusicherungen** in Form von **Annotationen**

in den Programmtext eingestreut werden.

Man spricht von sog.

- **linearen Beweisen** oder **linearen Beweisskizzen**

aus denen sich der Ableitungsbaum jederzeit rekonstruieren lässt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

266/169

# Vorteil

...des **linearen** gegenüber des **baumartigen** Notationsstils:

- **Keine Redundanz**: Kompaktere, knappere Beweise.
- **Kein Informationsverlust**: Ableitungsbaum jederzeit aus der Beweisskizze herstellbar.

In der Folge demonstrieren wir den Notationsstil

- **linearer Beweisskizzen**

am Beispiel des Beweises von **Lemma 4.6.1.1**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

**4.6.2**

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 4.6.3

## Lineare Beweisskizzen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

**4.6.3**

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Arbeitsplan

...Beweis von Lemma 4.6.1.1:

Wir zeigen durch Angabe einer linearen Beweisskizze, dass das Hoaresche Tripel

$$\{true\}$$
$$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\}$$

gültig ist im Sinn partieller Korrektheit.

...die lineare Beweisskizze dafür entwickeln wir Schritt für Schritt!

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (1)

Schritt 1: Wahl einer ausreichend starken **Invariante**.

“Träumen” einer (geeigneten) **Invariante**, hier:

$$- I \equiv x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y$$

um die Regel  $[while_{pk}]$  anwenden und den Beweis erfolgreich abschließen zu können.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

**4.6.3**

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

270/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (2)

## Schritt 2: Behandlung des Rumpfs der while-Schleife.

Die Herleitung von

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$y := y * x;$

$x := x - 1;$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

erlaubt mithilfe der  $[while_{pk}]$ -Regel den Übergang zu:

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

while  $x \neq 0$  do

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$y := y * x;$

$x := x - 1;$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

od  $[while_{pk}]$

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

271/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (3)

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife im Detail:

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$y := y * x;$

$x := x - 1;$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6



# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (4)

Wegen Rückwärtszuweisungsregel wird der Rumpf der while-Schleife von hinten nach vorne bearbeitet:

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$y := y * x;$$

$$\{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

273/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (5)

Nochmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; \text{ [ass]}$$

$$\{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0)\}$$

...wobei noch eine Beweislücke verbleibt!

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

274/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (6)

Schließen der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie algebraischer und Boolescher Ausdrücke:

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; [\text{ass}]$$

$$\{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; [\text{ass}]$$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

275/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (7)

Anwendung der  $[\text{while}_{pk}]$ -Regel liefert nun wie gewünscht:

$$\begin{aligned} & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \wedge x \neq 0\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0\} \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}_{pk}] \\ & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \wedge \neg(x \neq 0)\} \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

276/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (8)

Schritt 3: Zur gewünschten Nachbedingung verbleibt ebenfalls eine Beweislücke:

$$\begin{aligned} & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \wedge x \neq 0\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & \{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}_{pk}] \\ & \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\} \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

277/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (9)

Schließen der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & \{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \quad \{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}_{pk}] \\ & \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & \quad \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x = 0\} \\ & \quad \quad \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & \quad \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x = 0) \vee (x < 0 \wedge x = 0)\} \\ & \quad \quad \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & \quad \quad \quad \{(y * 0! = a! \wedge x = 0) \vee \text{false}\} \\ & \quad \quad \quad \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & \quad \quad \quad \quad \{y * 1 = a! \wedge x = 0\} \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

278/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (10)

Aus Platzgründen etwas verkürzt dargestellt:

$$\begin{aligned} & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \wedge x \neq 0\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0\} \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}_{pk}] \\ & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \wedge \neg(x \neq 0)\} \\ & \quad \Downarrow 5x [\text{cons}''] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

279/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (11)

Schritt 4: Es verbleibt, die Beweislücke zur gewünschten Vorbedingung zu schließen:

$$\begin{aligned} & \{true\} \\ & x := a; \\ & y := 1; \\ & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \wedge x \neq 0\} \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & \{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0\} \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{od } [\text{while}_{pk}] \\ & \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\} \\ & \quad \Downarrow 5x [\text{cons}''] \\ & \{y = a!\} \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6



# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (12)

Einmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\begin{aligned} & \{true\} \\ & \quad x := a; \\ & \quad \{(1 * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \quad y := 1; [ass] \\ & \quad \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \quad \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \wedge x \neq 0\} \\ & \quad \quad \quad \Downarrow [cons'] \\ & \quad \quad \{(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0\} \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad \quad \quad y := y * x; [ass] \\ & \quad \quad \{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad \quad \quad x := x - 1; [ass] \\ & \quad \quad \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \quad \quad \text{od } [while_{pk}] \\ & \quad \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\} \\ & \quad \quad \Downarrow 5x [cons''] \\ & \quad \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

281/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (13)

Nochmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\begin{aligned} & \{true\} \\ & \{(1 * a! = a! \wedge a \geq 0) \vee a < 0\} \\ & \quad x := a; [ass] \\ & \{(1 * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad y := 1; [ass] \\ & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\} \\ & \quad \quad \Downarrow [cons'] \\ & \quad \quad \{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad \quad \quad y := y * x; [ass] \\ & \quad \quad \{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad \quad \quad x := x - 1; [ass] \\ & \quad \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \quad \text{od } [while_{pk}] \\ & \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\} \\ & \quad \Downarrow 5x [cons''] \\ & \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

282/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (14)

Schließen der letzten Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & \{true\} \\ & \Downarrow [\text{cons}'] \\ & \{a \geq 0 \vee a < 0\} \\ & \Downarrow [\text{cons}'] \\ & \{(1 * a! = a! \wedge a \geq 0) \vee a < 0\} \\ & \quad x := a; [\text{ass}] \\ & \{(1 * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\} \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & \quad \quad \{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad \quad \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \{y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0\} \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad \quad \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \quad \text{od } [\text{while}_{pk}] \\ & \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\} \\ & \quad \Downarrow 5x [\text{cons}''] \\ & \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

283/169

# Gesamtskizze

$$\begin{aligned} & \{true\} \\ & \Downarrow [cons'] \\ & \{a \geq 0 \vee a < 0\} \\ & \Downarrow [cons'] \\ & \{(1 * a! = a! \wedge a \geq 0) \vee a < 0\} \\ & \quad x := a; [ass] \\ & \{(1 * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad y := 1; [ass] \\ & \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \wedge x \neq 0\} \\ & \quad \quad \Downarrow [cons'] \\ & \quad \quad \{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad \quad \quad y := y * x; [ass] \\ & \quad \quad \{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\} \\ & \quad \quad \quad x := x - 1; [ass] \\ & \quad \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\} \\ & \quad \quad \text{od } [while_{pk}] \\ & \quad \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\} \\ & \quad \quad \Downarrow [cons''] \\ & \quad \quad \{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x = 0\} \\ & \quad \quad \Downarrow [cons''] \\ & \quad \quad \{(y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x = 0) \vee (x < 0 \wedge x = 0)\} \\ & \quad \quad \Downarrow [cons''] \\ & \quad \quad \{(y * 0! = a! \wedge x = 0) \vee false\} \\ & \quad \quad \Downarrow [cons''] \\ & \quad \quad \{y * 1 = a! \wedge x = 0\} \\ & \quad \quad \Downarrow [cons''] \\ & \quad \quad \{y = a!\} \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

284/169

# Zusammenfassung

Durch Konstruktion der **linearen Beweisskizze** haben wir gezeigt:

Die **Hoaresche Zusicherung**

$$\{true\}$$

$$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od} \\ \{y = a!\}$$

ist mit den Axiomen und Regeln von  **$HK_{pk}$**  ableitbar. Gemäß **Korrektheitstheorem 4.5.1** ist die Zusicherung damit **gültig** im Sinn **partieller Korrektheit** und der Beweis von **Lemma 4.6.1.1** somit erbracht.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

285/169

# Übungsaufgabe 4.6.3.1: Fakultätsprogramm

Zeige durch Konstruktion von

1. Ableitungsbaums
2. linearer Beweisskizze

dass (auch) die Hoaresche Zusicherung

$$\{a \geq 0\}$$

$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$   
 $\{y = a!\}$

gültig ist im Sinn partieller Korrektheit, d.h.:

$$\models_{pk} \{a \geq 0\} \pi \{y = a!\}$$

3. Lässt sich die Invariante  $I$  aus dem Beweis partieller Korrektheit zur Vorbedingung  $true$  für den zur Vorbedingung  $a \geq 0$  zu einer Invariante  $I'$  abschwächen? Begründe die Antwort.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

286/169

# Übungsaufgabe 4.6.3.2: Divisionsprogramm

Beweise Lemma 4.6.1.2: Zeige durch Konstruktion einer linearen Beweisskizze, dass die Hoaresche Zusicherung

$$\{x \geq 0 \wedge y > 0\}$$

$$\pi \equiv q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od} \\ \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

gültig ist im Sinn partieller Korrektheit, d.h.:

$$\models_{pk} \{x \geq 0 \wedge y > 0\} \pi \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Übungsaufgabe 4.6.3.3: Divisionsprogramm (1)

Ist  $x \geq 0 \wedge y > 0$  die schwächste liberale Vorbedingung für das Programm

$\pi \equiv q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od}$

zur ganzzahligen Division mit Rest und Nachbedingung

$$x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y \quad ?$$

Falls nein, bestimme eine Vorbedingung  $wlp$  und beweise, dass  $wlp$  tatsächlich die gesuchte schwächste liberale Vorbedingung beschreibt, d.h. beweise:

$$wlp \iff wlp(\pi, x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y) \quad (*)$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.6.1

4.6.2

4.6.3

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

288/169



# Übungsaufgabe 4.6.3.3: Divisionsprogramm (2)

Zeige zum Beweis von  $(*)$  insbesondere die **partielle Korrektheit** der **Hoareschen Zusicherung**

$$\{wlp\} \pi \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

d.h.:

$$\models_{pk} \{wlp\} \pi \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

durch Konstruktion von

1. Ableitungsbaum
2. linearer Beweisskizze

Welche Eigenschaften sind darüberhinaus zu zeigen, um  $(*)$  und damit die Äquivalenz von  $wlp$  zur **schwächsten liberalen Vorbedingung**  $wlp(\pi, x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y)$  zu zeigen?

3. Beweise die zusätzlichen Eigenschaften.

# Kapitel 4.7

Ableitungskalküle  $HK'_{tk}$ ,  $HK_{tk}$  für totale  
Korrektheit

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

**4.7**

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Die Hoare-Kalküle

...für partielle und totale Korrektheit für  $W_{\text{HILE}}$  sind

- nahezu ident.

Einziger Unterschied: Die Regel zur Behandlung der while-Schleife

- $[while_{pk}]$

die beim Übergang von  $HK_{pk}$  zu  $HK_{tk}$  ersetzt werden muss durch eine terminierungssensitive Regel

- $[while_{tk}]$ .

Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die eine Abwägung treffen zwischen Einfachheit von

- Regel (Variante V1).
- Regelanwendung (Variante V2).

# V1: Hoare-Kalkül $HK_{tk}$ für totale Korrektheit

## Variante 1: Regeleinfachheit vor Regelanwendungseinfachheit

$$[\text{while}'_{tk}] \quad \frac{I \Rightarrow t \geq 0, [I \wedge b \wedge t = w] \pi \quad [I \wedge t < w]}{[I] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]} \quad (I \text{ Invariante})$$

mit

- $t$  arithmetischer Ausdruck über ganzen Zahlen, sog. **Terminierungsterm**.
- $w$  ganzzahlige ‘frische’ logische Variable, d.h.  $w$  kommt in  $I$ ,  $b$ ,  $\pi$  und  $t$  nicht frei vor.

**Terminationsordnung** ist:  $(\mathbb{N}, \text{kleiner})$  (bzw.  $(\mathbb{N}, <)$  bei überladener Verwendung des Symbols  $<$ )

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
292/169

# Anmerkungen zur while-Regel $[\text{while}'_{tk}]$ (1)

$$[\text{while}'_{tk}] \quad \frac{I \Rightarrow t \geq 0, [I \wedge b \wedge t = w] \pi [I \wedge t < w]}{[I] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]} \quad (I \text{ Invariante})$$

Informell:

Die linke Prämisse  $I \Rightarrow t \geq 0$  von  $[\text{while}'_{tk}]$  besagt:

- Vor Ausführung des Schleifenrumpfs ( $I$  ist wahr!), gilt:

$$t \in \mathbb{N}_0, \quad t \geq 0$$

Das bedeutet, der Wert des Terminierungsterms  $t$  ist vor (und nach) jeder Ausführung des Schleifenrumpfs  $\pi$  Element der durch die Relation **kleiner** (bzw. überladen:  $<$ ) Noethersch geordneten Menge  $\mathbb{N}_0$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
293/169

# Anmerkungen zur while-Regel $[\text{while}'_{tk}]$ (2)

Die **rechte Prämisse**  $[I \wedge b \wedge t = w] \pi [I \wedge t < w]$  von  $[\text{while}'_{tk}]$  besagt:

- Wenn  $t$  vor Ausführung des Schleifenrumpfs den Wert  $w$  hat, so hat  $t$  nach Ausführung des Schleifenrumpfs einen echt kleineren Wert, da  $w$  als 'frische' **logische Variable** in  $\pi$  nicht vorkommt und deshalb vor und nach Ausführung von  $\pi$  denselben Wert hat.

Zusammen mit der **linken Prämisse** folgt daraus, dass der Wert des Terminierungsterms  $t$  mit jeder Ausführung des Schleifenrumpfs  $\pi$  echt kleiner wird, d.h. bzgl. der **Noetherschen Ordnung kleiner** (bzw. überladen:  $<$ ) von  $\text{IN}_0$  echt abnimmt.

Da es in  $\text{IN}_0$  keine unendlich absteigenden Ketten gibt, kann die **linke Prämisse** also nur endlich oft wahr sein, was nichts anderes als **Terminierung** der **while-Schleife** bedeutet.

# V2: Hoare-Kalkül $HK_{tk}$ für totale Korrektheit

## Variante 2: Regelanwendungseinfachheit vor Regeleinfachheit

$$[\text{while}_{tk}] \quad \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v], [I \wedge b \wedge t=w] \pi \quad [I \wedge t < w] \quad (I \text{ Invariante})}{[I] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]}$$

mit

- $u$  Boolescher Ausdruck über der Variablen  $v$ .
- $t$  arithmetischer Ausdruck über ganzen Zahlen, sog. **Terminierungsterm**.
- $w$  ganzzahlige 'frische' logische Variable, d.h.  $w$  kommt in  $I$ ,  $b$ ,  $\pi$  und  $t$  nicht frei vor.
- $M =_{df} \{\sigma(v) \mid \sigma \in Ch(u)\}$  bzgl.  $\sqsubset$  **Noethersch geordnete Menge** (oder: **Noethersche (Halb-) Ordnung**).

**Terminationsordnung** ist:  $(M, \sqsubset)$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
295/169

# Anmerkungen zur while-Regel $[\text{while}_{tk}]$ (1)

$$[\text{while}_{tk}] \quad \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v], [I \wedge b \wedge t=w] \pi [I \wedge t < w]}{[I] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]} \quad (I \text{ Invariante})$$

Informell:

Die linke Prämisse  $I \wedge b \Rightarrow u[t/v]$  von  $[\text{while}_{tk}]$  besagt:

- Vor jeder Ausführung des Schleifenrumpfs ( $I \wedge b$  wahr!), gilt:

$$u[t/v] \iff \text{wahr}$$

Zusammen mit der Definition von  $M$  folgt daraus, dass der Wert des Terminierungsterms  $t$  vor jeder Ausführung des Schleifenrumpfs  $\pi$  Element einer Noethersch geordneten Menge ist.



# Anmerkungen zur while-Regel $[\text{while}_{tk}]$ (2)

Die **rechte Prämisse**  $[l \wedge b \wedge t = w] \pi [l \wedge t < w]$  von  $[\text{while}_{tk}]$  besagt:

- Wenn  $t$  vor Ausführung des Schleifenrumpfs den Wert  $w$  hat, so hat  $t$  nach Ausführung des Schleifenrumpfs einen echt kleineren Wert, da  $w$  als **logische Variable** in  $\pi$  nicht vorkommt und deshalb vor und nach Ausführung von  $\pi$  denselben Wert hat.

Zusammen mit der **linken Prämisse** folgt daraus, dass der Wert des Terminierungsterms  $t$  mit jeder Ausführung des Schleifenrumpfs echt kleiner wird, d.h. bzgl. der **Noetherschen Ordnung** von  $M$  echt abnimmt.

Da es in  $M$  keine unendlich absteigenden Ketten gibt, kann die **linke Prämisse** also nur endlich oft wahr sein, woraus die **Terminierung** der **while-Schleife** folgt.

# V1: Hoare-Kalkül $HK'_{tk}$ für totale Korrektheit

Seien  $p, q$  zwei logische Formeln oder Prädikate.

Axiome:

$$[\text{skip}] \quad \frac{}{[p] \text{ skip } [p]}$$

$$[\text{ass}] \quad \frac{}{[p[t/x]] \ x:=t \ [p]}$$

(Rückwärtssubstitution,  
Rückwärtsregel)

Regeln:

$$[\text{comp}] \quad \frac{[p] \ \pi_1 \ [r], [r] \ \pi_2 \ [q]}{[p] \ \pi_1; \pi_2 \ [q]}$$

$$[\text{ite}] \quad \frac{[p \wedge b] \ \pi_1 \ [q], [p \wedge \neg b] \ \pi_2 \ [q]}{[p] \text{ if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } [q]}$$

$$[\text{while}'_{tk}] \quad \frac{I \Rightarrow t \geq 0, [I \wedge b \wedge t = w] \ \pi \ [I \wedge t < w]}{[I] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]} \quad (I \text{ Invariante})$$

$$[\text{cons}] \quad \frac{p \Rightarrow p_1, [p_1] \ \pi \ [q_1], q_1 \Rightarrow q}{[p] \ \pi \ [q]}$$

Beachte die überladene Verwendung der eckigen Klammern in  $[\text{ass}]$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
298/169

## V2: Hoare-Kalkül $HK_{tk}$ für totale Korrektheit

Seien  $p, q$  zwei logische Formeln oder Prädikate.

Axiome:

$$[\text{skip}] \quad \frac{}{[p] \text{ skip } [p]}$$

$$[\text{ass}] \quad \frac{}{[p[t/x]] \ x:=t \ [p]}$$

(Rückwärtssubstitution,  
Rückwärtsregel)

Regeln:

$$[\text{comp}] \quad \frac{[p] \ \pi_1 \ [r], \ [r] \ \pi_2 \ [q]}{[p] \ \pi_1; \pi_2 \ [q]}$$

$$[\text{ite}] \quad \frac{[p \wedge b] \ \pi_1 \ [q], \ [p \wedge \neg b] \ \pi_2 \ [q]}{[p] \text{ if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } [q]}$$

$$[\text{while}_{tk}] \quad \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v], \ [I \wedge b \wedge t=w] \ \pi \ [I \wedge t < w]}{[I] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]} \quad (I \text{ Invariante})$$

$$[\text{cons}] \quad \frac{p \Rightarrow p_1, \ [p_1] \ \pi \ [q_1], \ q_1 \Rightarrow q}{[p] \ \pi \ [q]}$$

Beachte die überl. Verw. der eckigen Klammern in  $[\text{ass}]$ ,  $[\text{while}_{tk}]$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
299/169

# Vergleich von $[\text{while}_{tk}]$ und $[\text{while}'_{tk}]$

...zentraler Unterschied:

- $[\text{while}_{tk}]$ : Beliebige Noethersche Ordnung als Terminationsordnung zulässig:  $(M, \sqsubset)$ .
- $[\text{while}'_{tk}]$ : Festlegung auf eine spezielle Noethersche Ordnung als Terminationsordnung, nämlich:  $(\text{IN}_0, <)$ .

**Beachte:** Oft erfordert die Rückspiegelung einer sich 'natürlich' anbietenden Noetherschen Terminationsordnung auf die spezielle Noethersche Ordnung  $(\text{IN}_0, <)$  zusätzlichen Modellierungsaufwand.

In diesen Fällen ist  $[\text{while}_{tk}]$  pragmatisch vorteilhaft im Vergleich zu  $[\text{while}'_{tk}]$ .

# Hintergrund: Irreflexive partielle Ordnungen

## Definition 4.7.1 (Irreflexive partielle Ordnung)

Sei  $P$  eine Menge und  $\sqsubset$  eine irreflexive und transitive Relation auf  $P$ . Dann heißt das Paar  $(P, \sqsubset)$  eine **irreflexive partielle Ordnung**. Gilt  $p \sqsubset p'$ ,  $p, p' \in P$ , so heißt  $p$  **kleiner als**  $p'$  und  $p'$  **größer als**  $p$ .

**Beispiele:**  $(\mathbb{Z}, <)$ ,  $(\mathbb{Z}, >)$ ,  $(\mathbb{N}, <)$ ,  $(\mathbb{N}, >)$  sind irreflexive partielle Ordnungen (überladene Verwendung der Symbole  $<$ ,  $>$ ).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
301/169

# Hintergrund: Wohlfundierte Ordnungen

## Definition 4.7.2 (Wohlfundierte Ordnung)

Sei  $(P, \sqsubset)$  eine irreflexive partielle Ordnung und  $W \subseteq P$  eine Teilmenge von  $P$ .

1.  $\sqsubset$  heißt **wohlfundiert** auf  $W$ , wenn es keine unendlich absteigende Kette

$$\dots \sqsubset w_2 \sqsubset w_1 \sqsubset w_0$$

von Elementen  $w_i \in W$  gibt.

2. Ist  $\sqsubset$  wohlfundiert auf  $W$ , heißt das Paar  $(W, \sqsubset)$  eine **wohlfundierte Struktur** (oder **Noethersch geordnete Menge** oder **wohlfundierte** oder **Noethersche Ordnung**).

**Beispiele:**  $(\mathbb{N}, <)$  ist eine Noethersche Ordnung, nicht aber  $(\mathbb{Z}, <)$ ,  $(\mathbb{Z}, >)$  und  $(\mathbb{N}, >)$ .

# Hintergrund: Konstruktion wohlfundierter Ord.

...aus gegebenen wohlfundierten Ordnungen:

## Lemma 4.7.3

Seien  $(W_1, \sqsubset_1)$  und  $(W_2, \sqsubset_2)$  zwei wohlfundierte Ordnungen.  
Dann sind auch

1.  $(W_1 \times W_2, \sqsubset_{com})$  mit **komponentenweiser** Ordnung definiert durch

$$(m_1, m_2) \sqsubset_{com} (n_1, n_2) \iff_{df} m_1 \sqsubset_1 n_1 \wedge m_2 \sqsubset_2 n_2$$

2.  $(W_1 \times W_2, \sqsubset_{lex})$  mit **lexikographischer** Ordnung definiert durch

$$(m_1, m_2) \sqsubset_{lex} (n_1, n_2) \iff_{df} (m_1 \sqsubset_1 n_1) \vee (m_1 = n_1 \wedge m_2 \sqsubset_2 n_2)$$

wohlfundierte Ordnungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
303/169

# Vergleich von $HK'_{tk}$ , $HK_{tk}$ und $HK_{pk}$

... $HK'_{tk}$ ,  $HK_{tk}$  und  $HK_{pk}$  sind bis auf die Prämissen der Schleifenregeln ident:

- Totale Korrektheit:  $[\text{while}'_{tk}]$ ,  $[\text{while}_{tk}]$

$$[\text{while}'_{tk}] \quad \frac{I \Rightarrow t \geq 0, [I \wedge b \wedge t = w] \pi [I \wedge t < w]}{[I] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]} \quad (I \text{ Invariante})$$

$$[\text{while}_{tk}] \quad \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v], \{I \wedge b \wedge t = w\} \pi \{I \wedge t < w\}}{[I] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]} \quad (I \text{ Invariante})$$

- Partielle Korrektheit:  $[\text{while}_{pk}]$

$$[\text{while}_{pk}] \quad \frac{\{I \wedge b\} \pi \{I\}}{\{I\} \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}} \quad (I \text{ Invariante})$$



# Abschließende beweistechnische Anmerkung

...‘zerlegt’ man die Prämissen von  $[\text{while}'_{tk}]$  wie folgt:

$$[\text{while}''_{tk}] \quad \frac{\{I \wedge b\} \pi \{I\}, I \Rightarrow t \geq 0, [I \wedge b \wedge t = w] \pi [t < w]}{[I] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]} \quad (I \text{ Invariante})$$

wird deutlich: Der Beweis **totaler Korrektheit** einer Hoareschen Zusicherung besteht aus dem Beweis:

- partieller Korrektheit
- regulärer Terminierung des Programms.

Salopp: **Totale Korrektheit** “gleich”

Partielle Korrektheit “plus” Reguläre Terminierung

Diese Trennung kann im Beweis explizit vollzogen werden. Der Gesamtbeweis wird dadurch modular; der Terminationsbeweis ist zudem oft einfach.

**Bemerkung:** Die obige Zerlegung kann in gleicher Weise für die Schleifenregel  $[\text{while}_{tk}]$  erfolgen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Kapitel 4.8

Korrektheit und Vollständigkeit von

$$HK'_{tk}, HK_{tk}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

**4.8**

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Korrektheit von $HK'_{tk}$ und $HK_{tk}$

Sei  $\pi$  ein **WHILE**-Programm,  $p, q$  zwei logische Formeln oder Prädikate:

## Theorem 4.8.1 (Korrektheit von $HK'_{tk}$ und $HK_{tk}$ )

Die Ableitungskalküle  $HK'_{tk}$  und  $HK_{tk}$  sind korrekt, d.h. jede mit den Axiomen und Regeln von  $HK'_{tk}$  und  $HK_{tk}$  ableitbare Korrektheitsformel (in Zeichen:  $\vdash_{HK'_{tk}/HK_{tk}} [p] \pi [q]$ ) ist gültig im Sinne totaler Korrektheit (in Zeichen:  $\models_{tk} [p] \pi [q]$ ), d.h.:

$$\vdash_{HK'_{tk}/HK_{tk}} [p] \pi [q] \Rightarrow \models_{tk} [p] \pi [q]$$

**Beweis** durch strukturelle Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums der Korrektheitsformel  $[p] \pi [q]$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
307/169

# Vollständigkeit von $HK'_{tk}$ und $HK_{tk}$

Sei  $\pi$  ein **WHILE**-Programm,  $p, q$  zwei **Prädikate** (**extensionaler Ansatz**):

## Theorem 4.8.2 (Vollständigkeit von $HK'_{tk}$ und $HK_{tk}$ )

Die Ableitungskalküle  $HK'_{tk}$  und  $HK_{tk}$  sind **vollständig**, d.h. jede im Sinn totaler Korrektheit gültige Korrektheitsformel (in Zeichen:  $\models_{tk} [p] \pi [q]$ ) ist mit den Axiomen und Regeln von  $HK'_{tk}$  und  $HK_{tk}$  ableitbar (in Zeichen:  $\vdash_{HK'_{tk}/HK_{tk}} [p] \pi [q]$ ), d.h.:

$$\models_{tk} [p] \pi [q] \Rightarrow \vdash_{HK'_{tk}/HK_{tk}} [p] \pi [q]$$

**Beweis** durch strukturelle Induktion über den Aufbau von  $\pi$ .

# Kapitel 4.9

## Totale Korrektheitsbeweise

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

**4.9**

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 4.9.1

## Fakultät und ganzzahlige Division mit Rest

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

**4.9.1**

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultäts-, Divisionsprogramm: Zusicherungen

## Lemma 4.9.1.1 (Fakultät)

Die Hoaresche Zusicherung

$$[a \geq 0]$$

$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$   
 $[y = a!]$

ist **gültig** im Sinn **totaler Korrektheit**.

## Lemma 4.9.1.2 (Ganzzahlige Division mit Rest)

Die Hoaresche Zusicherung

$$[x \geq 0 \wedge y > 0]$$

$q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od}$   
 $[x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y]$

ist **gültig** im Sinn **totaler Korrektheit**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Beweisdarstellungen: Baum und lineare Skizze

**Aufgabe:** Beweis von [Lemma 4.9.1.1](#) und [4.9.1.2](#).

...d.h., zeigen, dass die [Hoareschen Tripel](#) für die Berechnung der [Fakultätsfunktion](#) und der [ganzzahligen Division mit Rest](#) gültig sind im Sinn [totaler Korrektheit](#).

Wir zeigen die Beweise in zwei notationellen Varianten. Als:

1. [Ableitungsbaum](#) (kanonische Variante) ([Kap. 4.9.2](#)).
2. [lineare Beweisskizze](#) (pragmatische Variante) ([Kap. 4.9.3](#)).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6



# Kapitel 4.9.2

## Ableitungsbäume

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

**4.9.2**

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Übungsaufgabe 4.9.2.1: Fakultäts-, Div.-prog.

Beweise die Gültigkeit der **Hoareschen Zusicherungen** aus

- Lemma 4.9.1.1 (Fakultät)
- Lemma 4.9.1.2 (Ganzzahlige Division mit Rest)

mithilfe der **Axiome** und **Regeln** von

1.  $HK'_{tk}$
2.  $HK_{tk}$

durch Konstruktion entsprechender **Ableitungsbäume**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

**4.9.2**

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 4.9.3

## Lineare Beweisskizzen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

**4.9.3**

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Arbeitsplan

...Beweis von Lemma 4.9.1.1:

Wir zeigen durch Angabe einer linearen Beweisskizze, dass das Hoaresche Tripel

$$[a \geq 0]$$

$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$   
 $[y = a!]$

gültig ist im Sinn totaler Korrektheit.

...die lineare Beweisskizze dafür entwickeln wir Schritt für Schritt!

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (1)

**Schritt 1:** Wahl einer ausreichend starken **Invariante** und eines geeigneten **Terminierungsterms**.

“Träumen” (geeigneter) **Invariante** und **Terminierungsterms**,  
hier:

- $I \equiv y * x! = a! \wedge x \geq 0$  als **Invariante**
- $t \equiv x$  als **Terminierungsterm**
- $u \equiv v > 0$  als **Boolescher Ausdruck** über  $v$

um die Regel  $[\text{while}_{tk}]$  anwenden und den Beweis erfolgreich abschließen zu können.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (2)

...mit Wahl von  $u \equiv v > 0$  und  $t \equiv x$  gilt für:

–  $u[t/v]$ :  $u[t/v] = (v > 0)[x/v] = x > 0$

–  $M$ :  $M$

$$=_{df} \{ \sigma(v) \mid \sigma \in Ch(u) \}$$

$$= \{ \sigma(v) \mid \sigma \in Ch(v > 0) \}$$

$$= \{ \sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma \wedge \llbracket v \rrbracket_A(\sigma) \text{ größer } \llbracket 0 \rrbracket_A(\sigma) \}$$

$$= \{ \sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma \wedge \sigma(v) \text{ größer } 0 \}$$

$$= \text{IN}_1$$

Damit gilt:  $M$  ist bzgl. der Relation **kleiner** (bzw. überladen:  $<$ ) auf  $\text{IN}_1$  **Noethersch geordnet**, d.h.:

$$(M, \sqsubseteq) = (\text{IN}_1, \text{kleiner}) \text{ (bzw. überladen: } (\text{IN}_1, <))$$

ist **Noethersche Ordnung**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

318/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (3)

...mit Wahl von  $I \equiv y * x! = a! \wedge x \geq 0$  und der Schleifenbedingung  $b \equiv x \neq 0$  aus  $\pi$  gilt:

Für alle Zustände  $\sigma \in \Sigma$ , in denen

- $I$  erfüllt ist, gilt:  $0 \leq \sigma(x) \in \mathbb{N}_0$
- $I$  und  $b$  erfüllt sind, gilt:  $1 \leq \sigma(x) \in M (= \mathbb{N}_1)$

Anders ausgedrückt:

- $\forall \sigma \in Ch(I). \sigma(x) \geq 0$   
d.h.:  $\{\sigma(x) \mid \sigma \in Ch(I)\} = \mathbb{N}_0$
- $\forall \sigma \in Ch(I \wedge b). \sigma(x) \geq 1$   
d.h.:  $\{\sigma(x) \mid \sigma \in Ch(I \wedge b)\} = \mathbb{N}_1$

Insbesondere:

- $\{\sigma(x) \mid \sigma \in Ch(I)\}, \{\sigma(x) \mid \sigma \in Ch(I \wedge b)\}$  Noethersch geordnet.
- $\forall \sigma \in Ch(I) \cup Ch(I \wedge b). \sigma(x)$  Element Noethersch geordneter Menge.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

319/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (4)

## Schritt 2: Behandlung des Rumpfs der while-Schleife.

Die Herleitung von

$$\begin{aligned} & y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \\ & \quad y := y * x; \\ & \quad x := x - 1; \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w] \end{aligned}$$

erlaubt mithilfe der  $[\text{while}_{tk}]$ -Regel den Übergang zu:

$$\begin{aligned} & [y * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \\ & \quad \quad y := y * x; \\ & \quad \quad x := x - 1; \\ & \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w] \\ & \quad \text{od } [\text{while}_{tk}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)] \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6



# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (5)

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife im Detail:

$$\begin{aligned} & y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \end{aligned}$$

$y := y * x;$

$x := x - 1;$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

**4.9.3**

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (6)

Wegen Rückwärtszuweisungsregel wird der Rumpf der while-Schleife von hinten nach vorne bearbeitet:

$$\begin{aligned} & y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \end{aligned}$$

$$y := y * x;$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (7)

Nochmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\begin{aligned} & y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \end{aligned}$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; \text{ [ass]}$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

...wobei noch eine Beweislücke verbleibt!

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

323/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (8)

Schließen der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$\begin{array}{l} y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \end{array}$$

$\Downarrow$  [cons']

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; [\text{ass}]$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

324/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (9)

Anwendung der  $[\text{while}_{tk}]$ -Regel liefert nun wie gewünscht:

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

while  $x \neq 0$  do

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$\Downarrow$   $[\text{cons}']$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$y := y * x$ ;  $[\text{ass}]$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$x := x - 1$ ;  $[\text{ass}]$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

od  $[\text{while}_{tk}]$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

325/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (10)

Schritt 3: Zur gewünschten Nachbedingung verbleibt ebenfalls eine Beweislücke:

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

while  $x \neq 0$  do

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$\Downarrow$  [cons']

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$y := y * x$ ; [ass]

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$x := x - 1$ ; [ass]

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

od [while<sub>tk</sub>]

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

$$[y = a!]$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (11)

Schließen der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & [y * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & [(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & [y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w] \\ & \text{od } [\text{while}_{tk}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)] \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x = 0] \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & [y * 0! = a!] \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & [y = a!] \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

327/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (12)

Aus Platzgründen etwas verkürzt dargestellt:

$$\begin{aligned} & [y * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \quad y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & [(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & [y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w] \\ & \quad \quad \text{od } [\text{while}_{tk}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)] \\ & \quad \Downarrow \exists x [\text{cons}''] \\ & [y = a!] \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6



# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (13)

Schritt 4: Es verbleibt, die Beweislücke zur gewünschten Vorbedingung zu schließen:

$$\begin{aligned} &[a \geq 0] \\ &x := a; \\ &y := 1; \\ &[y * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ &\text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ &\quad y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ &\quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \\ &\quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ &[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ &\quad y := y * x; [\text{ass}] \\ &[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ &\quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ &\quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w] \\ &\quad \text{od } [\text{while}_{tk}] \\ &[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)] \\ &\quad \Downarrow \exists x [\text{cons}''] \\ &[y = a!] \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

329/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (14)

Einmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\begin{aligned} & [a \geq 0] \\ & \quad x := a; \\ & \quad [1 * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & \quad \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \quad \quad y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & \quad \quad \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \\ & \quad \quad \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & \quad \quad [(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad \quad \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & \quad \quad [y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad \quad \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & \quad \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w] \\ & \quad \quad \text{od } [\text{while}_{tk}] \\ & \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)] \\ & \quad \Downarrow 3x [\text{cons}''] \\ & \quad [y = a!] \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

330/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (15)

Nochmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\begin{aligned} & [a \geq 0] \\ & [1 * a! = a! \wedge a \geq 0] \\ & \quad x := a; [\text{ass}] \\ & [1 * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \quad y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & [(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & [y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w] \\ & \quad \text{od } [\text{while}_{tk}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)] \\ & \quad \Downarrow \exists x [\text{cons}''] \\ & [y = a!] \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

331/169

# Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (16)

Schließen der letzten Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & [a \geq 0] \\ & \Downarrow [\text{cons}'] \\ & [1 * a! = a! \wedge a \geq 0] \\ & \quad x := a; [\text{ass}] \\ & [1 * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \quad y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & \quad \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & [(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & [y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w] \\ & \quad \text{od } [\text{while}_{tk}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)] \\ & \quad \Downarrow \exists x [\text{cons}''] \\ & [y = a!] \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

332/169

# Gesamtskizze

$$\begin{aligned} & [a \geq 0] \\ & \Downarrow [\text{cons}'] \\ & [1 * a! = a! \wedge a \geq 0] \\ & \quad x := a; [\text{ass}] \\ & [1 * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad y := 1; [\text{ass}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0] \\ & \quad \text{while } x \neq 0 \text{ do} \\ & \quad \quad y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ & \quad \quad [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w] \\ & \quad \quad \Downarrow [\text{cons}'] \\ & [(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad y := y * x; [\text{ass}] \\ & [y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w] \\ & \quad x := x - 1; [\text{ass}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w] \\ & \quad \text{od } [\text{while}_{tk}] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)] \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & [y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x = 0] \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & [y * 0! = a!] \\ & \quad \Downarrow [\text{cons}''] \\ & [y = a!] \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

333/169

# Zusammenfassung

Durch Konstruktion der **linearen Beweisskizze** haben wir gezeigt:

Die **Hoaresche Zusicherung**

$$[a \geq 0]$$

$$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$$
$$[y = a!]$$

ist mit den Axiomen und Regeln von  **$HK_{tk}$**  ableitbar. Gemäß **Korrektheitstheorem 4.8.1** ist die Zusicherung damit **gültig** im Sinn **totaler Korrektheit** und der Beweis von **Lemma 4.9.1.1** somit erbracht.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Übungsaufgabe 4.9.3.1: Divisionsprogramm

Beweise Lemma 4.9.1.2: Zeige durch Konstruktion einer linearen Beweisskizze, dass die Hoaresche Zusicherung

$$[x \geq 0 \wedge y > 0]$$

$$q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od}$$
$$[x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y]$$

gültig ist im Sinn totaler Korrektheit, d.h.:

$$\models_{tk} [x \geq 0 \wedge y > 0] \pi [x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y]$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.9.1

4.9.2

4.9.3

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

# Kapitel 4.10

Ansätze, Werkzeuge für (semi-) automatische axiomatische Programmverifikation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

**4.10**

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
336/169



# Ansätze, Werkzeuge

...zur (semi-) automatischen Programmverifikation im Hoare-schen Stil.

Unter anderem:

- Theorema, RISC, JKU Linz.
- KeY-Hoare, KIT Karlsruhe, Chalmers University of Technology, TU Darmstadt.
- ...

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
337/169

# Theorema-Projekt (1)

...[www.theorema.org](http://www.theorema.org):

“The Theorema project aims at extending current computer algebra systems by facilities for supporting mathematical proving. The present early-prototype version of the Theorema software system is implemented in Mathematica. The system consists of a general higher-order predicate logic prover and a collection of special provers that call each other depending on the particular proof situations. The individual provers imitate the proof style of human mathematicians and produce human-readable proofs in natural language presented in nested cells. The special provers are intimately connected with the functors that build up the various mathematical domains.”

(Exzerpt von <http://www.theorema.org>)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Theorema-Projekt (2)

“The long-term goal of the project is to produce a complete system which supports the mathematician in creating interactive text- books, i.e. books containing, besides the ordinary passive text, active text representing algorithms in executable format, as well as proofs which can be studied at various levels of detail, and whose routine parts can be automatically generated. This system will provide a uniform (logic and software) framework in which a working mathematician, without leaving the system, can get computer-support while looping through all phases of the mathematical problem solving cycle. [...]”

(Exzerpt von <http://www.theorema.org>)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# KeY-Projekt (1)

...[www.key-project.org](http://www.key-project.org):

## Integrated Deductive Software Design

“The KeY System is a formal software development tool that aims to integrate design, implementation, formal specification, and formal verification of object-oriented software as seamlessly as possible. At the core of the system is a novel theorem prover for the first-order Dynamic Logic for Java with a user-friendly graphical interface.

The project was started in November 1998 at the University of Karlsruhe. It is now a joint project of Karlsruhe Institute of Technology and Chalmers University of Technology, Gothenburg, and TU Darmstadt.

The KeY tool is available for down-load. [...]”

(Exzerpt von <http://www.key-project.org>)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# KeY-Projekt (2)

KeY-Hoare ([www.key-project.org/download/hoare](http://www.key-project.org/download/hoare)) unterstützt

- partielle Korrektheitsbeweise
- totale Korrektheitsbeweise und Ausführungszeitkorrektheitsbeweise (Versionen ab 0.1.6)
- ganzzahlige und Boolesche Felder (Versionen ab 0.1.7)

## Nützliche Anleitung:

- Reiner Hähnle, Richard Bubel. *A Hoare-Style Calculus with Explicit State Updates*. Handout in a course on Program Verification at the Department of Computer Science at the Chalmers University of Technology on the Hoare Calculus and the usage of the tool KeY-Hoare, 19 pages.  
<http://i12www.iti.uni-karlsruhe.de/~key/download/hoare/students.pdf>

# Kapitel 4.11

## Historische Meilensteine der Programmverifikation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

**4.11**

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Meilensteine der Programmverifikation (1)

## Frühe Anfänge

- 1949 **Turings** Vision: Korrekte Programme  
Beispiel Fakultätsfunktion: Zusicherungen und Terminierungsfunktion

## Axiomatische Methode

- 1967 **Floyd**: Flussdiagramme  
**Hoare**: while-Programme

## Erweiterung der axiomatischen Methode

- 1971 **Hoare**: Rekursive Prozeduren
- 1976/77 **Owicki & Gries**, **Lamport**: Parallele Programme
- 1980/81 **Apt**, **Francez & de Roever**, **Levin & Gries**: Verteilte Programme
- 1991 **de Boer**: Parallele, objektorientierte Programme
- 1977 **Pnueli**: Temporale Logik für Programme
- 1979 **Clarke**: Grenzen der axiomatischen Methode

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
343/169

# Meilensteine der Programmverifikation (2)

## Automatisierung der Verifikation

- 1981/82 Emerson & Clarke, Quielle & Sifakis: Modellprüfung
- 1977 Cousot & Cousot: Abstrakte Interpretation
- 1979 Deduktion: Interaktive Theorembeweiser
- 1967 Automatische Terminierungsbeweise

## Entwicklung korrekter Programme

- 1976 Dijkstra: Kalkül der schwächsten Vorbedingung
- 1997 Meyer: Design-by-Contract
- 1969 Büchi & Landweber: Automatenbasierte Systeme

Quelle: Ernst-Rüdiger Olderog, Reinhard Wilhelm. [Turing und die Verifikation](#). Informatik Spektrum 35(4):271-279, 2012.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
344/169



# Kapitel 4.12

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

**4.12**

Kap. 5




Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
345/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (1)

-  Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part 1.* ACM Transactions on Programming Languages and Systems 3:431-483, 1981.
-  Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part II: Nondeterminism.* Theoretical Computer Science 28(1-2):83-109, 1984.
-  Krzysztof R. Apt, Ernst-Rüdiger Olderog. *Programmverifikation – Sequentielle, parallele und verteilte Programme.* Springer-V., 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5




Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
346/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (2)

-  Krzysztof R. Apt, Frank S. de Boer, Ernst-Rüdiger Olderog. *Verification of Sequential and Concurrent Programs*. Springer-V., 3. Auflage, 2009. (Chapter 3, While Programs; Chapter 3.3, Verification; Chapter 3.4, Proof Outlines – Partial Correctness, Total Correctness; Chapter 3.5, Completeness)
-  Bernhard Beckert, Reiner Hähnle, Peter H. Schmitt (Hrsg.). *Verification of Object-Oriented Software: The KeYApproach*. LNCS 4334, Springer-V., 2007.
-  Mordechai Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science*. 2. Auflage, Springer-V., 2001. (Chapter 9, Programs: Semantics and Verification)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5





Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
347/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (3)

-  Ernie Cohen, Dexter Kozen. *A Note on the Complexity of Propositional Hoare Logic*. ACM Transactions on Computational Logic 1(1):171-174, 2000.
-  Stephen A. Cook. *Soundness and Completeness of an Axiom System for Program Verification*. SIAM Journal on Computing 7(1):70-90, 1978.
-  Jaco W. De Backer. *Mathematical Theory of Program Correctness*. Prentice-Hall, 1980.
-  Edmund M. Clarke. *Programming Language Constructs for which it is Impossible to Obtain Good Hoare Axiom Systems*. Journal of the ACM 26(1):129-147, 1979.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5




Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
348/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (4)

-  Edmund M. Clarke, Stephen M. German, Joseph Y. Halpern. *Effective Axiomatizations of Hoare Logics*. Journal of the ACM 30(1):612-636, 1983.
-  Martin Davis. *Computability and Unsolvability*. Dover Publications, 1982.
-  Robert W. Floyd. *Assigning Meaning to Programs*. In Proceedings of Symposium on Applied Mathematics, Mathematical Aspects of Computer Science, American Mathematical Society, New York, 19:19-32, 1967.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
349/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (5)



Emily P. Friedman. *Relationships between Monadic Recursion Schemes and Deterministic Context-free Languages*. In IEEE Conference Record of the 15th Annual Symposium on Switching and Automata Theory (SWAT'74), 43-51, 1974.



Emily P. Friedman. *Equivalence Problems for Deterministic Context-free Languages and Monadic Recursion Schemes*. Journal of Computer and System Sciences 14(3):344-359, 1977.



Stephen J. Garland, David C. Luckham. *Program Schemes, Recursion Schemes, and Formal Languages*. Journal of Computer and System Sciences 7(2):119-160, 1973.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5


Teil III


Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
350/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (6)

 Seymour Ginsburg, Sheila Greibach. *Deterministic Context Free Languages*. Information and Control 9(6):620-648, 1966.

 Reiner Hähnle, Richard Bubel. *A Hoare-Style Calculus with Explicit State Updates*. Handout in the course Program Verification at the Department of Computer Science at the Chalmers University of Technology, 19 Seiten.  
<http://i12www.iti.uni-karlsruhe.de/~key/download/hoare/students.pdf>

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
351/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (7)



Charles A.R. Hoare. *An Axiomatic Basis for Computer Programming*. Communications of the ACM 12(10):576-580, 583, 1969.



Charles A.R. Hoare. *The Emperor's Old Clothes*. Communications of the ACM 24(2):75-83, 1981.  
DOI: 10.1145/358549.358561



Charles A.R. Hoare. *The Ideal of Program Correctness*. The Computer Journal 50(3):254-260, 2007.



Charles A.R. Hoare. *Retrospective: An Axiomatic Basis for Computer Programming*. Communications of the ACM 52(10):30-32, 2009. DOI: 10.1145/1562764.1562779

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
352/169



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (8)



Tudor Jebelean, Laura Kovács, Nikolaj Popov. *Experimental Program Verification in the Theorema System*. In Proceedings of the 1st International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods (ISoLA 2004), 92-99, 2004. [www.risc.jku.at/publications/download/risc\\_2243/KoPoJeb.pdf](http://www.risc.jku.at/publications/download/risc_2243/KoPoJeb.pdf)



Laura Kovács, Tudor Jebelean. *Practical Aspects of Imperative Program Verification using Theorema*. In Proceedings of the 5th International Workshop on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2003), 317-320, 2003. [www.risc.jku.at/publications/download/risc\\_464/synasc03.pdf](http://www.risc.jku.at/publications/download/risc_464/synasc03.pdf)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5




Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
353/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (9)

-  Laura Kovács, Tudor Jebelean. *Generation of Invariants in Theorema*. In Proceedings of the 10th International Symposium of Mathematics and its Applications, 407-415, 2003. [www.risc.jku.at/publications/download/risc\\_2053/2003-11-06-A.pdf](http://www.risc.jku.at/publications/download/risc_2053/2003-11-06-A.pdf)
-  Dexter Kozen, Jerzy Tiuryn. *On the Completeness of Propositional Hoare Logic*. Information Sciences 139(3-4):187-195, 2001.
-  Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis*. Springer-V., 2009. (Chapter 1, Introduction: What do we want to know about the Program?, Chapter 2, How to prove a Program Correct: Programs without Loops; Chapter 3, How to prove a Program Correct: Iterative Programs)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
354/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (10)



Jacques Loeckx, Kurt Sieber. *The Foundations of Program Verification*. Wiley, 1984.



Konstantinos Mamouras. *On the Hoare Theory of Monadic Recursion Schemes*. In Proceedings of the Joint Meeting of the 23rd EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL) and the 29th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS) (CSL-LICS'14), Article 69, 69.1-69.10, 2014.



Konstantinos Mamouras. *The Hoare Logic of Deterministic and Nondeterministic Monadic Recursion Schemes*. ACM Transactions on Computational Logic 17(2):13.1-13.30, 2016.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5




Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
355/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (11)

-  Robert Lover. *Elementary Logic for Software Development*. Springer-V., 2008. (Chapter 19, Program Correctness Proofs; Chapter 19.3, Proofs using Floyd's Method of Invariant Assertions; Chapter 20.2.1, Floyd-Hoare Logic)
-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Formal Methods: An Appetizer*. Springer-V., 2019. (Chapter 3, Program Verification)
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Chapter 6, Axiomatic Program Verification)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5




Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
356/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (12)

-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 9, Axiomatic Program Verification; Chapter 10, More on Axiomatic Program Verification)
-  David von Oheimb. *Hoare Logic for Java in Isabelle/HOL*. Concurrency and Computation: Practice and Experience 13(13):1173-1214, 2001.
-  Ernst-Rüdiger Olderog. *Correctness of Programs with Pascal-like Procedures without Global Variables*. Theoretical Computer Science 30(1):49-90, 1984.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5



Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8  
357/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (13)

-  Ernst-Rüdiger Olderog, Bernhard Steffen. *Formale Semantik und Programmverifikation*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 145-166, 2006.
-  Ernst-Rüdiger Olderog, Reinhard Wilhelm. *Turing und die Verifikation*. Informatik Spektrum 35(4):271-279, 2012.
-  Vaughan R. Pratt. *Semantical Considerations of Floyd-Hoare Logic*. In Proceedings of the 17th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'76), 109-121, 1976.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (14)



Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. MIT Press, 1993. (Chapter 6, The axiomatic semantics of IMP; Chapter 7, Completeness of the Hoare rules)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

4.12

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

# Kapitel 5

## Axiomatische Ausführungsaufwandsanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

360/169



# Kapitel 5.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

**5.1**

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Übergang

...von axiomatischer Programmverifikation zu axiomatischer Programmanalyse.

...am Beispiel

- axiomatischer asymptotischer Ausführungsaufwandsanalyse

nach:

- Kapitel 6.5, **Assertions for Execution Time**.  
Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. **Semantics with Applications – A Formal Introduction**. Wiley, 1992.
- Kapitel 10.2, **Assertions for Execution Time**.  
Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. **Semantics with Applications – An Appetizer**. Springer-V., 2007.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Ausführungsaufwandsanalyse

**Hintergrund:** In vielen Anwendungsbereichen sind

- (zumindest) **weiche** Aussagen über den Ausführungszeitaufwand von Programmen erforderlich, z.B. Antwortzeiten von Buchungsportalen.
- (sogar) **harte** Aussagen über die Ausführungs- bzw. Antwortzeiten von Programmen unverzichtbar, in jedem Fall für **sicherheitskritische (Echtzeit-) Anwendungen** (sog. **Schlechtester-Fall-Ausführungszeitanalyse** (engl. **worst-case execution time (WCET) analysis**)).

Der Nachweis **totaler Korrektheit** mittels **axiomatischer Programmverifikation** garantiert zwar

- Terminierung eines Programms

sagt jedoch **nichts** über den tatsächlichen **Ressourcen-**, insbesondere **Laufzeitbedarf** aus.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# In diesem Kapitel

...Erweiterung und Adaptierung des **Hoare-Kalküls für totale Korrektheit**, um beweisbare Aussagen über den

- **asymptotischen Ausführungsaufwand**

zu ermöglichen.

**Grundlage:** Einführung einer **ausführungszeitbewussten**

- (Nichtstandard-) Semantik für **WHILE**

aufbauend auf einer **ausführungszeitbewussten**

- (Nichtstandard-) Semantik für
  - Konstantensymbole (Numerale, Wahrheitswertkonst.)
  - Variablen (-zugriffe)
  - Ausdrücke.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

364/169

# Grundidee: Aufwandszuordnung zu Ausdrücken

- Numerale, Wahrheitswertkonstanten  
...konstanter Auswertungsaufwand/-zeit, d.h. von Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$ .
- Variablen (-zugriffe)  
...konstanter Zugriffsaufwand/-zeit (lesen, schreiben), d.h. von Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$ .
- Nichtelementare Ausdrücke  
...linearer Auswertungsaufwand/-zeit in der Zahl **n** der Operatoren und Relatoren von Ausdrücken, d.h. von Größenordnung  $\mathcal{O}(n)$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

365/169

# Grundidee: Aufwandszuord. zu Anweisungen (1)

- Leere Anweisung

...konstanter Ausführungsaufwand/-zeit, d.h. von Größenordnung  $O(1)$ .

- Zuweisung

...Ausführungsaufwand/-zeit als Auswertungsaufwand/-zeit des rechtsseitigen Zuweisungsausdrucks.

- (Sequentielle) Komposition

...Ausführungsaufwand/-zeit als Summe der Ausführungsaufwände/-zeiten der Komponenten.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

366/169

# Grundidee: Aufwandszuord. zu Anweisungen (2)

## – Fallunterscheidung

...Ausführungsaufwand/-zeit als Summe des Auswertungsaufwands/-zeit von Bedingung und Maximum der Ausführungsaufwände/-zeiten der beiden Fallunterscheidungs-  
zweige.

## – while-Schleife

...Ausführungsaufwand/-zeit als Summe der wiederholten Auswertungsaufwände/-zeiten von Abbruchbedingung und Ausführungsaufwänden/-zeiten des Schleifenrumpfs.

...Verfeinerungen, präzisere Zuordnungen sind möglich.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

367/169

# Formalisierung und Umsetzung

...der Grundidee in drei Schritten:

1. **Ausführungszeitbewusste (abstrakte) Ausdruckssemantik:**  
...Einführung einer abstrakten Semantik, die die Auswertungszeit arithmetischer und Boolescher Ausdrücke beschreibt ([Kap. 5.2](#)).
2. **Ausführungszeitbewusste (abstrakte) Programmsemantik:**  
...Erweiterung und Adaption der natürlichen Semantik von **WHILE** zu einer ausführungszeitbewussten abstrakten Programmsemantik ([Kap. 5.3](#)).
3. **Ableitungskalkül für totale Korrektheit mit asymptotischen Ausführungsaufwandsaussagen:**  
Erweiterung und Adaption des Ableitungskalküls für totale Korrektheit zur Ableitung von Aussagen zum asymptotischen Ausführungsaufwand von Programmen ([Kap. 5.4](#)).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

368/169



## Kapitel 5.2

### Aufwandsbewusste Ausdruckssemantik

# Aufwands-/Zeitbewusste Ausdruckssemantik

...Einführung und Definition **aufwands-/zeitbewusster** (abstrakter) **Semantikfunktionen** für **arithmetische** und **Boolesche Ausdrücke**:

- $\llbracket \cdot \rrbracket_{ZA} : \mathbf{Aexpr} \rightarrow \mathbb{Z}$
- $\llbracket \cdot \rrbracket_{ZB} : \mathbf{Bexpr} \rightarrow \mathbb{Z}$

die arithmetischen und Booleschen Ausdrücken als **Bedeutung** ihren Auswertungsaufwand/-zeit (in Zeiteinheiten einer hier nicht näher spezifizierten **abstrakten Maschine AM**) geben.

**Intuitiv:**  $\llbracket a \rrbracket_{ZA}$ ,  $a \in \mathbf{Aexpr}$ , und  $\llbracket b \rrbracket_{ZB}$ ,  $b \in \mathbf{Bexpr}$ , liefern die Anzahl der Zeiteinheiten, die **AM** zur Auswertung von **a** bzw. **b** benötigt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

370/169

# Aufwandsbewusste Semantik arith. Ausdrücke

$\llbracket \cdot \rrbracket_{ZA} : \mathbf{Aexpr} \rightarrow \mathbb{Z}$  induktiv definiert durch:

$$\llbracket n \rrbracket_{ZA} =_{df} \mathbf{1}$$

$$\llbracket x \rrbracket_{ZA} =_{df} \mathbf{1}$$

$$\llbracket a_1 + a_2 \rrbracket_{ZA} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{ZA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{ZA} + \mathbf{1}$$

$$\llbracket a_1 * a_2 \rrbracket_{ZA} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{ZA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{ZA} + \mathbf{1}$$

$$\llbracket a_1 - a_2 \rrbracket_{ZA} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{ZA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{ZA} + \mathbf{1}$$

$$\llbracket a_1 / a_2 \rrbracket_{ZA} =_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{ZA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{ZA} + \mathbf{1}$$

...andere Operatoren analog, ggf. mit operationsspezifischen Auswertungszeiten.

Beachte:  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ZA}$  ist **zustandsunabhängig**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

371/169

# Aufwandsbewusste Semantik Bool. Ausdrücke

$\llbracket \cdot \rrbracket_{ZB} : \mathbf{Bexpr} \rightarrow \mathbb{Z}$  induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned}\llbracket true \rrbracket_{ZB} &=_{df} 1 \\ \llbracket false \rrbracket_{ZB} &=_{df} 1 \\ \llbracket a_1 = a_2 \rrbracket_{ZB} &=_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{ZA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{ZA} + 1 \\ \llbracket a_1 < a_2 \rrbracket_{ZB} &=_{df} \llbracket a_1 \rrbracket_{ZA} + \llbracket a_2 \rrbracket_{ZA} + 1 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \llbracket \neg b \rrbracket_{ZB} &=_{df} \llbracket b \rrbracket_{ZB} + 1 \\ \llbracket b_1 \wedge b_2 \rrbracket_{ZB} &=_{df} \llbracket b_1 \rrbracket_{ZB} + \llbracket b_2 \rrbracket_{ZB} + 1 \\ \llbracket b_1 \vee b_2 \rrbracket_{ZB} &=_{df} \llbracket b_1 \rrbracket_{ZB} + \llbracket b_2 \rrbracket_{ZB} + 1\end{aligned}$$

...andere Relatoren (z.B.  $\leq$ , ...) analog, ggf. mit operationspezifischen Auswertungszeiten.

Beachte:  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ZB}$  ist **zustandsunabhängig**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

372/169

# Kapitel 5.3

## Aufwandsbewusste natürliche Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

**5.3**

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Erweiterung und Anpassung

...der

- natürlichen Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket_{ns}$

von **W**HILE zur Bestimmung des

- Ausführungsaufwands/-zeit von **W**HILE -Programmen

zusätzlich zu ihrer üblichen Bedeutung.

**Methode:** Ersetzen der Transitionen der Form

$$\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$$

der **N**-Semantik von **W**HILE durch Transitionen der **NZ**-Semantik der Form

$$\langle \pi, \sigma \rangle \xrightarrow{t} \sigma'$$

mit der Bedeutung, dass ein Programm  $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$  nach  $t$  **Zeiteinheiten** in  $\sigma'$  terminiert.

# NZS-Regelwerk von WHILE

## Axiome:

$$[\text{skip}_{nzs}] \quad \frac{}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \rightarrow^1 \sigma}$$

$$[\text{ass}_{nzs}] \quad \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \rightarrow [\textcolor{red}{t}]_{ZA+1} \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma) / x]}$$

$$[\text{while}_{nzs}^{ff}] \quad \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow [\textcolor{red}{b}]_{ZB+3} \sigma} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{falsch}$$

## Regeln:

$$[\text{while}_{nzs}^{tt}] \quad \frac{\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow^t \sigma', \langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma' \rangle \rightarrow^{t'} \sigma''}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow [\textcolor{red}{b}]_{ZB+t+t'+2} \sigma''} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{wahr}$$

$$[\text{if}_{nzs}^{tt}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \rightarrow^t \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \rightarrow [\textcolor{red}{b}]_{ZB+t+1} \sigma'} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{wahr}$$

$$[\text{if}_{nzs}^{ff}] \quad \frac{\langle \pi_2, \sigma \rangle \rightarrow^t \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \rightarrow [\textcolor{red}{b}]_{ZB+t+1} \sigma'} \quad \llbracket b \rrbracket_B(\sigma) = \text{falsch}$$

$$[\text{comp}_{nzs}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \rightarrow^{t_1} \sigma', \langle \pi_2, \sigma' \rangle \rightarrow^{t_2} \sigma''}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \rightarrow^{t_1+t_2} \sigma''}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

375/169

## Beispiel: Illustration der NZ-Semantik (1)

...anhand des (kanonischen) Fakultätsprogramms.

Sei  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\sigma(x) = \mathbf{3}$ . Dann gilt:

$$y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$$

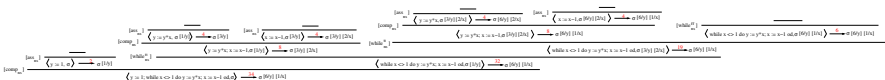
angesetzt auf  $\sigma$  terminiert in **34 Zeiteinheiten** im Zustand

$$\sigma[\mathbf{6}/y][\mathbf{1}/x]$$

Das heißt:

$$\langle y := 1; \text{ while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow^{34} \sigma[\mathbf{6}/y][\mathbf{1}/x]$$

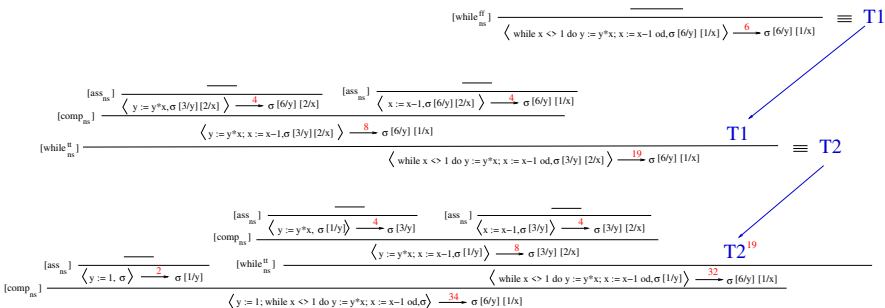
Zugehöriger **Ableitungsbaum**:





# Beispiel: Illustration der NZ-Semantik (2)

...der gleiche **Ableitungsbaum** in 'etwas' größerer Darstellung durch Einführung der benannten **Teilbäume T1, T2**:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

377/169

# Kapitel 5.4

## Aufwandsbewusste axiomatische Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

**5.4**

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Erweiterung und Anpassung

...des

- Ableitungskalküls  $HK_{tk}$

für totale Korrektheit von Programmen um den Aspekt ihres asymptotischen Ausführungsaufwands.

Methode: Übergang von zeitunbewussten Korrektheitsstripeln der Form:

$$[p] \pi [q]$$

zu zeitbewussten Korrektheitsstripeln der Form:

$$[p] \pi [e \Downarrow q]$$

mit:

- $\pi$  WHILE -Programm.
- $p, q$  logische Formeln oder Prädikate als Vor- und Nachbedingung (wie bisher!).
- $e \in \mathbf{Aexp}$  arithmetischer Ausdruck als Aufwandsabschätzung, d.h. Aufwand von  $\pi$  ist von Größenordnung  $\mathcal{O}(e)$ .

# Semantik aufwandsbewusster Korrektheitsstripel

Sei  $\pi$  ein **WHILE**-Programm,  $p, q$  zwei **logische Formeln** oder **Prädikate**,  $e$  ein arithmetischer Ausdruck.

## Definition 5.1.1 (Gültigkeit aufw.b. Korrektheitstr.)

Das **aufwandsbewusste Korrektheitsstripel**

$$[p] \pi [e \Downarrow q]$$

ist **gültig** im Sinn **aufwandsbewusster totaler Korrektheit** (in Zeichen:  $\models_{\text{ztk}} [p] \pi [e \Downarrow q]$ ) gdw. für jeden Zustand  $\sigma \in \Sigma$  gilt:

Ist die **Vorbedingung**  $p$  in  $\sigma$  erfüllt, **dann** terminiert die zugehörige Berechnung von  $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$  regulär in einem Endzustand  $\sigma'$  **und** die **Nachbedingung**  $q$  ist in  $\sigma'$  erfüllt **und** der benötigte **Ausführungsaufwand/-zeit** von  $\pi$  ist durch  $e$  beschränkt, d.h. von Grössenordnung  $\mathcal{O}(e)$ .

# Charakterisierung aufw.b. totaler Korrektheit

## Lemma 5.1.2 (Charakterisierung)

Das **aufwandsbewusste Korrektheitsstripel**

$$[p] \pi [e \Downarrow q]$$

ist **gültig** (in Zeichen:  $\models_{\text{zt}} [p] \pi [e \Downarrow q]$ ) **gdw** es existiert ein  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$ , so dass für alle Zustände  $\sigma \in \Sigma$  gilt:

Ist die Vorbedingung  $p$  in  $\sigma$  erfüllt, **dann** gibt es einen Zustand  $\sigma' \in \Sigma$  und eine natürliche Zahl  $\mathbf{t}$ , so dass gilt:

- $\pi$  angesetzt auf  $\sigma$  terminiert in  $\mathbf{t}$  Zeiteinheiten regulär in  $\sigma'$ , d.h.  $\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow^{\mathbf{t}} \sigma'$ .
- Nachbedingung  $q$  ist erfüllt in  $\sigma'$ .
- $\mathbf{t}$  ist von Größenordnung  $\mathcal{O}(e)$ , d.h.  $\mathbf{t} \leq \mathbf{k} * \llbracket e \rrbracket_A(\sigma)$   
(In anderen Worten:  $\mathbf{t}$  und  $\llbracket e \rrbracket_A(\sigma)$  unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor  $\mathbf{k}$ ).

# Beachte

...dass der Ausdruck  $e$  zur Größenordnungsaufwandsabschätzung im Anfangszustand  $\sigma$  ausgewertet wird, nicht im Endzustand  $\sigma'$ :

$$- t \leq k * \llbracket e \rrbracket_A(\sigma)$$

Diesem sinnvollen Umstand (Übungsaufgabe: Warum?) ist geschuldet, dass die Festlegung der Regeln

$$- [while_e] \text{ und } [comp_e]$$

des Hoare-artigen Aufwandsabschätzungskalküls  $AK_{ztk}$  komplizierter ausfällt als möglicherweise zunächst vermutet.

# Aufwandsabschätzungskalkül $AK_{ztk}$ f. WHILE

Axiome:

$$[\text{skip}_e] \quad \frac{}{\{p\} \text{ skip } \{1 \Downarrow p\}}$$

$$[\text{ass}_e] \quad \frac{}{\{p[t \backslash x]\} \ x := t \ \{1 \Downarrow p\}}$$

Regeln:

$$[\text{comp}_e] \quad \frac{[p \wedge e'_2 = u] \ \pi_1 \ [e_1 \Downarrow r \wedge e_2 \leq u], \ [r] \ \pi_2 \ [e_2 \Downarrow q]}{[p] \ \pi_1; \pi_2 \ [e_1 + e'_2 \Downarrow q]}$$

wobei  $u$  frische logische Variable.

$$[\text{ite}_e] \quad \frac{[p \wedge b] \ \pi_1 \ [e \Downarrow q], \ [p \wedge \neg b] \ \pi_2 \ [e \Downarrow q]}{[p] \text{ if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } [e \Downarrow q]}$$

$$[\text{while}_e] \quad \frac{[p(z+1) \wedge e' = u] \ \pi \ [e_1 \Downarrow p(z) \wedge e \leq u]}{[\exists z. \ p(z)] \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od } [e \Downarrow p(0)]}$$

wobei:  $p(z+1) \Rightarrow (b \wedge e \geq e_1 + e')$ ,

$p(0) \Rightarrow (\neg b \wedge 1 \leq e)$ ,

$z \in \mathbb{IN}_0$ ,  $u$  frische logische Variable.

$$[\text{cons}_e] \quad \frac{p \Rightarrow p_1 \quad [p_1] \ \pi \ [e' \Downarrow q_1] \quad q_1 \Rightarrow q}{[p] \ \pi \ [e \Downarrow q]} \quad \exists k \in \mathbb{IN}. \ e' \leq k * e$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Anmerkungen zur $AK_{ztk}$ -Regel $[comp_e]$

Die Anwendung der  $[comp_e]$ -Regel verlangt, dass es

- Ableitungen dafür gibt, dass  $e_1$ ,  $e_2$  die Größenordnung der Zahl der Ausführungsschritte von  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  beschreiben.
- $e_1$  macht dies für  $\pi_1$  relativ zum Anfangszustand von  $\pi_1$  aus;  $e_2$  für  $\pi_2$  relativ zum Anfangszustand von  $\pi_2$ .
- Die Größenordnung der Zahl der Ausführungsschritte der sequentiellen Komposition  $\pi_1; \pi_2$  ist deshalb nicht einfach summativ durch  $e_1 + e_2$  beschrieben.
- Vielmehr muss für  $e_2$  ein Ausdruck  $e_2'$  gefunden werden, so dass  $e_2$  ausgewertet im Anfangszustand von  $\pi_2$  durch die Größenordnung von  $e_2'$  ausgewertet im Anfangszustand von  $\pi_1$  beschränkt ist.
- Dies wird durch die Erweiterung der Vor- und Nachbedingung von  $\pi_1$  unter Verwendung der frischen logischen Variable  $u$  erreicht.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV



# Anmerkungen zur $AK_{ztk}$ -Regel $[while_e]$

Die Anwendung der  $[while_e]$ -Regel verlangt, dass es

- eine Ableitung bzw. Nachweis dafür gibt, dass  $e_1$  die Größenordnung der Zahl der Ausführungsschritte des Schleifenrumpfs,  $e$  die der gesamten Schleife beschreiben.
- Ähnlich der  $[comp_e]$ -Regel ist die Größenordnung der Zahl der Ausführungsschritte der gesamten Schleife nicht direkt durch den summativen Ausdruck  $e_1 + e$  beschrieben, da  $e_1$  auf den Zustand vor Ausführung des Schleifenrumpfs Bezug nimmt,  $e$  hingegen auf den Zustand nach seiner einmaligen Ausführung.
- Deshalb muss ein Ausdruck  $e'$  gefunden werden, der ausgewertet vor Ausführung des Schleifenrumpfs Ausdruck  $e$  ausgewertet nach seiner Ausführung beschränkt.
- Das erfordert, dass  $e$  die Ungleichung  $e \geq e_1 + e'$  erfüllt, da  $e$  die Ausführungszeit der while-Schleife unabhängig von der Anzahl ihrer Wiederholungen beschränken muss.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

385/169

# Anmerkungen zur $AK_{ztk}$ -Regel $[cons_e]$

Pragmatisch ist es vorteilhaft, zusätzlich zur Konsequenzregel

$$[cons_e] \quad \frac{p \Rightarrow p_1 \quad [p_1] \quad \pi \quad [e' \Downarrow q_1] \quad q_1 \Rightarrow q}{[p] \quad \pi \quad [e \Downarrow q]} \quad \exists k \in \mathbb{N}. e' \leq k * e$$

auch folgende Spezialisierungen der Konsequenzregel zum Beweiskalkül hinzuzunehmen:

$$[cons'_e] \quad \frac{p \Rightarrow p_1 \quad [p_1] \quad \pi \quad [e' \Downarrow q_1]}{[p] \quad \pi \quad [e \Downarrow q]} \quad \exists k \in \mathbb{N}. e' \leq k * e$$

$$[cons''_e] \quad \frac{[p] \quad \pi \quad [e' \Downarrow q_1] \quad q_1 \Rightarrow q}{[p] \quad \pi \quad [e \Downarrow q]} \quad \exists k \in \mathbb{N}. e' \leq k * e$$

In der Folge gehen wir davon aus, dass  $AK_{ztk}$  neben  $[cons_e]$  auch die Konsequenzregeln  $[cons'_e]$  und  $[cons''_e]$  enthält.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

386/169

## Beispiel 5.1.3: Fakultätsprogramm

Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[a = 3]$$

$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$   
 $[1 \Downarrow \text{true}]$

ist **gültig** im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit und beschreibt, dass die Zahl der Ausführungsschritte des Fakultätsprogramms angesetzt auf einen Zustand  $\sigma$  mit  $\sigma(a) = \mathbf{3}$  von der Größenordnung  $\mathcal{O}(\mathbf{1})$  ist, also durch eine Konstante beschränkt ist.

# Beispiel 5.1.4: Fakultätsprogramm

Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[a \geq 0]$$

$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$

$$[a \Downarrow \text{true}]$$

ist **gültig** im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit und beschreibt, dass die Zahl der Ausführungsschritte des Fakultätsprogramms angesetzt auf einen Zustand  $\sigma$  mit  $\sigma(a) > 0$  von der Größenordnung  $\mathcal{O}(a)$  ist, also linear in der Größe von  $a$  und damit des Anfangswerts von  $x$  ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

388/169

# Kapitel 5.5

## Aufwandsbewusste totale Korrektheitsbeweise

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

**5.5**

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Das Fakultätsprogramm in variierter Form

...Beweis von Terminierung und Aufwandsabschätzung:

## Lemma 5.5.1 (Fakultät)

1. **Terminierung**: Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[x = 3]$$

$y := 1$ ; while  $x \neq 1$  do  $y := y * x$ ;  $x := x - 1$  od

$$[1 \Downarrow \text{true}]$$

ist gültig im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit.

2. **Aufwandsabschätzung**: Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[x > 0]$$

$y := 1$ ; while  $x \neq 1$  do  $y := y * x$ ;  $x := x - 1$  od

$$[x \Downarrow \text{true}]$$

ist gültig im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

390/169

# Lemma 5.5.1(2):

## Lineare Be-

## weisskiz-

## ze (1)

$$\begin{aligned}
 & [x > 0] \\
 & \dots \\
 & y := 1; \\
 & \dots \\
 & [\exists z \in \mathbb{N}_0. (x > 0 \wedge x = z + 1)] \quad (\equiv [\exists z \in \mathbb{N}_0. INV(z)]) \\
 & \text{while } x \neq 1 \text{ do} \\
 & [(x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge x - 1 = u_1] \quad (\equiv [INV(z + 1) \wedge x - 1 = u_1]) \\
 & \quad [(x > 0 \wedge x = (z + 1) + 1) \wedge x - 1 = u_1] \\
 & \quad [((x > 0 \wedge x = (z + 1) + 1) \wedge x - 1 = u_1) \wedge 1 = u_2] \\
 & \quad \Downarrow [\text{cons}'_e] \\
 & \quad [((x - 1 > 0 \wedge x - 1 = z + 1) \wedge x - 1 \leq u_1) \wedge 1 \leq u_2] \\
 & \quad y := y * x; [\text{ass}_e], [\text{comp}_e] \\
 & [1 \Downarrow ((x - 1 > 0 \wedge x - 1 = z + 1) \wedge x - 1 \leq u_1) \wedge 1 \leq u_2] \\
 & \quad [(x - 1 > 0 \wedge x - 1 = z + 1) \wedge x - 1 \leq u_1] \\
 & \quad x := x - 1; [\text{ass}_e] \\
 & \quad [1 \Downarrow (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge x \leq u_1] \\
 & \quad [1 + 1 \Downarrow (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge x \leq u_1] \\
 & \quad \Downarrow [\text{cons}''_e] \\
 & [1 \Downarrow (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge x \leq u_1] \quad (\equiv [1 \Downarrow INV(z) \wedge x \leq u_1]) \\
 & (x > 0 \wedge x = (z + 1) + 1) \Rightarrow \neg(x = 1) \wedge x \geq 1 + (x - 1) \quad (\equiv INV(z + 1) \Rightarrow \neg(x = 1) \wedge x \geq 1 + (x - 1)) \\
 & (x > 0 \wedge x = 0 + 1) \Rightarrow \neg(\neg(x = 1)) \wedge 1 \leq x \quad (\equiv INV(0) \Rightarrow \neg(\neg(x = 1)) \wedge 1 \leq x) \\
 & \text{od } [\text{while}_e] \\
 & [x \Downarrow (x > 0 \wedge x = 0 + 1)] \quad (\equiv [x \Downarrow INV(0)]) \\
 & \dots \\
 & [x \Downarrow \text{true}] \\
 & INV(z) = x > 0 \wedge x = z + 1, \quad z \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{d.h. } \forall \sigma \in \Sigma. INV(z)(\sigma) = \sigma(x) > 0 \wedge \sigma(x) = z + 1)
 \end{aligned}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

391/169

# Lemma 5.5.1(2):

## Lineare Be-

## weisskiz-

## ze (2)

$$[x > 0]$$

$$[x > 0 \wedge 1 = u_3]$$

$$\Downarrow [\text{cons}'_e]$$

$$[\exists z \in \mathbb{N}_0. (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge 1 \leq u_3]$$

$$y := 1; [\text{ass}_e], [\text{comp}_e]$$

$$[1 \Downarrow \exists z \in \mathbb{N}_0. (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge 1 \leq u_3]$$

$$[\exists z \in \mathbb{N}_0. (x > 0 \wedge x = z + 1)] \quad (\equiv \quad [\exists z \in \mathbb{N}_0. INV(z)])$$

$$\text{while } x \neq 1 \text{ do}$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$\text{od } [\text{while}_e]$$

$$[x \Downarrow (x > 0 \wedge x = 0 + 1)] \quad (\equiv \quad [x \Downarrow INV(0)])$$

$$[1 + x \Downarrow x > 0 \wedge x = z + 1]$$

$$\Downarrow [\text{cons}''_e] \quad (\text{da } (x > 0 \Rightarrow 1 + x \leq 2 * x) \wedge ((x > 0 \wedge x = z + 1) \Rightarrow \text{true}))$$

$$[x \Downarrow \text{true}]$$

$$INV(z) = x > 0 \wedge x = z + 1, \quad z \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{d.h. } \forall \sigma \in \Sigma. INV(z)(\sigma) = \sigma(x) > 0 \wedge \sigma(x) = z + 1)$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

392/169



# Übungsaufgabe 5.5.2: Fakultätsprogramm

Beweise Lemma 5.5.3 (Terminierung, Aufwandsabschätzung):

## Lemma 5.5.3 (Fakultät)

1. **Terminierung:** Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[a = 3]$$

$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$

$$[1 \Downarrow \text{true}]$$

ist gültig im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit.

2. **Aufwandsabschätzung:** Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[a \geq 0]$$

$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$

$$[a \Downarrow \text{true}]$$

ist gültig im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit.

# Übungsaufgabe 5.5.4: Fakultätsprogramm

Beweise Lemma 5.5.5 (Terminierung/Aufwandsabschätzung plus funktionale Korrektheit):

## Lemma 5.5.5 (Fakultät)

1. **Terminierung** + **funktionale Korrektheit**: Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[a = 3]$$

$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$

$$[1 \Downarrow y = 6 = a!]$$

ist gültig im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit.

2. **Aufwandsabschätzung** + **funktionale Korrektheit**: Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[a \geq 0]$$

$x := a; y := 1; \text{ while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x; x := x - 1 \text{ od}$

$$[a \Downarrow y = a!]$$

ist gültig im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit.

# Übungsaufgabe 5.5.6: Divisionsprogramm

Beweise Lemma 5.5.7 (Terminierung, Aufwandsabschätzung):

## Lemma 5.5.7 (Ganzzahlige Division mit Rest)

1. **Terminierung:** Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[x = 17 \wedge y = 4]$$

$q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od}$

$$[1 \Downarrow \text{true}]$$

ist gültig im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit.

2. **Aufwandsabschätzung:** Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[x \geq 0 \wedge y > 0]$$

$q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od}$

$$[x - y \Downarrow \text{true}]$$

ist gültig im Sinn aufwandsbewusster totaler Korrektheit.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

395/169

# Übungsaufgabe 5.5.8: Divisionsprogramm

Beweise Lemma 5.5.9 (Terminierung/Aufwandsabschätzung plus funktionale Korrektheit):

## Lemma 5.5.9 (Ganzzahlige Division mit Rest)

1. **Terminierung** + **funktionale Korrektheit**: Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[x = 17 \wedge y = 4]$$

$q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od}$

$$[1 \Downarrow x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y \wedge q = 4 \wedge r = 1]$$

ist **gültig** im Sinn **aufwandsbewusster totaler Korrektheit**.

2. **Aufwandsabschätzung** + **funktionale Korrektheit**: Das aufwandsbewusste Korrektheitsstripel

$$[x \geq 0 \wedge y > 0]$$

$q := 0; r := x; \text{ while } r \geq y \text{ do } q := q + 1; r := r - y \text{ od}$

$$[x - y \Downarrow x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y]$$

ist **gültig** im Sinn **aufwandsbewusster totaler Korrektheit**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





396/169

# Kapitel 5.6

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (1)

## Axiomatische asymptotische Aufwandsabschätzungsanalyse

-  Hanne Riis Nielson. *Hoare Logic's for Run-time Analysis of Programs*. PhD thesis, Edinburgh University, UK, 1984.
-  Hanne Riis Nielson. *A Hoare-like Proof System for Run-Time Analysis of Programs*. Science of Computer Programming 9(2):107-136, 1987.
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992.  
(Chapter 6.5, Assertions for Execution Time)
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 10.2, Assertions for Execution Time)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

398/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (2)

## Schlechtester-Fall-Ausführungszeitanalyse: Überblicksarbeiten



Reinhard Wilhelm, Jakob Engblom, Andreas Ermedahl, Niklas Holsti, Stephan Thesing, David Whalley, Guillem Bernat, Christian Ferdinand, Reinhold Heckmann, Tulika Mitra, Frank Mueller, Isabelle Puaut, Peter Puschner, Jan Staschulat, Per Stenström. *The Worst-case Execution Time Problem – Overview of Methods and Survey of Tools*. ACM Transactions on Embedded Computing Systems 7(3):36.1-53, 2008.



Reinhard Wilhelm. *Real Time spent on Real Time*. Communications of the ACM 63(10):54-60, 2020.

...the story of the development of a sound, static method for worst-case execution-time analysis.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

399/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (3)

## Schlechtester-Fall-Ausführungszeitanalyse: Ausgewählte Arbeiten und Werkzeuge



*aiT Worst-Case Execution Time Analyzers*. Website: <http://www.absint.com/ait>, 2016. [Online; accessed 1-August-2016]



Philip Axer, Rolf Ernst, Heiko Falk, Alain Girault, Daniel Grund, Nan Guan, Bengt Jonsson, Peter Marwedel, Jan Reineke, Christine Rochange, Maurice Sebastian, Reinhard von Hanxleden, Reinhard Wilhelm, Wang Yi. *Building Timing Predictable Embedded Systems*. ACM Transactions on Embedded Computing Systems 13(4):82, 2014.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (4)

-  Clément Ballabriga, Hugues Cassé, Christine Rochange, Pascal Sainrat. *OTAWA: An Open Toolbox for Adaptive WCET Analysis*. In Proceedings SEUS 2010, Springer-V., 35-46, 2010.
-  Raimund Kirner, Jens Knoop, Adrian Prantl, Markus Schordan, Albrecht Kadlec. *Beyond Loop Bounds: Comparing Annotation Languages for Worst-Case Execution Time Analysis*. Journal of Software and Systems Modeling 10(3):411-437, Springer-V., 2011.
-  Armelle Bonenfant, Hugues Cassé, Marianne De Michiel, Jens Knoop, Laura Kovács, Jakob Zwirchmayr. *FFX: A Portable WCET Annotation Language*. In Proceedings of the 20th International Conference on Real-Time and Network Systems (RTNS 2012), ACM, 91-100, 2012.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8




Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

401/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (5)

-  Marvin Damschen, Lars Bauer, Jörg Henkel. *Timing Analysis of Tasks on Runtime Reconfigurable Processors*. In IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems 25(1):294-307 2017.
-  Stephen A. Edwards, Edward A. Lee. *The Case for the Precision-timed (PRET) Machine*. In Proceedings of the 44th ACM/IEEE Design Automation Conference (DAC'07), 264-265, 2007.
-  Jan Gustafsson. *Usability Aspects of WCET Analysis*. In Proceedings of the 11th IEEE International Symposium on Object and Component-Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC 2008), 346-352, 2008.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (6)



Jan Gustafsson, Adam Betts, Andreas Ermedahl, Björn Lisper. *The Mälardalen WCET Benchmarks: Past, Present, and Future*. In Proceedings of the 10th International Workshop on Worst-Case Execution Time Analysis (WCET 2010), 136-146, 2010.



Thomas Leveque, Etienne Borde, Amine Marref, Jan Carlsson. *Hierarchical Composition of Parametric WCET in a Component Based Approach*. In Proceedings of the 14th IEEE International Symposium on Object/Component/Service-Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC 2011), 261-268, 2011.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7




Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (7)

-  Yau-Tsun Steven Li, Sharad Malik. *Performance Analysis of Embedded Software using Implicit Path Enumeration*. ACM SIGPLAN Notices 30(11):88-98, 1995.
-  Björn Lisper, Andreas Ermedahl, Dietmar Schreiner, Jens Knoop, Peter Gliwa. *Practical Experiences of Applying Source-level WCET Flow Analysis to Industrial Code*. Journal of Software Tools for Technology Transfer (STTT) 15(1):53-63, Springer-V., 2013.
-  Greger Ottosson, Mikael Sjödin. *Worst-Case Execution Time Analysis for Modern Hardware Architectures*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN Workshop on Languages, Compilers, and Tools for Real-Time Systems (LCT-RTS'97), 1997.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (8)



Peter Puschner, Raimund Kirner, Robert G. Pettit.  
*Towards Composable Timing for Real-Time Programs.*  
Software Technologies for Future Dependable Distributed  
Systems, 1-5, 2009.



Peter Puschner, Daniel Prokesch, Benedikt Huber, Jens Knoop, Stefan Hepp, Gernot Gebhard. *The T-CREST Approach of Compiler and WCET-Analysis Integration.* In Proceedings of the 9th International Workshop on Software Technologies for Future Embedded and Ubiquitous Systems (SEUS 2013), 33-40, 2013.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (9)



Jan Reineke, Björn Wachter, Stephan Thesing, Reinhard Wilhelm, Ilia Polian, Jochen Eisinger, Bernd Becker. *A Definition and Classification of Timing Anomalies*. In Proceedings of the 6th International Workshop on Worst-Case Execution Time Analysis (WCET 2006), 2006.



Henrik Theiling. *ILP-based Interprocedural Path Analysis*. In Proceedings of the International Workshop on Embedded Software (EMSOFT 2002), Springer-V., LNCS 2491, 349-363, 2002.



Lothar Thiele, Reinhard Wilhelm. *Design for Timing Predictability*. Real-Time Systems 28(2-3):157-177, 2004.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.6

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

# Teil III

## Analyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

**Teil III**

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 6

## Programmanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

**Kap. 6**

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12



# Kapitel 6.1

## Motivation, Problem

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

**6.1**

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Motivation, Problem

...in Kapitel 2 und 3 haben wir uns mit verschiedenen Methoden zur Festlegung einer

- konkreten Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{WHILE}}$  für die Sprache **WHILE**

und darauf aufbauend in Kapitel 4 und 5 mit

- axiomatischer Verifikation

zum Beweis von **Eigenschaften** von **WHILE**-Programmen relativ zur konkreten Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\text{WHILE}}$  beschäftigt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# In den folgenden Kapiteln

...werden wir uns mit Methoden zur Festlegung verschiedener

- abstrakter Semantiken  $\llbracket \cdot \rrbracket_{absSem}$  für **W**HILE

beschäftigen und darauf aufbauend mit

- Analyseverfahren

zum Beweis von **Eigenschaften** eines Programms relativ zu einer abstrakten Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket_{absSem}$ , deren Ergebnisse bzgl. der konkreten Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket_{W\text{HILE}}$  von **W**HILE korrekt sein müssen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Dabei gilt:

Interessante Eigenschaften von Programmen sind fast immer

- unentscheidbar

bzgl. der konkreten wie (auch vieler) abstrakter Programmsemantiken.

Glücklicherweise: Einige interessante Eigenschaften sind

- entscheidbar
  - nützlich
  - ermöglichen
    - manuelle/semiautomatische Programmverifikations-
    - semiautomatische/vollautomatische Programmanalyse-
- Verfahren.

# Kapitel 6.2

## Ausblick, Lichtblick

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

**6.2**

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Ein Lichtblick im Ausblick

...die Entwicklung von **Analyse-** und **Verifikationsverfahren** relativ zu einer **abstrakten Programmsemantik** kann sich zunutze machen, die fast immer **konfliktären Ziele** von

- **Performanz/Effizienz/Skalierbarkeit**
- **Akkuratheit/Vollständigkeit**

gegeneinander **abzuwiegen** und **abzutauschen**, unter Umständen sogar gegen

- **Korrektheit**

solange die erzielten Resultate noch **nützlich** sind.

Mit der Aufgabe, Verfahren und Methoden zu entwickeln, die im Spannungsdreieck von

- **Vollständigkeit, Nützlichkeit, Performanz/Skalierbarkeit**

eine **gute Balance** bewahren, beginnt **Informatik**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Ein weiterer Lichtblick

...‘interessante’ Eigenschaften mögen zwar

- nicht generell
- nicht generell effizient
- nicht generell auch praktisch effizient

entscheidbar sein, aber all dies mag gelten für eingeschränkte Programmklassen, die ihrerseits noch hinreichend (praxis-) relevant und deshalb interessant sind; oft z.B.:

- schleifenfreie oder/und rekursionsfreie Programme
- parallelitätsfreie Programme
- prozedur-, methodenfreie Programme
- Formale prozedur-, methodenaufffreie Programme
- ...

Auch das Erkennen und Ausnutzen solcher Spezialfälle ist Informatik.

# Analyse- und Verifikationsverfahren

...zur **Programmanalyse** gibt es (deshalb) in verschiedensten Zugängen und Ausprägungen:

- Datenflussanalyse (Kap. 7)
- Reverse Datenflussanalyse (Kap. 8)
- Parallele Datenflussanalyse (Kap. 9)
- Abstrakte Interpretation (Kap. 15)
- Modellprüfung (Kap. 16)
- Symbolische Analyse
- Konkrolische Analyse
- ...

von denen wir beginnend mit der **Theorie der Datenflussanalyse** die farblich hervorgehobenen in den folgenden Kapiteln genauer untersuchen und...



# Anwendungen, Wechselbeziehungen, Nützlichk.

...hinsichtlich ihrer **Nützlichkei**t exemplarisch auch am Beispiel von **Anwendungen** wie:

- Elimination unnötiger Anweisungen in Programmen (**Kap. 12, Kap. 13**)
- Ersetzung von Ausdrücken durch ihre Werte (**Kap. 14**)

und im Hinblick auf **Gemeinsamkeiten, Unterschiede, Verbindungen** und **Wechselbeziehungen** zu- und miteinander verglichen werden:

- Abstrakte Interpretation und Datenflussanalyse (**Kap. 15**)
- Modellprüfung und Datenflussanalyse (**Kap. 16**)
- Modellprüfung und Abstrakte Interpretation (**Kap. 17**)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

417/169

# Kapitel 6.3

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

**6.3**

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10



Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (1)

## Lehrbuchdarstellungen

-  Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi, Jeffrey D. Ullman. *Compilers: Principles, Techniques, & Tools*. Addison-Wesley, 2. Auflage, 2007. (Kapitel 1.2, The Structure of a Compiler; Kapitel 1.4, The Science of Building a Compiler; Kapitel 1.4.2, The Science of Code Optimization; Kapitel 9.1, The Principal Sources of Program Optimization)
-  Keith D. Cooper, Linda Torczon. *Engineering a Compiler*. Morgan Kaufman Publishers, 2004. (Anhang B.3.1, Graphical Intermediate Representations)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9





Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (2)



-  Matthew S. Hecht. *Flow Analysis of Computer Programs*. Elsevier, North-Holland, 1977.
-  Uday P. Khedker, Amitabha Sanyal, Bageshri Karkare. *Data Flow Analysis: Theory and Practice*. CRC Press, 2009. (Kapitel 3, Theoretical Abstractions in Data Flow Analysis; Kapitel 4, General Data Flow Frameworks; Kapitel 5, Complexity of Iterative Data Flow Analysis)
-  Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis*. Springer-V., 2009. (Kapitel 7, What can one tell about a Program without its Execution: Static Analysis)
-  Robert Morgan. *Building an Optimizing Compiler*. Digital Press, 1998. (Kapitel 2.3, Building the Flow Graph; Kapitel 4.7, Structure of Program Flow Graph)

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (3)

-  Stephen S. Muchnick. *Advanced Compiler Design Implementation*. Morgan Kaufman Publishers, 1997. (Kapitel 7, Control-Flow Analysis)
-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Formal Methods: An Appetizer*. Springer-V., 2019. (Chapter 4, Program Analysis)
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Kapitel 5, Static Program Analysis)
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Kapitel 7, Program Analysis; Kapitel 8, More on Program Analysis; Anhang B, Implementation of Program Analysis)

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (4)

## Grundlegende, wegweisende Arbeiten

-  Frances E. Allen, John A. Cocke. *A Program Data Flow Analysis Procedure*. Communications of the ACM 19(3):137-147, 1976.
-  Dhananjay M. Dhamdhere, Barry K. Rosen, F. Kenneth Zadeck. *How to Analyze Large Programs Efficiently and Informatively*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'92 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'92), ACM SIGPLAN Notices 27(7):212-223, 1992.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9





Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (5)

-  Susan Horwitz, Alan J. Demers, Tim Teitelbaum. *An Efficient General Iterative Algorithm for Dataflow Analysis*. Acta Informatica 24(6):679-694, 1987.
-  John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Global Data Flow Analysis and Iterative Algorithms*. Journal of the ACM 23:158-171, 1976.
-  John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Monotone Data Flow Analysis Frameworks*. Acta Informatica 7:305-317, 1977.
-  Gary A. Kildall. *A Unified Approach to Global Program Optimization*. In Conference Record of the 1st Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'73), 194-206, 1973.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (6)

## Rahmenwerke, Werkzeugkisten



Marion Klein, Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *DFA&OPT-METAFrame: A Toolkit for Program Analysis and Optimization*. In Proceedings of the 2nd International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'96), Springer-V., LNCS 1055, 422-426, 1996.



Jens Knoop. *From DFA-Frameworks to DFA-Generators: A Unifying Multiparadigm Approach*. In Proceedings of the 5th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99), Springer-V., LNCS 1579, 360-374, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10





Teil IV

Kap. 11

Kap. 12



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (7)

-  Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Properties of Data Flow Frameworks*. Acta Informatica 28(2):121-163, 1990.
-  Florian Martin. *PAG - An Efficient Program Analyzer Generator*. Journal of Software Tools for Technology Transfer 2(1):46-67, 1998.
-  Stephen P. Masticola, Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Lattice Frameworks for Multisource and Bidirectional Data Flow Problems*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 17(5):777-803, 1995.
-  Flemming Nielson. *Semantics-directed Program Analysis: A Tool-maker's Perspective*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 2-21, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (8)



Christian Fecht, Helmut Seidl. *Propagating Differences: An Efficient New Fixpoint Algorithm for Distributive Constraint Systems*. In Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98), Springer-V., LNCS 1381, 90-104, 1998.



Christian Fecht, Helmut Seidl. *A Faster Solver for General Systems of Equations*. Science of Computer Programming 35(2):137-161, 1999.



Bernhard Steffen, Andreas Claßen, Marion Klein, Jens Knoop, Tiziana Margaria. *The Fixpoint Analysis Machine*. In Proceedings of the 6th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR'95), Springer-V., LNCS 962, 72-87, 1995.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10



Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (9)

## Flussgraph-Pragmatik

-  Larry Carter, Jeanne Ferrante, Clark Thomborson. *Folklore Confirmed: Reducible Flow Graphs are Exponentially Larger*. In Conference Record of the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 106-114, 2003.
-  Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *Basic-block Graphs: Living Dinosaurs?* In Proceedings of the 7th International Conference on Compiler Construction (CC'98), Springer-V., LNCS 1383, 65-79, 1998.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (10)

## Verschiedenes



Stephen M. Blackburn, Amer Diwan, Matthias Hauswirth, Peter F. Sweeny, José Nelson Amaral, Tim Brecht, Lubomír Bulej, Cliff Click, Lieven Eeckhout, Sebastian Fischmeister, Daniel Frampton, Laurie J. Hendren, Michael Hind, Antony L. Hosking, Richard E. Jones, Tomas Kalibera, Nathan Keynes, Nathaniel Nystrom, Andreas Zeller. *The Truth, The Whole Truth, and Nothing But the Truth: A Pragmatic Guide to Assessing Empirical Evaluations*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 38(4), Article 15:1-20, 2016.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

6.1

6.2

6.3

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

# Kapitel 7

## Datenflussanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

**Kap. 7**

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

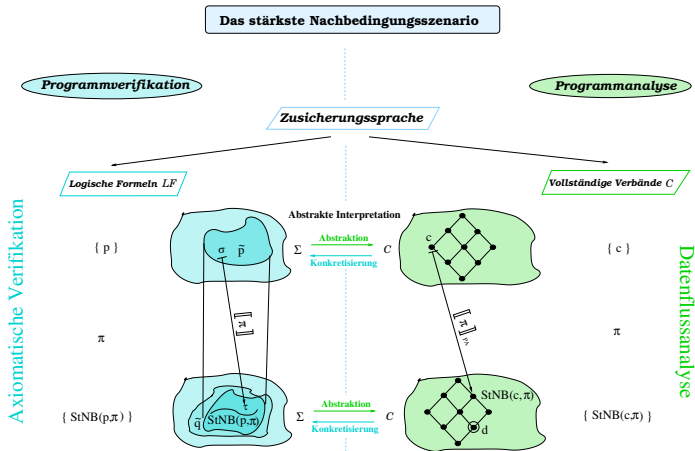
7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
429/169

# Motivation: Verifikation vs. Datenflussanalyse



$\text{StNB}(p, \pi) \in LF$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{PV} \{ p \} \pi \{ \text{StNB}(p, \pi) \}$
- (2)  $\forall q \in LF. \models_{PV} \{ p \} \pi \{ q \} \text{ impliziert } \text{StNB}(p, \pi) \Rightarrow q$

$\text{StNB}(c, \pi) \in C$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{PA} \{ c \} \pi \{ \text{StNB}(c, \pi) \}$
- (2)  $\forall d \in C. \models_{PA} \{ c \} \pi \{ d \} \text{ impliziert } \text{StNB}(c, \pi) \sqsupseteq d$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

# Kapitel 7.1

## Vorbereitung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

**7.1**

7.1.1

7.1.2

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

431/169

# Kapitel 7.1.1

## Flussgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

**7.1.1**

7.1.2

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

432/169



# Flussgraphen

...zusätzlich zur textuellen Darstellung von **WHILE**-Programmen:

## Definition 7.1.1.1 (Flussgraph)

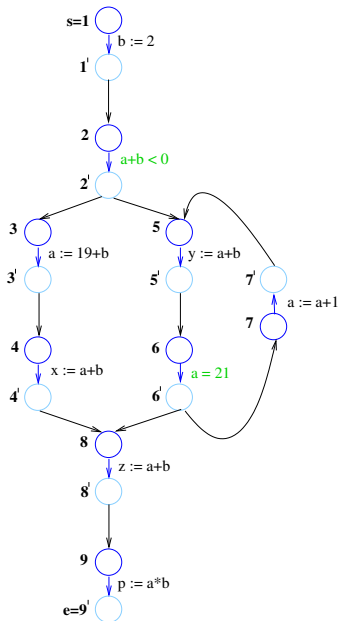
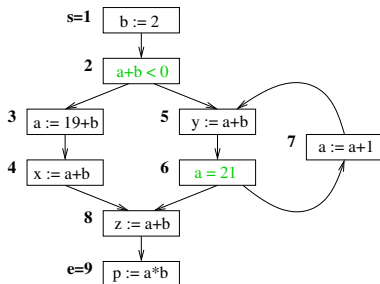
Ein **Flussgraph** ist ein Quadrupel  $G = (N, E, s, e)$ , wobei

- $N$  Menge von **Knoten**.
- $E \subseteq N \times N$  Menge von **Kanten**.
- $s$  ausgezeichneter **Startknoten** ohne Vorgänger.
- $e$  ausgezeichneter **Endknoten** ohne Nachfolger.

**Knoten** repräsentieren **Programmpunkte** von  $G$ , **Kanten** die **Verzweigungsstruktur**. ObdA nehmen wir an, dass jeder Knoten auf einem Pfad von  $s$  nach  $e$  liegt.

**Instruktionen** (d.h. Zuweisungen, Tests) werden entweder den Knoten oder Kanten zugeordnet. Je nachdem sprechen wir von **knoten-** bzw. **kantenbenannten Flussgraphen**.

# Beispiel: Knoten-, kantenbenannter Flussgraph



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.1.1

7.1.2

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

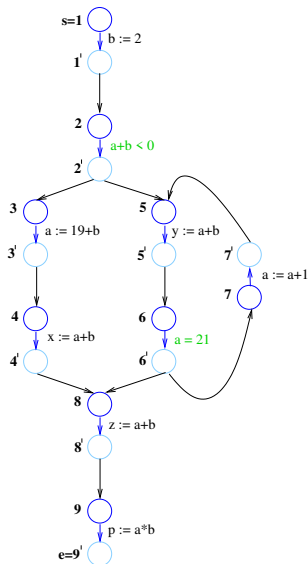
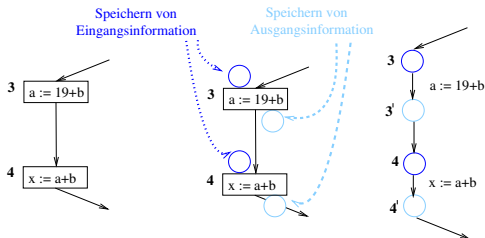
7.10

7.11

434/169

# Von knoten- zu kantenbenannten Flussgraphen

...schematisch:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.1.1

7.1.2

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

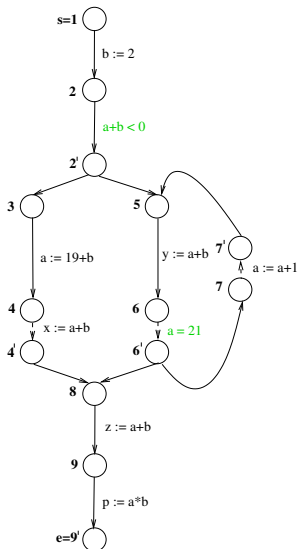
7.10

7.11

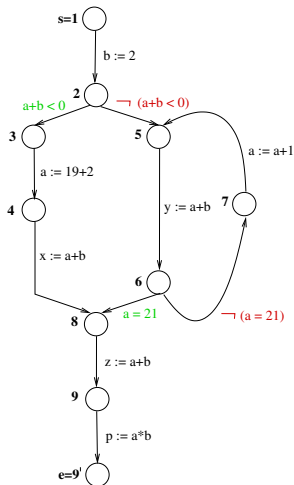
# Kantenbenannter Flussgraph nach 'Aufräumen'

...mit verfeinerter Verzweigungsbehandlung (Abb. (b)):

a)



b)



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.1.1

7.1.2

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

# Vorgänger-, Nachfolgerknoten, Pfade

Sei  $G = (N, E, s, e)$  ein Flussgraph,  $m, n$  zwei Knoten aus  $N$ .

## Definition 7.1.1.2 (Vorgänger-, Nachfolgerknoten)

- $\text{pred}_G(n) =_{df} \{ m \mid (m, n) \in E \}$  bezeichnet die Menge der Vorgängerknoten von  $n$ .
- $\text{succ}_G(n) =_{df} \{ m \mid (n, m) \in E \}$  bezeichnet die Menge der Nachfolgerknoten von  $n$ .

## Definition 7.1.1.3 (Pfade)

- Eine Folge von Kanten  $\langle (n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_k, m_k) \rangle$ , wobei  $m_i = n_{i+1}$ ,  $1 \leq i < k$ , heißt Pfad von  $n_1$  nach  $m_k$ .
- $\mathbf{P}_G[m, n]$  bezeichnet die Menge aller Pfade von  $m$  nach  $n$ .

**Beachte:** Ist  $G$  eindeutig aus dem Kontext bestimmt, schreiben wir statt  $\text{pred}_G$ ,  $\text{succ}_G$ ,  $\mathbf{P}_G$  kürzer  $\text{pred}$ ,  $\text{succ}$ ,  $\mathbf{P}$ .

# In der Folge

...betrachten wir

- **kantenbenannte** Flussgraphen

die notationell zu weniger Aufwand führen und deshalb pragmatisch von Vorteil sind.

**Verzweigungsbedingungen** in Flussgraphen werten wir nicht aus, um (einige) Unentscheidbarkeiten zu vermeiden; wir sprechen deshalb von

- **nichtdeterministischen** Flussgraphen.

**Beachte:** Vor- und Nachteile unterschiedlicher Flussgraphvarianten zur Programmdarstellung werden in

- **Anhang B: Flussgraphvarianten**

aus pragmatischer Sicht untersucht und diskutiert.

# Kapitel 7.1.2

## Vollständige Verbände

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.1.1

**7.1.2**

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

439/169

# Partiell geordnete Mengen, Verbände

## Definition 7.1.2.1 (Partiell geordnete Mengen)

Sei  $M$  eine Menge und  $R \subseteq M \times M$  eine Relation auf  $M$ . Dann heißt das Paar  $(M, R)$  eine **partiell geordnete Menge** (engl. **partially ordered set**) gdw  $R$  ist reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch.

## Definition 7.1.2.2 (Verband, Vollständiger Verband)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partiell geordnete Menge. Dann heißt das Paar  $(P, \sqsubseteq)$  ein

1. **Verband** (engl. **lattice**), wenn **jede nichtleere endliche Teilmenge  $P'$  von  $P$**  eine kleinste obere und eine größte untere Schranke in  $P$  besitzt.
2. **vollständiger Verband** (engl. **complete lattice**), wenn **jede Teilmenge  $P'$  von  $P$**  eine kleinste obere und eine größte untere Schranke in  $P$  besitzt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.1.1

7.1.2

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11



# Beispiele: Partiiell geordnete Mengen, Verbände

a)

$\vdots$   
|  
3  
|  
2  
|  
1  
|  
0  
|  
-1  
|  
-2  
|  
-3  
|  
 $\vdots$

b)

$\top$   
 $\vdots$   
 $\vdots$   
|  
3  
|  
2  
|  
1  
|  
0  
|  
-1  
|  
-2  
|  
-3  
|  
 $\vdots$   
 $\perp$

c)

$\top$   
 $\vdots$   
 $\vdots$   
|  
3  
|  
2  
|  
1  
|  
0

d)

$\vdots$   
|  
3  
|  
2  
|  
1  
|  
0

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.1.1

**7.1.2**

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

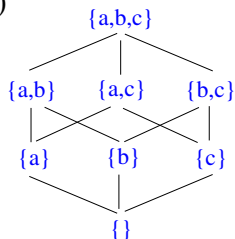
7.9

7.10

7.11

# Beispiele: Vollständige Verbände

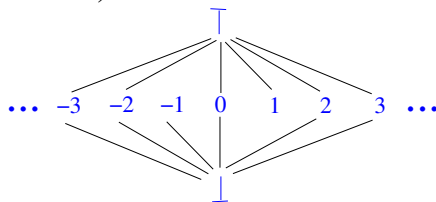
a)



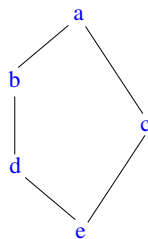
b)



c)



d)



# Begriffe, Schreibweisen für Verbände

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $C' \subseteq C$  eine Teilmenge von  $C$ . Dann existieren und bezeichnen:

- $\bigcap C'$  die größte untere Schranke von  $C'$ .
- $\bigcup C'$  die kleinste obere Schranke von  $C'$ .
- $\perp$  das kleinste Element von  $C$ ,  $\perp = \bigcap C = \bigcup \emptyset$ .
- $\top$  das größte Element von  $C$ ,  $\top = \bigcup C = \bigcap \emptyset$ .

Vollständige Verbände werden deshalb oft als Sechstupel angegeben:

$$- \hat{C} = (C, \sqsubseteq, \bigcap, \bigcup, \perp, \top)$$

Die Symbole  $\bigcap$ ,  $\bigcup$ ,  $\perp$  und  $\top$  werden dabei als Schnitt, Vereinigung, 'bottom' und 'top' gelesen.

# Absteigende, aufsteigende Kettenbedingung

## Definition 7.1.2.3 (Kettenbedingung)

Sei  $\hat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$  ein Verband.  $\hat{\mathcal{C}}$  erfüllt die

1. **absteigende Kettenbedingung** (engl. **descending chain condition**), wenn jede absteigende Kette schließlich stationär wird, d.h., für jede Kette  $c_1 \sqsupseteq c_2 \sqsupseteq \dots \sqsupseteq c_n \sqsupseteq \dots$  gibt es einen Index  $m \geq 1$  mit  $c_m = c_{m+j}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .
2. **aufsteigende Kettenbedingung** (engl. **ascending chain condition**), wenn jede aufsteigende Kette schließlich stationär wird, d.h., für jede Kette  $c_1 \sqsubseteq c_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq c_n \sqsubseteq \dots$  gibt es einen Index  $m \geq 1$  mit  $c_m = c_{m+j}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

# Monotonie, Distributivität und Additivität

...sind wichtige Eigenschaften von Funktionen auf Verbänden:

## Definition 7.1.2.4 (Monotonie)

Sei  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$  ein vollständiger Verband und  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  eine Funktion auf  $\mathcal{C}$ . Dann heißt  $f$

- **monoton** gdw  $\forall c, c' \in \mathcal{C}. c \sqsubseteq c' \Rightarrow f(c) \sqsubseteq f(c')$   
(Erhalt der Ordnung von Elementen)

## Definition 7.1.2.5 (Distributivität, Additivität)

Sei  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$  ein vollständiger Verband und  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  eine Funktion auf  $\mathcal{C}$ . Dann heißt  $f$

- **distributiv** gdw  $\forall \emptyset \neq C' \subseteq \mathcal{C}. f(\sqcap C') = \sqcap \{f(c) \mid c \in C'\}$   
(Erhalt größter unterer Schranken)
- **additiv** gdw  $\forall \emptyset \neq C' \subseteq \mathcal{C}. f(\sqcup C') = \sqcup \{f(c) \mid c \in C'\}$   
(Erhalt kleinster oberer Schranken)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.1.1

7.1.2

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

445/169

...charakterisiert über den Erhalt größter unterer und kleinster oberer Schranken:

## Lemma 7.1.2.6

Sei  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$  ein vollständiger Verband und  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  eine Funktion auf  $\mathcal{C}$ . Dann sind äquivalent:

1.  $f$  ist monoton.
2.  $\forall \emptyset \neq C' \subseteq \mathcal{C}. f(\sqcap C') \sqsubseteq \sqcap \{f(c) \mid c \in C'\}$
3.  $\forall \emptyset \neq C' \subseteq \mathcal{C}. f(\sqcup C') \sqsupseteq \sqcup \{f(c) \mid c \in C'\}$

# Zshg. v. Monotonie, Distributivität, Additivität

Sei  $\hat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$  ein vollständiger Verband und  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  eine Funktion auf  $\mathcal{C}$ .

## Lemma 7.1.2.7

1.  $f$  distributiv oder additiv  $\implies f$  monoton
2. Distributivität und Additivität sind unabhängig voneinander; keine Eigenschaft impliziert die andere.

...im Kontext von [Datenflussanalyse](#) ([Kap. 7](#)) und [abstrakter Interpretation](#) ([Kap. 15](#)) repräsentieren und modellieren

- die Elemente vollständiger Verbänden die interessierenden Datenflussinformationen
- monotone, distributive, additive Funktionen auf vollständigen Verbänden die ‘DFA-Semantik’ von Programmen

mathematisch.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.1.1

7.1.2

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

447/169

# Kapitel 7.2

## Lokale DFA-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

**7.2**

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
448/169



# Lokale DFA-Semantik

Sei  $G = (N, E, s, e)$  ein kantenbenannter Flussgraph.

## Definition 7.2.1 (Lokale DFA-Semantik)

Eine lokale abstrakte DFA-Semantik für  $G$  ist eine Abbildung

$$\llbracket \cdot \rrbracket : E \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$$

mit  $\mathcal{C}$  Grundmenge eines vollständigen Verbands  $\hat{\mathcal{C}}$ :

$$\hat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8

# Kapitel 7.3

## DFA-Spezifikation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

**7.3**

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
450/169

# DFA-Spezifikation

Sei  $G = (N, E, s, e)$  ein kanntenbenannter Flussgraph.

## Definition 7.3.1 (DFA-Spezifikation)

Eine **DFA-Spezifikation** für  $G$  ist ein Tripel  $\mathcal{S}_G = (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$ , mit:

- $\hat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \perp, \top)$  ein **vollständiger Verband**
- $\llbracket \cdot \rrbracket : E \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$  eine **lokale abstrakte Semantik**
- $c_s \in \mathcal{C}$  eine **initiale Information** (oder **Anfangszusicherung**)

## Definition 7.3.2 (DFA-Problem)

Eine DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G = (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  definiert das **DFA-Problem**  $DFA_{\mathcal{S}_G}$ .

# Anmerkungen

Für eine DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G = (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  gilt:

- Die Elemente des vollständigen Verbands  $\hat{\mathcal{C}}$  repräsentieren die interessierende **Datenflussinformation**.
- Die Funktionen  $\llbracket e \rrbracket$ ,  $e \in E$ , repräsentieren die Instruktionssemantik auf dem abstrakten Analyseniveau.
- $c_s \in \mathcal{C}$  ist die Datenflussinformation, die am Startknoten **s** von  $G$  als gültig angenommen wird.

Das legt nahe:

- $\hat{\mathcal{C}}$  einen **DFA-Verband**
- $\llbracket \cdot \rrbracket$  eine **lokale abstrakte DFA-Semantik** (oder: **DFA-Semantik**)
- $\llbracket e \rrbracket$ ,  $e \in E$ , eine **lokale DFA-Semantikfunktion** (oder: **DFA-Funktion**)
- $c_s \in \mathcal{C}$  eine **DFA-Anfangszusicherung**

zu nennen.

# Generalvereinbarung

...für DFA-Verbände:

- Verbandmäßig größer heißt bessere, genauere Information!

Beachte: In der Theorie abstrakter Interpretationen ist diese Vereinbarung genau andersherum getroffen (s. Kapitel 15.2).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
453/169

# Beispiel: Verfügbarkeit eines Terms $t$ (1)

...ein Term  $t$  heißt **verfügbar** an Programmpunkt  $n$ , wenn  $t$  auf jedem Pfad  $p$  von  $s$  nach  $n$  berechnet wird, ohne dass ein Operand von  $t$  nach der letzten Berechnung von  $t$  auf  $p$  modifiziert wird.

DFA-Spezifikation für die Verfügbarkeit eines Terms  $t$ :

- DFA-Verband

$$\hat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top) =_{df} (\text{IB}, \wedge, \vee, \leq, \text{falsch}, \text{wahr}) = \hat{\text{IB}}$$

- DFA-Semantik

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t : E \rightarrow (\text{IB} \rightarrow \text{IB}) \text{ where}$$
$$\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_{av}^t =_{df} \lambda b. (b \vee \text{Comp}_e^t) \wedge \text{Transp}_e^t$$

- DFA-Anfangszusicherung:  $b_s \in \text{IB}$

Insgesamt:

- Verfügbarkeitsspezifikation:  $\mathcal{S}_G^{av,t} = (\hat{\text{IB}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t, b_s)$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

## Beispiel: Verfügbarkeit eines Terms $t$ (2)

...wobei  $\widehat{IB}$  den DFA-Verband und  $Comp_e^t$ ,  $Mod_e^t$  und  $Transp_e^t$  drei mit Kanten und ihren Instruktionen assoziierte lokale Prädikate bezeichnen:

- $\widehat{IB} =_{df} (IB, \wedge, \vee, \leq, \mathbf{falsch}, \mathbf{wahr})$

...Verband der **Wahrheitswerte**: kleinstes Element **falsch**, größtes Element **wahr**,  $\mathbf{falsch} \leq \mathbf{wahr}$ , logisches  $\wedge$  und logisches  $\vee$  als Schnitt- und Vereinigungsoperation.

- $Comp_e^t$  ...**wahr**, wenn  $t$  bei Ausführung der Instruktion an Kante  $e$  **berechnet** wird, **falsch** sonst.
- $Transp_e^t$  ...**wahr**, wenn  $e$  **transparent** für  $t$  ist (d.h., keinem Operanden von  $t$  wird bei Ausführung der Instruktion an Kante  $e$  ein neuer Wert zugewiesen), **falsch** sonst.

# DFA-Probleme

...sind praktisch relevant (i.S.v. 'lösbar'), wenn ihre zugrundeliegende **lokale DFA-Semantik**

- **monoton**
- **distributiv (additiv)**

ist und der zugehörige **DFA-Verband** die

- **absteigende (aufsteigende) Kettenbedingung**

erfüllt (s. **Kap. 7.6, 7.7**).



# DFA-Semantiken u. -Probleme: Eigenschaften

Sei  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation für  $G$ .

## Definition 7.3.3 (DFA-Semantikeigenschaften)

Die lokale DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket : E \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$  von  $\mathcal{S}_G$  ist **monoton/distributiv/additiv** gdw alle DFA-Funktionen  $\llbracket e \rrbracket$ ,  $e \in E$ , sind **monoton/distributiv/additiv**.

## Definition 7.3.4 (DFA-Problemeigenschaften)

Das durch  $\mathcal{S}_G$  gegebene DFA-Problem  $DFA_{\mathcal{S}_G}$

- ist **monoton/distributiv/additiv** gdw die lokale DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket$  von  $\mathcal{S}_G$  ist **monoton/distributiv/additiv**.
- erfüllt die **absteigende/aufsteigende Kettenbedingung** gdw der DFA-Verband  $\hat{\mathcal{C}}$  von  $\mathcal{S}_G$  erfüllt die **absteigende/aufsteigende Kettenbedingung**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

# Beispiel: Verfügbarkeit eines Terms $t$ (1)

## Lemma 7.3.5 (DFA-Funktionen)

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t = \lambda e. \begin{cases} Cst_{\text{wahr}} & \text{falls } Comp_e^t \wedge Transp_e^t \\ Id_{IB} & \text{falls } \neg Comp_e^t \wedge Transp_e^t \\ Cst_{\text{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

- $Cst_{\text{wahr}}, Cst_{\text{falsch}} : IB \rightarrow IB$  (konstante Funktionen auf IB)

$$Cst_{\text{wahr}} =_{df} \lambda b. \text{wahr}$$

$$Cst_{\text{falsch}} =_{df} \lambda b. \text{falsch}$$

- $Id_{IB} : IB \rightarrow IB$  (Identität auf IB)

$$Id_{IB} =_{df} \lambda b. b$$

# Beispiel: Verfügbarkeit eines Terms $t$ (2)

## Lemma 7.3.6 (Kettenbedingung)

$\hat{\mathbb{B}}$  erfüllt die absteigende (und aufsteigende) Kettenbedingung.

## Lemma 7.3.7 (Distributivität, Additivität)

$\llbracket e \rrbracket_{av}^t$ ,  $e \in E$ , ist distributiv (und additiv) (und deshalb auch monoton).

**Beweis.** Unmittelbar mit Lemma 7.3.5 und Lemma 7.1.2.7(2).

## Korollar 7.3.8 (Verfügbarkeit eines Terms $t$ )

Das durch  $\mathcal{S}_G^{av,t} = (\hat{\mathbb{B}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t, b_s)$  gegebene DFA-Problem  $DFA_{\mathcal{S}_G^{av,t}}$  ist distributiv (und additiv) und erfüllt die absteigende (und aufsteigende) Kettenbedingung.

# Hin zu einer globalen abstrakten Semantik (1)

...für Flussgraphen durch Globalisierung lokaler abstrakter Semantiken für Instruktionen.

Das führt uns zur nichtdeterministischen operationellen

- Aufsammlungsemantik (AS) (engl. collecting semantics (CS))

Von AS leiten wir zwei deterministische operationelle Varianten ab: Die

1. Schnitt-über-alle-Pfade (*SUP*) Semantik (engl. meet over all paths (*MOP*) semantics)
2. Vereinigung-über-alle-Pfade (*VUP*) Semantik (engl. join over all paths (*JOP*) semantics)

# Hin zu einer globalen abstrakten Semantik (2)

...und weitergehend zwei (berechenbare) **deterministische denotationelle** Varianten: Die

1. maximale Fixpunktsemantik (*MaxFP*) (engl. maximum fixed point (*MaxFP*) semantics)
2. minimale Fixpunktsemantik (*MinFP*) (engl. minimum fixed point (*MinFP*) semantics)

die algorithmische Verfahren zur exakten Berechnung bzw. Approximation ihrer **operationellen Gegenstücke** induzieren.

# Kapitel 7.4

## Operationelle globale DFA-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

**7.4**

7.4.1

7.4.2

7.4.3

7.4.4

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

# Kapitel 7.4.1

## Aufsammlensemantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

**7.4.1**

7.4.2

7.4.3

7.4.4

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

# Ausdehnung der DFA-Fkt. v. Kanten auf Pfade

Sei  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

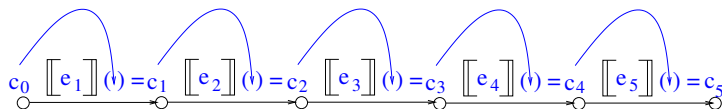
## Definition 7.4.1.1 (Ausdehnung von $\llbracket \cdot \rrbracket$ auf Pfade)

Die DFA-Semantik  $\llbracket e \rrbracket$ ,  $e \in E$ , wird durch folgende Festlegung von Kanten auf Pfade  $p = \langle e_1, e_2, \dots, e_q \rangle$  ausgedehnt:

$$\llbracket p \rrbracket =_{df} \begin{cases} Id_{\mathcal{C}} & \text{falls } \lambda_p < 1 \\ \llbracket \langle e_2, \dots, e_q \rangle \rrbracket \circ \llbracket e_1 \rrbracket & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  die Identität auf  $\mathcal{C}$  bezeichnet,  $Id_{\mathcal{C}} = \lambda c. c$ .

Veranschaulichung der Ausdehnung von  $\llbracket \cdot \rrbracket$  auf Pfade:





# Die DFA-Aufsammlersemantik

Sei  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

## Definition 7.4.1.2 (DFA-Aufsammlersemantik)

Die von  $\mathcal{S}_G$  induzierte (nichtdeterministische) **DFA-Aufsammlersemantik** (oder: **globale abstrakte Semantik**) ist definiert durch:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS} : N \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$$

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS} =_{df} \lambda n. \{ \llbracket p \rrbracket(c_s) \mid p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n] \}$$

wobei  $\mathcal{P}$  den Potenzmengenoperator bezeichnet.

Es gilt:

$$\llbracket \mathbf{s} \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS} = \{c_s\}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

7.4.2

7.4.3

7.4.4

7.4.5

7.5

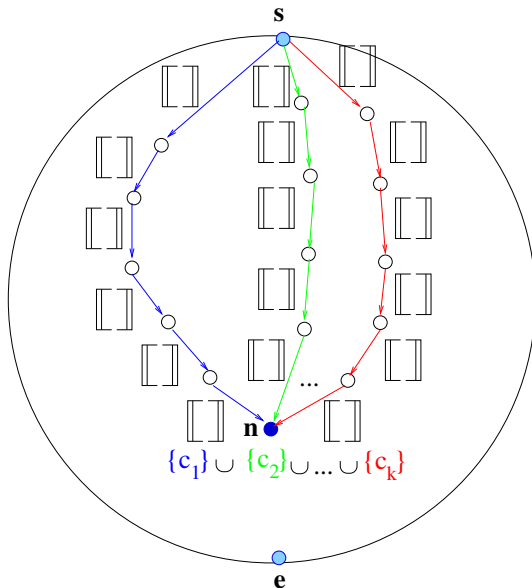
7.6

7.7

7.8

465/169

# Veranschaulichung d. DFA-Aufsammelsemantik



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

7.4.2

7.4.3

7.4.4

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

# Zusammenhang von $\llbracket \mathbf{e} \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS}$ und $\llbracket \pi \rrbracket_{\text{WHILE}}$

...ist  $\pi$  ein  $\text{WHILE}$ -Programm,  $G$  seine Flussgraphdarstellung und  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, \perp)$  eine DFA-Spezifikation für  $G$  bzgl. der Anfangszusicherung  $\perp$ , dann kann die globale DFA-Semantik am Endknoten  $\mathbf{e}$  des Programms

$$\llbracket \mathbf{e} \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS} = \{ \llbracket p \rrbracket(\perp) \mid p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, \mathbf{e}] \}$$

als nichtdeterministisches abstraktes Gegenstück der deterministischen  $\text{WHILE}$ -Semantik von  $\pi$  für  $\Sigma$  angesehen werden:

$$\llbracket \pi \rrbracket_{\text{WHILE}}(\Sigma) = \{ \llbracket \pi \rrbracket_{\text{WHILE}}(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma \}$$

Informell:

$$\llbracket \mathbf{e} \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS} \hat{=} \llbracket \pi \rrbracket_{\text{WHILE}}(\Sigma)$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

7.4.2

7.4.3

7.4.4

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

# Kapitel 7.4.2

## Schnitt-über-alle-Pfade-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

**7.4.2**

7.4.3

7.4.4

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

468/169

# Die Schnitt-über-alle-Pfade (*SUP*) Semantik

Sei  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

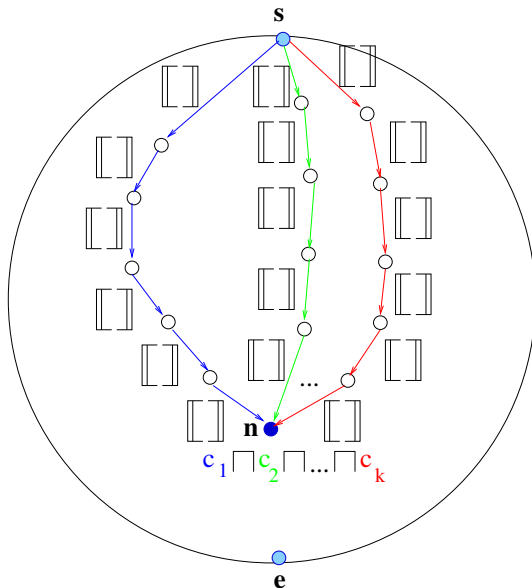
## Definition 7.4.2.1 (*SUP*-Semantik)

Die (deterministische) *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned}\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{SUP} &: N \rightarrow \mathcal{C} \\ \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{SUP} &=_{df} \lambda n \in N. \bigcap \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS} \\ &= \lambda n \in N. \bigcap \{ \llbracket p \rrbracket(c_s) \mid p \in \mathbf{P}[s, n] \}\end{aligned}$$

Beachte:  $\bigcap \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS}$ ,  $n \in N$ , existiert, da  $\hat{\mathcal{C}}$  vollständiger Verband ist. Daraus folgt, dass  $\llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{SUP}$  wohldefiniert ist.

# Veranschaulichung der SUP-Semantik



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

**7.4.2**

7.4.3

7.4.4

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

470/169

# Kapitel 7.4.3

## Vereinigung-über-alle-Pfade-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

7.4.2

**7.4.3**

7.4.4

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

471/169

# Vereinigung-über-alle-Pfade (VUP) Semantik

Sei  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

## Definition 7.4.3.1 (VUP-Semantik)

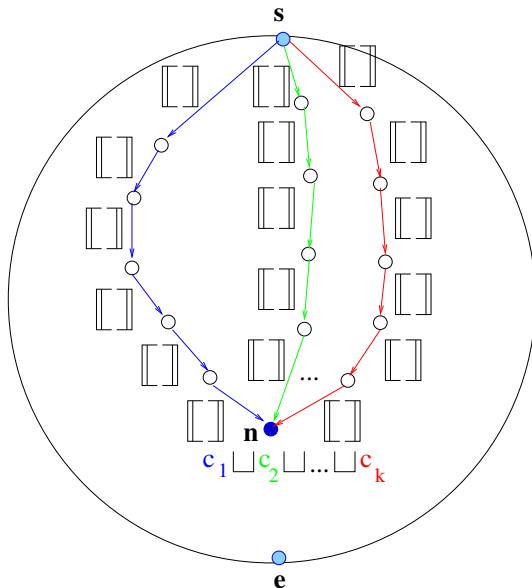
Die (deterministische) **VUP-Semantik** von  $\mathcal{S}_G$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{VUP} &: N \rightarrow \mathcal{C} \\ \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{VUP} &=_{df} \forall n \in N. \bigsqcup \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS} \\ &= \forall n \in N. \bigsqcup \{ \llbracket p \rrbracket(c_s) \mid p \in \mathbf{P}[s, n] \} \end{aligned}$$

Beachte:  $\bigsqcup \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{AS}$ ,  $n \in N$ , existiert, da  $\hat{\mathcal{C}}$  vollständiger Verband ist. Daraus folgt, dass  $\llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{VUP}$  wohldefiniert ist.



# Veranschaulichung der VUP-Semantik



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

7.4.2

**7.4.3**

7.4.4

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

473/169

# Kapitel 7.4.4

*SUP*- und *VUP*-Semantik als spezifizierende  
Lösungen von DFA-Problemen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

7.4.2

7.4.3

**7.4.4**

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

# Wie veranschaulicht in den Abbildungen

...aus Kapitel 7.4.2 und 7.4.3, grenzen die *SUP*- und die *VUP*-Semantik die am Programmpunkt  $n$  bzgl.  $S_G$

- mögliche DFA-Information ein.

Unabhängig vom Pfad  $p \in \mathbf{P}[s, n]$ , auf dem Knoten  $n$  erreicht wird, ist die von  $p$  an  $n$  gewährleistete DFA-Information

- mindestens so groß wie die *SUP*-Semantik an  $n$  (es kann nicht schlechter, höchstens besser sein):

$$\llbracket p \rrbracket(c_s) \supseteq \llbracket n \rrbracket_{S_G}^{SUP}$$

- höchstens so groß wie die *VUP*-Semantik an  $n$  (es kann nicht besser, höchstens schlechter sein):

$$\llbracket p \rrbracket(c_s) \sqsubseteq \llbracket n \rrbracket_{S_G}^{VUP}$$

Das bedeutet:

$$\forall p \in \mathbf{P}[s, n]. \llbracket n \rrbracket_{S_G}^{SUP} \sqsubseteq \llbracket p \rrbracket(c_s) \sqsubseteq \llbracket n \rrbracket_{S_G}^{VUP}$$

# Mit anderen Worten

...die *SUP*- und die *VUP*-Semantik liefern für jeden Programmpunkt  $n$  die DFA-Informationen, die im folgenden Sinn

- bestmöglich bzgl.  $\mathcal{S}_G$  an  $n$  sind:
  - $\llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{SUP}$  ist die *minimal* gültige Information an  $n$  (es kann nicht *schlechter* sein, höchstens besser):  
 $\forall p \in \mathbf{P}[s, n]. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{SUP} \sqsubseteq \llbracket p \rrbracket(c_s).$
  - $\llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{VUP}$  ist die *maximal* gültige Information an  $n$  (es kann nicht *besser* sein, höchstens schlechter):  
 $\forall p \in \mathbf{P}[s, n]. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{VUP} \sqsupseteq \llbracket p \rrbracket(c_s).$

Das bedeutet, die *SUP*- und *VUP*-Semantik garantieren die Abwesenheit von ‘Überraschungen’: Für jeden Pfad  $p \in \mathbf{P}[s, n]$  gilt:

$$\llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{SUP} \sqsubseteq \llbracket p \rrbracket(c_s) \sqsubseteq \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{VUP}$$

# Spezifizierende Lösungen eines DFA-Problems

Das legt folgende Festlegung nahe:

## Definition 7.4.4.1 (Spezifizierende Lsg. von DFA-P.)

Die *SUP*- und *VUP*-Semantik eines Flussgraphen definieren die spezifizierenden Lösungen eines DFA-Problems, seine sog. *SUP*- und *VUP*-Lösung.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

7.4.2

7.4.3

**7.4.4**

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

# Konservative DFA-Algorithmen

## Definition 7.4.4.2 (Konservativer DFA-Algorithmus)

Ein DFA-Algorithmus  $A$  heißt

- $SUP$ -konservativ
- $VUP$ -konservativ

für  $\mathcal{S}_G$ , wenn  $A$  mit einer

- unteren Approximation der  $SUP$ -Semantik
- oberen Approximation der  $VUP$ -Semantik

von  $\mathcal{S}_G$  terminiert.

# Straffe DFA-Algorithmen

## Definition 7.4.4.3 (Straffer DFA-Algorithmus)

Ein DFA-Algorithmus  $A$  heißt

- $SUP$ -straff
- $VUP$ -straff

für  $\mathcal{S}_G$ , wenn  $A$  (akkurat) mit der

- $SUP$ -Semantik
- $VUP$ -Semantik

von  $\mathcal{S}_G$  terminiert.

# Kapitel 7.4.5

## Unentscheidbarkeit von *SUP*- und *VUP*-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

7.4.2

7.4.3

7.4.4

**7.4.5**

7.5

7.6

7.7

7.8



# Die Definitionen

...der *SUP*- und *VUP*-Semantik induzieren selbst keine

- effektiven Berechnungsverfahren

zu ihrer Berechnung (denke z.B. an Schleifen in einem nicht-deterministisch interpretierten Flussgraphen, wodurch die Zahl der Pfade, die zu einem Programmpunkt führen, unendlich ist).

Schlechter sogar, die *SUP*- und *VUP*-Semantik von Flussgraphen ist

- nicht entscheidbar!

# Unentscheidbarkeit der *SUP*-Semantik

## Theorem 7.4.5.1 (Unentscheidbarkeit d. *SUP*-Sem.)

Es gibt keinen Algorithmus *A* mit der Eigenschaft:

- Eingabe für *A* ist
  - eine DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G = (\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$ .
  - Algorithmen zur Berechnung von Schnitt, Test auf Gleichheit und Anwendung monotoner Funktionen auf  $\hat{C}$ .
- Ausgabe von *A* ist die *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$ .

(John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Monotone Data Flow Analysis Frameworks*. Acta Informatica 7:305-317, 1977)

**Beweisidee.** Reduktion auf das *Modifizierte Postsche Korrespondenzproblem* (MPKP).

(Für MPKP s. z.B.: John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley, 1979.)

# Unentscheidbarkeit der VUP-Semantik

## Korollar 7.4.5.2 (Unentscheidbarkeit d. VUP-Sem.)

Es gibt keinen Algorithmus  $A$  mit der Eigenschaft:

- Eingabe von  $A$  ist
  - eine DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G = (\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$ .
  - Algorithmen zur Berechnung der Vereinigung, des Tests auf Gleichheit und der Anwendung monotoner Funktionen auf  $\hat{C}$ .
- Ausgabe von  $A$  ist die VUP-Semantik von  $\mathcal{S}_G$ .

**Anm.:** Das **MPK-Problem** ist folgendes: Seien  $A, B$  Listen mit je  $k$  nichtleeren Zeichenreihen  $s_i, t_i, 0 \leq i \leq k-1$  über dem Alphabet  $\{0, 1\}$ :  $A = \langle s_0, s_1, s_2, \dots, s_{k-1} \rangle, B = \langle t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1} \rangle$ .

Gibt es eine Indexfolge  $i_1, i_2, \dots, i_r$ , so dass die Konkatenationen von  $s_0, s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_r}$  und  $t_0, t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_r}$  übereinstimmen, d.h.:  $s_0 s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_r} = t_0 t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_r}$ ?

Für  $r$  unbeschränkt, ist **MPKP** unentscheidbar.

# Hin zu konservativen und straffen DFA-Alg'en

...aufgrund der negativen Ergebnisse von [Theorem 7.4.5.1](#) und [Korollar 7.4.5.2](#) komplementieren wir den operationellen Ansatz, der der [SUP](#)- und [VUP-Semantik](#) zugrundeliegt, mit einem orthogonalen [denotationellen](#) Ansatz zur [Globalisierung](#) einer lokalen abstrakten Semantik, der zur

- maximalen Fixpunktsemantik (*MaxFP*)
- minimalen Fixpunktsemantik (*MinFP*)

eines Flussgraphen führt.

Die *MaxFP*- und *MinFP*-Semantik heißen auch

- maximale Fixpunktlösung (*MaxFP*)
- minimale Fixpunktlösung (*MinFP*)

eines DFA-Problems, die (unter bestimmten Bedingungen)

- effektiv berechnet

werden können.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.4.1

7.4.2

7.4.3

7.4.4

7.4.5

7.5

7.6

7.7

7.8

484/169

# Kapitel 7.5

## Denotationelle globale DFA-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

**7.5**

7.5.1

7.5.2

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

# Kapitel 7.5.1

## Maximale Fixpunktsemantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

**7.5.1**

7.5.2

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

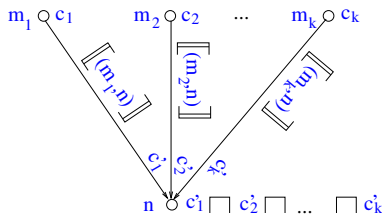
# Der maximale Fixpunktansatz (*MaxFP*)

Sei  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

## Gleichungssystem 7.5.1.1 (*MaxFP*-Gleichungssyst.)

$$\inf(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = s \\ \bigsqcap \{ \llbracket (m, n) \rrbracket(\inf(m)) \mid m \in \text{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Veranschaulichung des *MaxFP*-Ansatzes (für  $n \neq s$ ):



# Die *MaxFP*-Semantik

Bezeichne

$$- \nu\text{-inf}_{c_s}(n), \quad n \in N$$

die größte Lösung von Gleichungssystem 7.5.1.1.

## Definition 7.5.1.2 (*MaxFP*-Semantik)

Die (deterministische) *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$  ist definiert durch:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MaxFP} : N \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MaxFP} =_{df} \lambda n. \nu\text{-inf}_{c_s}(n)$$

Es gilt:

$$\llbracket s \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MaxFP} = c_s$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.5.1

7.5.2

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11



# Kapitel 7.5.2

## Minimale Fixpunktsemantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.5.1

**7.5.2**

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

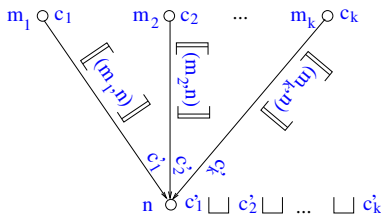
# Der minimale Fixpunktansatz (*MinFP*)

Sei  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

## Gleichungssystem 7.5.2.1 (*MinFP*-Gleichungssyst.)

$$\inf(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = s \\ \bigsqcup \{ \llbracket (m, n) \rrbracket (\inf(m)) \mid m \in \text{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Veranschaulichung des *MinFP*-Ansatzes (für  $n \neq s$ ):



# Die *MinFP*-Semantik

Bezeichne

$$- \mu\text{-inf}_{c_s}(n), \quad n \in N$$

die kleinste Lösung von Gleichungssystem 7.5.2.1.

## Definition 7.5.2.2 (*MinFP*-Semantik)

Die *MinFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$  ist definiert durch:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MinFP} : N \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MinFP} =_{df} \lambda n. \mu\text{-inf}_{c_s}(n)$$

Es gilt:

$$\llbracket s \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MinFP} = c_s$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.5.1

7.5.2

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

491/169

# Kapitel 7.6

## Generischer Fixpunktalgorithmus

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

**7.6**

7.6.1

7.6.2

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

# Die *MaxFP*- und *MinFP*-Semantik

...sind aufgrund von *MaxFP*-Gleichungssystem 7.5.1.1 und *MinFP*-Gleichungssystem 7.5.2.1 praktisch relevant, da sie in generischer Weise ein

- iteratives Berechnungsverfahren (Algorithmus 7.6.1.1)

induzieren, das ihre größte und kleinste Lösung approximativ zu berechnen erlaubt, mithin die *MaxFP*- und *MinFP*-Semantik selbst.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.6.1

7.6.2

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

493/169

# Kapitel 7.6.1

## Algorithmus

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

**7.6.1**

7.6.2

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

# Der generische Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 (1)

**Eingabe:** Eine DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$ .

**Ausgabe:** Nach Terminierung des Algorithmus (s. [Terminationstheorem 7.6.2.1](#)), enthält Variable  $\text{inf}[n]$  die *MaxFP-Lösung* von  $\mathcal{S}_G$  am Knoten  $n$ .

Zusätzlich gilt (s. [Sicherheitstheorem 7.7.1](#) und [Koinzidenztheorem 7.7.2](#)): Ist  $\llbracket \cdot \rrbracket$

- **distributiv:**  $\text{inf}[n]$  enthält die
- **monoton:**  $\text{inf}[n]$  enthält eine untere Approximation der *SUP-Lösung* von  $\mathcal{S}_G$  am Knoten  $n$ .

**Anmerkung:** Die Variable *workset* dient zur Steuerung des iterativen Berechnungsvorgangs. Sie enthält diejenigen Knoten von  $G$ , deren Benennung kürzlich aktualisiert worden (d.h. kleiner geworden) ist, was sich entsprechend auf die ihrer direkten (und indirekten) Nachfolgerknoten auswirken kann.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.6.1

7.6.2

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

# Der generische Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 (2)

( Prolog: Initialisierung von *inf* und *workset* )

FORALL  $n \in N \setminus \{s\}$  DO  $inf[n] := \top$  OD;

$inf[s] := c_s$ ;

$workset := N$ ;

( Hauptschleife: Die iterative Fixpunktberechnung )

WHILE  $workset \neq \emptyset$  DO

    CHOOSE  $m \in workset$ ;

$workset := workset \setminus \{m\}$ ;

    ( Aktualisierung der Benennungen der Nachfolger von  $m$  )

    FORALL  $n \in succ(m)$  DO

$meet := \llbracket (m, n) \rrbracket (inf[m]) \sqcap inf[n]$ ;

        IF  $inf[n] \sqsupset meet$

            THEN

$inf[n] := meet$ ;

$workset := workset \cup \{n\}$

        FI

    OD ESOOHC OD.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.6.1

7.6.2

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11



# Kapitel 7.6.2

## Terminierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.6.1

**7.6.2**

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

# Terminierung

## Theorem 7.6.2.1 (Terminierung)

Der generische Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 terminiert mit der

1. *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$ , wenn gilt:

1.1  $\llbracket \cdot \rrbracket$  ist monoton.

1.2  $\widehat{\mathcal{C}}$  erfüllt die absteigende Kettenbedingung.

2. *MinFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$ , wenn gilt:

2.1  $\llbracket \cdot \rrbracket$  ist monoton.

2.2  $\widehat{\mathcal{C}}^{gst}$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung, wobei

$$\widehat{\mathcal{C}}^{gst} =_{df} (\mathcal{C}, \sqcup, \sqcap, \sqsupseteq, \top, \perp)$$

den auf den ‘Kopf gestellten’ (oder: ‘gestürzten’) Verband  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top)$  bezeichnet.

# Berechenbare Lösungen eines DFA-Problems

...der generische Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 und das Terminierungstheorem 7.6.2.1 legen folgende Festlegung nahe:

## Definition 7.6.2.2 (Berechenbare Lsg. eines DFA-P.)

Die *MaxFP*- und *MinFP*-Semantik eines Flussgraphen definieren die berechenbaren Lösungen eines DFA-Problems, seine sog. *MaxFP*- und *MinFP*-Lösung.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.6.1

7.6.2

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

# Kapitel 7.7

## Sicherheit, Koinzidenz

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

**7.7**

7.8

7.9

7.10

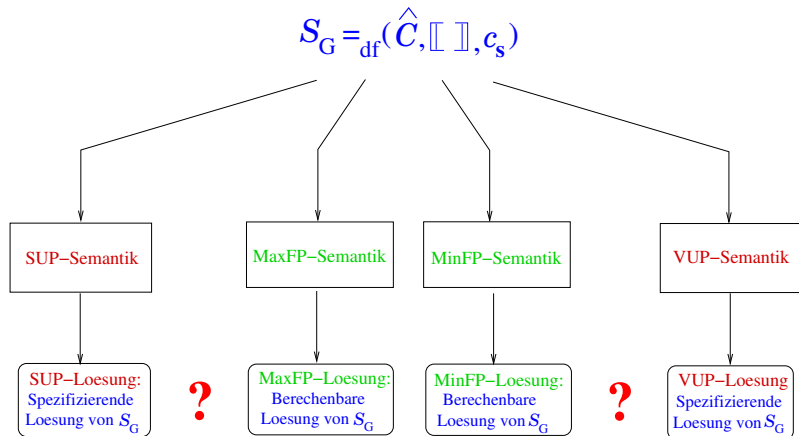
7.11

7.12

Kap. 8  
500/169

# SUP/MaxFP- und VUP/MinFP-Semantik

...und die Frage nach ihrer Beziehung:



# Sicherheit

Sei  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

## Theorem 7.7.1 (Sicherheit)

1. Die *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$  ist eine *sichere* (d.h. *untere*) Approximation der *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$ , d.h.:

$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MaxFP} \sqsubseteq \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{SUP}$$

2. Die *MinFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$  ist eine *sichere* (d.h. *obere*) Approximation der *VUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$ , d.h.:

$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MinFP} \sqsupseteq \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{VUP}$$

wenn die DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket$  *monoton* ist.

# Koinzidenz

Sei  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

## Theorem 7.7.2 (Koinzidenz)

1. *MaxFP*- und *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$  stimmen überein (sind *koinzident*), d.h.:

$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MaxFP} = \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{SUP}$$

2. *MinFP*- und die *VUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G$  stimmen überein (sind *koinzident*), d.h.:

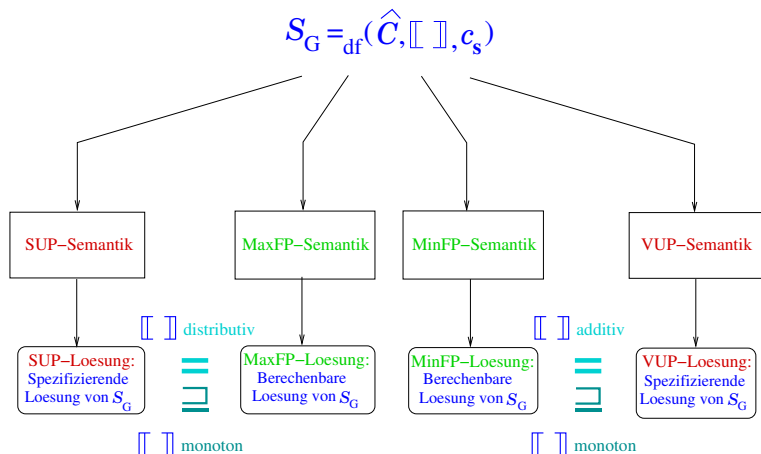
$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{MinFP} = \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G}^{VUP}$$

wenn die DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket$  *distributiv* bzw. *additiv* ist.

Erinnerung an Lemma 7.1.2.7(1):  $\llbracket \cdot \rrbracket$  distributiv  $\iff \llbracket \cdot \rrbracket$  additiv.

# SUP/MaxFP- und VUP/MinFP-Semantik

...und die Antwort nach ihrer Beziehung:





# Konservativität v. Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1

## Korollar 7.7.3 (*SUP*/*VUP*-Konservativität)

Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 ist

– *SUP*- (*VUP*-) konservativ

für  $\mathcal{S}_G$ , d.h. er terminiert mit einer **unteren** (**oberen**) Approximation der *SUP*- (*VUP*-) Semantik von  $\mathcal{S}_G$ , wenn gilt:

1.  $\llbracket \cdot \rrbracket$  ist **monoton**.
2.  $\hat{\mathcal{C}}$  erfüllt die **absteigende** (**aufsteigende**) Kettenbedingung.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
505/169

# Straffheit von Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1

## Korollar 7.7.4 (*SUP/VUP*-Straffheit)

Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 ist

– *MOP*- (*JOP*-) straff

für  $\mathcal{S}_G$ , d.h. er terminiert mit der *SUP*- (*VUP*-) Semantik von  $\mathcal{S}_G$ , wenn gilt:

1.  $\llbracket \cdot \rrbracket$  ist distributiv (additiv).
2.  $\hat{\mathcal{C}}$  erfüllt die absteigende (aufsteigende) Kettenbedingung.

# Kapitel 7.8

## Korrektheit, Vollständigkeit

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

**7.8**

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
507/169

# Korrektheit, Vollständigkeit

## Analyseszenario:

- Sei  $\phi$  eine interessierende Programmeigenschaft (z.B. die Verfügbarkeit eines Terms, die Lebendigkeit einer Variable, etc.).
- Sei  $\mathcal{S}_G^\phi$  eine DFA-Spezifikation für  $\phi$ .

## Definition 7.8.1 (Korrektheit)

$\mathcal{S}_G^\phi$  ist *SUP-korrekt* (*VUP-korrekt*) für  $\phi$ , wenn gilt: Zeigt die *SUP-Semantik* (*VUP-Semantik*) von  $\mathcal{S}_G^\phi$  die Gültigkeit von  $\phi$  an, so ist  $\phi$  tatsächlich gültig.

## Definition 7.8.2 (Vollständigkeit)

$\mathcal{S}_G^\phi$  ist *SUP-vollständig* (*VUP-vollständig*) für  $\phi$ , wenn gilt: Ist  $\phi$  gültig, so zeigt die *SUP-Semantik* (*VUP-Semantik*) von  $\mathcal{S}_G^\phi$  die Gültigkeit von  $\phi$  auch an.

# Interpretation von Korrektheit, Vollständigkeit

...informell:

- *SUP*-Korrektheit bedeutet:  $\llbracket \cdot \rrbracket_{S_G^\phi}^{SUP}$  'impliziert'  $\phi$ .
- *SUP*-Vollständigkeit bedeutet:  $\phi$  'impliziert'  $\llbracket \cdot \rrbracket_{S_G^\phi}^{SUP}$ .

und

- *VUP*-Korrektheit bedeutet:  $\phi$  'impliziert'  $\llbracket \cdot \rrbracket_{S_G^\phi}^{VUP}$ .
- *VUP*-Vollständigkeit bedeutet:  $\llbracket \cdot \rrbracket_{S_G^\phi}^{VUP}$  'impliziert'  $\phi$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8

# Korrektheit und Vollständigkeit

...implizieren informell:

Ist  $\mathcal{S}_G^\phi$  SUP- (*VUP*-) korrekt **und** voll- ständig für Eigenschaft  $\phi$ , bedeutet das:

Wir berechnen mit der *MaxFP*-Semantik (*MinFP*-Semantik)

- die interessierende Eigenschaft,
- die ganze interessierende Eigenschaft,
- und nur die interessierende Eigenschaft.

Mit anderen Worten, wir berechnen

- die interessierende Eigenschaft akkurat!

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8

# Kapitel 7.9

## DFA-Rahmen-, Werkzeugkistensicht

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

**7.9**

7.10

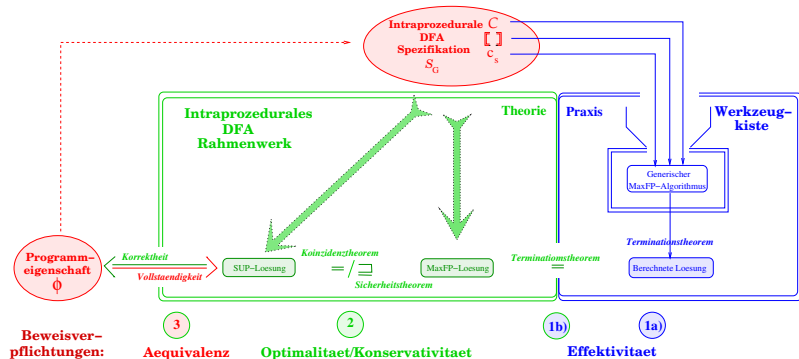
7.11

7.12

Kap. 8  
511/169

# Datenflussanalyse in ganzheitlicher Sicht

...die DFA-Rahmenwerk/Werkzeugkistensicht (*SUP/MaxFP*):



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8



# In der Praxis

...ist die Arbeit mit **Rahmenwerk**, **Werkzeugkiste** ein **dreistufiger Prozess**:

## 1. Identifikation der interessierenden Programmeigenschaft

Identifiziere die interessierende Programmeigenschaft  $\phi$  (z.B. die **Verfügbarkeit eines Terms**, die **Lebendigkeit einer Variable**, etc.) und **definiere  $\phi$  formal**.

## 2. Entwicklung einer DFA-Spezifikation

Entwickle eine DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G^\phi = (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  für  $\phi$ .

## 3. Erbringung v. Beweisverpflichtungen, Erhalt v. Garantien

Beweise eine feste Reihe von Beweisverpflichtungen über die Komponenten von  $\mathcal{S}_G^\phi$  und die Beziehung der *SUP*- (*VUP*-) Lösung und  $\phi$  und erhalte Garantien, dass die *MaxFP*- (*MinFP*-) Lösung **korrekt** oder sogar **korrekt und vollständig** für  $\phi$  ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
513/169

# Beweisverpflichtungen, implizierte Garantien (1)

## Beweisverpflichtungen und Garantien im Detail:

- Beweisverpflichtungen 1a), 1b): Absteigende (aufsteigende) Kettenbedingung für  $\hat{\mathcal{C}}$ , Monotonie für  $\llbracket \cdot \rrbracket$

### Garantien:

- **Effektivität:** Terminierung von Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*- (*MinFP*-) Semantik von  $\mathcal{S}_G^\phi$ .
- **Konservativität:** Die *MaxFP*- (*MinFP*-) Lösung von  $\mathcal{S}_G^\phi$  ist *SUP* (*VUP*-) konservativ.

- Beweisverpflichtung 2): Distributivität (Additivität) für  $\llbracket \cdot \rrbracket$

### Garantie:

- **Straffheit:** Die *MaxFP*- (*MinFP*-) Semantik von  $\mathcal{S}_G^\phi$  ist *SUP*- (*VUP*-) straff.

# Beweisverpflichtungen, implizierte Garantien (2)

- Beweisverpflichtung 3): Äquivalenz von  $SUP_{S_G^\phi}$  ( $VUP_{S_G^\phi}$ ) und  $\phi$

## Garantien:

- Wann immer die  $SUP$ -Lösung von  $S_G^\phi$  die Gültigkeit von  $\phi$  anzeigt, dann ist  $\phi$  gültig: **Korrektheit**.  
↪ Wir berechnen die interessierende Programmeigenschaft und nur die interessierende Programmeigenschaft.
- Wann immer  $\phi$  gültig ist, dann zeigt die  $SUP$ -Lösung von  $S_G^\phi$  dies an: **Vollständigkeit**.  
↪ Wir berechnen die ganze interessierende Programmeigenschaft.
- Analog und entsprechend für die  $VUP$ -Lösung von  $S_G^\phi$ .

## Garantie von Korrektheit und Vollständigkeit:

- Wir berechnen Programmeigenschaft  $\phi$  akkurat!

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
515/169

# Kapitel 7.10

## Anwendungsbeispiele

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

**7.10**

7.10.1

7.10.2

7.11

516/169

# Kapitel 7.10.1

## Verfügbare Ausdrücke: Distributives DFA-Problem

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

**7.10.1**

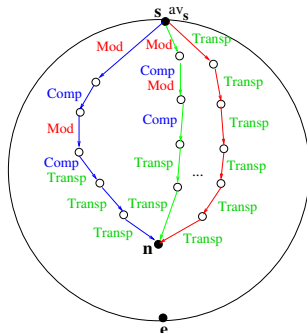
7.10.2

7.11

# Ein Term $t$

...heißt **verfügbar** am Knoten  $n$ , wenn  $t$  auf jedem Pfad vom Programmanfang  $s$  zu  $n$  berechnet wird und anschließend bis zum Erreichen von  $n$  keine seiner Operandenvariablen einen Wert zugewiesen erhält.

Veranschaulichung:



Verfügbarkeit von Termen: Kanonisches Beispiel eines **distributiven** DFA-Problems.

# Arbeitsplan

...in der Folge spezifizieren wir **fünf Varianten** des **Verfügbarkeitsproblems** (engl. **availability**) von Termen für

- **Einzelterme** mittels
  1. Boolescher Verband (**Kap. 7.10.1.1**)
- **Termmengen** mittels
  2. Potenzmengenverband (**Kap. 7.10.1.2**)
  3. Kreuzproduktverband (**Kap. 7.10.1.3**)
  4. Bitvektorverband (**Kap. 7.10.1.4**)
  5. Gen/Kill-Formulierung (**Kap. 7.10.1.5**)

Im Vorbeigehen illustrieren wir so:

- die **Klasse** sog. **Bitvektor-** (oder: **Gen/Kill-**) **DFA-Probleme** mit **Verfügbarkeit** als typischem Vertreter.
- die Verwendung verschiedener **DFA-Verbände**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

519/169

# Vorbereitungen

Sei  $\iota_e \equiv x := \text{exp}$  (bzw.  $\iota_e \equiv \text{exp}$ ) die **Instruktion** (bzw. **Bedingung**) an Kante  $e$ ,  $t$  ein Term.

## Lokale Prädikate (für Kanten)

- $\text{Comp}_e^t$   
...ist **wahr**, wenn  $t$  an Kante  $\iota_e$  **berechnet** wird (d.h.  $t$  ist ein Teilterm des rechtsseitigen Ausdrucks  $\text{exp}$  von  $\iota_e$ ), **falsch** sonst.
- $\text{Mod}_e^t$   
...ist **wahr**, wenn  $t$  an Kante  $\iota_e$  **modifiziert** wird (d.h.  $\iota_e$  weist einem Operanden von  $t$  einen (neuen) Wert zu), **falsch** sonst.
- $\text{Transp}_e^t =_{df} \neg \text{Mod}_e^t$   
...ist **wahr**, wenn  $e$  **transparent** für  $t$  ist (d.h.  $\iota_e$  weist keinem Operanden von  $t$  einen Wert zu), **falsch** sonst.



# Kapitel 7.10.1.1

## Verfügbarkeit für Einzelterme: Boolesche Verbandsformulierung

# V1: Verfügbarkeit für einen einzelnen Term $t$

## Boolescher Verband

- $\widehat{\text{IB}} =_{df} (\text{IB}, \wedge, \vee, \leq, \mathbf{falsch}, \mathbf{wahr})$

Boolescher Verband der Wahrheitswerte: Kleinstes Element **falsch**; größtes Element **wahr**; **falsch**  $\leq$  **wahr** als Ordnungsrelation; logisches  $\wedge$ , logisches  $\vee$  als Schnitt- bzw. Vereinigungsoperation.

## Hilfsfunktionen

- $Cst_{\mathbf{wahr}}, Cst_{\mathbf{falsch}} : \text{IB} \rightarrow \text{IB}$  konstante Funktionen auf IB

$$Cst_{\mathbf{wahr}} =_{df} \lambda b. \mathbf{wahr}$$

$$Cst_{\mathbf{falsch}} =_{df} \lambda b. \mathbf{falsch}$$

- $Id_{\text{IB}} : \text{IB} \rightarrow \text{IB}$  Identität auf IB

$$Id_{\text{IB}} =_{df} \lambda b. b$$

# V1: Spezifizieren der DFA

## DFA-Spezifikation

- DFA-Verband

$$\hat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top) =_{df} (\mathbb{B}, \wedge, \vee, \leq, \text{falsch}, \text{wahr}) = \hat{\mathbb{B}}$$

- DFA-Semantik

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t : E \rightarrow (\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B})$$
$$\forall e \in E \llbracket e \rrbracket_{av}^t =_{df} \lambda b. (b \vee \text{Comp}_e^t) \wedge \text{Transp}_e^t$$

- Anfangszusicherung

$$b_s \in \mathbb{B}$$

## Verfügbarkeitsspezifikation für $t$

- Spezifikation:  $\mathcal{S}_G^{av,t} = (\hat{\mathbb{B}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t, b_s)$

# V1: Erbringen der Beweisverpflichtungen

## Lemma 7.10.1.1.1 (Charakterisierung)

$$\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_{av}^t = \begin{cases} Cst_{\text{wahr}} & \text{falls } Comp_e^t \wedge Transp_e^t \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{falls } \neg Comp_e^t \wedge Transp_e^t \\ Cst_{\text{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

## Lemma 7.10.1.1.2 (Absteigende Kettenbedingung)

$\widehat{\mathbb{B}}$  erfüllt die absteigende Kettenbedingung.

## Lemma 7.10.1.1.3 (Distributivität)

$\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t$  ist distributiv.

## Korollar 7.10.1.1.4 (Monotonie)

$\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t$  ist monoton.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

524/169

# V1: Einsammeln der *SUP*-Semantikgarantien

...für Terminierung, Straffheit.

## Theorem 7.10.1.1.5 (*MaxFP*-Terminierung)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,t} = (\widehat{\mathbb{B}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t, b_s)$  terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,t}$ .

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.1.2, Korollar 7.10.1.1.4 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

## Theorem 7.10.1.1.6 (*SUP*-Straffheit)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,t} = (\widehat{\mathbb{B}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t, b_s)$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*-straff für  $\mathcal{S}_G^{av,t}$  (d.h. terminiert mit der *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,t}$ ).

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.1.3, Koinzidenztheorem 7.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

525/169

# V1: Analog für *VUP*-Semantikgarantien

Analog zu Lemma 7.10.1.1.2, 7.10.1.1.3 gilt offenbar auch:

1.  $\hat{\mathbb{B}}$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.
2.  $\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t$  ist additiv.

Damit gilt analog zu Theorem 7.10.1.1.6 auch für die *VUP*-Semantik das entsprechende Terminierungs- und Straffheitsresultat:

## Theorem 7.10.1.1.7 (*VUP*-Terminierung, -Straffheit)

Angewendet auf das duale DFA-Problem von  $\mathcal{S}_G^{av,t}$  mit gestürztem Verband  $\hat{\mathbb{B}}$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *VUP*-straff (d.h. terminiert mit der *VUP*-Semantik des dualen Problems).

# Kapitel 7.10.1.2

## Verfügbarkeit für endliche Term mengen: Potenzmengenverbandformulierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

**7.10.1**

7.10.2

7.11

# V2: Verfügbarkeit für endliche Termmenge $T$

## Potenzmengenverband

$$- \widehat{\mathcal{P}(T)} =_{df} (\mathcal{P}(T), \cap, \cup, \subseteq, \emptyset, T)$$

Potenzmengenverband von  $T$ : Kleinstes Element  $\emptyset$ ; größtes Element  $T$ ; Teilmengenrelation  $\subseteq$  als Ordnungsrelation; Mengendurchschnitt  $\cap$ , Mengenvereinigung  $\cup$  als Schnitt- bzw. Vereinigungsoperation.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11



# V2: Spezifizieren der DFA

## DFA-Spezifikation

- DFA-Verband

$$\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top) =_{df} (\mathcal{P}(T), \cap, \cup, \subseteq, \emptyset, T) = \widehat{\mathcal{P}(T)}$$

- DFA-Semantik

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^T : E \rightarrow (\mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T))$$

$$\forall e \in E \llbracket e \rrbracket_{av}^T =_{df}$$

$$\lambda T'. \{t \in T \mid (t \in T' \vee \text{Comp}_e^t) \wedge \text{Transp}_e^t\}$$

- Anfangszusicherung

$$T_s \in \mathcal{P}(T)$$

## Verfügbarkeitsspezifikation für $T$

- Spezifikation:  $\mathcal{S}_G^{av,T} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av}^T, T_s)$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# V2: Erbringen der Beweisverpflichtungen

## Lemma 7.10.1.2.1 (Absteigende Kettenbedingung)

$\widehat{\mathcal{P}(T)}$  erfüllt die absteigende Kettenbedingung.

## Lemma 7.10.1.2.2 (Distributivität)

$\llbracket \rrbracket_{av}^T$  ist distributiv.

## Korollar 7.10.1.2.3 (Monotonie)

$\llbracket \rrbracket_{av}^T$  ist monoton.

## V2: Einsammeln der *SUP*-Semantikgarantien

...für Terminierung, Straffheit.

### Theorem 7.10.1.2.4 (*MaxFP*-Terminierung)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,T} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av}^T, T_s)$  terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,T}$ .

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.2.1, Korollar 7.10.1.2.3 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

### Theorem 7.10.1.2.5 (*SUP*-Straffheit)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,T} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av}^T, T_s)$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*-straff für  $\mathcal{S}_G^{av,T}$  (d.h. terminiert mit der *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,T}$ ).

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.2.2, Koinzidenztheorem 7.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

531/169

## V2: Analog für VUP-Semantikgarantien

Analog zu Lemma 7.10.1.2.1, 7.10.1.2.2 gilt auch:

1.  $\widehat{\mathcal{P}(T)}$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.
2.  $\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^T$  ist additiv.

Damit gilt analog zu Theorem 7.10.1.2.5 auch für die VUP-Semantik das entsprechende Terminierungs- und Straffheitsresultat:

### Theorem 7.10.1.2.6 (VUP-Terminierung, -Straffheit)

Angewendet auf das duale DFA-Problem von  $\mathcal{S}_G^{av,T}$  mit gestürztem Verband  $\widehat{\mathcal{P}(T)}$  ist Algorithmus 7.6.1.1 VUP-straff (d.h. terminiert mit der VUP-Semantik des dualen Problems).

# Kapitel 7.10.1.3

## Verfügbarkeit für endliche Termmengen: Kreuzproduktverbandformulierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

**7.10.1**

7.10.2

7.11

# V3: Verfügbarkeit für endliche Termmenge $T$

## Boolescher Kreuzproduktverband

$$- \widehat{IB}^n =_{df} (IB^n, \wedge_{pw}, \vee_{pw}, <_{pw}, \overline{\mathbf{falsch}}, \overline{\mathbf{wahr}})$$

$n$ -stelliger Kreuzproduktverband über  $IB$ : Kleinstes Element  $\overline{\mathbf{falsch}} =_{df} (\mathbf{falsch}, \dots, \mathbf{falsch}) \in IB^n$ ; größtes Element  $\overline{\mathbf{wahr}} =_{df} (\mathbf{wahr}, \dots, \mathbf{wahr}) \in IB^n$ ;  $<_{pw}$  punktweise Ausdehnung von  $<$  von  $\widehat{IB}$  auf  $\widehat{IB}^n$  als Ordnungsrelation;  $\wedge_{pw}, \vee_{pw}$  punktweise Ausdehnung von logischem  $\wedge$  bzw. logischem  $\vee$  von  $\widehat{IB}$  auf  $\widehat{IB}^n$  als Schnitt- bzw. Vereinigungsoperation.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# V3: Einführung von Hilfsfunktionen

## Hilfsfunktionen

- $ix : T \rightarrow \{1, \dots, n\}, ix^{-1} : \{1, \dots, n\} \rightarrow T$

Bijektive **Indexabbildungen**, die jedem Term  $t \in T$  eindeutig eine Zahl in  $\{1, \dots, n\}$  zuordnen und umgekehrt.

Das  $ix(t)$ -te Element eines Tupels

$$\bar{b} = (b_1, \dots, b_{ix(t)}, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n$$

ist die für  $t$  in  $\bar{b}$  abgelegte **Verfügbarkeitsinformation**.

- $\cdot \downarrow : \mathbb{B}^n \rightarrow \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{B}$

**Projektionsfunktion**, die das  $i$ -te Element eines Tupels  $\bar{b} \in \mathbb{B}^n$  liefert:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}. \bar{b} \downarrow_i =_{df} b_i$$

# V3: Spezifizieren der DFA

## DFA-Spezifikation (Kreuzproduktverband (kpv))

- DFA-Verband

$$\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top) =_{df}$$

$$(\mathbb{B}^n, \wedge_{pw}, \vee_{pw}, <_{pw}, \overline{\text{falsch}}, \overline{\text{wahr}}) = \widehat{\mathbb{B}}^n$$

- DFA-Semantik

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av, kpv}^T : E \rightarrow (\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n)$$

$$\forall e \in E \llbracket e \rrbracket_{av, kpv}^T(\bar{b}) =_{df} \lambda \bar{b}. \bar{b}'$$

$$\text{mit } \forall i \in \{1, \dots, n\}. \bar{b}' \downarrow_i =_{df}$$

$$(\bar{b} \downarrow_i \vee \text{Comp}_e^{ix^{-1}(i)}) \wedge \text{Transp}_e^{ix^{-1}(i)}$$

- Anfangszusicherung

$$\bar{b}_s \in \mathbb{B}^n$$

## Verfügbarkeitsspezifikation für $T$

- Spezifikation:  $\mathcal{S}_G^{av, T, kpv} = (\widehat{\mathbb{B}}^n, \llbracket \cdot \rrbracket_{av, kpv}^T, \bar{b}_s)$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

536/169



# V3: Erbringen der Beweisverpflichtungen

## Lemma 7.10.1.3.1 (Absteigende Kettenbedingung)

$\widehat{\mathbb{B}}^n$  erfüllt die absteigende Kettenbedingung.

## Lemma 7.10.1.3.2 (Distributivität)

$\llbracket \rrbracket_{av,kpv}^T$  ist distributiv.

## Korollar 7.10.1.3.3 (Monotonie)

$\llbracket \rrbracket_{av,kpv}^T$  ist monoton.

# V3: Einsammeln der *SUP*-Semantikgarantien

...für Terminierung, Straffheit.

## Theorem 7.10.1.3.4 (*MaxFP*-Terminierung)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,T,kpv} = (\widehat{\mathbb{B}}^n, \llbracket \cdot \rrbracket_{av,kpv}^T, \bar{b}_s)$  terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,T,kpv}$ .

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.3.1, Korollar 7.10.1.3.3 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

## Theorem 7.10.1.3.5 (*SUP*-Straffheit)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,T,kpv} = (\widehat{\mathbb{B}}^n, \llbracket \cdot \rrbracket_{av,kpv}^T, \bar{b}_s)$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*-straff für  $\mathcal{S}_G^{av,T,kpv}$  (d.h. terminiert mit der *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,T,kpv}$ ).

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.3.2, Koinzidenztheorem 7.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

538/169

# V3: Analog für *VUP*-Semantikgarantien

Analog zu Lemma 7.10.1.3.1, 7.10.1.3.2 gilt auch:

1.  $\widehat{\mathbb{B}}^n$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.
2.  $\llbracket \cdot \rrbracket_{av, kpV}^T$  ist additiv.

Damit gilt analog zu Theorem 7.10.1.3.5 auch für die *VUP*-Semantik das entsprechende Terminierungs- und Straffheitsresultat:

## Theorem 7.10.1.3.6 (*VUP*-Terminierung, -Straffheit)

Angewendet auf das duale DFA-Problem von  $\mathcal{S}_G^{av, T, kpV}$  mit gestürztem Verband  $\widehat{\mathbb{B}}^n$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *VUP*-straff (d.h. terminiert mit der *VUP*-Semantik des dualen Problems).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# Kapitel 7.10.1.4

Verfügbarkeit für endliche Term Mengen:  
Bitvektorverbandformulierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

**7.10.1**

7.10.2

7.11

## V4: Von Kreuzprodukt- zu Bitvektorsicht

Der Kreuzproduktverband  $\widehat{\mathbb{B}}^n$  kann effizient als **Bitvektorverband** implementiert werden, indem Elemente von  $\widehat{\mathbb{B}}^n$  als

- Bitvektoren der Länge  $n$  dargestellt werden:

$$\vec{bv} = [d_1, \dots, d_n], \quad d_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

### Umsetzung:

- Bezeichne  $\mathcal{BV}^n$  die Menge aller Bitvektoren der Länge  $n$ .
- Sei  $\vec{bv}[i] = d_i$  für alle  $\vec{bv} = [d_1, \dots, d_n] \in \mathcal{BV}^n$ ,  $1 \leq i \leq n$ .
- Sei  $\vec{0} =_{df} [0, \dots, 0] \in \mathcal{BV}^n$  und  $\vec{1} =_{df} [1, \dots, 1] \in \mathcal{BV}^n$ .
- Bezeichnen  $\min_{\mathcal{BV}}$  und  $\max_{\mathcal{BV}}$  die **bitweisen Minimums-** ('logisches  $\wedge$ ') und **Maximumsfunktionen** ('logisches  $\vee$ ') auf Bitvektoren, d.h.:  $\forall \vec{bv}_1, \vec{bv}_2 \in \mathcal{BV}^n \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .
  - $(\vec{bv}_1 \min_{\mathcal{BV}} \vec{bv}_2)[i] =_{df} \min(\vec{bv}_1[i], \vec{bv}_2[i])$
  - $(\vec{bv}_1 \max_{\mathcal{BV}} \vec{bv}_2)[i] =_{df} \max(\vec{bv}_1[i], \vec{bv}_2[i])$

# V4: Einführung von Hilfsfunktionen

## Hilfsfunktionen:

- $ix : T \rightarrow \{1, \dots, n\}, ix^{-1} : \{1, \dots, n\} \rightarrow T$

Bijektive **Indexabbildungen**, die jedem Term  $t \in T$  eine eindeutig bestimmte Zahl in  $\{1, \dots, n\}$  zuordnen und umgekehrt.

Das  $ix(t)$ -te Element eines Bitvektors

$$\vec{bv} = [d_1, \dots, d_{ix(t)}, \dots, d_n] \in \mathcal{BV}^n$$

ist die für  $t$  in  $\vec{bv}$  abgelegte **Verfügbarkeitsinformation**.

# V4: Ausdehnung und Anpassung

...der lokalen Prädikate auf Bitvektoren:

$$- \overset{\rightarrow}{Comp}_e^T \in \mathcal{BV}^n$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}. \overset{\rightarrow}{Comp}_e^T[i] =_{df} \begin{cases} 1 & \text{falls } Comp_e^{ix^{-1}(i)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$- \overset{\rightarrow}{Transp}_e^T \in \mathcal{BV}^n$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}. \overset{\rightarrow}{Transp}_e^T[i] =_{df} \begin{cases} 1 & \text{falls } Transp_e^{ix^{-1}(i)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# V4: Spezifizieren der DFA

## DFA-Spezifikation (Bitvektorverband (bvv))

- DFA-Verband

$$\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top) =_{df}$$

$$(\mathcal{BV}^n, \min_{\mathcal{BV}}, \max_{\mathcal{BV}}, <_{\mathcal{BV}}, \vec{0}, \vec{1}) = \widehat{\mathcal{BV}}^n$$

- DFA-Semantik

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av, bv}^T : E \rightarrow (\mathcal{BV}^n \rightarrow \mathcal{BV}^n)$$

$$\forall e \in E \llbracket e \rrbracket_{av, bv}^T =_{df}$$

$$\lambda \vec{bv}. (\vec{bv} \max_{\mathcal{BV}} \xrightarrow{\quad} \text{Comp}_e^T) \min_{\mathcal{BV}} \xrightarrow{\quad} \text{Transp}_e^T$$

- Anfangszusicherung

$$\vec{bv}_s \in \mathcal{BV}^n$$

## Verfügbarkeitsspezifikation für $T$

- Spezifikation:  $\mathcal{S}_G^{av, T, bv} = (\widehat{\mathcal{BV}}^n, \llbracket \cdot \rrbracket_{av, bv}^T, \vec{bv}_s)$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

544/169



# V4: Erbringen der Beweisverpflichtungen

## Lemma 7.10.1.4.1 (Absteigende Kettenbedingung)

$\widehat{\mathcal{BV}}^n$  erfüllt die absteigende Kettenbedingung.

## Lemma 7.10.1.4.2 (Distributivität)

$\llbracket \cdot \rrbracket_{av,bvv}^T$  ist distributiv.

## Korollar 7.10.1.4.3 (Monotonie)

$\llbracket \cdot \rrbracket_{av,bvv}^T$  ist monoton.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# V4: Einsammeln der *SUP*-Semantikgarantien

...für Terminierung, Straffheit.

## Theorem 7.10.1.4.4 (*MaxFP*-Terminierung)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,T,bvv} = (\widehat{\mathcal{BV}}^n, \llbracket \cdot \rrbracket_{av,bvv}^T, \vec{bv}_s)$  terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,T,bvv}$ .

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.4.1, Korollar 7.10.1.4.3 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

## Theorem 7.10.1.4.5 (*SUP*-Straffheit)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,T,bvv} = (\widehat{\mathcal{BV}}^n, \llbracket \cdot \rrbracket_{av,bvv}^T, \vec{bv}_s)$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*-straff für  $\mathcal{S}_G^{av,T,bvv}$  (d.h. terminiert mit der *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,T,bvs}$ ).

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.4.2, Koinzidenztheorem 7.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

## V4: Analog für *VUP*-Semantikgarantien

Analog zu Lemma 7.10.1.4.1, 7.10.1.4.2 gilt auch:

1.  $\widehat{\mathcal{BV}}^n$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.
2.  $\llbracket \cdot \rrbracket_{av,bvv}^T$  ist additiv.

Damit gilt analog zu Theorem 7.10.1.4.5 auch für die *VUP*-Semantik das entsprechende Terminierungs- und Straffheitsresultat:

### Theorem 7.10.1.4.6 (*VUP*-Terminierung, -Straffheit)

Angewendet auf das duale DFA-Problem von  $\mathcal{S}_G^{av,T,bvv}$  mit gestürztem Verband  $\widehat{\mathcal{BV}}^n$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *VUP*-straff (d.h. terminiert mit der *VUP*-Semantik des dualen Problems).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# Performanzanmerkung: $\mathcal{S}_G^{kp_v}$ vs. $\mathcal{S}_G^{bv_v}$

Anders als für  $\mathcal{S}_G^{av,T,kp_v}$  (Kap. 10.7.1.3) kann der Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 für

- $\mathcal{S}_G^{av,T,bv_v}$

die Vorteile der auf Prozessoren vorhandenen hochperformanten Operationen auf Bitvektoren ausnutzen und davon profitieren.

Verfügbarkeit wird deshalb auch als

- Bitvektorproblem

bezeichnet.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# Kapitel 7.10.1.5

Verfügbarkeit für endliche Term mengen:  
Gen/Kill-Formulierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

**7.10.1**

7.10.2

7.11

# V5: Verfügbarkeit für endliche Termmenge $T$

Einführung sog. Gen/Kill-Mengen für anw.-benannte Kanten

$$\begin{aligned} - \text{Gen}_e^T &=_{df} \{t \in T \mid \text{Comp}_e^t \wedge \neg \text{Mod}_e^t\} \\ &= \{t \in T \mid \text{Comp}_e^t \wedge \text{Transp}_e^t\} \end{aligned}$$

...‘generating’ the property of interest.

$$\begin{aligned} - \text{Kill}_e^T &=_{df} \{t \in T \mid \text{Mod}_e^t\} \\ &= \{t \in T \mid \neg \text{Transp}_e^t\} \end{aligned}$$

...‘killing’ the property of interest.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

550/169

# V5: Spezifizieren der DFA

## DFA-Spezifikation (gen/kill (gk))

- DFA-Verband

$$\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top) =_{df} (\mathcal{P}(T), \cap, \cup, \subseteq, \emptyset, T) = \widehat{\mathcal{P}(T)}$$

- DFA-Semantik

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av,gk}^T : E \rightarrow (\mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T))$$

$$\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_{av,gk}^T =_{df} \lambda T'. (T' \setminus \text{Kill}_e^T) \cup \text{Gen}_e^T$$

- Anfangszusicherung

$$T_s \in \mathcal{P}(T)$$

## Verfügbarkeitsspezifikation für $T$

- Spezifikation:  $\mathcal{S}_G^{av,T,gk} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av,gk}^T, T_s)$

# V5: Erbringen der Beweisverpflichtungen

Aus dem Vergleich von:

- $\llbracket \cdot \rrbracket_{av, gks}^T : E \rightarrow (\mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T))$   
 $\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_{av, gk}^T =_{df} \lambda T'. (T' \setminus \text{Kill}_e^T) \cup \text{Gen}_e^T$

mit:

- $\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^T : E \rightarrow (\mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T))$   
 $\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_{av}^T =_{df}$   
 $\lambda T'. \{t \in T \mid (t \in T' \vee \text{Comp}_e^t) \wedge \text{Transp}_e^t\}$

erhalten wir:

## Lemma 7.10.1.5.1 (Gleichheit)

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^T = \llbracket \cdot \rrbracket_{av, gk}^T$$

...woraus **Distributivität** (und **Monotonie**) der **Gen/Kill-Semantikfunktionen** folgt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

552/169



# V5: Einsammeln der *SUP*-Semantikgarantien

...für Terminierung, Straffheit.

## Theorem 7.10.1.5.4 (*MaxFP*-Terminierung)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,T,gk} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, \llbracket \rrbracket_{av,gk}^T, T_s)$  terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,T,gk}$ .

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.2.1, Lemma 7.10.1.2.2, Korollar 7.10.1.2.3, Terminierungstheorem 7.6.2.1.

## Theorem 7.10.1.5.5 (*SUP*-Straffheit)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{av,T,gk} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, \llbracket \rrbracket_{av,gk}^T, T_s)$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*-straff für  $\mathcal{S}_G^{av,T,gk}$  (d.h. terminiert mit der *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{av,T,gk}$ ).

**Beweis.** Folgt unmittelbar mit Lemma 7.10.1.2.1, Lemma 7.10.1.2.2, Koinzidenztheorem 6.7.2, Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

553/169

## V5: Analog für VUP-Semantikgarantien

Analog zu absteigender Kettenbedingung und Distributivität gilt auch:

1.  $\widehat{\mathcal{P}(T)}$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.
2.  $\llbracket \cdot \rrbracket_{av, gk}^T$  ist additiv.

Damit gilt analog zu [Theorem 7.10.1.5.5](#) auch für die **VUP-Semantik** das entsprechende Terminierungs- und Straffheitsresultat:

### Theorem 7.10.1.5.6 (VUP-Terminierung, -Straffheit)

Angewendet auf das duale DFA-Problem von  $\mathcal{S}_G^{av, T, gk}$  mit gestürztem Verband  $\widehat{\mathcal{P}(T)}$  ist Algorithmus 7.6.1.1 **VUP-straff** (d.h. terminiert mit der VUP-Semantik des dualen Problems).

# Verdeutlichung: Verfügb. als Gen/Kill-Prob. (1)

Die Spezialisierung des *MaxFP*-Gleichungssystems 7.5.1.1:

Gleichungssystem 7.5.1.1 (*MaxFP*-Gleichungssyst.)

$$\text{inf}(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = s \\ \bigcap \{ \llbracket (m, n) \rrbracket(\text{inf}(m)) \mid m \in \text{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

...für *Verfügbarkeit* liefert:

Gleichungssystem 7.10.1.5.7 (Verfügbarkeit)

$\text{Available}(n) =$

$$\begin{cases} T_s & \text{falls } n = s \\ \bigcap \{ \llbracket (m, n) \rrbracket_{av, gk}^T(\text{Available}(m)) \mid m \in \text{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

555/169

# Verdeutlichung: Verfügb. als Gen/Kill-Prob. (2)

...durch zusätzliches Expandieren von  $\llbracket \cdot \rrbracket_{av,gk}^T$  erhalten wir:

## Gleichungssystem 7.10.1.5.7' (Verfügbarkeit)

$Available(n) =$

$$\begin{cases} T_s & \text{falls } n = s \\ \bigcap \{ (Available(m) \setminus Kill_{(m,n)}^T) \cup Gen_{(m,n)}^T \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgrund der Abstützung von Gleichungssystem 7.10.1.5.7' und der Semantikfunktionen:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av,gk}^T : E \rightarrow (\mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T))$$

$$\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_{av,gk}^T =_{df} \lambda T'. (T' \setminus Kill_e^T) \cup Gen_e^T$$

auf Gen/Kill-Mengen, wird Verfügbarkeit auch als

– Gen/Kill-Problem

bezeichnet.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# Gen/Kill- (oder Bitvektor-) Probleme

...umfassen neben **Verfügbarkeit** viele weitere Probleme wie

- **beschäftigte Terme, lebendige Variablen, erreichende Definitionen**, etc.

Trotz ihrer konzeptuellen Einfachheit bilden sie eine sehr wichtige **Klasse** von **DFA-Problemen** mit zahlreichen Anwendungen in der **Programmoptimierung**, darunter:

- **Elimination partiell redundanter Ausdrücke**
- **Reduktion der Operatorstärke**
- **Elimination partiell toter Anweisungen**
- **Elimination partiell redundanter Anweisungen**
- **Anweisungsschieben**
- ...

...siehe **LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer** für mehr Details.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

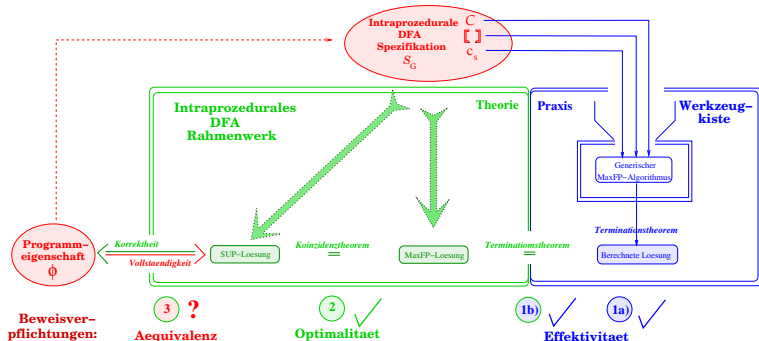
557/169

# Kapitel 7.10.1.6

Schließen der äußeren Äquivalenzbeweislücke  
am Beispiel von Verfügbarkeitsvariante 1

# V1: Schließen d. äußeren Äquivalenzbeweislücke

...am Beispiel des **Korrektheits-** und **Vollständigkeitsbeweises** für die **SUP**-Sicht des **Verfügbarkeitsproblems**  $\mathcal{S}_G^{av,t}$ :



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

559/169

# Zur Erinnerung

...ein Term  $t$  heißt **verfügbar** an einem Knoten, wenn  $t$  auf jedem Pfad vom Programmanfang zu diesem Knoten berechnet wird und anschließend bis zum Erreichen dieses Knotens keine seiner Operandenvariablen einen Wert zugewiesen erhält.

## Beachte

- Wird **Programmanfang** durch **Prozeduranfang** ersetzt, trifft die obige umgangssprachliche Definition von Verfügbarkeit keine Vorsorge für den Fall, dass ein Ausdruck am Prozeduranfang selbst verfügbar ist.
- Fälle, in denen die Verfügbarkeit am Prozeduranfang durch die Aufrufkontexte der Prozedur sichergestellt werden, sind deshalb nicht erfasst und können nicht behandelt werden.



# Einführung nützlicher Schreibweise

...als Vorbereitung für eine formale Verfügbarkeitsdefinition.

Sei  $G = (N, E, s, e)$  ein Flussgraph, *predicate* ein für Kanten  $e \in E$  definiertes Prädikat und  $p = \langle e_1, \dots, e_q \rangle \in \mathbf{P}[m, n]$  ein Pfad, sowie:

- $p_i$ ,  $1 \leq i \leq q$ :  $i$ -te Kante  $e_i$  von  $p$ .
- $p_{[k,l]}$ : Teilpfad  $\langle e_k, \dots, e_l \rangle$  von  $p$ .
- $\lambda_p = q$ : Länge von  $p$ , d.h. Zahl der Kanten von  $p$ .

Für Prädikatquantifizierungen auf Pfaden definieren wir:

- $\text{predicate}_p^\forall \iff_{df} \forall 1 \leq i \leq \lambda_p. \text{predicate}_{p_i}$
- $\text{predicate}_p^\exists \iff_{df} \exists 1 \leq i \leq \lambda_p. \text{predicate}_{p_i}$

# Verfügbarkeit

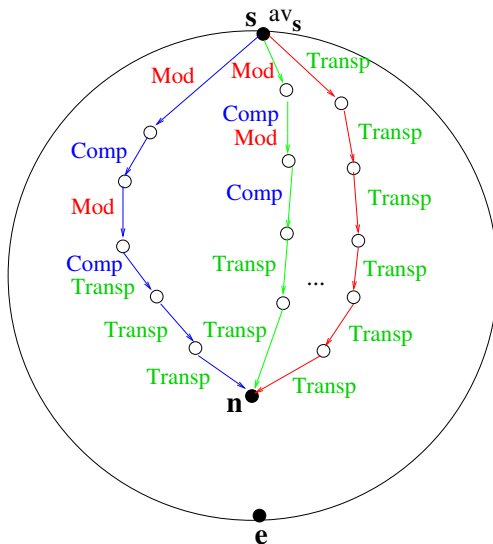
...formal definiert:

## Definition 7.10.1.6.1 (Verfügbarkeit)

Sei  $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$  ein Flussgraph,  $t$  ein Term und  $av_s \in \mathbb{B}$  die durch den Aufrufkontext von  $G$  für  $t$  an  $\mathbf{s}$  zugesicherte Anfangsinformation. Dann definieren wir:

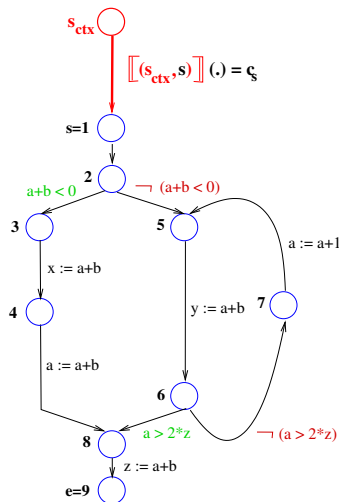
$$Available^t(n) \iff_{df} \begin{cases} av_s & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \forall p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n]. (av_s^t \wedge Transp_{p}^{t\forall}) \vee \\ \quad \exists i \leq \lambda_p. Comp_{p_i}^t \wedge Transp_{p[i, \lambda_p]}^{t\forall} & \text{sonst} \end{cases}$$

## 563/169



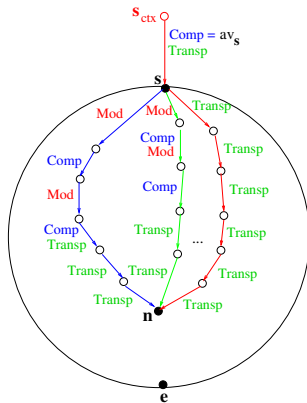
# Kontextkanten

...erlauben eine einfachere, fallunterscheidungsfreie Definition von **Verfügbarkeit**:



# Ausnutzung der Kontextkante

...um **Verfügbarkeit** fallunterscheidungsfrei zu definieren:



## Definition 7.10.1.6.1' (Verfügbarkeit)

$$\forall n \in N \setminus \{s_{ctx}\}. \text{Available}^t(n) \iff_{df} \forall p \in \mathbf{P}[s_{ctx}, n]. \exists i \leq \lambda_p. \text{Comp}_{p_i}^t \wedge \text{Transp}_{p[i, \lambda_p]}^t$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

565/169

# Schließen der äußeren Äquivalenzbeweislücke

## Theorem 7.10.1.6.2 (Korrektheit/Vollständigkeit)

Sei  $G = (N, E, s, e)$  ein Flussgraph,  $t$  ein Ausdruck,  $av_s \in \mathbb{B}$  die durch die Aufrufkontexte von  $G$  zugesicherte Verfügbarkeitsinformation für  $t$  am Startknoten  $s$  und sei  $\llbracket \cdot \rrbracket_{S_G^{av,t}}^{SUP}$  die  $SUP$ -Semantik von  $G$  für die DFA-Spezifikation

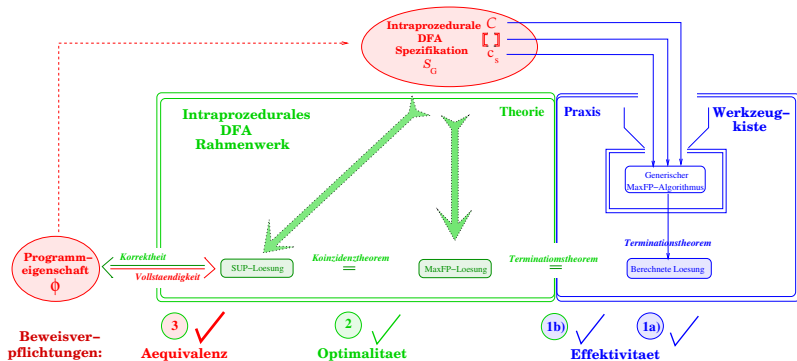
$$\mathcal{S}_G^{av,t} = (\hat{\mathbb{B}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{av}^t, av_s)$$

Dann gilt:

$$\forall n \in N. \text{ Available}^t(n) \iff \llbracket n \rrbracket_{S_G^{av,t}}^{SUP}$$

# Lücke geschlossen: Korrektheit/Vollständigkeit

...für die *SUP*-Sicht von  $\mathcal{S}_G^{av,t}$  für Termverfügbarkeit bewiesen:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

567/169

# Übungsaufgabe 7.10.1.6.3

1. Was bedeuten **Korrektheit**, **Vollständigkeit** für die **VUP**-Sicht von  $\mathcal{S}_G^{av,t}$ -Termverfügbarkeit?
2. Wie lassen sie sich beweisen?

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11



# Kapitel 7.10.2

## Einfache Konstanten: Monotones DFA-Problem

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

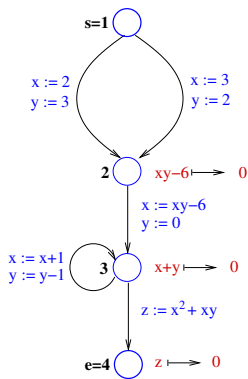
**7.10.2**

7.11

# Ein Term $t$

...ist die **Konstante**  $c$  am Knoten  $n$ , wenn die Auswertung von  $t$  an  $n$  stets den Wert  $c$  liefert, unabhängig vom Programmpfad, auf dem  $n$  von  $s$  aus erreicht worden ist.

Veranschaulichung:



Quelle Beispiel: Markus Müller-Olm, Helmut Seidl (SAS 2002)

# Konstantenausbreitung und -faltung

...Terme von konstantem Wert können zur Übersetzungszeit durch diesen Wert ersetzt werden.

Dadurch wird Berechnungsaufwand von der Laufzeit eines Programms in seine Übersetzungszeit verlagert und die Laufzeitperformance verbessert, eine als

- Konstantenausbreitung und -faltung

bezeichnete Programmoptimierung.

Leider ist die Existenz eines stets erfolgreichen Algorithmus, ob ein Term an einer Programmstelle eine Konstante ist oder nicht, ausgeschlossen.

# Kapitel 7.10.2.1

## Unentscheidbarkeit des Konstantenerkennungsproblems

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

**7.10.2**

7.11

# Unentscheidbarkeit von Konstantenerkennung

## Theorem 7.10.2.1.1 (Unentscheidb., Reif&Lewis 1977)

Das Problem, alle Ausdrücke eines Programms zu bestimmen, die im Bereich ganzzahliger Arithmetik einen konstanten Wert haben, ist unentscheidbar.

John H. Reif, Harry R. Lewis. [Symbolic Evaluation and the Global Value Graph](#). In Conference Record of the 4th Annual SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77), 104-118, 1977.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

573/169

# Beweisskizze für Theorem 7.10.2.1.1 (1)

Reif und Lewis reduzieren den Beweis von Theorem 7.10.2.1.1 auf Hilberts 10-tes Problem, ob ein Polynom eine Wurzel in den natürlichen Zahlen hat:

## Theorem 7.10.2.1.2 (Unentscheidbarkeit von Hilberts 10-tem Problem, Matijasevič 1970)

Sei  $\{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $k > 5$ , eine Menge von Variablen und sei  $P(x_1, \dots, x_k)$  ein (multivariates) Polynom über  $x_1, \dots, x_k$ .

Es ist nicht entscheidbar, ob  $P(x_1, \dots, x_k)$  eine Wurzel in den natürlichen Zahlen hat, d.h. es ist nicht entscheidbar, ob es natürlichzahlige Werte  $n_1, \dots, n_k$  gibt, so dass gilt:

$$P(x_1, \dots, x_k)[n_1, \dots, n_k/x_1, \dots, x_k] = 0$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

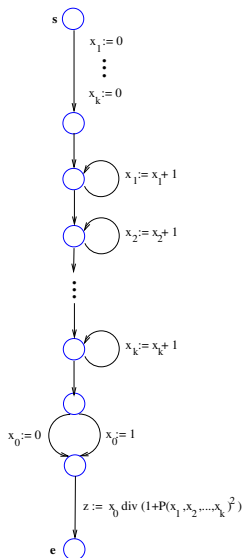
7.10.2

7.11

574/169

# Beweisskizze für 7.10.2.1.1 (2)

Betrachte folgendes als Flussgraph gegebene Programm  $G$ :



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

575/169

# Beweisskizze für Theorem 7.10.2.1.1 (3)

Zeige:

$P$  hat keine Wurzel in den natürlichen Zahlen gdw  
 $z$  ist am Knoten  $e$  von  $G$  eine Konstante

Unter Ausnutzung von Theorem 10.7.2.1.2 erbringt der Beweis dieser Äquivalenz den Beweis von Theorem 7.10.2.1.1.





# Einfache Konstanten: Entscheidbare K.-Klasse

...aufgrund dieses negativen Resultats werden in der Praxis einfachere Varianten (oder Klassen) des **Konstantenausbreitungs- und Faltungsproblems** betrachtet, die **entscheidbar** sind; eine davon ist die Klasse der sog. **einfachen Konstanten**.

**Informell:** Ein Term ist eine **einfache Konstante** (engl. **simple constant**) an einem Programmpunkt, wenn jeder seiner Operanden an diesem Punkt einen eindeutigen konstanten Wert hat, unabhängig davon, auf welchem Pfad vom Programmstart aus dieser Punkt erreicht wird.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

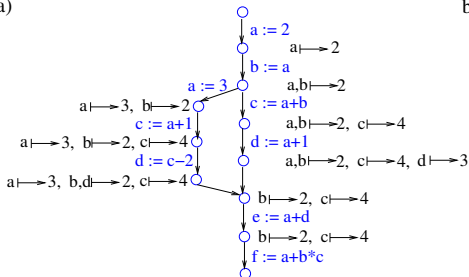
7.10.2

7.11

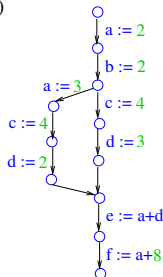
577/169

# Beispiel: Einfache Konstanten

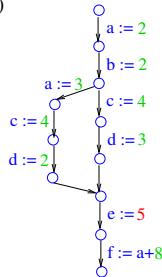
a)



b)



c)

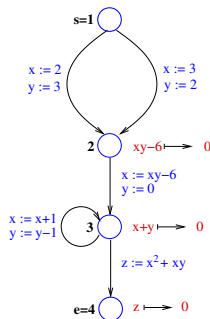


Mit Ausnahme von  $a + d$  und  $a + 8$  sind alle Terme **einfache Konstanten** (Abbildung b)).

Beachte:

- $a + 8$  ist **keine** Konstante.
- $a + d$  ist **Konstante** mit Wert **5**, aber keine einfache Konstante (Abbildung c)).

# Anti-Beispiel: Keine einfachen Konstanten



Kein (nichttrivialer) Term im Beispiel von Müller-Olm und Seidl ist eine einfache Konstante.

**Beachte:**  $a + d$  im vorigen Beispiel und alle Terme im Beispiel von Müller-Olm/Seidl können von ausgefilterten (und im zweiten Fall wesentlich berechnungsaufwändigeren) Verfahren als Konstanten erkannt werden (s. z.B. [LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer](#)).

# Einfache Konstanten: Monotones DFA-Problem

...die Erkennung **einfacher Konstanten** ist

- kanonisches Beispiel eines (nichtdistributiven) **monotonen DFA-Problems**.
- Beispiel einer korrekten, unvollständigen Analyse, die viele als Konstanten erkennbare Terme nicht als konstant erkennt, die aber effizient und mit für die Programmoptimierung noch immer nützlichen Ergebnissen ist:

**Aufgabe von Vollständigkeit zugunsten von Effizienz!**  
(engl. **trading completeness for efficiency!**)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# Arbeitsplan

...in der Folge spezifizieren wir das **Einfache-Konstanten-Problem** (engl. **simple constants**) für Terme.

Dabei gehen wir in folgenden Schritten vor:

- **Kap. 10.7.2.2:** Einführung von
  - DFA-Zuständen
  - Termsemantik
  - Instruktionssemantik
  - DFA-Zustandsverband für einfache Konstanten
- **Kap. 10.7.2.3:** DFA-Spezifikation, Beweisverpflichtungen, Garantien

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

581/169

# Kapitel 7.10.2.2

## Berechnung einfacher Konstanten: Vorbereitungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

**7.10.2**

7.11

# Von Datenbereichen zu DFA-Verbänden

Sei  $ID$  ein

- interessierender **Datenbereich** (engl. **data domain**) (z.B. die Menge natürlicher Zahlen  $\mathbb{N}$ , die Menge ganzer Zahlen  $\mathbb{Z}$ , die Menge der Wahrheitswerte  $IB$ , etc.) mit einem ausgezeichneten Element  $\perp$ , das den Wert *undefiniert* darstellt.

Wir erweitern  $ID$  um ein neues

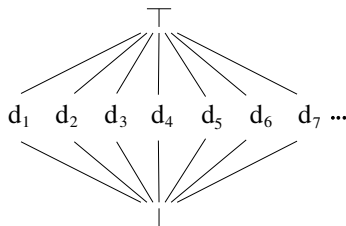
- neues Element  $\top$  nicht in  $ID$ , d.h.:  $\top \notin ID$ .

Den **erweiterten Bereich** bezeichnen wir mit  $ID' =_{df} ID \cup \{\top\}$ .

**Bem:**  $\perp$  als Element des zugrundeliegenden Datenbereichs anzunehmen,  $\top$  jedoch nicht, erscheint willkürlich. Der Grund dafür ist, dass Datentypen oft so implementiert sind, dass sie einen speziellen Wert mit der Bedeutung 'undefiniert' enthalten.

# Allgemein: Konstruktion von DFA-Verbänden

...ist  $ID'$  ein **erweiterter Datenbereich**, konstruieren wir den **flachen Verband** (engl. flat lattice)  $\mathcal{FV}_{ID'}$  (s. **Anhang A.4**):



der der **basale Verband** der DFA-Analyse für **einfache Konstanten** ist.

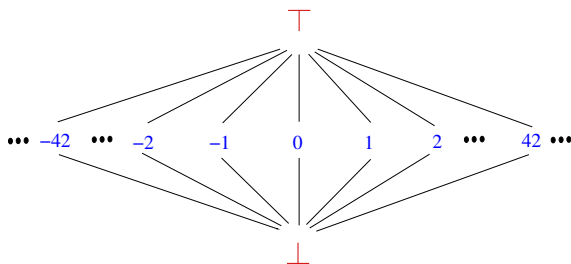
## Intuitiv

- $\top$  steht für vollständige, aber inkonsistente Information.
- $d_i$ ,  $i \geq 1$ , steht für akkurate Information.
- $\perp$  steht für keine Information, die 'leere' Information.



# Konkret: Der basale DFA-Verband über $\mathbb{Z}$

...ist gegeben durch den flachen Verband  $\mathcal{FV}_{\mathbb{Z}}$ :



...der zur Berechnung der Klasse **einfacher Konstanten** über  $\mathbb{Z}$  verwendet wird.

# Abstrakte Programmzustände: DFA-Zustände

## Definition 7.10.2.2.1 (DFA-Zustände)

1. Ein **DFA-Zustand** ist eine totale Abbildung  $\sigma : \mathbf{V} \rightarrow \text{ID}'$ , die jeder Variablen ein Datum  $d \in \text{ID}'$  zuweist.
2. Die Menge **aller DFA-Zustände** ist definiert durch:

$$\Sigma' =_{df} \{ \sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \rightarrow \text{ID}' \}.$$

3.  $\sigma_{\perp}$  und  $\sigma_{\top}$  bezeichnen zwei ausgezeichnete DFA-Zustände aus  $\Sigma'$ , die folgendermaßen definiert sind:

$$\sigma_{\perp} = \lambda v. \perp, \quad \sigma_{\top} = \lambda v. \top.$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

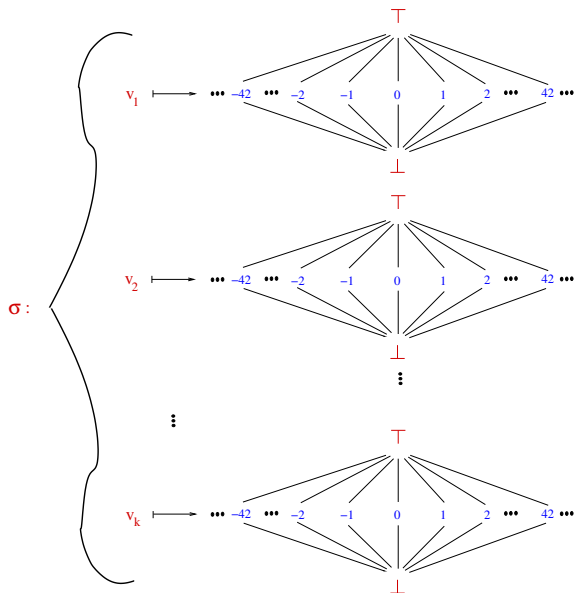
7.10.1

7.10.2

7.11

586/169

# Veranschaulichung: DFA-Zustand $\sigma$ über $\mathbb{Z}$



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

587/169

# Initiale DFA-Zustände

...für **initiale DFA-Zustände** (d.h. Anfangszustände) verlangen wir, dass keiner Variablen der besondere Wert  $\top$  zugewiesen ist, d.h. wir verlangen am Prozedur-/Programmanfang entweder akkurate Information über den Wert einer Variablen zu haben oder gar keine. Wir definieren:

## Definition 7.10.2.2.2 (Initiale DFA-Zustände über $ID'$ )

Die Menge **initialer DFA-Zustände** über  $ID'$  ist definiert durch:

$$\Sigma'_{init} =_{df} \{ \sigma \in \Sigma' \mid \forall v \in \mathbf{V}. \sigma(v) \neq \top \}$$

# Ausdehnung der Interpretation

...für Konstanten- und Operatorsymbole von  $ID$  auf  $ID'$ .

## Definition 7.10.2.2.3 (Ausdehnung der Interpretation)

Sei  $I =_{df} (ID, I_0)$  eine Interpretation der Konstanten- und Operatorsymbole über dem Datenbereich  $ID$ .

Dann ist  $I' =_{df} (ID', I'_0)$  diejenige Interpretation über  $ID'$ , die  $I$  in folgender Weise ausdehnt:

- $I'_0(c) =_{df} I_0(c)$  für jedes Konstantensymbol  $c \in \mathbf{C}$
- $I'_0(op) : ID'^k \rightarrow ID'$  für jedes  $k$ -st. Operatorsymbol  $op \in \mathbf{O}$ :

$$\forall (d_1, \dots, d_k) \in ID'^k. I'_0(op)(d_1, \dots, d_k) =_{df}$$

$$\begin{cases} I_0(op)(d_1, \dots, d_k) & \text{falls } d_i = \perp \text{ für einige } 1 \leq i \leq k, \\ & \text{oder } d_j \neq \top, 1 \leq j \leq k \\ \top & \text{falls } d_i \neq \perp, 1 \leq i \leq k, \text{ und} \\ & d_j = \top \text{ for some } 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

# Die abstrakte Termsemantik über $ID'$

## Definition 7.10.2.2.4 (Abstrakte Termsemantik)

Die **abstrakte Semantik** von Termen  $t \in \mathbf{T}$  ist durch die **Auswertungsfunktion**

$$\mathcal{A} : \mathbf{T} \rightarrow (\Sigma' \rightarrow ID')$$

gegeben, die folgendermaßen definiert ist:

$$\forall t \in \mathbf{T}. \mathcal{A}(t) =_{df} \lambda \sigma. \begin{cases} \sigma(x) & \text{falls } t \equiv x \in \mathbf{V} \\ l'_0(c) & \text{falls } t \equiv c \in \mathbf{C} \\ l'_0(op)(\mathcal{A}(t_1)(\sigma), \dots, \mathcal{A}(t_k)(\sigma)) & \text{falls } t \equiv (op, t_1, \dots, t_k) \end{cases}$$

# Die abstrakte Instruktionssemantik

## Definition 7.10.2.2.5 (Abstrakte Instruktionssemantik)

### Die **abstrakte Semantik**

- einer Zuweisung  $\iota \equiv x := t$  ist durch die **Zustandstransformation(sfunktion)** (engl. **state transformer**)  $\theta_\iota: \Sigma' \rightarrow \Sigma'$  gegeben, die definiert ist durch:

$$\forall \sigma \in \Sigma'. \theta_\iota(\sigma) =_{df} \lambda y. \begin{cases} \mathcal{A}(t)(\sigma) & \text{falls } y = x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

- der leeren Anweisung  $\iota \equiv \text{skip}$  und einer (Verzweigungs-) Bedingung  $\iota \equiv \text{cond}$  ist durch die **identische Zustands-transformation**  $Id_{\Sigma'}$  gegeben, d.h.:  $\theta_\iota =_{df} Id_{\Sigma'} =_{df} \lambda \sigma. \sigma$ .

**Bem:** Die Ausführung von **skip** und die Auswertung von **Bedingungen** sind seiteneffektfrei.

# Der DFA-Verband für einfache Konstanten

...die Menge der DFA-Zustände bildet mit der punktweisen Ordnung auf Zuständen,  $\sqsubseteq_{\Sigma'}$ , einen vollständigen Verband (s. Anhang A.4):

$$\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma'. \sigma \sqsubseteq_{\Sigma'} \sigma' \iff_{df} \forall v \in \mathbf{V}. \sigma(v) \sqsubseteq_{\mathcal{FV}_{\mathbb{D}'}} \sigma'(v)$$

## Lemma 7.10.2.2.6 (Verband der DFA-Zustände)

$\widehat{\Sigma}' =_{df} (\Sigma', \sqcap_{\Sigma'}, \sqcup_{\Sigma'}, \sqsubseteq_{\Sigma'}, \sigma_{\perp}, \sigma_{\top})$  ist ein vollständiger Verband mit

- kleinstem Element  $\sigma_{\perp}$ ,
- größtem Element  $\sigma_{\top}$ ,
- punktwisem Schnitt  $\sqcap_{\Sigma'}$  und Vereinigung  $\sqcup_{\Sigma'}$  als Schnitt- bzw. Vereinigungsoperation.



# Kapitel 7.10.2.3

Einfache Konstanten: Spezifikation,  
Beweisverpflichtungen, Garantien

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

**7.10.2**

7.11

# Einfache Konstanten: Spezifizieren der DFA

## DFA-Spezifikation

- DFA-Verband

$$\hat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top) =_{df} (\Sigma', \sqcap_{\Sigma'}, \sqcup_{\Sigma'}, \sqsubseteq_{\Sigma'}, \sigma_{\perp}, \sigma_{\top}) = \hat{\Sigma}'$$

mit  $\Sigma'$  Menge der DFA-Zustände über  $\mathbb{Z}$ .

- DFA-Semantik

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{eK} : E \rightarrow (\Sigma' \rightarrow \Sigma')$$

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{eK} =_{df} \lambda e. \theta'_{\iota_e}$$

- Anfangszusicherung

$$\sigma_s \in \Sigma'_{Init}$$

## Einfache-Konstanten-Spezifikation

- Spezifikation:  $\mathcal{S}_G^{eK} = (\hat{\Sigma}', \llbracket \cdot \rrbracket_{eK}, \sigma_s)$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# Einf. Konstanten: Erbringen der Beweisverpfl.

## Lemma 7.10.2.3.1 (Absteigende Kettenbedingung)

$\widehat{\Sigma}'$  erfüllt die absteigende Kettenbedingung.

**Beachte:** Folgt aus der Endlichkeit der Menge der Variablen in einem Programm.

## Lemma 7.10.2.3.2 (Monotonie)

$\llbracket \cdot \rrbracket_{eK}$  ist monoton.

## Lemma 7.10.2.3.3 (Nichtdistributivität)

$\llbracket \cdot \rrbracket_{eK}$  ist (i.a.) nicht distributiv.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# Einf. Konst.: Einsammeln d. *SUP*-S.-Garantien

...für Terminierung, Konservativität.

## Theorem 7.10.2.3.4 (*MaxFP*-Terminierung)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{eK} = (\hat{\Sigma}', \llbracket \cdot \rrbracket_{eK}, \sigma_s)$  terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{eK}$ .

**Beweis.** Unmittelbar mit Lemma 7.10.2.3.1, Lemma 7.10.2.3.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

## Theorem 7.10.2.3.5 (*SUP*-Termin., -Konservativität)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{eK} = (\hat{\Sigma}', \llbracket \cdot \rrbracket_{eK}, \sigma_s)$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*-konservativ für  $\mathcal{S}_G^{eK}$  (d.h. terminiert mit einer unteren Approximation der *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{eK}$ ).

**Beweis.** Unmittelbar mit Lemma 7.10.2.3.1, Lemma 7.10.2.3.2, Sicherheitstheorem 7.7.1 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

# Einfache Konstanten: Negatives Ergebnis

...für Straffheit.

## Theorem 7.10.2.3.6 (Nicht-Straffheit)

Angewendet auf  $\mathcal{S}_G^{eK} = (\hat{\Sigma}', \llbracket \cdot \rrbracket_{eK}, \sigma_s)$  ist Algorithmus 7.6.1.1 i.a. nicht *SUP*-straff für  $\mathcal{S}_G^{eK}$  (d.h. terminiert mit einer echten unteren Approximation der *SUP*-Lösung von  $\mathcal{S}_G^{eK}$ ).

**Beweis.** Unmittelbar mit Lemma 7.10.2.3.1, Lemma 7.10.2.3.2, Lemma 7.10.2.3.3, Koinzidenztheorem 7.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

**Abschliessend:** Die *MaxFP*-Lösung von  $\mathcal{S}_G^{eK}$  ist stets sichere Approximation der *SUP*-Lösung von  $\mathcal{S}_G^{eK}$ . I.a. sind die operationelle *SUP*-Lösung von  $\mathcal{S}_G^{eK}$  und ihr denotationelles *MaxFP*-Gegenstück verschieden.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

597/169

# Einf. Konst.: Analog für *VUP*-Sem.-Garantien

Analog zu Lemma 7.10.2.3.1, 7.10.2.3.3 gilt offenbar auch:

1.  $\widehat{\Sigma}'$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.
2.  $\llbracket \cdot \rrbracket_{eK}$  ist i.a. nicht additiv.

Damit gilt analog zu Theorem 7.10.2.3.5 auch für die *VUP*-Semantik das entsprechende Terminierungs- und Konservativitätsresultat:

## Theorem 7.10.2.3.7 (*VUP*-Term., -Konservativität)

Angewendet auf das duale DFA-Problem von  $\mathcal{S}_G^{av,t}$  mit gestürztem Verband  $\widehat{\Sigma}'$  ist Algorithmus 7.6.1.1 *VUP*-konservativ für  $\mathcal{S}_G^{eK}$  (d.h. terminiert mit einer sicheren oberen Approximation der *VUP*-Semantik).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

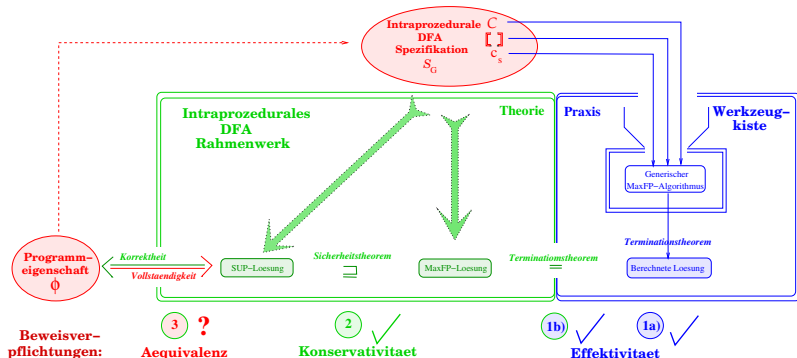
7.10.2

7.11

598/169

# Einf. Konst.: Schließen äußerer Beweislücke

...Korrektheits und Vollständigkeitsbeweisverpflichtungen für die *SUP*-Sicht von  $\mathcal{S}_G^{ek}$  für die einfache-Konstanten-Eigenschaft:



# Einf. Konstanten: Korrektheit, Vollständigkeit

...für die *SUP*-Semantik.

## Theorem 7.10.2.3.8 (Korrektheit, Vollständigkeit)

Die *SUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{eK}$  ist

1. korrekt und vollständig für Variablen.
2. korrekt, aber nicht vollständig für (nichttriviale) Terme (d.h. für Terme mit mindestens einem (nichteinstelligen) Operatorsymbol).

...zu Theorem 7.10.2.3.8(2): Beachte, dass die *SUP*-Lösung an jedem Knoten als Zustand aufgefasst werden kann, d.h. als Abbildung von Variablen auf Werte, was die Auswertung von Termen gemäß Definition 7.10.2.2.4 erlaubt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11



# Einf. Konstanten: Korrektheit, Vollständigkeit

...für die *MaxFP*-Semantik.

## Theorem 7.10.2.3.9 (Korrektheit, Vollständigkeit)

Die *MaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^{eK}$  ist korrekt, aber nicht vollständig (sowohl für Terme als auch für Variablen).

...siehe Unterlagen zur [LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer](#) für weitere Details.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

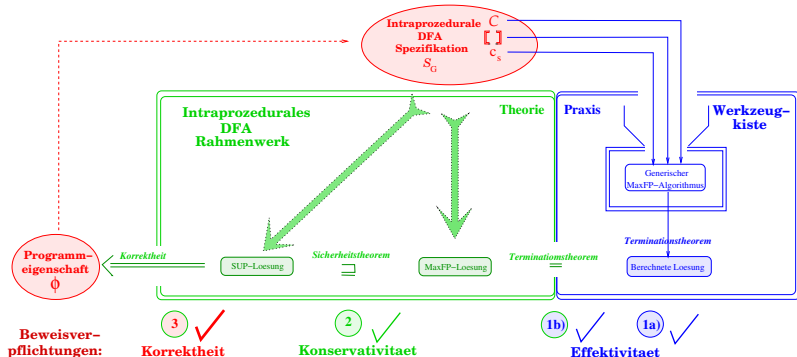
7.10.2

7.11

601/169

## Beweislücke partiell geschlossen: Korrektheit

...der *SUP*-Sicht von  $\mathcal{S}_G^{ek}$  für die einfache-Konstanten-Eigen-schaft bewiesen:



# Übungsaufgabe 7.10.2.3.10

1. Was bedeuten **Korrektheit**, **Vollständigkeit** für die **VUP**-Sicht von  $\mathcal{S}_G^{eK,G}$  für die **einfache-Konstante-Eigenschaft**?
2. Wie können sie bewiesen/widerlegt werden?

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.10.1

7.10.2

7.11

603/169

# Kapitel 7.11

## Zusammenfassung, Ausblick

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

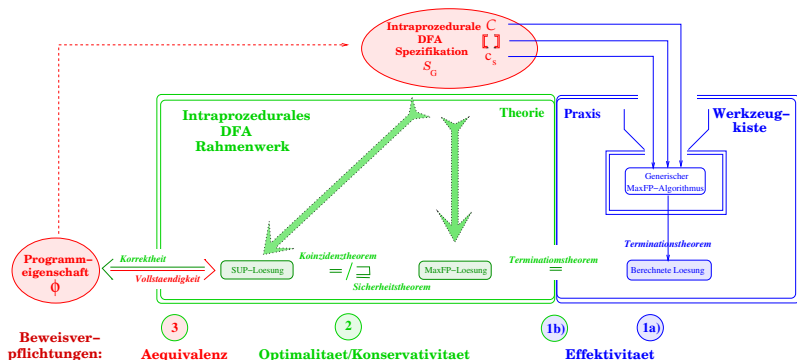
**7.11**

7.12

Kap. 8  
604/169

# Die Rahmenwerk/Werkzeugkistensicht

...von (intraprozeduraler) Datenflussanalyse:



...unter der Perspektive von **Korrektheit**, **Akkuratheit** und der muss/kann-Eigenschaft von  $\phi$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8

605/169

# Muss vs. kann

...grundsätzlich können wir für  $\phi$  unterscheiden:

- **Universell quantifizierte** (oder: **muss** (engl. **must**)) Eigenschaften  $\phi^\forall$ :  $\phi^\forall$  gilt an einem Knoten  $n$ , wenn  $\phi$  entlang **aller** Pfade von  $s$  nach  $n$  an  $n$  gilt.
- **Existentiell quantifizierte** (oder: **kann** (engl. **may**)) Eigenschaften  $\phi^\exists$ :  $\phi^\exists$  gilt an einem Knoten  $n$ , wenn  $\phi$  entlang **einiger** Pfade von  $s$  nach  $n$  an  $n$  gilt.

**Muss-Eigenschaften**  $\phi^\forall$  sind verbunden mit der

- operationellen **SUP-Programmsemantik** und ihrem berechenb. denotationellen Gegenstück, der **MaxFP-Sem.**

**Kann-Eigenschaften**  $\phi^\exists$  sind verbunden mit der

- operationellen **VUP-Programmsemantik** und ihrem berechenb. denotationellen Gegenstück, der **MinFP-Sem.**

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8

# Korrektheit, Vollständigkeit

...es gibt zwei wesentliche Stellen, an denen **Korrektheits-** und **Vollständigkeitsaspekte** in der **Rahmenwerk/Werkzeugkisten-**Sicht von **DFA** betrachtet werden:

**Rahmenwerk/Werkzeugkisten-**intern****: Erfasst durch

- **Sicherheit**  $\rightsquigarrow$  Konservativität
- **Koinzidenz**  $\rightsquigarrow$  Straffheit

...**MaxFP/MinFP**- und **SUP/VUP**-Lsg. in Beziehung setzend.

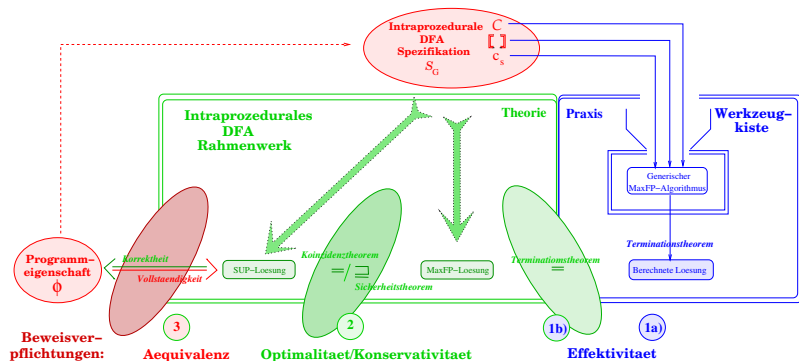
**Rahmenwerk/Werkzeugkisten-**extern****: Erfasst durch

- **Korrektheit**  $\rightsquigarrow$  Keine falschen Positive
- **Vollständigkeit**  $\rightsquigarrow$  Keine falschen Negative

...**SUP/VUP**-Lsg. und  $\phi^\forall/\phi^\exists$ -Eigensch. in Beziehung setzend.

# Veranschaulichung

...der Stellen **Rahmenwerk/Werkzeugkisten-interner** und **-externer** Behandlung von **Korrektheit** und **Vollständigkeit**:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

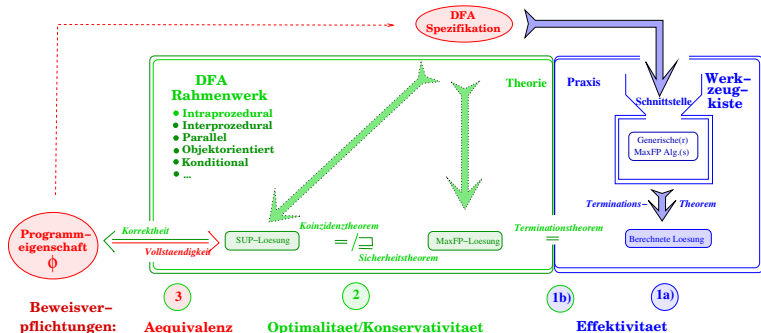


## Ausblick: Die einheitliche Sicht auf DFA

...wir werden im Lauf dieser (und auch der Vorlesung [LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer](#)) sehen: Die

- Rahmenwerk/Werkzeugkistensicht

ist über den Grundfall **intraprozeduraler DFA** hinaus erreichbar  
und erlaubt anwendungsszenariounabhängig eine **einheitliche  
Sicht** auf **DFA**:





# Kapitel 7.12





## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (1)




## Lehrbuchdarstellungen

-  Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi, Jeffrey D. Ullman. *Compilers: Principles, Techniques, & Tools*. Addison-Wesley, 2nd edition, 2007. (Chapter 1.2, The Structure of a Compiler; Chapter 1.4, The Science of Building a Compiler; Chapter 1.4.2, The Science of Code Optimization; Chapter 9.1, The Principal Sources of Program Optimization)
-  Keith D. Cooper, Linda Torczon. *Engineering a Compiler*. Morgan Kaufman Publishers, 2004. (Appendix B.3.1, Graphical Intermediate Representations)

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (2)

-  Matthew S. Hecht. *Flow Analysis of Computer Programs*. Elsevier, North-Holland, 1977.
-  Uday P. Khedker, Amitabha Sanyal, Bageshri Karkare. *Data Flow Analysis: Theory and Practice*. CRC Press, 2009. (Chapter 3, Theoretical Abstractions in Data Flow Analysis; Chapter 4, General Data Flow Frameworks; Chapter 5, Complexity of Iterative Data Flow Analysis)
-  Robert Morgan. *Building an Optimizing Compiler*. Digital Press, 1998. (Chapter 2.3, Building the Flow Graph; Chapter 4.7, Structure of Program Flow Graph)
-  Stephen S. Muchnick. *Advanced Compiler Design Implementation*. Morgan Kaufman Publishers, 1997. (Chapter 7, Control-Flow Analysis)

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (3)

-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Formal Methods: An Appetizer*. Springer-V., 2019. (Chapter 1, Program Graphs)
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Chapter 5, Static Program Analysis)
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 7, Program Analysis; Chapter 8, More on Program Analysis; Appendix B, Implementation of Program Analysis)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10




7.11

7.12

Kap. 8  
613/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (4)

## Grundlegende, wegweisende Arbeiten

-  Frances E. Allen, John A. Cocke. *A Program Data Flow Analysis Procedure*. Communications of the ACM 19(3):137-147, 1976.
-  Susan Horwitz, Alan J. Demers, Tim Teitelbaum. *An Efficient General Iterative Algorithm for Dataflow Analysis*. Acta Informatica 24(6):679-694, 1987.
-  Gary A. Kildall. *A Unified Approach to Global Program Optimization*. In Conference Record of the 1st Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'73), 194-206, 1973.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9



7.10

7.11


7.12

Kap. 8  
614/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (5)

-  John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Global Data Flow Analysis and Iterative Algorithms*. Journal of the ACM 23:158-171, 1976.
-  John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Monotone Data Flow Analysis Frameworks*. Acta Informatica 7:305-317, 1977.

## Rahmenwerke, Werkzeugkisten

-  Marion Klein, Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *DFA&OPT-METAFrame: A Toolkit for Program Analysis and Optimization*. In Proceedings of the 2nd International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'96), Springer-V., LNCS 1055, 422-426, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9




7.10

7.11

7.12



Kap. 8  
615/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (6)


-  Jens Knoop. *From DFA-Frameworks to DFA-Generators: A Unifying Multiparadigm Approach*. In Proceedings of the 5th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99), Springer-V., LNCS 1579, 360-374, 1999.
-  Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Properties of Data Flow Frameworks*. Acta Informatica 28(2):121-163, 1990.
-  Stephen P. Masticola, Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Lattice Frameworks for Multisource and Bidirectional Data Flow Problems*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 17(5):777-803, 1995.



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (7)

-  Florian Martin. *PAG - An Efficient Program Analyzer Generator*. Journal of Software Tools for Technology Transfer 2(1):46-67, 1998.
-  Flemming Nielson. *Semantics-directed Program Analysis: A Tool-maker's Perspective*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 2-21, 1996.

## Lösung von Gleichungssystemen, Fixpunktberechnung

-  Christian Fecht, Helmut Seidl. *An Even Faster Solver for General Systems of Equations*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 189-204, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
617/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (8)



Christian Fecht, Helmut Seidl. *Propagating Differences: An Efficient New Fixpoint Algorithm for Distributive Constraint Systems*. In Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98), Springer-V., LNCS 1381, 90-104, 1998.



Christian Fecht, Helmut Seidl. *A Faster Solver for General Systems of Equations*. Science of Computer Programming 35(2):137-161, 1999.



Bernhard Steffen, Andreas Claßen, Marion Klein, Jens Knoop, Tiziana Margaria. *The Fixpoint Analysis Machine*. In Proceedings of the 6th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR'95), Springer-V., LNCS 962, 72-87, 1995.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10



7.11

7.12

Kap. 8  
618/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (9)

## Flussgraphpragmatik

-  Larry Carter, Jeanne Ferrante, Clark Thomborson. *Folklore Confirmed: Reducible Flow Graphs are Exponentially Larger*. In Conference Record of the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 106-114, 2003.
-  Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *Basic-block Graphs: Living Dinosaurs?* In Proceedings of the 7th International Conference on Compiler Construction (CC'98), Springer-V., LNCS 1383, 65-79, 1998.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
619/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (10)

## Verschiedenes



Stephen M. Blackburn, Amer Diwan, Matthias Hauswirth, Peter F. Sweeny, José Nelson Amaral, Tim Brecht, Lubomír Bulej, Cliff Click, Lieven Eeckhout, Sebastian Fischmeister, Daniel Frampton, Laurie J. Hendren, Michael Hind, Antony L. Hosking, Richard E. Jones, Tomas Kalibera, Nathan Keynes, Nathaniel Nystrom, Andreas Zeller. *The Truth, The Whole Truth, and Nothing But the Truth: A Pragmatic Guide to Assessing Empirical Evaluations*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 38(4), Article 15:1-20, 2016.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
620/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (11)



Martin Davis. *Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable*. American Mathematical Monthly 80:33-269, 1973.



Martin Davis, Yuri Matijasevič, Julia Robinson. *Hilbert's Tenth Problem. Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution*. In Proceedings of the Symposium on the Hilbert Problems (De Kalb, Illinois), May 1974, American Mathematical Society, Providence, R.I., 323-378, 1976.



William Landi. *Undecidability of Static Analysis*. ACM Letters on Programming Languages and Systems 1(4):323-337, 1992.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9




7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
621/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (12)

-  Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis*. Springer-V., 2009. (Chapter 7, What can one tell about a Program without its Execution: Static Analysis)
-  Yuri V. Matijasevič. *Enumerable Sets are Diophantine (auf Russisch)*. Doklady Akademii Nauk SSSR 191:279-282, 1970 (englische Übersetzung: Soviet Mathematics Doklady 11:354-357, 1970).
-  Yuri V. Matijasevič. *On Recursive Unsolvability of Hilbert's Tenth Problem*. In Proceedings of the 4th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science (Bucharest 1971), North-Holland, Amsterdam, 89-110, 1973.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9




7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
622/169

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (13)

-  Yuri V. Matijasevič. *What Should We Do Having Proved a Decision Problem to be Unsolvable?* In Proceedings of Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science, Springer-V., LNCS 122, 441-448, 1979.
-  Yuri V. Matijasevič. *Hilbert's Tenth Problem*. MIT Press, 1993.
-  Markus Müller-Olm, Helmut Seidl. *Polynomial Constants are Decidable*. In Proceedings of the 9th Static Analysis Symposium (SAS 2002), Springer-V., LNCS 2477, 4-19, 2002.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

7.1

7.2

7.3

7.4

7.5

7.6

7.7

7.8

7.9

7.10

7.11

7.12

Kap. 8  
623/169

# Kapitel 8

## Reverse Datenflussanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

**Kap. 8**

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11



# Motivation: DFA vs. reverse DFA

...intuitiv:

DFA: Datenflussanalyse zielt relativ zu einem gegebenen Datenflussfakt als Anfangszusicherung am Startknoten

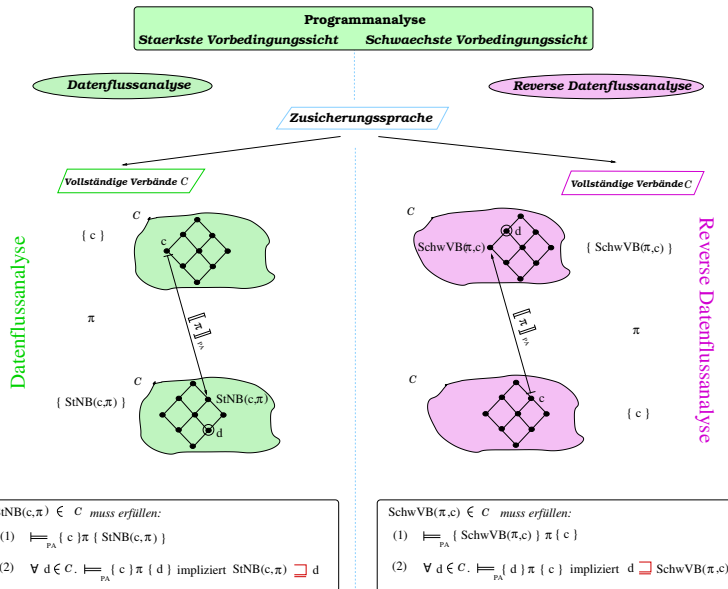
- auf die Berechnung des stärkst möglichen Datenflussfakts für jede Programmstelle.

RDFA: Reverse Datenflussanalyse zielt relativ zu einem angefragten Datenflussfakt für eine Programmstelle, dem sog. Anfrageknoten

- auf die Berechnung des schwächst möglichen Datenflussfakts für jede Programmstelle, so dass am Anfrageknoten der angefragte Datenflussfakt gültig ist.

Aus praktischer Sicht ist dabei besonders der schwächst mögliche Datenflussfakt am Startknoten wichtig.

# Zum Vergleich: DFA vs. reverse DFA



# Intuitiv, informell (1)

Die

- Vereinigung/Schnitt-über-alle-Pfade ( $RVUP/RSUP$ ) Semantiken zu einer lokalen reversen abstrakten DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket_R$

sind die reversen Gegenstücke der

- Schnitt/Vereinigung-über-alle-Pfade ( $SUP/VUP$ ) Semantiken zu einer lokalen abstrakten DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket$ .

Dabei gilt:

- $\llbracket \cdot \rrbracket_R$  wird von  $\llbracket \cdot \rrbracket$  induziert.

Ein DFA-Problem induziert somit sein reverses Gegenstück; es ist das ihm zugrundeliegende DFA-Problem.

# Intuitiv, informell (2)

Entsprechend sind die (unter geeigneten Voraussetzungen) berechenbaren

- *RMinFP*- und *RMaxFP*-Semantiken

als denotationelle Entsprechungen der operationellen reversen

- *RVUP*- und *RSUP*-Semantiken

die Gegenstücke der berechenbaren denotationellen

- *MaxFP*- und *MinFP*-Semantiken

des zugrundeliegenden induzierenden DFA-Problems.

# Kapitel 8.1

## Vorbereitung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

**8.1**

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

# DFA-Fehlschlagsverbandserweiterung

...sei  $(\hat{\mathcal{C}}, [\ ]_f, c_s)$  eine DFA-Spezifikation, *Fehlschlag* ein neues Element nicht in  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}_f =_{df} \mathcal{C} \dot{\cup} \{\text{Fehlschlag}\}$ .

## Definition 8.1.1 (Fehlschlagserweiterter DFA-Verb.)

Die *Fehlschlag*-Erweiterung von  $\hat{\mathcal{C}}$  ist der vollständige Verband  $\hat{\mathcal{C}}_f$ :

$$\hat{\mathcal{C}}_f =_{df} (\mathcal{C}_f, \sqsubseteq_f, \sqcap_f, \sqcup_f, \perp, \text{Fehlschlag})$$

mit *Fehlschlag* als größtem Element von  $\hat{\mathcal{C}}_f$  ist, d.h.:

1.  $\forall c \in \mathcal{C}_f. c \sqsubseteq_f \text{Fehlschlag}$
2.  $\forall c, c' \in \mathcal{C}. c \sqsubseteq_f c' \text{ gdw } c \sqsubseteq c'$

Beachte:

- Mit  $\sqsubseteq_f$  sind auch  $\sqcap_f$  und  $\sqcup_f$  eindeutig festgelegt.
- *Fehlschlag* repräsentiert nicht erfüllbare, nicht zusicherbare DFA-Information, um Fehlschläge von DFA-Anfragen ausdrücken zu können.

# Fehlschlagserweiterung lokaler DFA-Semantik

## Definition 8.1.2 (Fehlschlagserweiterte DFA-Sem.)

Wir legen fest:

$$\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_f =_{df} \lambda c. \begin{cases} \llbracket e \rrbracket(c) & \text{falls } c \neq \textit{Fehlschlag} \\ \textit{Fehlschlag} & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

631/169

# Erste Ergebnisse

## Lemma 8.1.3

Der Verband  $\hat{\mathcal{C}}_f$  erfüllt die **aufsteigende (absteigende) Kettenbedingung** gdw der Verband  $\hat{\mathcal{C}}$  die **aufsteigende (absteigende) Kettenbedingung** erfüllt.

## Lemma 8.1.4

1.  $\llbracket \rrbracket_f$  monoton gdw  $\llbracket \rrbracket$  monoton.
2.  $\llbracket \rrbracket_f$  distributiv gdw  $\llbracket \rrbracket$  distributiv.
3.  $\llbracket \rrbracket_f$  additiv gdw  $\llbracket \rrbracket$  additiv.



# Kapitel 8.2

## Induzierte reverse lokale DFA-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

**8.2**

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

# Induzierte reverse lokale DFA-Semantik

...sei  $(\hat{\mathcal{C}}_f, \llbracket \cdot \rrbracket_f)$  eine fehlschlagserweiterte DFA-Spezifikation (hier ohne Startzusicherung).

## Definition 8.2.1 (Reverse lokale abstrakte Semantik)

Die von  $\llbracket \cdot \rrbracket_f$  induzierte **reverse lokale abstrakte Semantik**

$$\llbracket \cdot \rrbracket_R : E \rightarrow (\mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{C}_f)$$

ist definiert durch:

$$\forall e \in E . \llbracket e \rrbracket_R(c) =_{df} \lambda c . \bigsqcap \{ c' \mid \llbracket e \rrbracket_f(c') \sqsupseteq c \}$$

**Beachte:** Die Inklusion  $\llbracket e \rrbracket_f(c') \sqsupseteq c$  bedeutet, dass  $c'$  am Eingang von  $e$  mindestens  $c$  am Ausgang von  $e$  garantiert.

# Eigenschaften von $\llbracket \cdot \rrbracket$ , $\llbracket \cdot \rrbracket_f$ und $\llbracket \cdot \rrbracket_R$

...sei  $\llbracket \cdot \rrbracket_f$  die fehlschlagserweiterte lokale abstrakte DFA-Semantik zu  $\llbracket \cdot \rrbracket$ ; sei  $\llbracket \cdot \rrbracket_R$  die induzierte reverse DFA-Semantik.

## Lemma 8.2.2

1.  $\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_R$  ist wohldefiniert und monoton.
2.  $\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_R$  ist additiv, falls  $\llbracket e \rrbracket_f$  distributiv ist.

## Lemma 8.2.3

1.  $\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_R \circ \llbracket e \rrbracket_f \sqsubseteq Id_{C_f}$ , falls  $\llbracket e \rrbracket$  monoton ist.
2.  $\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_f \circ \llbracket e \rrbracket_R \sqsupseteq Id_{C_f}$ , falls  $\llbracket e \rrbracket$  distributiv ist.

...in der Sprechweise der Theorie 'Abstrakter Interpretation':

- $\llbracket e \rrbracket_f$  und  $\llbracket e \rrbracket_R$  bilden eine **Galois-Verbindung** (cf. Kap. 15.2.1).

# Kapitel 8.3

## Reverse DFA-Spezifikation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

**8.3**

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

# Sichtbarmachung von DFA-Anfrageknoten

...sei  $G' = (N', E', s', e')$  ein Flussgraph und  $q \in N'$  der **Anfrageknoten** (engl. **query node**), für den eine **Datenflussanfrage** (engl. **query**) gestellt werden soll.

Für die Formulierung **reverser Datenflussanalyse** ersetzen wir  $G' = (N', E', s', e')$  durch einen Graphen  $G = (N, E, s, e)$ , in dem der **Anfrageknoten** explizit dargestellt ist, wo modellierungstechnisch nötig.

Wir legen fest: Ist  $q$

- $s'$  oder  $e'$ , so sind  $G$  und  $G'$  identisch.
- verschieden von  $s'$  und  $e'$ , so entsteht  $G$  aus  $G'$  dadurch, dass  $N'$  um eine Kopie  $\mathbf{q}$  von  $q$  erweitert wird, so dass  $\mathbf{q}$  dieselben Vorgänger besitzt wie  $q$ , aber keine Nachfolger, d.h.  $\text{pred}(\mathbf{q}) = \text{pred}(q)$  und  $\text{succ}(\mathbf{q}) = \emptyset$ .

# Es gilt

...die Hinzunahme von  $\mathbf{q}$  hat keinen Einfluss auf die

- $SUPP/MaxFP$ -Semantik
- $VUP/MinFP$ -Semantik

irgendeines der ursprünglichen Knoten von  $G'$  (s. [Korollar 8.3.2\(1\)](#)).

Für  $\mathbf{q}$  und  $q$  stimmen die

- $SUP$ -Semantik
- $VUP$ -Semantik

jeweils überein (s. [Korollar 8.3.2\(2\)](#)). Für die zugehörigen Fixpunktsemantiken ( $MaxFP$ ,  $MinFP$ ) gilt dies nicht.

[Lemma 8.3.1](#) und [Korollar 8.3.2](#) fassen das zusammen.

# DFA-Zusammenhang von $G'$ und $G$

## Lemma 8.3.1

1.  $\forall n \in N \setminus \{\mathbf{q}\}. \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, n] = \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n]$
2.  $\forall q \in N' \setminus \{\mathbf{s}, \mathbf{e}\}. \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, q] = \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, q] = \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, \mathbf{q}]$

## Korollar 8.3.2

1.  $\forall n \in N \setminus \{\mathbf{q}\}. \llbracket n \rrbracket_{S_{G'}}^X = \llbracket n \rrbracket_{S_G}^X$
2.  $\forall q \in N' \setminus \{\mathbf{s}, \mathbf{e}\}. \llbracket q \rrbracket_{S_{G'}}^Y = \llbracket q \rrbracket_{S_G}^Y = \llbracket \mathbf{q} \rrbracket_{S_G}^Y$

mit  $X \in \{SUP, MaxFP, VUP, MinFP\}$ ,  $Y \in \{SUP, VUP\}$ .

...wobei  $\mathbf{q} \in N$  die zum Anfrageknoten  $q \in N'$  gehörige Kopie bezeichnet mit  $pred_G(\mathbf{q}) = pred_{G'}(q)$  und  $succ_G(\mathbf{q}) = \emptyset$ .

# Reverse DFA-Spezifikation und -Problem

...mit den vorherigen Festlegungen und Beobachtungen können wir definieren:

## Definition 8.3.3 (Reverse DFA-Spezifikation)

Eine **reverse DFA-Spezifikation** zu einer DFA-Spezifikation  $(\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \rrbracket)$  ist ein Tripel  $(\hat{\mathcal{C}}_f, \llbracket \rrbracket_R, c_q)$  mit

- $\hat{\mathcal{C}}_f =_{df} (\mathcal{C}_f, \sqsubseteq_f, \sqcap_f, \sqcup_f, \perp, \text{Fehlschlag})$  DFA-Verbandserweiterung zu  $\hat{\mathcal{C}}$  (gemäß Definition 8.1.1).
- $\llbracket \rrbracket_R : E \rightarrow (\mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{C}_f)$  induzierte **reverse lokale DFA-Semantik** (gemäß Definition 8.2.1).
- $c_q \in \mathcal{C}$  eine **DFA-Anfrage**.

## Definition 8.3.4 (Reverses DFA-Problem)

Eine reverse DFA-Spezifikation legt ein **reverses DFA-Problem** fest.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11



# Kapitel 8.4

## Reverse operationelle globale DFA-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

**8.4**

8.4.1

8.4.2

8.4.3

8.4.4

8.5

8.6

8.7

# Kapitel 8.4.1

## Reverse Aufsammlensemantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

**8.4.1**

8.4.2

8.4.3

8.4.4

8.5

8.6

8.7

642/169

# Ausdehnung von $\llbracket \cdot \rrbracket_R$ von Kanten auf Pfade

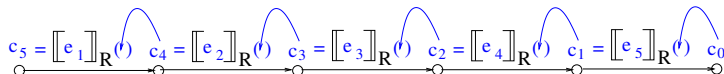
Sei  $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\hat{C}_f, \llbracket \cdot \rrbracket_R, c_q)$  eine reverse DFA-Spezifikation.

## Definition 8.4.1.1 (Pfadausdehnung von $\llbracket \cdot \rrbracket_R$ )

Die Ausdehnung einer reversen (lokalen) DFA-Semantik auf Pfade  $p = \langle e_1, \dots, e_{q-1}, e_q \rangle$  ist definiert durch:

$$\llbracket p \rrbracket_R =_{df} \begin{cases} Id_C & \text{falls } \lambda_p < 1 \\ \llbracket \langle e_1, \dots, e_{q-1} \rangle \rrbracket_R \circ \llbracket e_q \rrbracket_R & \text{sonst} \end{cases}$$

Veranschaulichung der Ausdehnung von  $\llbracket \cdot \rrbracket_R$  auf Pfade:



**Beachte:** Die Pfadausdehnung bedeutet einen Rückwärtsdurchlauf von Pfad  $p$ .

# Reverse Aufsammlersemantik

Sei  $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\hat{\mathcal{C}}_f, \llbracket \cdot \rrbracket_R, c_q)$  eine reverse DFA-Spezifikation.

## Definition 8.4.1.2 (Reverse Aufsammlersemantik)

Die von  $\mathcal{S}_G^R$  induzierte (nichtdeterministische) **reverse Aufsammlersemantik** (oder **globale abstrakte reverse Semantik**) ist definiert durch:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RAS} : N \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}_f)$$

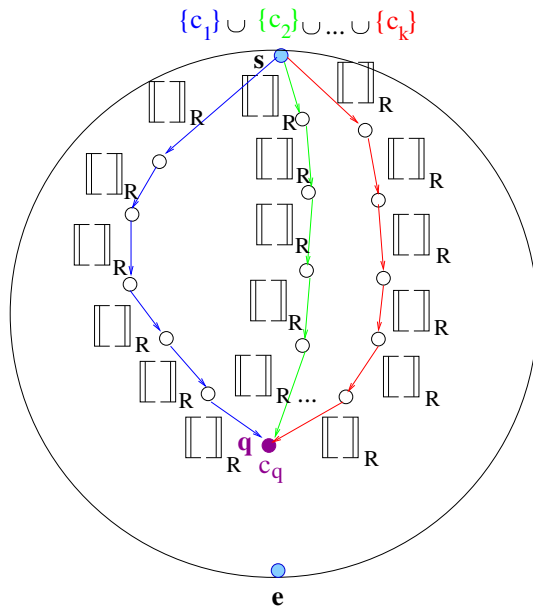
$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RAS} =_{df} \lambda n. \{ \llbracket p \rrbracket_R(c_q) \mid p \in \mathbf{P}[n, \mathbf{q}] \}$$

wobei  $\mathcal{P}$  den Potenzmengenoperator bezeichnet.

Beachte:

$$\llbracket \mathbf{q} \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RAS} = \{c_q\}$$

# Illustration der reversen Aufsammlungsemantik



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

**8.4.1**

8.4.2

8.4.3

8.4.4

8.5

8.6

8.7

# Kapitel 8.4.2

## Reverse Vereinigung-über-alle-Pfade-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.4.1

**8.4.2**

8.4.3

8.4.4

8.5

8.6

8.7

646/169

# Die *RVUP*-Semantik

Sei  $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\hat{\mathcal{C}}_f, \llbracket \cdot \rrbracket_R, c_q)$  eine reverse DFA-Spezifikation.

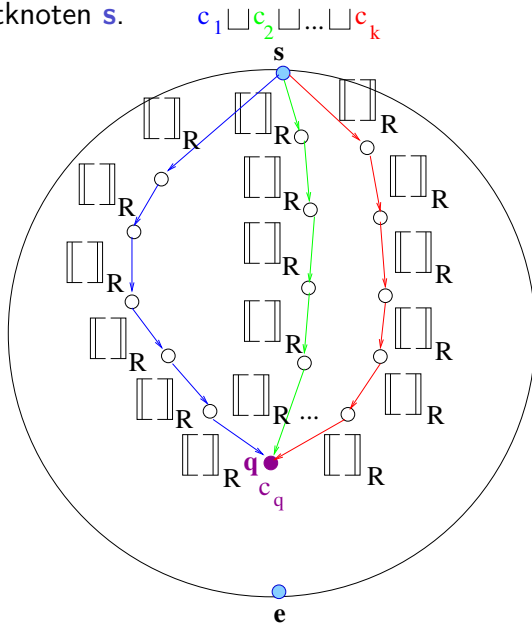
## Definition 8.4.2.1 (*RVUP*-Semantik)

Die (deterministische) *RVUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RVUP} &: N \rightarrow \mathcal{C}_f \\ \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RVUP} &=_{df} \lambda n. \bigsqcup \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RAS} \\ &= \lambda n. \bigsqcup \{ \llbracket p \rrbracket_R(c_q) \mid p \in \mathbf{P}[n, \mathbf{q}] \} \end{aligned}$$

# Veranschaulichung der *RVUP*-Semantik

...am Startknoten  $s$ .



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.4.1

**8.4.2**

8.4.3

8.4.4

8.5

8.6

8.7



# Kapitel 8.4.3

## Reverse Schnitt-über-alle-Pfade-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.4.1

8.4.2

**8.4.3**

8.4.4

8.5

8.6

8.7

# Die *RSUP*-Semantik

Sei  $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\hat{\mathcal{C}}_f, \llbracket \cdot \rrbracket_R, c_q)$  eine reverse DFA-Spezifikation.

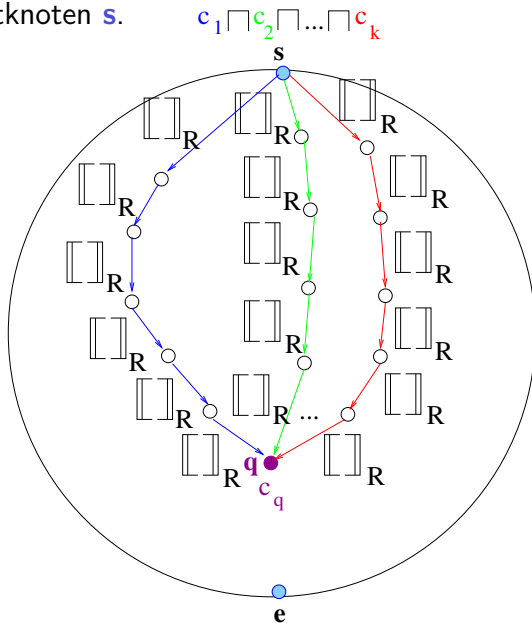
## Definition 8.4.3.1 (*RSUP*-Semantik)

Die (deterministische) *RSUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RSUP} &: N \rightarrow \mathcal{C}_f \\ \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMOP} &=_{df} \lambda n. \bigsqcup \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RAS} \\ &= \lambda n. \bigsqcup \{ \llbracket p \rrbracket_R(c_q) \mid p \in \mathbf{P}[n, \mathbf{q}] \} \end{aligned}$$

# Veranschaulichung der *RSUP*-Semantik

...am Startknoten **s**.



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.4.1

8.4.2

**8.4.3**

8.4.4

8.5

8.6

8.7

## Kapitel 8.4.4

*RVUP*- und *RSUP*-Semantik als spezifizierende Lösungen reverser DFA-Probleme

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.4.1

8.4.2

8.4.3

**8.4.4**

8.5

8.6

8.7

# Spezifizierende Lösungen reverser DFA-Prob.

...nach dem Vorbild der *SUP*- und *VUP*-Semantik für DFA-Probleme definieren wir:

## Definition 8.4.4.1 (Spezifizierende Lsg. v. RDFA-P.)

Die *RVUP*- und *RSUP*-Semantik eines Flussgraphen definieren die spezifizierenden Lösungen eines reversen DFA-Problems, seine sog. *RVUP*- und *RSUP*-Lösungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.4.1

8.4.2

8.4.3

**8.4.4**

8.5

8.6

8.7

653/169

# Kapitel 8.5

## Reverse denotationelle globale DFA-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

**8.5**

8.5.1

8.5.2

8.6

8.7

8.8

8.9

# Kapitel 8.5.1

## Reverse minimale Fixpunktsemantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

**8.5.1**

8.5.2

8.6

8.7

8.8

8.9

# Reverser minimaler (*RMinFP*) Fixpunktansatz

Sei  $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\hat{\mathcal{C}}_f, \llbracket \cdot \rrbracket_R, c_q)$  eine reverse DFA-Spezifikation.

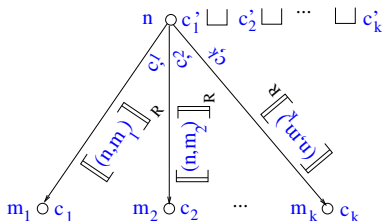
## Gleichungssystem 8.5.1.1 (*RMinFP*-Ansatz)

$reqInf(n) =$

$$\begin{cases} c_q & \text{falls } n = q \\ \bigsqcup \{ \llbracket (n, m) \rrbracket_R(reqInf(m)) \mid m \in succ(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

(*reqInf* steht für 'required information')

Illustration des *RMinFP*-Ansatzes ( $n \neq e$ ):





# The *RMinFP*-Semantik

Bezeichne

$$- \mu\text{-reqInf}_{c_q}(n), \quad n \in N$$

die kleinste Lösung von Gleichungssystem 8.5.1.1.

## Definition 8.5.1.2 (*RMinFP*-Semantik)

Die *RMinFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMinFP} &: N \rightarrow \mathcal{C}_f \\ \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMinFP} &=_{df} \lambda n. \mu\text{-reqInf}_{c_q}(n) \end{aligned}$$

Beachte:

$$\llbracket \mathbf{q} \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMinFP} = c_q$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.5.1

8.5.2

8.6

8.7

8.8

8.9

# Kapitel 8.5.2

## Reverse maximale Fixpunktsemantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.5.1

**8.5.2**

8.6

8.7

8.8

8.9

# Reverser maximaler (*RMaxFP*) Fixpunktansatz

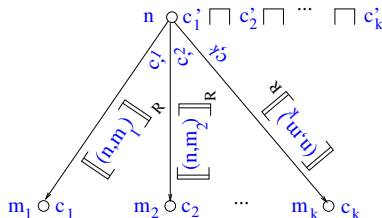
Sei  $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\hat{C}_f, \llbracket \cdot \rrbracket_R, c_q)$  eine reverse DFA-Spezifikation.

## Gleichungssystem 8.5.2.1 (*RMaxFP*-Ansatz)

$reqInf(n) =$

$$\begin{cases} c_q & \text{falls } n = \mathbf{q} \\ \bigsqcup \{ \llbracket (n, m) \rrbracket_R(reqInf(m)) \mid m \in succ(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Illustration des *RMaxFP*-Ansatzes ( $n \neq \mathbf{e}$ ):



# The *RMaxFP*-Semantik

Bezeichne

$$- \nu\text{-reqInf}_{c_q}(n), \quad n \in N$$

die größte Lösung von Gleichungssystem 8.5.2.1.

## Definition 8.5.2.2 (*RMaxFP*-Semantik)

Die *RMaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMaxFP} : N &\rightarrow \mathcal{C}_f \\ \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMaxFP} &=_{df} \lambda n. \nu\text{-reqInf}_{c_q}(n) \end{aligned}$$

Beachte:

$$\llbracket \mathbf{q} \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMaxFP} = c_q$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.5.1

8.5.2

8.6

8.7

8.8

8.9

# Kapitel 8.6

## Generischer reverser Fixpunktalgorithmus

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

**8.6**

8.6.1

8.6.2

8.7

8.8

8.9

# Die *RMinFP*- und *RMaxFP*-Semantik

...sind praktisch relevant, weil das *RMinFP*-Gleichungssystem 8.5.1.1 und das *RMaxFP*-Gleichungssystem 8.5.2.1 ein generisches

- iteratives Berechnungsverfahren ([Algorithmus 8.6.1.1](#))

induzieren, das ihre kleinste und größte Lösung zu approximieren erlaubt und damit die *RMinFP*- und *RMaxFP*-Semantik.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

**8.6**

8.6.1

8.6.2

8.7

8.8

8.9

# Kapitel 8.6.1

## Algorithmus

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

**8.6.1**

8.6.2

8.7

8.8

8.9

# Gen. reverser Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1 (1)

**Eingabe:** Reverse DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\hat{C}_f, \llbracket \rrbracket_R, c_q)$ .

**Ausgabe:** Bei Terminierung des Algorithmus (s. Terminierungstheorem 8.6.2.1) enthält die Variable  $reqInf[n]$  die *RMinFP-Lösung* von  $\mathcal{S}_G^R$  am Knoten  $n$ .

Zusätzlich (s. Reverses Sicherheitstheorem 8.7.1 und Reverses Koinzidenztheorem 8.7.2) gilt: Wenn  $\llbracket \rrbracket_R$

- additiv:  $reqInf[s]$  enthält die
- monoton:  $reqInf[s]$  enthält eine obere Approximation der der *RVUP-Lösung* von  $\mathcal{S}_G^R$  am Knoten  $n$ .

**Bemerkung:** Die Variable *workset* steuert die iterative Berechnung. Ihre Elemente sind Flussgraphknoten, deren Annotation jüngst aktualisiert worden ist, was ihrerseits Aktualisierungen und damit verbandsmäßig größere Annotationen an ihren Vorgängerknoten zur Folge haben kann.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.6.1

8.6.2

8.7

8.8

8.9



# Gen. reverser Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1 (2)

( Prolog: Initialisierung von *reqInf* und *workset* )

FORALL  $n \in N \setminus \{\mathbf{q}\}$  DO  $reqInf[n] := \perp$  OD;

$reqInf[\mathbf{q}] := c_q$ ;

$workset := \{N\}$ ;

( Hauptschleife: Iterative Fixpunktberechnung )

WHILE  $workset \neq \emptyset$  DO

    CHOOSE  $m \in workset$ ;

$workset := workset \setminus \{m\}$ ;

    ( Aktualisierung d. Vorgängerumgebung von Knoten  $m$  )

    FORALL  $n \in pred(m)$  DO

$join := \llbracket (n, m) \rrbracket_R(reqInf[m]) \sqcup_f reqInf[n]$ ;

        IF  $reqInf[n] \sqsubset_f join$

            THEN

$reqInf[n] := join$ ;

$workset := workset \cup \{n\}$  FI

    OD ESOOHC OD.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.6.1

8.6.2

8.7

8.8

8.9

# Kapitel 8.6.2

## Terminierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.6.1

**8.6.2**

8.7

8.8

8.9

# Terminierung

...mit Lemma 8.2.2(1) (“die von einer lokalen DFA-Semantik induzierten reversen Semantikfkt. sind **monoton**”) erhalten wir:

## Theorem 8.6.2.1 (Terminierung)

Der generische reverse Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1 terminiert mit der

1. *RMinFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$ , wenn  $\widehat{\mathcal{C}}_f$  die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt.
2. *RMaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$ , wenn  $\widehat{\mathcal{C}}_f^{gst}$  die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt, wobei

$$\widehat{\mathcal{C}}_f^{gst} =_{df} (\mathcal{C}_f, \sqcup_f, \sqcap_f, \sqsupseteq_f, \textit{Fehlschlag}, \perp_f)$$

der gestürzte auf den Kopf gestellte Verband

$$\widehat{\mathcal{C}}_f = (\mathcal{C}_f, \sqcap_f, \sqcup_f, \sqsubseteq_f, \perp_f, \textit{Fehlschlag})$$

ist.

# Terminierungskorollar

...mit [Lemma 8.1.3](#) (“der fehlschlagserweiterte DFA-Verband  $\hat{\mathcal{C}}_f$  von  $\mathcal{S}_G^R$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung gdw der zugrundeliegende DFA-Verband  $\hat{\mathcal{C}}$  von  $\mathcal{S}_G$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung”) können wir die verbleibende Voraussetzung von [Theorem 8.6.2.1](#) auf die entsprechende Eigenschaft des Ursprungsproblems zurückführen:

## Korollar 8.6.2.2 (Terminierung)

Der [generische reverse Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1](#) terminiert mit der [RMinFP-Semantik](#) ([RMaxFP-Semantik](#)) von  $\mathcal{S}_G^R$ , wenn  $\hat{\mathcal{C}}$  ( $\widehat{\mathcal{C}^{gst}}$ ) die [aufsteigende Kettenbedingung](#) erfüllt, wobei  $\widehat{\mathcal{C}^{gst}}$  der gestürzte auf den Kopf gestellte Verband  $\hat{\mathcal{C}}$  ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.6.1

8.6.2

8.7

8.8

8.9

668/169

# Berechenbare Lösungen eines RDFA-Problems

...zusammen legen der generische reverse Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1 und das Terminierungstheorem 8.6.2.1 folgende Definition nahe:

## Definition 8.6.2.3 (Berechenbare RDFA-Lösungen)

Die *RMinFP*- und *RMaxFP*-Semantik eines Flussgraphen definieren die berechenbaren Lösungen eines reversen DFA-Problems, seine sog. *RMinFP*- und *RMaxFP*-Lösungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.6.1

8.6.2

8.7

8.8

8.9

669/169

# Kapitel 8.7

## Reverse Sicherheit und Koinzidenz

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

**8.7**

8.8

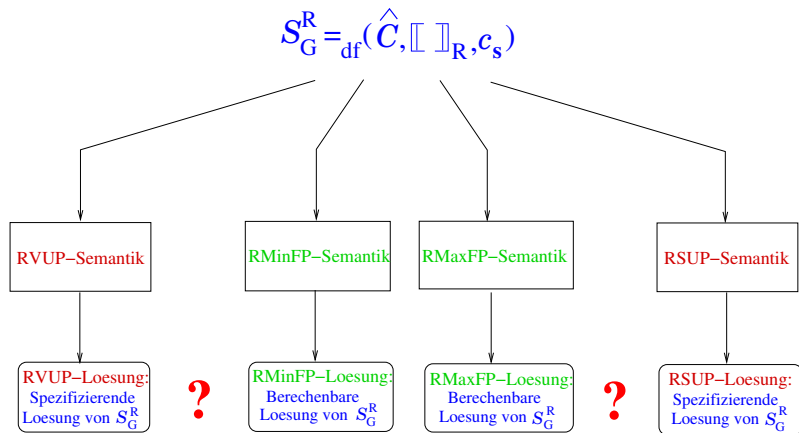
8.9

8.10

8.11

# RVUP / RMinFP- u. RSUP / RMaxFP-Semantik

...und die Frage nach ihrer Beziehung:



# Reverse Sicherheit

Sei  $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\hat{\mathcal{C}}_f, \llbracket \cdot \rrbracket_R, c_q)$  eine reverse DFA-Spezifikation.

...mit Lemma 8.2.2(1) ("die von einer lokalen DFA-Semantik induzierten reversen Semantikfkt. sind **monoton**") erhalten wir:

## Theorem 8.7.1 (Reverse Sicherheit)

1. Die *RMinFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  ist eine **sichere** (d.h. obere) Approximation der *RVUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$ , d.h.:

$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMinFP} \supseteq \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RVUP}$$

2. Die *RMaxFP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  ist eine **sichere** (d.h. untere) Approximation der *RSUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$ , d.h.:

$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMaxFP} \sqsubseteq \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RSUP}$$



# Reverse Koinzidenz

Sei  $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\hat{C}_f, \llbracket \cdot \rrbracket_R, c_q)$  eine reverse DFA-Spezifikation.

## Theorem 8.7.2 (Reverse Koinzidenz)

1. Die *RMinFP*- und *RVUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  stimmen überein, d.h.:

$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMinFP} = \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RVUP}$$

2. Die *RMaxFP*- und *RSUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  stimmen überein, d.h.:

$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMaxFP} = \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RSUP}$$

wenn die reverse DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket_R$  *additiv* bzw. *distributiv* ist.

# Reverses Koinzidenzkorollar

...mit Lemma 7.1.2.7(1) und 8.1.4 (“ $\llbracket \cdot \rrbracket_R$  ist distributiv/additiv, wenn  $\llbracket \cdot \rrbracket$  distributiv ist”) können wir die verbleibenden Voraussetzungen von Theorem 8.7.2 auf eine einzige Eigenschaft des induzierenden Ursprungsproblems zurückführen:

## Korollar 8.7.3 (Reverse Koinzidenz)

1. Die *RMinFP*- und *RVUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  stimmen überein, d.h.:

$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMinFP} = \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RVUP}$$

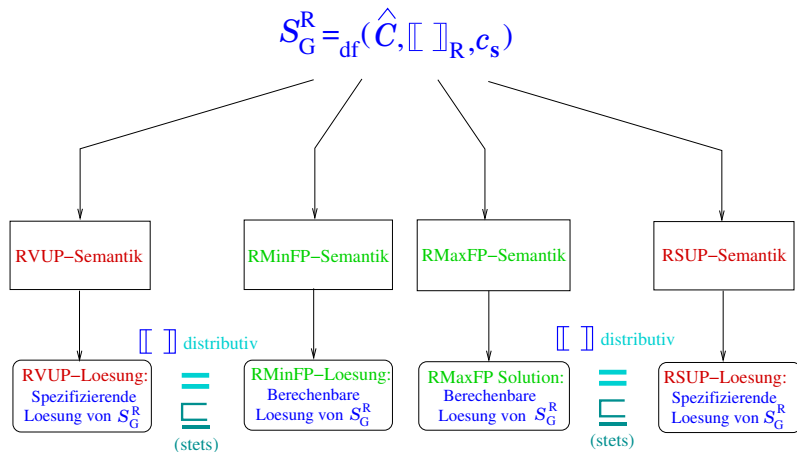
2. Die *RMaxFP*- und *RSUP*-Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$  stimmen überein, d.h.:

$$\forall n \in N. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RMaxFP} = \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R}^{RSUP}$$

wenn die lokale DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket$  der induzierenden DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G$  distributiv ist.

# RVUP / RMinFP- u. RSUP / RMaxFP-Semantik

...und die Antwort nach ihre Beziehung:



# Konservativität von Algorithm 8.6.1.1

...mit Lemma 8.1.3 und Theorem 8.7.1 erhalten wir:

## Korollar 8.7.4 (*RVUP*/*RSUP*-Konservativität)

Algorithmus 8.6.1.1 ist

- *RVUP*- (*RSUP*-) konservativ

für  $\mathcal{S}_G^R$ , d.h. terminiert mit einer oberen (unteren) Approximation der *RVUP*- (*RSUP*-) Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$ , wenn der Verband  $\hat{\mathcal{C}}$  der induzierenden DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G$  (und damit auch  $\hat{\mathcal{C}}_f$ ) die aufsteigende (absteigende) Kettenbedingung erfüllt.

# Straffheit von Algorithm 8.6.1.1

...Straffheit (engl. *tightness*).

## Korollar 8.7.5 (*RVUP* / *RSUP*-Straffheit)

Algorithmus 8.6.1.1 ist

– *RVUP*- (*RSUP*-) straff

für  $\mathcal{S}_G^R$ , d.h. terminiert mit der *RVUP*- (*RSUP*-) Semantik von  $\mathcal{S}_G^R$ , wenn für die induzierende DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G$  gilt:

1.  $\llbracket \cdot \rrbracket$  ist distributiv.
2.  $\hat{\mathcal{C}}$  erfüllt die aufsteigende (absteigende) Kettenbedingung.

**Beachte:** Distributivität von  $\llbracket \cdot \rrbracket$  (und deshalb auch von  $\llbracket \cdot \rrbracket_f$ ) impliziert Additivität von  $\llbracket \cdot \rrbracket_R$  (siehe Lemma 7.1.2.7(1) und 8.1.4(2)). Somit sind Distributivität und Additivität von  $\llbracket \cdot \rrbracket_R$  implizit in Korollar 8.7.5 gefordert, werden aber auf die Distributivitätseigenschaft des Ursprungsproblems zurückgeführt.

# Kapitel 8.8

## Zusammenhang, Rückführbarkeit von DFA auf RDFA

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

**8.8**

8.8.1

8.8.2

8.9

678/169

# Analyseszenario

..sei

- $\phi$  die interessierende Programmeigenschaft (z.B., **Verfügbarkeit eines Terms**, **Lebendigkeit einer Variablen**, etc.).
- $\mathcal{S}_G^\phi$  eine DFA-Spezifikation für  $\phi$ .
- $\mathcal{S}_G^{\phi^R}$  die von  $\mathcal{S}_G^\phi$  induzierte reverse DFA-Spezifikation.
- $c_s$  eine Startzusicherung.
- $c_q$  eine DFA-Anfrage.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.8.1

8.8.2

8.9

679/169

# Kapitel 8.8.1

Korrektheit, Vollständigkeit reverser DFA  
bzgl. induzierender DFA

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

**8.8.1**

8.8.2

8.9

680/169



# Korrektheit und Vollständigkeit

## Definition 8.8.1.1 (Korrektheit)

$\mathcal{S}_G^{\phi R}$  ist

1. **RVUP-korrekt** für  $\mathcal{S}_G^{\phi}$ , wenn für alle  $c_q$  gilt:

$$\llbracket \mathbf{s} \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R, c_q}^{RVUP} \sqsubseteq c \Rightarrow \llbracket q \rrbracket_{\mathcal{S}_G, c}^{SUP} \sqsupseteq c_q.$$

2. **RSUP-korrekt** für  $\mathcal{S}_G^{\phi}$ , wenn für alle  $c_q$  gilt:

$$\llbracket \mathbf{s} \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R, c_q}^{RSUP} \sqsubseteq c \Rightarrow \llbracket q \rrbracket_{\mathcal{S}_G, c}^{VUP} \sqsupseteq c_q.$$

## Definition 8.8.1.2 (Vollständigkeit)

$\mathcal{S}_G^{\phi R}$  ist

1. **RVUP-vollständig** für  $\mathcal{S}_G^{\phi}$ , wenn für alle  $c_s$  gilt:

$$\llbracket q \rrbracket_{\mathcal{S}_G, c_s}^{SUP} \sqsupseteq c \Rightarrow \llbracket \mathbf{s} \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R, c}^{RVUP} \sqsubseteq c_s.$$

2. **RSUP-vollständig** für  $\mathcal{S}_G^{\phi}$ , wenn für alle  $c_s$  gilt:

$$\llbracket q \rrbracket_{\mathcal{S}_G, c_s}^{VUP} \sqsupseteq c \Rightarrow \llbracket \mathbf{s} \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R, c}^{RSUP} \sqsubseteq c_s.$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.8.1

8.8.2

8.9

681/169

# Kapitel 8.8.2

## Distributives Verbindungstheorem

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.8.1

**8.8.2**

8.9

682/169

# Zshg. von reverser DFA u. induzierender DFA

...für **distributive** DFA-Probleme.

## Theorem 8.8.2.1 (Distributives Verbindungstheor.)

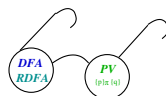
Sei  $\mathcal{S}_G$  eine DFA-Spezifikation mit **distributiver** lokaler DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket$ . Dann gilt für alle Startzusicherungen  $c_s \in \mathcal{C}$  und DFA-Anfragen  $c_q \in \mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} \llbracket q \rrbracket_{\mathcal{S}_G, c_s}^{MaxFP} &= \llbracket q \rrbracket_{\mathcal{S}_G, c_s}^{SUP} \supseteq c_q \\ &\iff \\ \llbracket s \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R, c_q}^{RMinFP} &= \llbracket s \rrbracket_{\mathcal{S}_G^R, c_q}^{RVUP} \sqsubseteq c_s \end{aligned}$$

**Informell:** Wir wissen am Programmpunkt  $q$  bezüglich der Startzusicherung  $c_s$  mindestens Datenflussfakt  $c_q$  (obere Zeile), wenn wir für die Gültigkeit von Datenflussfakt  $c_q$  am Programmpunkt  $q$  höchstens die Startzusicherung  $c_s$  am Startknoten  $s$  fordern müssen (untere Zeile) und umgekehrt; vgl. hierzu auch den Akjunktionsbegriff aus **Definition 15.2.1.9**.

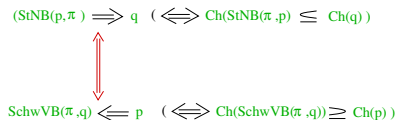
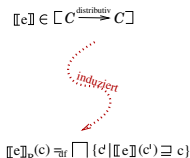
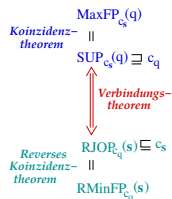
# Zusammenhangsveranschaulichung

...von reverser und induzierender DFA (distributiver Fall) sowie  
Analogie zu axiomatischer Programmverifikation:



## Datenflussanalyse

## Programmverifikation



## Reverse Datenflussanalyse

$$\vdash \langle c_s \rangle P[s, q] \langle c_q \rangle \iff \text{SUP}_{c_s}(q) \supseteq c_q \wedge \text{RVUP}_{c_q}(s) \sqsubseteq c_s \quad \vdash \{p\} \pi \{q\} \iff (\text{StNB}(p, \pi) \Rightarrow q) \wedge \text{SchwVB}(\pi, q) \Leftarrow p$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.8.1

8.8.2

8.9

# Zusammenfassung

...für distributive DFA-Probleme  $\mathcal{S}_G^\phi$  liefert das **Distributive Zusammenhangstheorem 8.8.2.1**, dass das induzierte reverse DFA-Problem  $\mathcal{S}_G^{\phi^R}$  korrekt und vollständig für  $\mathcal{S}_G^\phi$  im Sinn von **Definition 8.8.1.1** und **8.8.1.2** ist.

Somit:

...ist  $\mathcal{S}_G^\phi$  korrekt und vollständig für  $\phi$  im Sinn von **Definition 7.8.1** und **7.8.2** (und somit distributiv), so kann eine **MaxFP**-Analyse auf entsprechende (wiederholte) **RMinFP**-Analysen zurückgeführt und (und für Bitvektorprobleme) dadurch ersetzt werden; darauf beruht die Korrektheit **anforderungsgetriebener** Datenflussanalyse auf Grundlage **reverser** Datenflussanalyse (s. **Kapitel 8.9.4**).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.8.1

8.8.2

8.9

685/169

# Übungsaufgabe 8.8.2.2

Was gilt für den Zusammenhang von *MinFP-/VUP-Semantik* einer DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G$  mit *distributiver lokaler DFA-Semantik*  $\llbracket \cdot \rrbracket$  und der von ihr induzierten *RMaxFP-/RSUP-Semantik* des zugehörigen reversen DFA-Problems?

Beweisen Sie Ihre Behauptung(en).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.8.1

8.8.2

8.9

686/169

# Übungsaufgabe 8.8.2.3

Was gilt für

1. Korrektheit und Vollständigkeit im Sinn von Definition 8.8.1.1 und 8.8.1.2 für das induzierte reverse DFA-Problem  $\mathcal{S}_G^{\phi^R}$  eines monotonen, aber nicht distributiven DFA-Problems  $\mathcal{S}_G^{\phi}$ ?
2. Was gilt für die Rückführbarkeit der Datenflussanalyse für monotone, aber nicht distributive DFA-Probleme auf anforderungsgetriebene Datenflussanalyse auf Grundlage reverser Datenflussanalyse?

Beweisen Sie Ihre Behauptung(en).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.8.1

8.8.2

8.9

687/169

# Kapitel 8.9

## RDFA-Anwendungsbeispiele

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

**8.9**

8.9.1

8.9.2



# Reverse Datenflussanalyse

...hat eine Vielzahl von Anwendungen, darunter

- anforderungsgetriebene Datenflussanalyse (engl. demand-driven data-flow analysis)

oder den Bau von

- 'Hot Spot'-Programmanalysatoren und -optimierern
- Fehlersuchern (engl. Debugger)
- ...

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.9.1

8.9.2

# Kapitel 8.9.1

## Verfügbare Ausdrücke

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

**8.9.1**

8.9.2

# Verfügbarkeit: Reverse DFA-Spezifikation

...reverse Verfügbarkeit für einen einzelnen Term  $t$ .

Reverse DFA-Spezifikation für Verfügbarkeit:

## 1. DFA-Verband:

$$(\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top) =_{df} (\mathbb{B}_f, \wedge_f, \vee_f, \leq_f, \mathbf{falsch}, \mathbf{Fehlschlag})$$

mit  $\mathbf{falsch} \leq_f \mathbf{wahr} \leq_f \mathbf{Fehlschlag}$ .

## 2. Reverse DFA-Semantik:

$\llbracket \cdot \rrbracket_{av_R}^t : e \rightarrow (\mathbb{B}_f \rightarrow \mathbb{B}_f)$  definiert durch

$$\forall e \in e. \llbracket e \rrbracket_{av_R}^t =_{df} \lambda b. \sqcap \{ b' \in \mathbb{B}_f \mid \llbracket e \rrbracket_{av,f}^t(b') \geq_f b \}$$

wobei  $\llbracket e \rrbracket_{av,f}^t : E \rightarrow (\mathbb{B}_f \rightarrow \mathbb{B}_f)$  die Ausdehnung der lokalen DFA-Semantik  $\llbracket e \rrbracket_{av}^t : E \rightarrow (\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B})$  von Variante 1 aus Kapitel 7.10.1 von  $\mathbb{B}$  auf  $\mathbb{B}_f$  gemäß Definition 8.1.2 ist (der Index  $av$  erinnert an *available*).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.9.1

8.9.2

691/169

# Charakterisierung der rev. DFA-Semantikfkt.

...mit Hilfe der Funktionen  $Cst_{\text{wahr}}^R$ ,  $Cst_{\text{falsch}}^R$  und  $Id_{\text{IB}_f}^R$  über  $\text{IB}_f =_{df} \{\text{falsch}, \text{wahr}, \text{Fehlschlag}\}$ , die definiert sind durch:

$$Cst_{\text{wahr}}^R =_{df} \lambda b. \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } b \in \text{IB} \\ \text{Fehlschlag} & \text{sonst (d.h. } b = \text{Fehlschlag)} \end{cases}$$

$$Cst_{\text{falsch}}^R =_{df} \lambda b. \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } b = \text{falsch} \\ \text{Fehlschlag} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Id_{\text{IB}_f}^R =_{df} \lambda b. b$$

...können wir die induzierten reversen DFA-Semantikfunktionen  $\llbracket e \rrbracket_{av_R}^t(b)$ ,  $e \in E$ , direkt charakterisieren.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.9.1

8.9.2

692/169

# Charakterisierungslemma

## Charakterisierungslemma 8.9.1.1

$$\forall e \in E. \llbracket e \rrbracket_{av_R}^t = \begin{cases} Cst_{\text{wahr}}^R & \text{falls } \llbracket e \rrbracket_{av}^t = Cst_{\text{wahr}} \\ Id_{\text{IB}_f}^R & \text{falls } \llbracket e \rrbracket_{av}^t = Id_{\text{IB}} \\ Cst_{\text{falsch}}^R & \text{falls } \llbracket e \rrbracket_{av}^t = Cst_{\text{falsch}} \end{cases}$$

wobei  $\llbracket e \rrbracket_{av}^t : E \rightarrow (\text{IB} \rightarrow \text{IB})$  die lokale DFA-Semantik von Variante 1 aus Kapitel 7.10.1 ist.

# Kapitel 8.9.2

## ‘Hot Spot’-Analysatoren, -optimierer

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

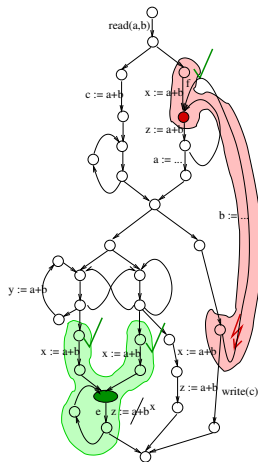
8.9.1

**8.9.2**




694/169

# 'Hot Spot'-Analysatoren und -optimierer

...fokussieren Analyse und Optimierung auf 'interessante' Programmstellen:



## 'Hot Spot'-Optimierer

Programmpunkt  ✓  
erfüllt die Eigen-  
schaft **available**,  
Punkt  jedoch nicht! 

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

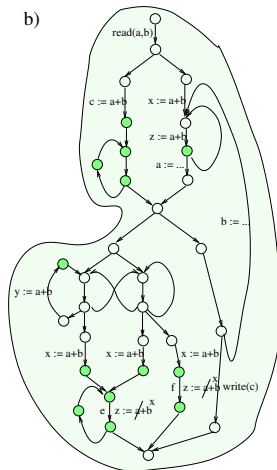
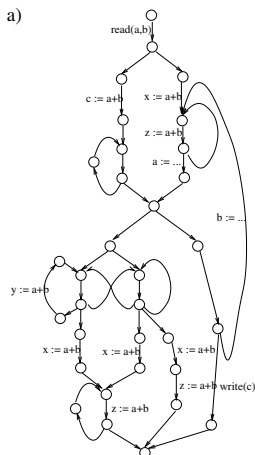
8.9.1

8.9.2

695/169

# Zum Vergleich: Standardanalysatoren/-opt.

...betrachten stets das ganze Programm, auch 'nicht interessante' Teile:





# Kapitel 8.9.3

## Fehlersucher

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

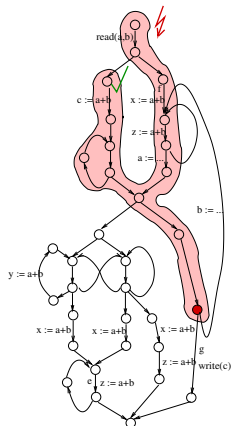
8.9

8.9.1

8.9.2

# Fehlersucher

...z.B. zur Erkennung uninitialisierter Variablen (praktisch relevant: Leerzeiger-Referenzen (engl. null pointer references)):



## Fehlersucher (Debugger)

Variable *c* ist am Programm-  
punkt ● auf einigen Programm-  
pfaden nicht initialisiert worden. ⚡

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.9.1

8.9.2

# Kapitel 8.9.4

## Anforderungsgetriebene Datenflussanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

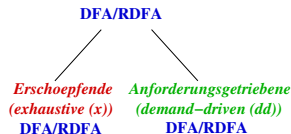
8.9

8.9.1

8.9.2

699/169

# Klassifikation von DFA/RDFA-Techniken

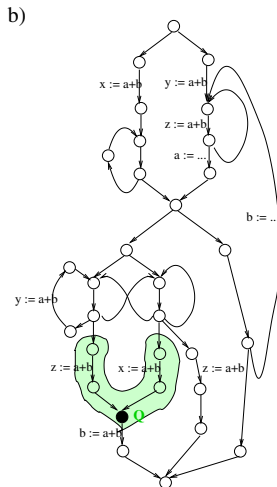
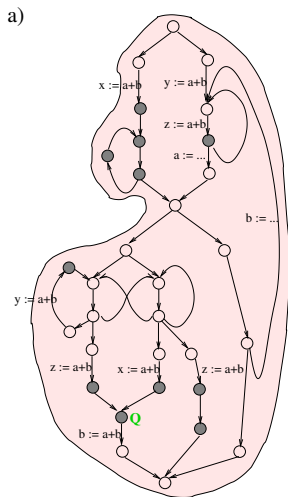


- ▶ **Erschöpfende DFA (xDFA):** Vollständige Berechnung der *MaxFP/MinFP*-Lösung bzw. *RMinFP/RMaxFP*-Lösung eines DFA- bzw. RDFA-Problems.
- ▶ **Anforderungsgetriebene DFA (ddDFA):** Teilweise Berechnung der *MaxFP/MinFP*-Lösung bzw. *RMinFP/RMaxFP*-Lösung eines DFA- bzw. RDFA-Problems; vorzeitige Terminierung der Fixpunktiteration sobald das Analyseergebnis für den 'interessanten' Teil feststeht.

**Im engeren Sinn:** Lösung des ursprünglichen DFA-Problems mittels anforderungsgetriebener Lösung des induzierten RDFA-Problems.

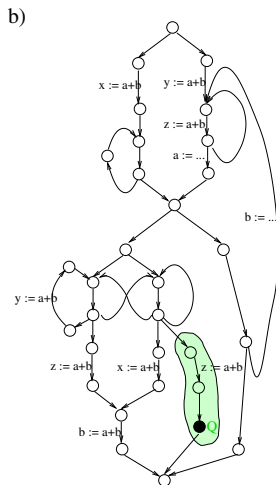
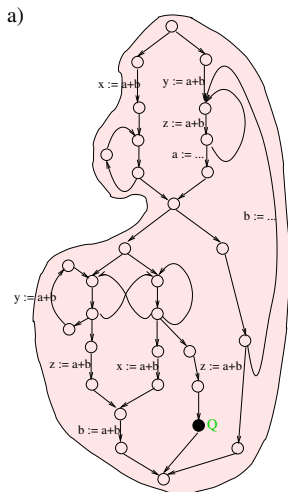
# Beispiel: Aufwandsvergleich xDFA, ddDFA (1)

Verfügbarkeit an Programmpunkt **Q**: Informeller/anekdotischer Vergleich von Berechnungsaufwand erschöpfend (**rosa**), anforderungsgetrieben (**grün**):



# Beispiel: Aufwandsvergleich xDFA, ddDFA (2)

Verfügbarkeit an Programmpunkt **Q**: Informeller/anekdotischer Vergleich von Berechnungsaufwand erschöpfend (**rosa**), anforderungsgetrieben (**grün**):



# Beobachtung

...in günstigen Fällen

- kann der Aufwand **anforderungsgetriebener DFA** erheblich niedriger sein als für eine entsprechende **erschöpfende Analyse**.

...in ungünstigen Fällen

- ergibt sich kein Vorteil.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.9.1

8.9.2

# Kapitel 8.10

## Zusammenfassung, Ausblick

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

**8.10**

8.11



# Aus Sicht (axiomat.) Programmverifikation

...drei Grundprobleme unterscheidbar: Das

## 1. stärkste Nachbedingungs- (Implementierungs-) Problem

$$\{p\} \pi \{?\}$$

## 2. schwächste Vorbedingungs- (Spezifikations-) Problem

$$\{?\} \pi \{q\}$$

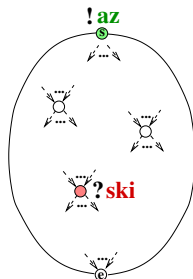
## 3. Gültigkeits- (Verifikations-) Problem

$$\{p\} \pi \{q\}$$

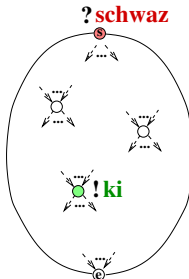
# Implementierungs-, Spezifikations- und Verifikationsproblem

...übertragen auf Programm- bzw. Datenflussanalyse:

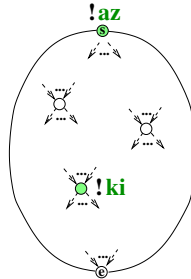
## Implementierungsproblem



## Spezifikationsproblem



## Verifikationsproblem



! **Gegeben:** Anfangszusicherung **az**

? **Gesucht:** Staerkste Knoteninformation **ski**

! **Gegeben:** Knoteninformation **ki**

? **Gesucht:** Schwachste Anfangszusicherung **schwaz**

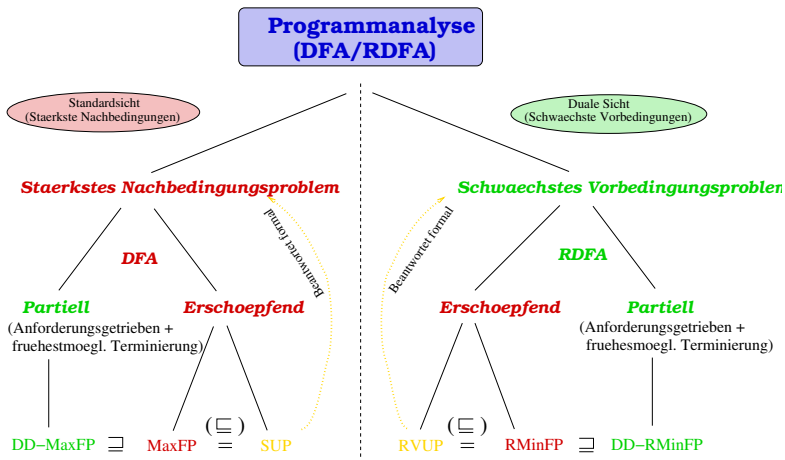
! **Gegeben:** Anfangszusicherung **az**

Knoteninformation **ki**

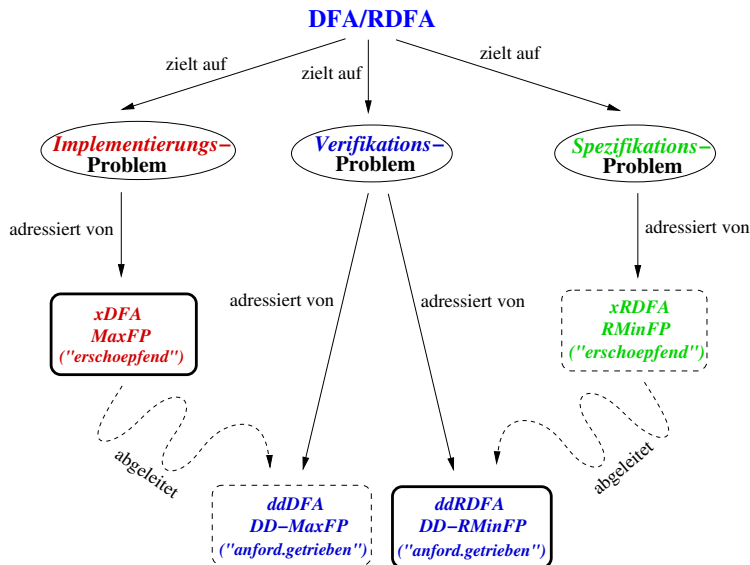
? **Gesucht:** Gueltigkeit **ki** bzgl. **az**

# Lösungsverfahren für die drei Grundprobleme

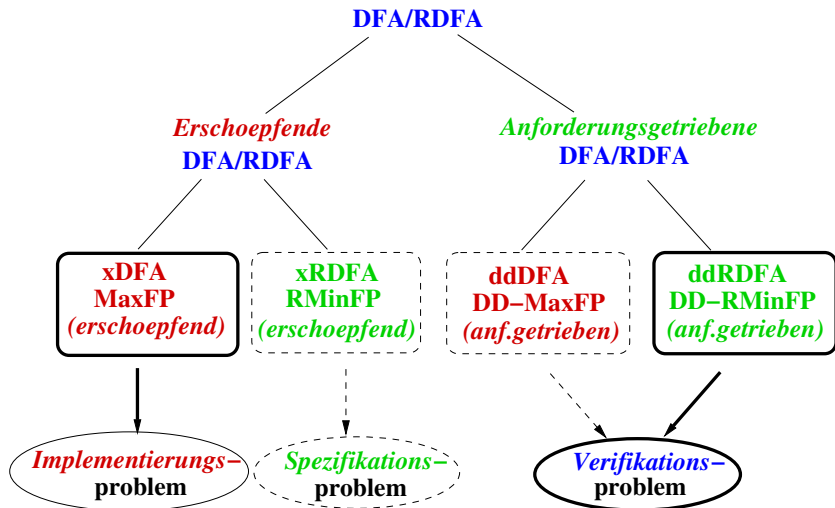
...in Form **erschöpfender (xDFA)** und **anforderungsgetriebener (ddDFA)** Datenflussanalyse im Sinn stärkster Nach- und schwächster Vorbedingungen:



# Abgeleitete problemgeleitete Klassifikation

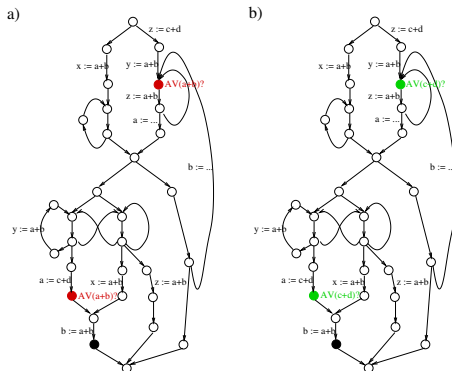


# Abgeleitete analysetypgeleitete Klassifikation



# Übungsaufgabe 8.10.1

Warum spielt der *DD-MaxFP*-Ansatz keine Rolle im Vergleich zum *DD-RMinFP*-Ansatz? Betrachte dazu, ob  $a + b$  und  $c + d$  an den farblich hervorgehobenen Programmpunkten verfügbar sind und vergleiche den Berechnungsaufwand von *DD-MaxFP*- und *DD-RMinFP*-Ansatz. Welcher generelle Unterschied zwischen den beiden Ansätzen wird deutlich?



# Übungsaufgabe 8.10.2

Vergleiche **Aufgaben** und **Vorgehen** von:

- **Typprüfung** (ein Programmierervorschlag einer gültigen Typisierung wird auf Stichhaltigkeit überprüft):  
    ↪ **Verifikation**(sproblem)
- **Typinferenz** (eine stichhaltige Typisierung wird ohne vorgegebenen Typisierungsvorschlag generiert bzw. eine Fehlermeldung ausgegeben, wenn dies fehlschlägt):  
    ↪ **Analyse**(problem)

Leisten **Typprüfung** und **Typinferenz** nicht ähnliches? Ist das Analyseproblem **Inferenz** nicht sogar schwerer als das Verifikationsproblem **Prüfung**?

Legt das Beispiel nicht nahe, dass **Verifikation** nicht notwendig tiefergehender oder konzeptuell oder berechnungsmäßig schwerer sein muss als **Analyse**, sondern dass **Verifikation** und **Analyse** Seiten derselben Münze oder gar Aspekte derselben Seite sind?

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

711/169

# Kapitel 8.11

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen



# Reading for Chapter 8 (1)



Gagan Agrawal. *Demand-driven Construction of Call Graphs*. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 125-140, 2000.



Wayne A. Babich, Mehdi Jazayeri. *The Method of Attributes for Data Flow Analysis: Part I - Exhaustive Analysis*. Acta Informatica 10(3):245-264, 1978.



Wayne A. Babich, Mehdi Jazayeri. *The Method of Attributes for Data Flow Analysis: Part II - Demand Analysis*. Acta Informatica 10(3):265-272, 1978.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8



8.9

8.10

8.11

713/169

# Reading for Chapter 8 (2)

-  Ras Bodík, Rajiv Gupta, Vivek Sarkar. *ABCD: Eliminating Array Bounds Check on Demand*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI 2000), ACM SIGPLAN Notices 35(5):321-333, 2000.
-  Evelyn Duesterwald. *A Demand-driven Approach for Efficient Interprocedural Data-Flow Analysis*. PhD thesis, University of Pittsburgh, PA, USA, 1996.
-  Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *Demand-driven Computation of Interprocedural Data Flow*. In Conference Record of the 22nd ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'95), 37-48, 1995.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8




8.9

8.10

8.11

714/169

# Reading for Chapter 8 (3)

-  Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *A Demand-driven Analyzer for Data Flow Testing at the Integration Level*. In Proceedings of the IEEE Conference on Software Engineering (CoSE'96), 575-586, 1996.
-  Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *A Practical Framework for Demand-driven Interprocedural Data Flow Analysis*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 19(6):992-1030, 1997.
-  Leandro Faccinetti, Zachary Palmer, Scott Smith. *Higher-order Demand-driven Program Analysis*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 41(3):14:Computing Surveys 51(3):14:1-53, 2019.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7




8.8

8.9

8.10

8.11

# Reading for Chapter 8 (4)

-  Susan Horwitz, Thomas Reps, Mooly Sagiv. *Demand Interprocedural Data Flow Analysis*. In Proceedings of the 3rd ACM SIGSOFT Symposium on the Foundations of Software Engineering (FSE-3), 104-115, 1995.
-  John Hughes, John Launchbury. *Reversing Abstract Interpretations*. In Proceedings of the 4th European Symposium on Programming (ESOP'92), Springer-V., LNCS 582, 269-286, 1992.
-  John Hughes, John Launchbury. *Reversing Abstract Interpretations*. Science of Computer Programming 22:307-326, 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

716/169

# Reading for Chapter 8 (5)



Jens Knoop. *Demand-driven Analysis of Explicitly Parallel Programs: An Approach based on Reverse Data-Flow Analysis*. In Proceedings of the 9th International Workshop on Compilers for Parallel Computers (CPC 2001), 151-162, 2001.



Jens Knoop. *Data-Flow Analysis for Hot-Spot Program Optimization*. In Proceedings of the 14th Biennial Workshop on 'Programmiersprachen und Grundlagen der Programmierung' (KPS 2007). Bericht A-07-07 der Institute für Mathematik und Informatik, Universität Lübeck, Deutschland, 124-131, 2007.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

717/169

# Reading for Chapter 8 (6)



Yuan Lin, David A. Padua. *Demand-driven Interprocedural Array Property Analysis*. In Proceedings of the 12th International Conference on Languages and Compilers for Parallel Computing (LCPC'99), Springer-V., LNCS 1863, 303-317, 1999.



Thomas Reps. *Solving Demand Versions of Interprocedural Analysis Problems*. In Proceedings of the 5th International Conference on Compiler Construction (CC'95), Springer-V., LNCS 786, 389-403, 1994.



Thomas Reps. *Demand Interprocedural Program Analysis using Logic Databases*. In Applications of Logic Databases, R. Ramakrishnan (Hrsg.), Kluwer Academic Publishers, 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

718/169

# Reading for Chapter 8 (7)

-  Mary Lou Soffa. *Tutorial: Techniques to improve the Scalability and Precision of Data Flow Analysis*. In *Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99)*, Springer-V., LNCS 1694, 355-356, 1999.
-  Peng Tu, David A. Padua. *Gated SSA-based Demand-driven Symbolic Analysis for Parallelizing Computers*. In *Proceedings of the International Conference on Supercomputing (ICS'95)*, 414-423, 1995.
-  Xin Yuan, Rajiv Gupta, Rami Melhem. *Demand-driven Data Flow Analysis for Communication Optimization*. *Parallel Processing Letters* 7(4):359-370, 1997.
-  Xin Zheng, Radu Rugina. *Demand-driven Alias Analysis for C*. In *Proceedings of the 35th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2008)*, 197-208, 2008.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

8.1

8.2

8.3

8.4

8.5

8.6

8.7

8.8

8.9

8.10

8.11

719/169

# Kapitel 9

## Parallele Datenflussanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

**Kap. 9**

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9



# Kapitel 9.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

**9.1**

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Syntax paralleler Programme

..wir erweitern die Menge der Sprachbefehle von **WHILE** um eine

- **Parallelanweisung** **||**

und nennen die erweiterte Sprache **WHILE ||**. Dabei treffen wir folgende Annahmen:

- Alle Komponenten einer Parallelanweisung werden parallel auf einem **gemeinsamen Speicher** (engl. **shared memory**) ausgeführt.
- Es gibt weder Sprünge von außen in eine Parallelanweisung hinein noch hinaus noch Sprünge von einer in eine andere Komponente einer Parallelanweisung.
- Eine Parallelanweisung terminiert dann und nur dann, wenn alle ihre Komponenten terminiert sind.
- Anweisungen sind atomar.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Semantik paralleler Programme

...die Bedeutung von **WHILE**  $\parallel$ -Programmen ist durch eine **Verschrankungs-Semantik** (engl. **interleaving semantics**) gegeben.

**Beachte:** Mit diesen Festlegungen sind wesentliche Charakteristika paralleler Programme und paralleler Programmausführungen gegeben:

1. **Verschrankung** der Ausführung von Anweisungen.
2. **Synchronisation** von parallelen Komponenten.

Weitere Erweiterungen (z.B. **dynamische Prozesserzeugung**) sind möglich, werden in der Folge aber nicht betrachtet.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Herausforderung: Zustandsexplosionsproblem

...parallele Programme können als kompakte Darstellung nicht-deterministischer sequentieller Programme als Ergebnis einer

- Produktkonstruktion aus den parallelen Komponenten

aufgefasst werden.

Diese Transformation erlaubt die Analyse paralleler Programme auf die Analyse sequentieller Programme zurückzuführen, jedoch wächst die Grösse des nichtdeterministischen sequentiellen Produktprogramms

- exponentiell mit der Zahl paralleler Komponenten

so dass diese Rückführung nicht praktikabel ist.

Charakterisierendes Schlagwort:

**Zustandsexplosionsproblem!**

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Hauptergebnis

...unidirektionale Bitvektoranalysen lassen sich für

- parallele Programme aus `WHILE` ||

ebenso einfach und effizient durchführen wie für

- sequentielle Programme aus `WHILE` .

Aufgrund der Vielzahl und hohen praktischen Relevanz unidirektionaler Programmanalysen für Analyse- und Optimierungszwecke ist dieses Resultat von hoher Wichtigkeit, da es Analyse- und Optimierungstechniken sequentieller Programme ohne Effizienzverlust auf

- parallele Programme

auszudehnen und zu übertragen erlaubt.

# Kapitel 9.2

## Der funktionale denotationelle Semantikansatz

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

**9.2**

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Der funktionale denotation. Semantik-Ansatz

...für sequentielle Programme als punktweise Ausdehnung des *MaxFP/MinFP*-Ansatzes auf den Gesamtverband ist der Schlüssel paralleler Datenflussanalyse.

Informell: Der funktionale denotationelle Semantik-Ansatz

- hebt das Niveau des *MaxFP/MinFP*-Ansatzes von einzelnen Verbandselementen als Startzusicherung auf das Niveau von Funktionen auf dem Gesamtverband.

In der Folge entwickeln wir den funktionalen denotationellen Semantik-Ansatz für die *MaxFP*-Sicht; die Entsprechung für den *MinFP*-Sicht ergibt sich durch Vertauschen von Schnitt- und Vereinigungsoperation des Verbands in trivialer Weise.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Der funktionale denotat. Semantik-Ansatz

Sei  $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$  ein Programm und  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

Dann ist durch:

## Gleichungssystem 9.2.1 (Funktionales *MaxFP*-GS)

$$\textcolor{red}{finf}(n) = \begin{cases} Id_c & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigcap \{ \llbracket (n, m) \rrbracket \circ (\textcolor{red}{finf}(m)) \mid m \in \text{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

die punktweise funktionale Ausdehnung der denotationellen *MaxFP*-Semantik von  $G$  gegeben (vgl. Kapitel 7.5.1):

## Gleichungssystem 9.2.2 (*MaxFP*-Gleichungssystem)

$$\textcolor{green}{inf}(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigcap \{ \llbracket (m, n) \rrbracket (\textcolor{green}{inf}(m)) \mid m \in \text{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$



# Äquivalenzresultat

Bezeichnen wir mit

- $\nu\text{-inf}_{\mathcal{C}_s}(n), n \in N$
- $\nu\text{-finf}_{\mathcal{C}}(n), n \in N$

die größten Lösungen der Gleichungssysteme 9.2.2 bzw. 9.2.1, so gilt:

- $\forall n \in N. \nu\text{-inf}_{\mathcal{C}_s}(n) \in \mathcal{C}$
- $\forall n \in N. \nu\text{-finf}_{\mathcal{C}}(n) \in [\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}]$

und das Äquivalenzresultat:

## Theorem 9.2.3 (Äquivalenz)

$$\forall n \in N. \forall c_s \in \mathcal{C}. \nu\text{-finf}_{\mathcal{C}}(n)(c_s) = \nu\text{-inf}_{\mathcal{C}_s}(n)$$

# Hauptergebnis: Korrekth., Sicherh., Koinzidenz

Gemäß Theorem 9.2.3 stimmen die *MaxFP*- und funktionale *MaxFP*-Semantik überein; sie sind äquivalent.

Mit der weiteren Festlegung  $\llbracket \cdot \rrbracket =_{df} \nu\text{-finf}_C$  erhalten wir die Hauptergebnisse für die funktionale denotationale Semantik als Korollare zu Theorem 9.2.3, Sicherheitstheorem 7.7.1(1) und Koinzidenztheorem 7.7.2(1):

## Korollar 9.2.4 (Äquivalenz)

$$\forall n \in N. \forall c_s \in C. \llbracket n \rrbracket(c_s) = \llbracket n \rrbracket_{(\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)}^{MaxFP}(n)$$

## Korollar 9.2.5 (Sicherheit, Koinzidenz)

1. **Sicherheit:**  $\forall n \in N. \forall c_s \in C. \llbracket n \rrbracket(c_s) \sqsubseteq \llbracket n \rrbracket_{(\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)}^{SUP}(n)$ ,  
wenn  $\llbracket \cdot \rrbracket$  monoton ist.
2. **Koinzidenz:**  $\forall n \in N. \forall c_s \in C. \llbracket n \rrbracket(c_s) = \llbracket n \rrbracket_{(\hat{C}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)}^{SUP}(n)$ ,  
wenn  $\llbracket \cdot \rrbracket$  distributiv ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Berechnung der globalen Semantikfunktion $\llbracket \cdot \rrbracket$

...die Funktion  $\llbracket \cdot \rrbracket : N \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$  kann offensichtlich

- Argument für Argument mithilfe des **Generischen Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1** berechnet werden.

In der Folge stellen wir mit **Algorithmus 9.2.6** ein weniger naives, direktes Verfahren zur Berechnung von  $\llbracket \cdot \rrbracket$  auf dem Niveau von Funktionen (nicht Verbandselementen) vor, das sich als **Schlüssel** zu **paralleler Datenflussanalyse** herausstellen wird.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Der generische Fixpunktalgorithmus 9.2.6 (1)

**Eingabe:** Eine DFA-Spezifikation  $\mathcal{S}_G =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket)$  (alle Startzusicherungen werden simultan betrachtet).

**Ausgabe:** Nach Terminierung von Algorithmus 9.3.6 (s. Terminationstheorem 9.2.7) speichert Variable  $\text{finf}[n]$  die funktionale *MaxFP-Semantik* bzgl.  $\mathcal{S}_G$  am Knoten  $n$ .

Zusätzlich gilt (s. Korollar 9.2.5(1) und 9.2.5(2)): Ist  $\llbracket \cdot \rrbracket$

- **distributiv:**  $\text{finf}[n]$  speichert
- **monoton:**  $\text{finf}[n]$  speichert eine untere Approximation der (funktionalen) *SUP-Semantik* bzgl.  $\mathcal{S}_G$  am Knoten  $n$ .

**Bemerkung:** Variable *workset* steuert den Ablauf des iterativen Prozesses. Sie speichert vorübergehend eine Menge von Knoten von  $G$ , deren Annotationen sich kürzlich geändert haben und damit die Annotationen ihrer Nachfolgerknoten beeinflussen können.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Der generische Fixpunktalgorithmus 9.2.6 (2)

( Prolog: Initialisierung von *finf* und *workset* )

FORALL  $n \in N \setminus \{s\}$  DO  $finf[n] := \lambda c. \top$  OD;

$finf[s] := \lambda c. c$ ;

$workset := N$ ;

( Hauptprozess: Iterative Fixpunktberechnung )

WHILE  $workset \neq \emptyset$  DO

    CHOOSE  $m \in workset$ ;

$workset := workset \setminus \{m\}$ ;

    ( Aktualisierung der Nachfolgerumgebung von Knoten  $m$  )

    FORALL  $n \in succ(m)$  DO

$meet := \llbracket (m, n) \rrbracket \circ finf[m] \sqcap finf[n]$ ;

        IF  $finf[n] \sqsupset meet$

            THEN

$finf[n] := meet$ ;

$workset := workset \cup \{n\}$

        FI

    OD ESOOHC OD.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Termination

## Theorem 9.2.7 (Termination)

Der Generische Fixpunktalgorithmus 9.2.6 terminiert mit der funktionalen *MaxFP*-Semantik bzgl.  $\mathcal{S}_G$ , wenn:

1. Das lokale DFA-Semantikfunktional  $\llbracket \cdot \rrbracket$  ist **monoton**.
2. Der Funktionenverband  $[\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}]$  erfüllt die **absteigende Kettenbedingung**.

## Proposition 9.2.8

Erfüllt  $[\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}]$  die absteigende Kettenbedingung, so auch  $\mathcal{C}$ .

# Kapitel 9.3

## Parallele Flussgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

**9.3**

9.3.1

9.3.2

9.3.3

9.3.4

9.3.5

9.4

9.5

# Parallele Flussgraphen

Wir repräsentieren **parallele Programme** aus **WHILE<sub>||</sub>** in Form

- **knotenbenannter paralleler Flussgraphen**

$$G^* = (N^*, E^*, s^*, e^*)$$

Dabei gilt: Teilgraphen von  $G^*$ , die

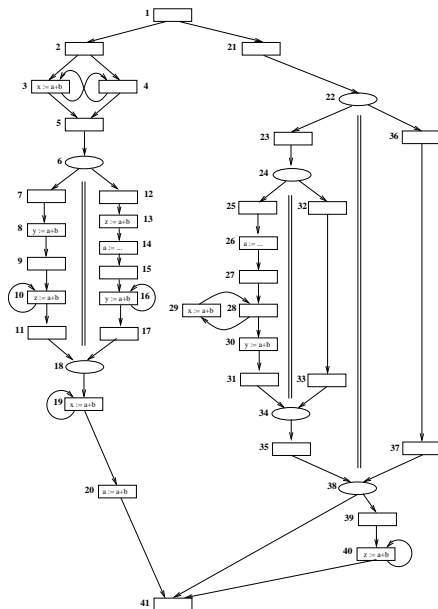
- **parallele Anweisungen** oder deren **Komponenten**

repräsentieren, sind Graphen i.S.v. **Kapitel 7** mit je **genau einem Eintritts-** und **Austrittspunkt** (engl. **single entry/single exit regions**), wobei die Ein- bzw. Austrittspunkte paralleler Anweisungen ausschließlich mit den Ein- bzw. Austrittspunkten ihrer Komponentengraphen verbunden sind.

Graphisch stellen wir **Ein-** und **Austrittsknoten** paralleler Anweisungen als **Ellipsen** dar und heben die Zusammengehörigkeit paralleler Komponenten durch zwei **Parallelen** hervor.



# Durchgehendes Beispiel: Paralleler Flussgraph



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

**9.3**

9.3.1

9.3.2

9.3.3

9.3.4

9.3.5

9.4

# Kapitel 9.3.1

## Vereinbarungen, Bezeichnungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

**9.3.1**

9.3.2

9.3.3

9.3.4

9.3.5

9.4

9.5

# Vereinbarungen, Bezeichnungen (1)

Sei  $G^*$  ein paralleler Flussgraph.

## Vereinbarungen:

- Ein- und Austrittsknoten paralleler Anweisungen und ihrer Komponenten sind mit der leeren Anweisung `skip` benannt.

## Bezeichnungen:

- $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$ : Die Menge aller parallelen Teilgraphen von  $G^*$ .
- $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G')$ : Die Menge der Komponentengraphen von  $G'$ ,  $G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$ .
- $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*) =_{df} \bigcup \{ \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G') \mid G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \}$
- $N_{\mathcal{P}}^N =_{df} \{ start(G) \mid G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \}$ : Die Menge der Eintrittsknoten paralleler Teilgraphen von  $G^*$ .
- $N_{\mathcal{P}}^X =_{df} \{ end(G) \mid G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \}$ : Die Menge der Austrittsknoten paralleler Teilgraphen von  $G^*$ .

# Vereinbarungen, Bezeichnungen (2)

Weiters bezeichnen:

- $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}^{\max}(G^*) =_{df} \{ G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \mid \forall G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*). G \subseteq G' \Rightarrow G = G' \}$
- $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}^{\min}(G^*) =_{df} \{ G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \mid \forall G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*). G' \subseteq G \Rightarrow G' = G \}$

die Mengen **maximaler** (oder **äußerster**) und **minimaler** (oder **innerster**) paralleler Graphen von  $G^*$ .

Dabei gilt:  $G_1 \subseteq G_2$  gdw  $N_1 \subseteq N_2 \wedge E_1 \subseteq E_2$ .

# Vereinbarungen, Bezeichnungen (3)

Abbildung  $pfg$  ( $cfg$ ) ordnet jedem Knoten aus einem Flussgraphen  $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$  ( $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*)$ ) den kleinsten  $n$  enthaltenden Flussgraphen aus  $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$  ( $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*)$ ) zu:

$$pfg(n) =_{df} \begin{cases} \bigcap \{ G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \mid n \in Nodes(G') \} & \text{falls } n \in Nodes(\mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)) \\ G^* & \text{sonst} \end{cases}$$

$$cfg(n) =_{df} \begin{cases} \bigcap \{ G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*) \mid n \in Nodes(G') \} & \text{falls } n \in Nodes(\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*)) \\ G^* & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir dehnen die Abbildungen  $pfg$  und  $cfg$  von Knoten auf Graphen aus, indem wir das Bild von Graphen als Bild ihrer Knoten definieren.

# Kapitel 9.3.2

## Rang paralleler Graphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

**9.3.2**

9.3.3

9.3.4

9.3.5

9.4

9.5

# Rang paralleler (Teil-) Graphen

Sei  $G^*$  ein paralleles Programm.

## Definition 9.3.2.1 (Rang paralleler Graphen)

Der **Rang** (engl. **rank**) eines parallelen Graphen  $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$  ist definiert durch:

$$\text{rank}(G) =_{df} \begin{cases} 0 & \text{falls } G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}^{\min}(G^*) \\ \max\{\text{rank}(G') \mid G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \wedge G' \subset G\} + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

**9.3.2**

9.3.3

9.3.4

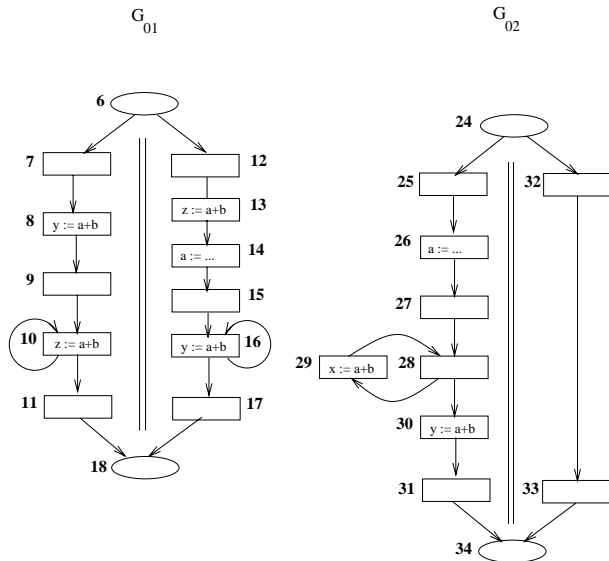
9.3.5

9.4

9.5

743/169

# Lfd. Bsp.: Zwei parallele Graphen von Rang 0



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

9.3.2

9.3.3

9.3.4

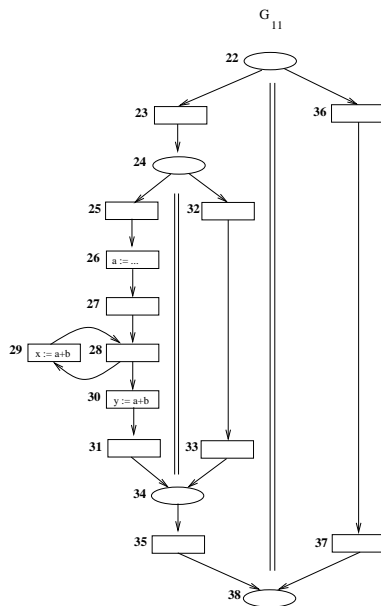
9.3.5

9.4

9.5



# Lfd. Bsp.: Ein paralleler Graph von Rang 1



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

9.3.2

9.3.3

9.3.4

9.3.5

9.4

9.5

745/169

# Kapitel 9.3.3

## Sequentialisierte Graphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

9.3.2

**9.3.3**

9.3.4

9.3.5

9.4

9.5

# Trivial sequentialisierte Graphen

...eines parallelen Flussgraphen.

## Definition 9.3.3.1 (Sequentialisierter Graph)

Ist  $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$ , so ist  $G_{seq}$  der  $G$  zugeordnete (triviale nicht bedeutungsgleiche) **sequentialisierte Flussgraph**, in dem alle maximalen parallelen Teilgraphen  $G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}^{max}(G)$  durch eine Kante von  $start(G')$  nach  $end(G')$  ersetzt sind.

**Beachte:** Sequentialisierte Graphen enthalten keine parallelen Teilgraphen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

9.3.2

**9.3.3**

9.3.4

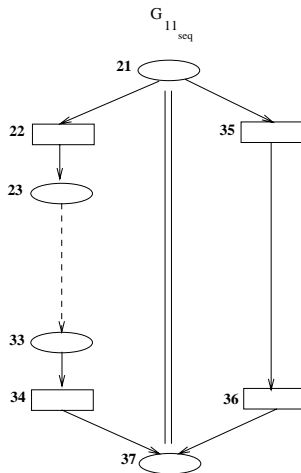
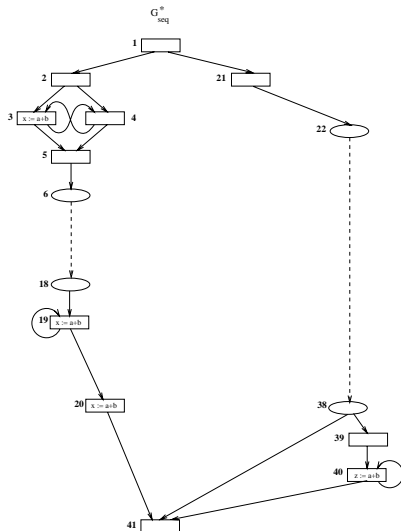
9.3.5

9.4

9.5

# Laufendes Beispiel: Sequentialisierte Graphen

...des durchgehenden Beispiels und des maximalen parallelen Teilgraphen  $G_{11}$ :



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

9.3.2

**9.3.3**

9.3.4

9.3.5

9.4

9.5

# Kapitel 9.3.4

## Verschränkte Vorgänger

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

9.3.2

9.3.3

**9.3.4**

9.3.5

9.4

9.5

# Parallele Geschwistergraphen

Sei  $G^*$  ein paralleles Programm.

## Definition 9.3.4.1 (Parallele Geschwistergraphen)

Die Menge der **parallelen Geschwistergraphen** ( $pGg$ ) eines Komponentengraphen  $G \in \mathcal{G}_C(G^*)$  einer Parallelanweisung ist gegeben durch:

$$PG_{pGg}(G) =_{df} \mathcal{G}_C(pfg(G)) \setminus G \cup \begin{cases} \emptyset & \text{falls } pfg(G) \in \mathcal{G}_P^{max}(G^*) \\ PG_{pGg}(cfg(pfg(G))) & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

9.3.2

9.3.3

**9.3.4**

9.3.5

9.4

9.5

# Verschränkte Vorgänger

...die Menge der unmittelbar vor einem Knoten in einer Parallelanweisung **dynamisch ausführbaren Knoten** ist durch die Vereinigung seiner statischen (Komponenten-) Vorgänger i.S.v. **Kapitel 7** und seiner sog. **verschränkten Vorgänger** gegeben:

## Definition 9.3.4.2 (Verschränkte Vorgänger)

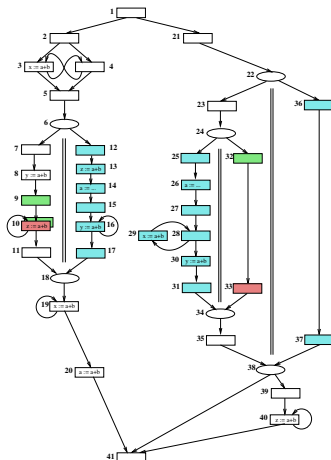
Ist  $G^*$  ein paralleles Programm, so ist die Menge der **verschränkten Vorgänger** (*verschrVorg*) (engl. interleaving predecessors) eines Knotens  $n$  aus  $G^*$  gegeben durch:

$$\text{Pred}_{G^*}^{\text{verschrVorg}}(n) =_{df} \begin{cases} \text{Nodes}(PG_{pGg}(\text{cfg}(n))) & \text{falls } n \in \text{Nodes}(\mathcal{G}_C(G^*)) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

# Lfd. Bsp: Statische, verschränkte Vorgänger

...der Knoten 9 und 33:

- $pred_{G^*}(10) = \{9, 10\}$ ,  $Pred_{G^*}^{verschrVorg}(10) = \{12, \dots, 17\}$ .
- $pred_{G^*}(33) = \{32\}$ ,  
 $Pred_{G^*}^{verschrVorg}(33) = \{25, \dots, 31, 36, 37\}$ .



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

9.3.2

9.3.3

9.3.4

9.3.5

9.4

752/169



# Kapitel 9.3.5

## Parallele Pfade

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.3.1

9.3.2

9.3.3

9.3.4

**9.3.5**

9.4

9.5

# G-wohlgeformte Knotenfolgen

Sei  $G^*$  ein paralleles Programm

## Definition 9.3.5.1 ( $G$ -wohlgeformte Knotenfolge)

Eine Knotenfolge  $p = (n_1, \dots, n_q)$  aus  $G^*$  heißt  $G$ -wohlgeformt gdw

1. die Projektion  $p \downarrow_{G_{seq}}$  von  $p$  auf  $G_{seq}$  ist Element der Pfadmenge  $\mathbf{P}_{G_{seq}}[start(G_{seq}), end(G_{seq})]$ .
2. für alle Knotenvorkommen  $n_i \in N_{\mathcal{P}}^N$  von  $p$  gibt es einen Index  $j \in \{i+1, \dots, q\}$  mit der Eigenschaft:
  - 2.1  $n_j \in N_{\mathcal{P}}^X$ .
  - 2.2  $n_j$  ist der Nachfolger von  $n_i$  auf  $p \downarrow_{G_{seq}}$ .
  - 2.3  $\forall G' \in \mathcal{G}_C(pfg(n_i)). (n_{i+1}, \dots, n_{j-1})$  ist  $G'$ -wohlgeformt.

Beachte: Bed. 2.3 stellt Synchronisation sicher: Am Austrittsknoten einer Parallelanweisung müssen alle ihre parallelen Komponenten vollständig ausgeführt und terminiert sein.

# Parallele Pfade

Sei  $G^*$  ein paralleles Programm

## Definition 9.3.5.2 (Paralleler Pfad)

Eine Knotenfolge  $p = (n_1, \dots, n_q)$  aus  $G^*$  heißt **paralleler Pfad** von

1.  $s^*$  nach  $e^*$  gdw  $p$  ist  $G^*$ -wohlgeformt.
2.  $n_1$  nach  $n_q$ , wenn  $p$  Teilpfad eines parallelen Pfades von  $s^*$  nach  $e^*$  ist.

Wir bezeichnen mit:

- $\mathbf{PP}_{G^*}[m, n]$ : Menge aller parallelen Pfade von  $m$  nach  $n$ .
- $\mathbf{PP}_{G^*}[m, n[$ : Menge aller parallelen Pfade von  $m$  zu einem (statischen oder verschränkten) Vorgänger von  $n$ :

$$\mathbf{PP}_{G^*}[m, n[ =_{df} \{(n_1, \dots, n_q) \mid (n_1, \dots, n_q, n_{q+1}) \in \mathbf{PP}_{G^*}[m, n]\}$$

# Kapitel 9.4

## Operationelle globale parallele DFA-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

**9.4**

9.4.1

9.4.2

9.4.3

9.5

9.6

9.7

# Kapitel 9.4.1

## Parallele Aufsammlensemantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

**9.4.1**

9.4.2

9.4.3

9.5

9.6

9.7

# Die parallele Aufsammlungsemantik

Sei  $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

## Definition 9.4.1.1 (Parallele DFA-Aufsammlungsem.)

Die von  $\mathcal{S}_{G^*}$  induzierte (nichtdeterministische) **parallele DFA-Aufsammlungsemantik** (oder **globale abstrakte Semantik**) an Knoteneingängen ist definiert durch:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PAS} : N \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$$

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PAS} =_{df} \lambda n. \{ \llbracket p \rrbracket(c_s) \mid p \in \mathbf{PP}[s^*, n] \}$$

wobei  $\mathcal{P}$  den Potenzmengenoperator bezeichnet.

Beachte:

$$\llbracket s^* \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PAS} = \{c_s\}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.4.1

9.4.2

9.4.3

9.5

9.6

758/169

# Kapitel 9.4.2

## Schnitt-über-alle-parallele-Pfade-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.4.1

**9.4.2**

9.4.3

9.5

9.6

9.7

# Die Schnitt-über-alle-par.-Pfade (*SUPP*) Sem.

Sei  $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

## Definition 9.4.2.1 (*SUPP*-Semantik)

Die deterministische *SUPP*-Semantik von  $\mathcal{S}_{G^*}$  an Knoteneingängen ist definiert durch:

$$\begin{aligned}\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{SUPP} : N^* &\rightarrow \mathcal{C} \\ \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{SUPP} &=_{df} \lambda n. \bigsqcap \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PAS} \\ &= \lambda n. \bigsqcap \{ \llbracket p \rrbracket(c_s) \mid p \in \mathbf{PP}[s^*, n[ \}\end{aligned}$$

Beachte:  $\bigsqcap \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PAS}$  und folglich  $\llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{SUPP}$ ,  $n \in N^*$ , existieren, da  $\hat{\mathcal{C}}$  vollständiger Verband ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.4.1

9.4.2

9.4.3

9.5

9.6

9.7



# Kapitel 9.4.3

## Vereinigung-über-alle-parallele-Pfade-Semantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.4.1

9.4.2

**9.4.3**

9.5

9.6

9.7

# Die Verein.-über-alle-par.-Pfade (VUPP) Sem.

Sei  $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\hat{\mathcal{C}}, \llbracket \cdot \rrbracket, c_s)$  eine DFA-Spezifikation.

## Definition 9.4.3.1 (VUPP-Semantik)

Die deterministische **VUPP-Semantik** von  $\mathcal{S}_{G^*}$  an Knoteneingängen ist definiert durch:

$$\begin{aligned}\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{VUPP} &: N^* \rightarrow \mathcal{C} \\ \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{VUPP} &=_{df} \lambda n. \bigsqcup \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PAS} \\ &= \lambda n. \bigsqcup \{ \llbracket p \rrbracket(c_s) \mid p \in \mathbf{PP}[s^*, n] \}\end{aligned}$$

Beachte:  $\bigsqcup \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PAS}$  und folglich  $\llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{VUPP}$ ,  $n \in N^*$ , existieren, da  $\hat{\mathcal{C}}$  vollständiger Verband ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.4.1

9.4.2

9.4.3

9.5

9.6

9.7

# Kapitel 9.5

## Denotationelle globale parallele DFA-Semantik für unidirektionale Bitvektorprobleme

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

**9.5**

9.5.1

9.5.2

9.5.3

9.5.4

9.5.5  
763/169

# Kapitel 9.5.1

## Unidirektionale Bitvektoranalysen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

**9.5.1**

9.5.2

9.5.3

9.5.4

9.5.5

# Lokale DFA-Semantikfunktionen

...unidirektionaler Bitvektoranalysen sind stets Element der Menge

$$\mathcal{F}_{\text{IB}} =_{df} \{Cst_{\text{wahr}}, Id_{\text{IB}}, Cst_{\text{falsch}}\} \subseteq [\text{IB} \rightarrow \text{IB}]$$

mit

- $Cst_{\text{wahr}} =_{df} \lambda b \in \text{IB}. \text{wahr}$
- $Id_{\text{IB}} =_{df} \lambda b \in \text{IB}. b$
- $Cst_{\text{falsch}} =_{df} \lambda b \in \text{IB}. \text{falsch}$

**Beachte:** Die Negation als vierte Funktion auf **IB**:

$$Neg_{\text{IB}} =_{df} \lambda b \in \text{IB}. \neg b$$

ist wegen fehlender Monotonie für DFA-Zwecke uninteressant.

# Wichtige Resultate

... für unidirektionale Bitvektoranalysen.

## Proposition 9.5.1.1

1. Alle Funktionen aus  $\mathcal{F}_{\text{IB}}$  sind distributiv und additiv.
2.  $\mathcal{F}_{\text{IB}}$  bildet mit der punktweisen Ordnung auf Funktionen einen vollständigen Verband mit kleinstem Element  $Cst_{\text{falsch}}$  und größtem Element  $Cst_{\text{wahr}}$ , der unter Funktionskomposition abgeschlossen ist.

## Hauptlemma 9.5.1.2

Seien  $f_i : \mathcal{F}_{\text{IB}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{IB}}$ ,  $1 \leq i \leq q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , Funktionen von  $\mathcal{F}_{\text{IB}}$  nach  $\mathcal{F}_{\text{IB}}$ . Dann gilt:

$$\exists k \in \{1, \dots, q\}. f_q \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 = f_k \wedge \forall j \in \{k+1, \dots, q\}. f_j = Id_{\text{IB}}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.5.1

9.5.2

9.5.3

9.5.4

9.5.5

# Kapitel 9.5.2

## Interferenz und Synchronisation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.5.1

**9.5.2**

9.5.3

9.5.4

9.5.5

# Interferenzstabilität

...sei  $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{F}}_{IB}, \llbracket \cdot \rrbracket)$  DFA-Spezifikation eines unidirektionalen Bitvektorproblems,  $n$  ein Knoten in einer Parallelanweisung und  $E$  die durch  $\mathcal{S}_{G^*}$  spezifizierte Eigenschaft.

## Definition 9.5.2.1 (Interferenzstabil)

Knoten  $n$  heißt

1. *SUPP*-interferenzstabil für  $E$  (in Zeichen: *if-stabil* <sub>$n$</sub> <sup>SUPP</sup>)  
gdw  $E$  kann an  $n$  nicht durch einen Verschränkungs Vorgänger von  $n$  zerstört werden.
2. *VUPP*-interferenzstabil für  $E$  (in Zeichen: *if-stabil* <sub>$n$</sub> <sup>VUPP</sup>)  
gdw  $E$  kann an  $n$  nicht durch einen Verschränkungs Vorgänger von  $n$  erzeugt werden.



# Interferenzlabilität

...analog (als Negation von Interferenzstabilität):

## Definition 9.5.2.2 (Interferenzlabil)

Knoten  $n$  heißt heißt

1. *SUPP*-interferenzlabil für  $E$  (in Zeichen:  $if-labil_n^{SUPP}$ )  
gdw  $n$  ist nicht *SUPP*-interferenzstabil für  $E$ .
2. *VUPP*-interferenzlabil für  $E$  (in Zeichen:  $if-labil_n^{VUPP}$ )  
gdw  $n$  ist nicht *VUPP*-interferenzstabil für  $E$ .

# Interferenzwirkmächtig

...dual zur Interferenzlabilität von Knoten nennen wir diejenigen Komponenten von Parallelanweisungen **interferenzwirkmächtig**, die eine Anweisung enthalten, durch die die Knoten ihrer verschränkten Geschwistergraphen interferenzlabil werden.

## Definition 9.5.2.3 (Interferenzwirkmächtig)

Ein Komponentenflussgraph  $G \in \mathcal{G}_c(G^*)$  einer Parallelanweisung heißt

1. **SUPP-interferenzwirkmächtig** für  $E$  (in Zeichen:  $if\text{-}wirkmaechtig_G^{SUPP}$ ) gdw  $G$  enthält einen Knoten  $n$  mit  $\llbracket n \rrbracket = Cst_{\text{falsch}}$ .
2. **VUPP-interferenzwirkmächtig** für  $E$  (in Zeichen:  $if\text{-}wirkmaechtig_G^{VUPP}$ ) gdw  $G$  enthält einen Knoten  $n$  mit  $\llbracket n \rrbracket = Cst_{\text{wahr}}$ .

# Interferenzlemma

...als Folgerung aus [Hauptlemma 9.5.1.2](#), wonach für unidirektionale Bitvektorprobleme der Effekt eines ganzen Pfads vom Effekt einer einzelnen Anweisung abhängt, erhalten wir:

## Lemma 9.5.2.4 (Interferenzlemma)

Für alle  $\forall n \in N^*$  gilt:

### 1. Inferenzstabil

- 1.1  $if\text{-}stabil_n^{SUPP} \iff \forall m \in Pred_{G^*}^{verschrVorg}(n). \llbracket m \rrbracket \in \{Cst_{\text{wahr}}, Id_{\text{IB}}\}$
- 1.2  $if\text{-}stabil_n^{VUPP} \iff \forall m \in Pred_{G^*}^{verschrVorg}(n). \llbracket m \rrbracket \in \{Cst_{\text{falsch}}, Id_{\text{IB}}\}$

### 2. Interferenzlabil

- 2.1  $if\text{-}labil_n^{SUPP} \iff \exists m \in Pred_{G^*}^{verschrVorg}(n). \llbracket m \rrbracket = Cst_{\text{falsch}}$
- 2.2  $if\text{-}labil_n^{VUPP} \iff \exists m \in Pred_{G^*}^{verschrVorg}(n). \llbracket m \rrbracket = Cst_{\text{wahr}}$

# Synchronisation paralleler Komponenten (1)

...ein 4-stufiges Verfahren:

1. **Fortschritts- und Abbruchssteuerung:** Enthält  $G$  keine parallelen Anweisungen, terminiere. Anderenfalls fahre mit **Schritt 2** fort.
2. **Vorbereitung des Synchronisationsschritts:** Berechne für alle maximalen Teilgraphen  $G'$  parallelanweisungsfreier (d.h. minimaler) Graphen aus  $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G)$  die **SUPP**- bzw. **VUPP**-Semantik  $\llbracket G' \rrbracket_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}}^{\text{SUPP}}$  bzw.  $\llbracket G' \rrbracket_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}}^{\text{VUPP}}$  dieser (rein sequentiellen) Graphen mittels **Algorithmus 9.2.6**.

# Synchronisation paralleler Komponenten (2)

3. **Synchronisationsschritt:** Berechne für alle innersten parallelen Anweisungen  $\bar{G}$  von  $G$  die *SUPP*- bzw. *VUPP*-Semantik gemäß:

$$\llbracket \bar{G} \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{*-SUPP} = \begin{cases} Cst_{\text{falsch}} & \text{falls } \exists G' \in \mathcal{G}_C(\bar{G}). \llbracket end(G') \rrbracket = Cst_{\text{falsch}} \\ Id_{\text{IB}} & \text{falls } \forall G' \in \mathcal{G}_C(\bar{G}). \llbracket end(G') \rrbracket = Id_{\text{IB}} \\ Cst_{\text{wahr}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\llbracket \bar{G} \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{*-VUPP} = \begin{cases} Cst_{\text{wahr}} & \text{falls } \exists G' \in \mathcal{G}_C(\bar{G}). \llbracket end(G') \rrbracket = Cst_{\text{wahr}} \\ Id_{\text{IB}} & \text{falls } \forall G' \in \mathcal{G}_C(\bar{G}). \llbracket end(G') \rrbracket = Id_{\text{IB}} \\ Cst_{\text{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

# Synchronisation paralleler Komponenten (3)

4. Vorbereitung der nächsten Iterationsstufe: Ersetze alle innersten parallelen Anweisungen

$$\bar{G} = (\bar{N}, \bar{E}, \bar{s}, \bar{e})$$

in  $G$  durch die trivialen sequentiellen Graphen

$$\bar{\bar{G}} = (\{\bar{s}, \bar{e}\}, \{(\bar{s}, \bar{e})\}, \bar{s}, \bar{e})$$

mit lokaler *SUPP*- bzw. *VUPP*-Semantik:

- $\llbracket \bar{s} \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{SUPP} = Id_{\mathbb{B}} \sqcap \sqcap \{ \llbracket n \rrbracket \mid n \in \bar{N} \}, \llbracket \bar{e} \rrbracket = \llbracket \bar{G} \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{SUPP}$
- $\llbracket \bar{s} \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{VUPP} = Id_{\mathbb{B}} \sqcup \sqcup \{ \llbracket n \rrbracket \mid n \in \bar{N} \}, \llbracket \bar{e} \rrbracket = \llbracket \bar{G} \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{VUPP}$

Fahre mit **Schritt 1** fort.

# Synchronisationskorrektheit (1)

...Basis für die Korrektheit des Synchronisationsschritts ist Lemma 9.5.2.5 für innerste parallele Anweisungen, das wie die Korrektheit der Interferenzbehandlung eine Konsequenz aus Hauptlemma 9.5.1.2 ist, wonach für unidirektionale Bitvektorprobleme der Effekt eines ganzen Pfads vom Effekt einer einzelnen Anweisung abhängt.

Das heißt (ausgeführt in Lemma 9.5.2.5):

- Der Effekt eines vollständigen Pfads durch den Graphen einer Parallelanweisung ist durch den Effekt der Projektion des Pfads auf die Knoten desjenigen Komponentengraphen gegeben, der diese effektbestimmende Anweisung enthält.
- Der Effekt einer Parallelanweisung ergibt sich daher aus der Effektkomposition der komponentenlokalen Pfade.

# Synchronisationskorrektheit (2)

## Lemma 9.5.2.5 (Synchronisationskorrektheit: Basis)

Ist  $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$  eine Parallelanweisung mit ausschließlich rein sequentiellen Komponenten  $G_1, \dots, G_k$ , so gilt:

1. Die *SUPP*-Semantik von  $G$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \llbracket \text{end}(G) \rrbracket_{S_{G^*}}^{SUPP} &= \llbracket G \rrbracket_{S_{G^*}}^{*-SUPP} \\ &\begin{cases} Cst_{\text{falsch}} & \text{if } \exists 1 \leq i \leq k. \llbracket \text{end}(G_i) \rrbracket_{S_{G^*}}^{SUPP} = Cst_{\text{falsch}} \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{if } \forall 1 \leq i \leq k. \llbracket \text{end}(G_i) \rrbracket_{S_{G^*}}^{SUPP} = Id_{\mathbb{B}} \\ Cst_{\text{wahr}} & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Die *VUPP*-Semantik von  $G$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \llbracket \text{end}(G) \rrbracket_{S_{G^*}}^{VUPP} &= \llbracket G \rrbracket_{S_{G^*}}^{*-VUPP} \\ &\begin{cases} Cst_{\text{wahr}} & \text{if } \exists 1 \leq i \leq k. \llbracket \text{end}(G_i) \rrbracket_{S_{G^*}}^{VUPP} = Cst_{\text{wahr}} \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{if } \forall 1 \leq i \leq k. \llbracket \text{end}(G_i) \rrbracket_{S_{G^*}}^{VUPP} = Id_{\mathbb{B}} \\ Cst_{\text{falsch}} & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$



# Synchronisationskorrektheit (3)

...als induktive Erweiterung (der funktionalen Variante) des sequentiellen **Koinzidenztheorems 7.7.2** für unidirektionale Bitvektorprobleme erhalten wir zusammen mit **Lemma 9.5.2.5** die Korrektheit **hierarchisch** erfolgender **Synchronisation**(s-schritte):

## Hierarchisches Koinzidenztheorem 9.5.2.6

Sei  $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$  der Graph einer Parallelanweisung und sei  $\mathcal{S}_{G^*} = (G^*, \llbracket \cdot \rrbracket)$  eine DFA-Spezifikation mit  $\llbracket \cdot \rrbracket : N^* \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$  lokales Semantikfunktional eines **unidirektionalen Bitvektorproblems**. Dann gilt:

1.  $\llbracket \text{end}(G) \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{SUPP} = \llbracket G \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{*-SUPP}$
2.  $\llbracket \text{end}(G) \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{VUPP} = \llbracket G \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{*-VUPP}$

# Kapitel 9.5.3

## Maximale parallele Fixpunktsemantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.5.1

9.5.2

**9.5.3**

9.5.4

9.6

# Das $PMaxFP_{UBV}$ -Gleichungssystem

...sei  $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{F}}_{IB}, \llbracket \cdot \rrbracket)$  die DFA-Spezifikation eines unidirektionalen Bitvektorproblems.

## Gleichungssystem 9.5.3.1 ( $PMaxFP_{UBV}$ -GS)

$$\llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^S = \begin{cases} Id_{IB} & \text{falls } n = \mathbf{s}^* \\ \llbracket pfg(n) \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{*-SUPP} \circ \llbracket start(pfg(n)) \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^S \sqcap Cst_{if-stabil_n^{SUPP}} & \text{falls } n \in N_X^* \\ \sqcap \{ \llbracket m \rrbracket \circ \llbracket m \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^S \mid m \in pred_{G^*}(n) \} \sqcap Cst_{if-stabil_n^{SUPP}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte: Gleichungssystem 9.5.3.1 ist die natürliche Erweiterung von Gleichungssystem 9.2.1 auf parallele Programme.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.5.1

9.5.2

9.5.3

9.5.4

9.5.5  
779/169

# Die $PMaxFP_{UBV}$ -Semantik

Sei  $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{SUPP} : N^* \rightarrow \mathcal{F}_{IB}$  die eindeutig bestimmte größte Lösung von Gleichungssystem 9.5.3.1. Dann gilt:

## Definition 9.5.3.2 ( $PMaxFP_{UBV}$ -Semantik)

Die  $PMaxFP_{UBV}$ -Semantik für das von  $\mathcal{S}_{G^*}$  spezifizierte unidirektionale Bitvektorproblem ist definiert durch:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PMaxFP_{UBV}} : N^* \rightarrow \mathcal{F}_{IB}$$

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PMaxFP_{UBV}} = \lambda n. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{SUPP}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.5.1

9.5.2

**9.5.3**

9.5.4

9.5.5  
780/169

# Kapitel 9.5.4

## Minimale parallele Fixpunktsemantik

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.5.1

9.5.2

9.5.3

**9.5.4**

9.6

# Das $PMinFP_{UBV}$ -Gleichungssystem

...sei  $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{F}}_{IB}, \llbracket \cdot \rrbracket)$  die DFA-Spezifikation eines unidirektionalen Bitvektorproblems.

## Gleichungssystem 9.5.4.1 ( $PMinFP_{UBV}$ -GS)

$$\llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^V = \begin{cases} Id_{IB} & \text{falls } n = \mathbf{s}^* \\ \llbracket pfg(n) \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{*-VUPP} \circ \llbracket start(pfg(n)) \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^V \sqcup Cst_{if-stabil_n^{VUPP}} & \text{falls } n \in N_X^* \\ \sqcup \{ \llbracket m \rrbracket \circ \llbracket m \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^S \mid m \in pred_{G^*}(n) \} \sqcup Cst_{if-stabil_n^{VUPP}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.5.1

9.5.2

9.5.3

9.5.4

# Die $PMinFP_{UBV}$ -Semantik

Sei  $\llbracket \cdot \rrbracket_{S_{G^*}}^{VUPP} : N^* \rightarrow \mathcal{F}_{IB}$  die eindeutig bestimmte kleinste Lösung von Gleichungssystem 9.5.4.1. Dann gilt:

## Definition 9.5.4.2 ( $PMinFP_{UBV}$ -Semantik)

Die  $PMinFP_{UBV}$ -Semantik für das von  $S_{G^*}$  spezifizierte unidirektionale Bitvektorproblem ist definiert durch:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{S_{G^*}}^{PMinFP_{UBV}} : N^* \rightarrow \mathcal{F}_{IB}$$

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{S_{G^*}}^{PMinFP_{UBV}} = \lambda n. \llbracket n \rrbracket_{S_{G^*}}^{VUPP}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.5.1

9.5.2

9.5.3

9.5.4

9.5.5  
783/169

# Kapitel 9.6

## Unidirektionale Bitvektoranalysen: Koinzidenz

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

**9.6**

9.7

9.8

9.9



# Hauptergebnis: Korrektheit und Vollständigkeit

...für unidirektionale Bitvektorprobleme stimmen die parallelen

- operationellen Schnitt- und Vereinigung-über-alle-Pfade-Semantiken

mit ihren

- denotationellen Fixpunktgegenständen

überein: Paralleles Bitvektorkoinzidenztheorem 9.6.1.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

**9.6**

9.7

9.8

9.9

# Paralleles Bitvektorkoinzidenztheorem

...sei  $G^* = (N^*, E^*, s^*, e^*)$  ein paralleles Programm und  $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{F}}_{IB}, \llbracket \cdot \rrbracket)$  die DFA-Spezifikation eines unidirektionalen Bitvektorproblems.

## Paralleles Bitvektorkoinzidenztheorem 9.6.1

1. Die  $SUPP$ -Semantik und die  $PMaxFP_{UBV}$ -Semantik stimmen überein, d.h.:

$$\forall n \in N^*. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{SUPP} = \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PMaxFP_{UBV}}$$

2. Die  $VUPP$ -Semantik und die  $PMinFP_{UBV}$ -Semantik stimmen überein, d.h.:

$$\forall n \in N^*. \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{VUPP} = \llbracket n \rrbracket_{\mathcal{S}_{G^*}}^{PMinFP_{UBV}}$$

# Kapitel 9.7

## Anwendungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

**9.7**

9.8

9.9

# Verfügbarkeit v. Ausdrücken, tote Zuweisungen

Die lokalen Semantikfunktionen der **unidirektionalen Bitvektort probleme verfügbarer Ausdrücke** (Vorwärtsproblem) und **toter Zuweisungen** (Rückwärtsproblem) auf dem Verband der Wahrheitswerte können wie folgt spezifiziert werden:

Verfügbarkeit von Ausdruck  $t$  (vgl. Kap. 7.10.1):

$$\llbracket \rrbracket_{av}^t =_{df} \lambda n. \begin{cases} Const_{\text{wahr}} & \text{falls } Transp_n^t \wedge Comp_n^t \\ Id_{\text{IB}} & \text{falls } Transp_n^t \wedge \neg Comp_n^t \\ Const_{\text{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Tote Zuweisungen an Variable  $x$  (vgl. Kap. 12.3):

$$\llbracket \rrbracket_{dead}^x =_{df} \lambda n. \begin{cases} Const_{\text{wahr}} & \text{falls } \neg Used_n^x \wedge Mod_n^x \\ Id_{\text{IB}} & \text{falls } \neg (Used_n^x \vee Mod_n^x) \\ Const_{\text{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Globalisierung der lokalen Semantiken

...die lokalen Semantiken  $\llbracket n \rrbracket_{av}^t$  und  $\llbracket n \rrbracket_{dead}^x$  können durch den Übergang auf Bitvektoren auf die Mengen aller Ausdrücke  $T$  bzw. Variablen  $V$  eines Programms ausgedehnt werden:

$$\llbracket \cdot \rrbracket_{av}^T \text{ und } \llbracket \cdot \rrbracket_{dead}^V$$

und im Sinn der

- $SUPP$  - bzw.  $VUPP$ -Semantik

globalisiert werden, was zur Berechnung folgender Eigenschaften führt:

- $SUPP$ -Globalisierung: Total verfügbare Ausdrücke, total tote Zuweisungen.
- $VUPP$ -Globalisierung: Partiiell verfügbare Ausdrücke, partiiell tote Zuweisungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

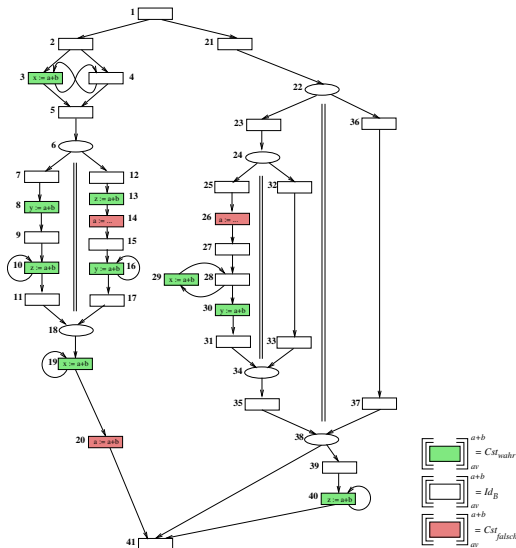
9.7

9.8

9.9

# Lokale Semantik: Verfügbarkeitsanalyse

...für Ausdruck  $a+b$ :



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

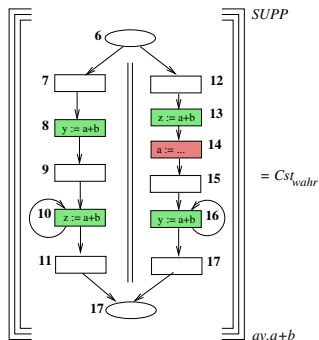
9.8

9.9

# SUPP-Semantikglobalisierung: 1. Iteration

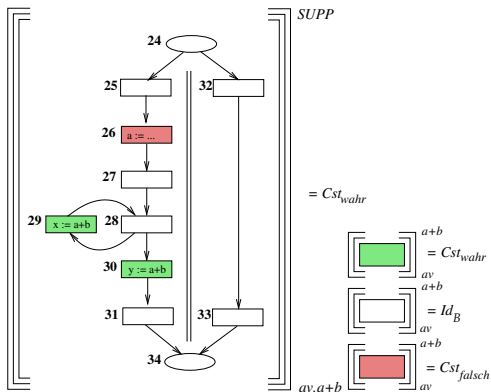
...entsprechend des 4-stufigen Verfahrens aus Kapitel 9.5.2:

$$G_{01} = G_{01}^{\text{seq}}$$



if-wirkmaechtig  $G_{01}^{\text{SUPP}} = \text{wahr}$

$$G_{02} = G_{02}^{\text{seq}}$$



if-wirkmaechtig  $G_{02}^{\text{SUPP}} = \text{wahr}$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

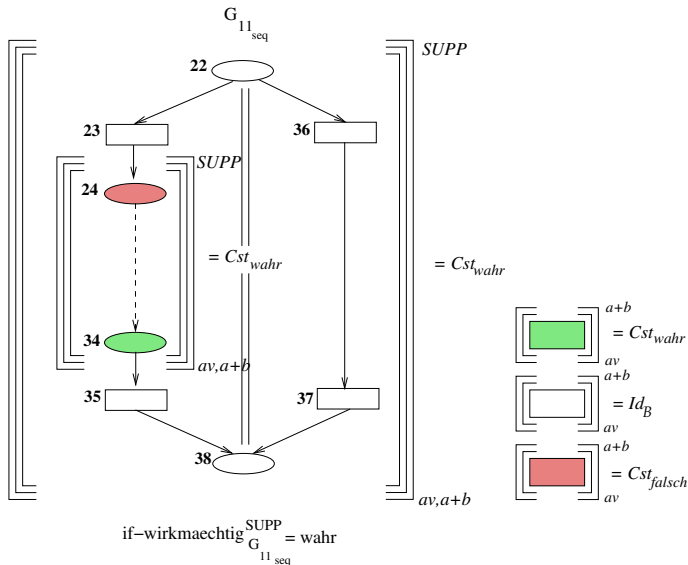
9.7

9.8

9.9

# SUPP-Semantikglobalisierung: 2. Iteration

...entsprechend des 4-stufigen Verfahrens aus Kapitel 9.5.2:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

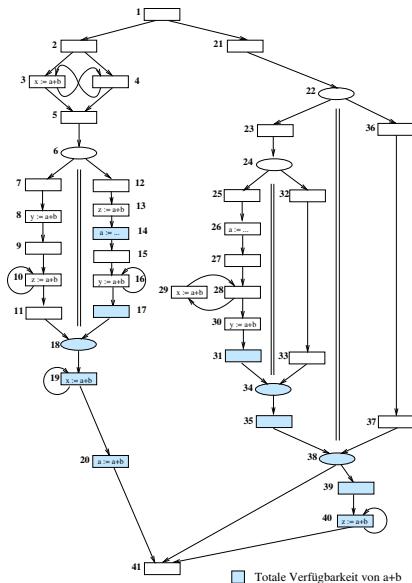
9.8

9.9



# Ergebnis der totalen Verfügbarkeitsanalyse

...für  $a+b$  an Knoteneingängen:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

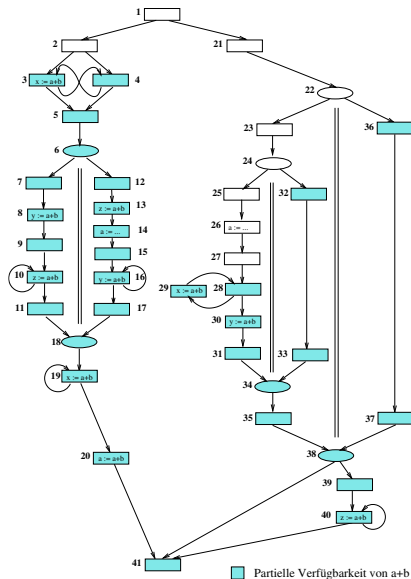
9.7

9.8

9.9

# Ergebnis der partiellen Verfügbarkeitsanalyse

...für  $a+b$  an Knoteneingängen:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Übungsaufgabe 9.7.1

Partielle Verfügbarkeitsanalyse für  $a+b$ :

1. Gib die *VUPP*-Semantikglobalisierung für das durchgehende Beispiel nach dem 1. und 2. Iterationsschritt des 4-stufigen Verfahrens aus Kapitel 9.5.2 an.

Tote-Zuweisungenanalyse für  $a$ :

2. Gib die *SUPP*- und *VUPP*-Semantikglobalisierungen für das durchgehende Beispiel nach dem 1. und 2. Iterationsschritt des 4-stufigen Verfahrens aus Kapitel 9.5.2 an.
3. An welchen Knotenausgängen ist Variable  $a$  total tot, an welchen partiell tot? Gib die entsprechend markierten Graphen nach dem Vorbild der totalen und partiellen Verfügbarkeitsanalyse für  $a+b$  an.

**Beachte:** Die Tote-Zuweisungenanalyse ist anders als die Verfügbarkeitsanalyse eine Rückwärtsanalyse.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Kapitel 9.8

## Zusammenfassung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

**9.8**

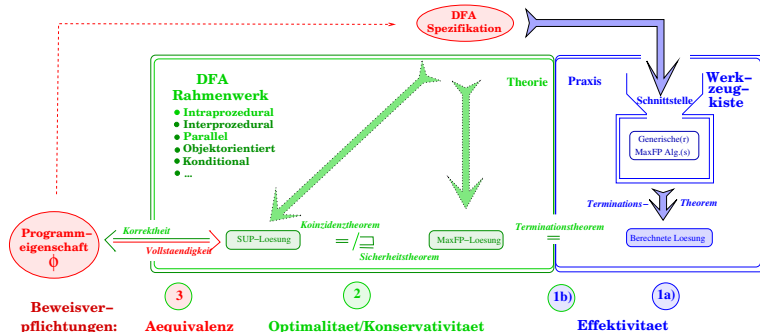
9.9

# Zusammenfassung

...mit dem **Parallelen Koinzidenztheorem 9.6.1** für **unidirektionale Bitvektorverfahren** ist das Versprechen aus **Kapitel 7.11** eingelöst, dass die

- einheitliche **Rahmen- und Werkzeugkistensicht** für **DFA**

über den Fall **sequentieller intraprozeduraler DFA** hinaus (s.a. **LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer**) erreichbar ist:



# Nur Mut!

...maßgeblich für die erfolgreiche Ausdehnung auf den Fall paralleler DFA ist die Beschränkung auf

- unidirektionale Bitvektorverfahren

für die sich die Probleme von Interferenz und Synchronisation paralleler Komponenten unter vollständiger Vermeidung des Zustandsexplosionsproblems ohne merklichen Mehraufwand im Vergleich zur DFA sequentieller Programme meistern lassen.

Verantwortlich dafür ist, dass  $\mathcal{F}_{IB}$  lediglich 3 Funktionen umfasst, deren äußere Semantik intuitiv oft wie folgt beschrieben werden kann:

- *Mod*: Modifikation
- *Use*: Benutzung (engl. *Use*)
- *Transp*: Transparenz

Deshalb: Nur MUT! MUT zur DFA paralleler Programme!

# Kapitel 9.9

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (1)



Jyh-Herng Chow, William L. Harrison. *Compile Time Analysis of Parallel Programs that share Memory*. In Conference Record of the 19th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 130-141, 1992.



Jyh-Herng Chow, William L. Harrison. *State Space Reduction in Abstract Interpretation of Parallel Programs*. In Proceedings of the International Conference on Computer Languages (ICCL'94), 277-288, 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (2)



Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Invariance Proof Methods and Analysis Techniques for Parallel Programs*. In Automatic Program Construction Techniques, A. W. Biermann, G. Guiho, Y. Kodratoff (Hrsg.), Macmillan Publishing Company, Kapitel 12, 243-271, 1984.



Matthew B. Dwyer, Lori A. Clarke. *Data Flow Analysis for Verifying Properties of Concurrent Programs*. In Proceedings of the 2nd ACM SIGSOFT Symposium on Foundations of Software Engineering (SFSE'94), Software Engineering Notes 19(5):62-75, 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (3)



Matthew B. Dwyer, Lori A. Clarke, Jamieson M. Cobleigh, Gleb Naumovich. *Flow Analysis for Verifying Properties of Concurrent Software Systems*. ACM Transactions on Software Engineering Methodology 13(4):359-430, 2004.



Jeanne Ferrante, Dirk Grunwald, Harini Srinivasan. *Compile-time Analysis and Optimization of Explicitly Parallel Programs*. Parallel Algorithms and Applications 12(1-3):21-56, 1997.



Dirk Grunwald, Harini Srinivasan. *Data Flow Equations for Explicitly Parallel Programs*. In Proceedings of the 4th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPoPP'93), ACM SIGPLAN Notices 28(7):159-168, 1993.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (4)



Jens Knoop. *Parallel Constant Propagation*. In Proceedings of the 4th European Conference on Parallel Processing (Europar'98), Springer-V., LNCS 1470, 445-455, 1998.



Jens Knoop. *Demand-driven Analysis of Explicitly Parallel Programs: An Approach based on Reverse Data-Flow Analysis*. In Proceedings of the 9th International Workshop on Compilers for Parallel Computers (CPC 2001), 151-162, 2001.



Jens Knoop, Bernhard Steffen. *Code Motion for Explicitly Parallel Programs*. In Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPoPP'99), ACM SIGPLAN Notices 34(8):13-24, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (5)



Jens Knoop, Bernhard Steffen, Jürgen Vollmer. *Parallelism for Free: Bitvector Analyses → No State Explosion!* In Proceedings of the 1st International Workshop on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'95), Springer-V., LNCS 1019, 264-289, 1995.



Jens Knoop, Bernhard Steffen, Jürgen Vollmer. *Parallelism for Free: Efficient and Optimal Bitvector Analyses for Parallel Programs.* ACM Transactions on Programming Languages and Systems 18(3):268-299, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (6)



Samuel P. Midkiff, José E. Moreira, Marc Snir. *A Constant Propagation Algorithm for Explicitly Parallel Programs*. International Journal of Computer Science 26(5):563-589, 1998.



Samuel P. Midkiff, David A. Padua. *Issues in the Optimization of Parallel Programs*. In Proceedings of the 18th International Conference on Parallel Processing (ICPP'90), Vol. II., 105-113, 1990.



Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Formal Methods: An Appetizer*. Springer-V., 2019. (Chapter 8, Concurrency)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (7)



Harini Srinivasan, Michael Wolfe. *Analyzing Programs with Explicit Parallelism*. In Proceedings of the 4th International Conference on Languages and Compilers for Parallel Computing (LCPC'91), Springer-V., LNCS 589, 405-419, 1991.



Jürgen Vollmer. *Data Flow Analysis of Parallel Programs*. In Proceedings of the IFIP WG 10.3 Working Conference on Parallel Architectures and Compilation Techniques (PACT'95), 168-177, 1995.



Michael Wolfe, Harini Srinivasan. *Data Structures for Optimizing Programs with Explicit Parallelism*. In Proceedings of the 1st International Conference of the Austrian Center for Parallel Computation, Springer-V., LNCS 591, 139-156, 1991.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

9.1

9.2

9.3

9.4

9.5

9.6

9.7

9.8

9.9

# Kapitel 10

Programmanalyse, Programmverifikation:  
Datenflussanalyse, axiomatische Verifikation  
gegenübergestellt

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

**Kap. 10**

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Programmanalyse (PA): Nach-, Vorbed.-Sicht

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

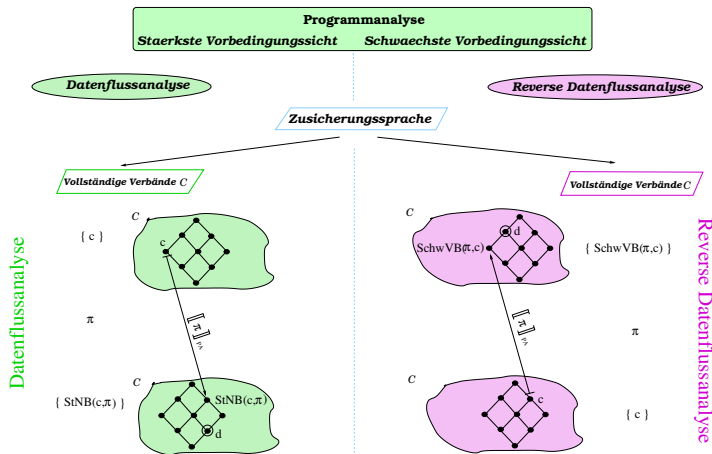
Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



$StNB(c, \pi) \in C$  muss erfüllen:

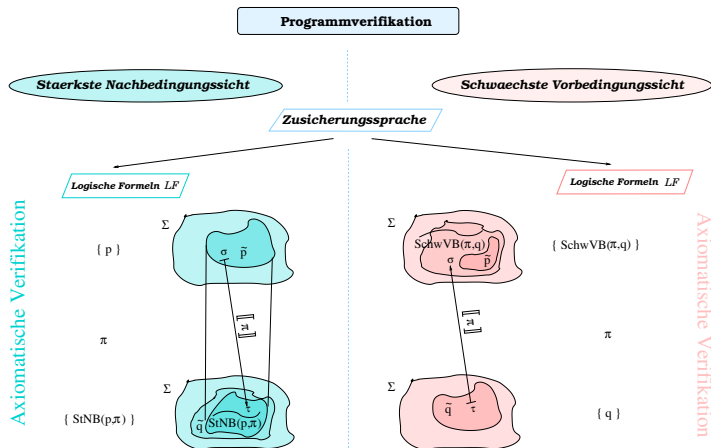
- (1)  $\models_{PA} \{c\} \pi \{StNB(c, \pi)\}$
- (2)  $\forall d \in C. \models_{PA} \{c\} \pi \{d\}$  impliziert  $StNB(c, \pi) \sqsubseteq d$

$SchwVB(\pi, c) \in C$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{PA} \{SchwVB(\pi, c)\} \pi \{c\}$
- (2)  $\forall d \in C. \models_{PA} \{d\} \pi \{c\}$  impliziert  $d \sqsubseteq SchwVB(\pi, c)$



# Programmverifikation (PV): Nach-, Vorbed.-S.



$\text{StNB}(p, \pi) \in LF$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{pv} \{ p \} \pi \{ \text{StNB}(p, \pi) \}$
- (2)  $\forall q \in LF. \models_{pv} \{ p \} \pi \{ q \}$  impliziert  $\text{StNB}(p, \pi) \Rightarrow q$

$\text{SchwVB}(\pi, q) \in LF$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{pv} \{ \text{SchwVB}(\pi, q) \} \pi \{ q \}$
- (2)  $\forall p \in LF. \models_{pv} \{ p \} \pi \{ q \}$  impliziert  $p \Rightarrow \text{SchwVB}(\pi, q)$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

**Kap. 10**

Teil IV

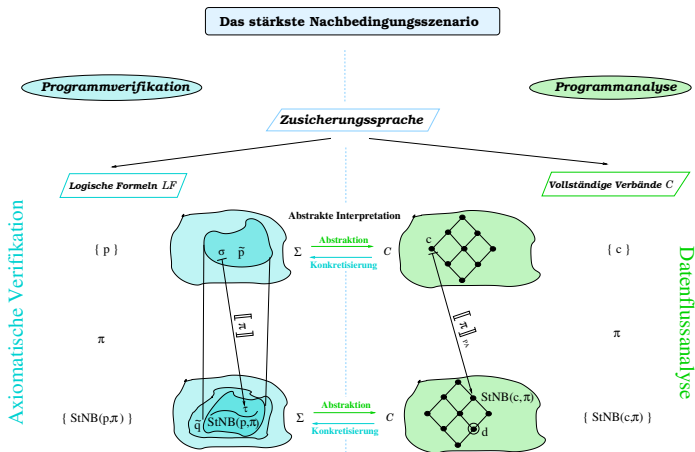
Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# PV, PA: Stärkste Nachbedingungssichten



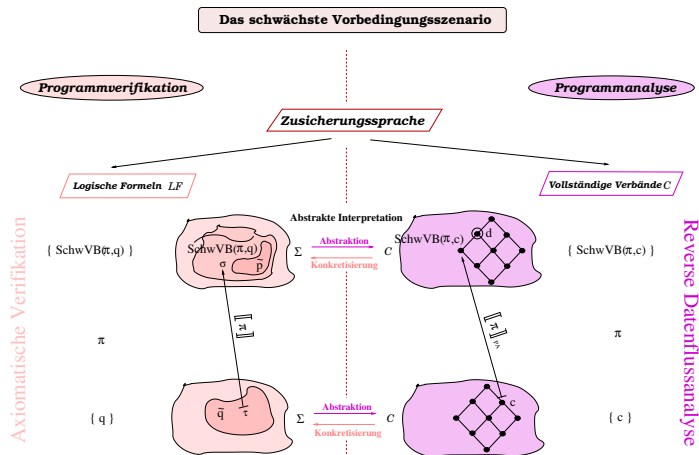
$\text{StNB}(p, \pi) \in LF$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{PV} \{ p \} \pi \{ \text{StNB}(p, \pi) \}$
- (2)  $\forall q \in LF. \models_{PV} \{ p \} \pi \{ q \}$  impliziert  $\text{StNB}(p, \pi) \Rightarrow q$

$\text{StNB}(c, \pi) \in C$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{PA} \{ c \} \pi \{ \text{StNB}(c, \pi) \}$
- (2)  $\forall d \in C. \models_{PA} \{ c \} \pi \{ d \}$  impliziert  $\text{StNB}(c, \pi) \sqsubseteq d$

# PV, PA: Schwächste Vorbedingungssichten



$SchwVB(\pi, q) \in LF$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{PV} \{ SchwVB(\pi, q) \} \pi \{ q \}$
- (2)  $\forall p \in LF. \models_{PV} \{ p \} \pi \{ q \}$  impliziert  $p \Rightarrow SchwVB(\pi, q)$

$SchwVB(\pi, c) \in C$  muss erfüllen:

- (1)  $\models_{PA} \{ SchwVB(\pi, c) \} \pi \{ c \}$
- (2)  $\forall d \in C. \models_{PA} \{ d \} \pi \{ c \}$  impliziert  $d \sqsubseteq SchwVB(\pi, c)$

# Teil IV

## Fixpunkte, Transformation und Optimalität

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

**Teil IV**

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

Optimalität = Korrektheit + Vollständigkeit

# Kapitel 11

## Chaotische Fixpunktiteration

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

**Kap. 11**

11.1

11.2

11.3

11.4

# Kapitel 11.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

# Motivation

...viele **praktisch relevante Probleme** in der **Informatik** lassen sich durch die

- **größte/kleinste Lösung**

eines **Systems rekursiver Gleichungen** beschreiben.

Bisherige **Beispiele** aus der Vorlesung:

- **Denotationelle Semantik** von **WHILE** (**Kap. 3**).
- **Maximale/minimale DFA-Fixpunktsemantik** (**Kap. 7**).
- **Minimale/maximale RDFA-Fixpunktsemantik** (**Kap. 8**).
- **Maximale/minimale Fixpunktsemantik paralleler Bitvektorprobleme** (**Kap. 9**).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4



# Bisherige Beispiele aus der Vorlesung

- Gleichungssystem zur denotationellen WHILE-Semantik:

$$\llbracket \text{skip} \rrbracket_{ds} = id$$

$$\llbracket x := t \rrbracket_{ds}(\sigma) = \sigma[\llbracket t \rrbracket_A(\sigma)/x]$$

$$\llbracket \pi_1; \pi_2 \rrbracket_{ds} = \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}$$

$$\llbracket \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \rrbracket_{ds} = \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \pi_1 \rrbracket_{ds}, \llbracket \pi_2 \rrbracket_{ds})$$

$$\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = \text{FIX } F$$

$$\text{mit } F g = \text{cond}(\llbracket b \rrbracket_B, g \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, id)$$

- Gleichungssystem zur maximalen DFA-Fixpunktsemantik:

$$inf(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = s \\ \bigsqcap \{ \llbracket (m, n) \rrbracket (inf(m)) \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

- Gleichungssystem zur minimalen RDFA-Fixpunktsemantik:

$$reqInf(n) = \begin{cases} c_q & \text{falls } n = q \\ \bigsqcup \{ \llbracket (n, m) \rrbracket_R(reqInf(m)) \mid m \in succ(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

# Allgemein(er)

...gesucht ist eine **extreme** (d.h., **kleinste/größte**) Lösung

$$x = f_1(x)$$

$$x = f_2(x)$$

$$\vdots$$

$$x = f_n(x)$$

eines **Systems rekursiver Gleichungen** über einer **Familie**

$$\mathcal{F} =_{df} \{f_k : D \rightarrow D \mid 1 \leq k \leq n\}$$

**monotonen** Funktionen auf einer **wohlfundierten partiellen Ordnung**  $(D, \sqsubseteq)$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

818/169

# Ziel

...das Lösen von Gleichungssystemen und das Berechnen von Fixpunkten von (Familien von) Funktionen als Frage der Perspektive erkennen:

- Lösen eines Systems rekursiver Gleichungen

$$x = f_1(x)$$

$$x = f_2(x)$$

$$\vdots$$

$$x = f_n(x)$$

- Berechnen eines gemeinsamen Fixpunktes einer Familie  $\mathcal{F}$  von Funktionen, d.h. eines gemeinsamen Fixpunkts  $x$  mit

$$x = f_k(x)$$

für alle  $1 \leq k \leq n$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

# Lösungs- und Fixpunktberechnung

...mittels chaotischer Iterationsalgorithmen.

Iterative Algorithmen zur Berechnung kleinster Lösungen bzw. kleinster Fixpunkte beginnen mit

- $\perp$ , dem kleinsten Element von  $D$ , als initialer Approximation von  $x$  und aktualisieren den jeweiligen Approximationswert durch Anwendung der Funktionen  $f_i$   $\mathcal{F}$  in einer beliebigen Reihenfolge, um so den kleinsten gemeinsamen Fixpunkt der Funktionen aus  $\mathcal{F}$  Schritt für Schritt besser und besser zu approximieren

und im Terminierungsfall exakt zu erreichen.

Diese Vorgehensweise wird als chaotische Iteration bezeichnet.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

820/169

# Wichtige Fixpunktergebnisse aus der Literatur

...möglicherweise das bekannteste und wichtigste Fixpunktergebnis:

- ▶ Das **Fixpunktheorem von Tarski** [1955]
  - Garantiert die Existenz kleinster Fixpunkte für monotone Funktionen auf vollständigen partiellen Ordnungen.
  - **Iterationsschema**:  $\vec{x}_0 = \perp$ ,  $\vec{x}_1 = \vec{f}(\vec{x}_0)$ ,  $\vec{x}_2 = \vec{f}(\vec{x}_1)$ , ..., wobei  $\vec{x}_i$  den Wert von  $\vec{x}$  nach der  $i$ -ten Iteration bezeichnet.
  - Vielfach anwendbar, dennoch oft noch zu speziell.

Verallgemeinerungen, Variationen des **Tarskischen Iterationsschemas**:

- ▶ **Vektor-Iterationen**: Robert [1976]
- ▶ **Asynchrone Vektor-Iterationen**: Baudet [1978], Cousot [1977], Üresin/Dubois [1989], Wei [1993]
- ▶ ...

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

821/169

# Vektor-Iterationen, asynchrone Iterationen

## Vektor-Iterationen (Robert [1976])

- Gegeben:  
Eine monotone Vektorfunktion  $\vec{f} = (f^1, \dots, f^m)$ .
- Gesucht:  
Kleinsten Fixpunkt  $\vec{x} = (x^1, \dots, x^m) \in D^m$  von  $\vec{f}$ .
- Iterationsschema:  
 $\vec{x}_0 = \vec{\perp}$ ,  $\vec{x}_1 = \vec{f}_{J_0}(\vec{x}_0)$ ,  $\vec{x}_2 = \vec{f}_{J_1}(\vec{x}_1)$ , ..., wobei  
 $J_i \subseteq \{1, \dots, m\}$  und die  $k$ -te Komponente  $\vec{f}_{J_i}(\vec{x}_i)^k$  von  
 $\vec{f}_{J_i}(\vec{x}_i)$  ist  $f^k(\vec{x}_i)$ , falls  $k \in J_i$ , und  $\vec{x}_i^k$  sonst.

## Asynchrone Vektor-Iterationen (Baudet [1978], Cousot [1977], Üresin/Dubois [1989], Wei [1993])

- $\vec{f}_{J_i}$  kann auf Komponenten früherer Vektoren der Iterationsfolge zurückgreifen  $\vec{x}_j$ ,  $j \leq i$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

822/169

# Klassiker zum Nachschlagen und Nachlesen

DER Klassiker mit DEM Fixpunkttheorem schlechthin:

- Alfred Tarski. *A Lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):285-309, 1955.

Zu chaotischer Iteration:

- F. Robert. *Convergence locale d'itérations chaotiques non linéaires*. Technical Report 58, Laboratoire d'Informatique, U.S.M.G., Grenoble, Frankreich, Dez. 1976.

Umfassender historischer Abriss zu Fixpunktergebnissen:

- Jean-Louis Lassez, V.L. Nguyen, Elizabeth A. Sonenberg. *Fixed Point Theorems and Semantics: A Folk Tale*. Information Processing Letters 14(3):112-116, 1982.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

# In der Folge

...Vorstellung eines weiteren **Fixpunkttheorems**, das **ohne** die übliche **Monotonieforderung** auskommt:

- Alfons Geser, Jens Knoop, Gerald Lüttgen, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Non-monotone Fixpoint Iterations to Resolve Second Order Effects*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 106-120, 1996.

...mit Anwendungen in **Kapitel 11.3, 12 und 13**.

Weitere **Fixpunktergebnisse**:

- Siehe **Anhang A5**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

824/169



# Kapitel 11.2

## Chaotisches Fixpunktiterationstheorem

# Vorbereitungen (1)

## Definition 11.2.1 (Partielle Ordnung, wohlfund. PO)

Eine **partielle Ordnung**

- ist ein Paar  $(D, \sqsubseteq)$  aus einer Menge  $D$  und einer reflexiven, antisymmetrischen und transitiven zweistelligen Relation  $\sqsubseteq$  über  $D$ , d.h.  $\sqsubseteq \subseteq D \times D$ .
- heißt **wohlfundiert**, falls jede Kette stationär ist.

## Definition 11.2.2 (Kette, stationäre Kette)

Eine **aufsteigende Kette**

- in einer partiellen Ordnung  $(D, \sqsubseteq)$  ist eine Folge  $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Elementen aus  $D$ ,  $d_i \in D$ , mit  $\forall i \in \mathbb{N}. d_i \sqsubseteq d_{i+1}$ .
- heißt **stationär**, falls  $\{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  endlich ist.

# Vorbereitungen (2)

## Definition 11.2.3 (Monotonie, Inflationärität)

Eine Funktion  $f : D \rightarrow D$  auf einer partiellen Ordnung  $(D, \sqsubseteq)$  heißt

- **monoton**, falls  $\forall d, d' \in D. d \sqsubseteq d' \Rightarrow f(d) \sqsubseteq f(d')$ .
- **inflationär** (oder **vergrößernd**), falls  $\forall d \in D. d \sqsubseteq f(d)$ .

## Definition 11.2.4 (Funktionssequenzen)

Für eine Familie von Funktionen  $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und ein Wort  $s =_{df} (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^*$  über  $\mathbb{N}$ ,  $s$  also eine Folge natürlicher Zahlen, bezeichnet  $f_s$  die **Funktionssequenz** der Funktionen  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , gegeben durch ihre sequentielle Komposition:

- $f_s =_{df} f_{s_n} \circ \dots \circ f_{s_1}$ .

# Strategien, Iterationsfolgen, faire Strategien

Sei  $(D, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung und  $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Familie inflationärer Funktionen  $f_k : D \rightarrow D$ .

## Definition 11.2.5 (Strategie, chaotische Iterationsfolge, faire Strategie)

1. Eine **Strategie** ist eine beliebige Funktion  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .
2. Eine Strategie  $\gamma$  und ein Element  $d \in D$  induzieren eine induktiv definierte **chaotische Iterationsfolge**  $f_\gamma(d) = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $d_i \in D$ , mit  $d_0 = d$  und  $d_{i+1} = f_{\gamma(i)}(d_i)$ .
3. Eine Strategie  $\gamma$  heißt **fair** gdw

$$\forall i, k \in \mathbb{N}. (f_k(d_i) \neq d_i \Rightarrow \exists j > i. d_j \neq d_i)$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

828/169

# Familien-Monotonie

...ein abgeschwächter Monotoniebegriff.

Sei  $(D, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung.

## Definition 11.2.6 (Familien-Monotonie)

Eine Familie  $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $f_k : D \rightarrow D$  heißt **familien-monoton**, falls für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt:

$$d \sqsubseteq d' \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}^*. f_k(d) \sqsubseteq f_s(d')$$

Es gilt:

## Lemma 11.2.7

Eine Familie  $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Funktionen ist **familien-monoton**, wenn alle Funktionen  $f_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , (im üblichen Sinn) **monoton** sind.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

# Beispiel: Familien-Monotonie (1)

...betrachte:

- $(\mathbb{N}_1, \leq)$ : die durch die Relation **kleiner oder gleich** partiell geordnete Menge der natürlichen Zahlen mit **1** als kleinstem Element:

$$1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6 \leq 7 \leq \dots$$

- $f : \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_1$  definiert durch:

$$\forall n \in \mathbb{N}_1. f(n) = \begin{cases} 4 & \text{falls } n = 1 \\ 3 & \text{falls } n = 2 \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

- $g : \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_1$  definiert durch:  $\forall n \in \mathbb{N}_1. g(n) = n + 1$
- $\mathcal{F} = \{f, g\}$  Familie von Funktionen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

830/169

# Beispiel: Familien-Monotonie (2)

## Proposition 11.2.8

1. Abbildungen  $f$  und  $g$  sind inflationär.
2. Abbildung  $g$  ist monoton.
3. Abbildung  $f$  ist nicht monoton.
4. Funktionenfamilie  $\mathcal{F} = \{f, g\}$  ist familien-monoton.

Beweis. Zu 1) und 2): Offensichtlich erfüllt.

Zu 3) Es gilt:

- $1 \leq 2$ , aber  $f(1) = 4 \not\leq 3 = f(2) (= f^i(2), i \in \mathbb{N}_1)$
- $1 \leq 3$ , aber  $f(1) = 4 \not\leq 3 = f(3) (= f^i(3), i \in \mathbb{N}_1)$
- $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(1, 2), (1, 3)\}. m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$

Zu 4): Wegen 3) reicht:

- $1 \leq 2 \wedge f(1) \not\leq f(2)$ , aber  $f(1) = 4 \leq 4 = g(g(2)) = g(f(2))$
- $1 \leq 3 \wedge f(1) \not\leq f(3)$ , aber  $f(1) = 4 \leq 4 = g(3)$

# Das 'monotoniefreie' chaot. Fixpunkttheorem

## Theorem 11.2.9 (Chaotisches Fixpunktiterationsth.)

Sei  $(D, \sqsubseteq)$  eine wohlfundierte partielle Ordnung mit kleinstem Element  $\perp$ ,  $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine familien-monotone Familie inflationärer Funktionen und  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine faire Strategie.

Dann gilt:

1. Die Funktionsfamilie  $\mathcal{F}$  hat einen kleinsten gemeinsamen Fixpunkt  $\mu\mathcal{F}$  mit  $\mu\mathcal{F} = \bigsqcup f_\gamma(\perp)$ .
2.  $\mu\mathcal{F}$  wird stets in einer endlichen Zahl von Iterationsschritten erreicht.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4



# Generischer Fixpunktalgorithmus

...als nichtdeterministischer 'Rumpf'-Algorithmus.

## Generischer Fixpunktalgorithmus 11.2.10

( Prolog: Initialisierung von  $d$  )

$d := \perp$ ;

( Hauptschleife: Iterative Fixpunktberechnung )

WHILE  $\exists k \in \mathbb{N}. d \neq f_k(d)$  DO

    CHOOSE  $k \in \mathbb{N}$  WITH  $d \sqsubset f_k(d)$

$d := f_k(d)$

    ESOOHC

OD.

Anmerkung: Wegen  $f_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , inflationär, folgt aus  $d \neq f_k(d)$  unmittelbar  $d \sqsubset f_k(d)$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

833/169

# Kapitel 11.3

## Anwendungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

**11.3**

11.3.1

# Kapitel 11.3.1

## Vektor-Iterationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

**11.3.1**

# Vorbereitung

Sei

- $(C, \sqsubseteq_C)$  wohlfundierte partielle Ordnung
- $D =_{df} C^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , partiell geordnet durch die punktweise Ausdehnung von  $\sqsubseteq_C$  auf  $D$
- $f : D \rightarrow D$  monotone Funktion auf  $D$

Anstelle der **Iterationsfolge**

$$d_0 = \perp, \quad d_1 = f(\perp), \quad d_2 = f(d_1), \quad \dots$$

nach dem Schema aus **Tarskis Fixpunkttheorem**, können wir zu einer Zerlegung von  $f$  in seine Komponenten  $f^k$  übergehen mit

$$f(d) = (f^1(d), \dots, f^n(d))$$

und zu selektiven Aktualisierungen durch ausgewählte **Komponentenfunktionen**, wobei wir mit oberen Indizes  $i$  die  $i$ -te Komponente eines Vektors der Länge  $n$  bezeichnen.

# Vektor-Iterationen (1)

## Definition 11.3.1.1 (Vektor-Iteration)

Eine **Vektor-Iteration** ist eine Iterationsfolge der Form

$$d_0 = \perp, \quad d_1 = f_{J_0}(\perp), \quad d_2 = f_{J_1}(d_1), \quad \dots$$

mit  $J_i \subseteq \{1, \dots, n\}$  und wo

$$f_J(d)^i =_{df} \begin{cases} f^i(d) & \text{falls } i \in J \\ d^i & \text{sonst} \end{cases}$$

selektiv die durch  $J$  spezifizierten Komponentenfunktionen anwendet und die entsprechenden Komponentenwerte aktualisiert.

# Vektor-Iterationen (2)

Beachte:

- Die Menge der gemeinsamen Fixpunkte der Funktionenfamilie  $\mathcal{F} =_{df} \{f_J \mid J \subseteq \{1, \dots, n\}\}$  ist gleich der Menge der Fixpunkte von  $f : D \rightarrow D$ .
- Jede Funktion  $f_J$  ist monoton, da  $f$  monoton ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

# Anwendung von Fixpunkttheorem 11.2.4

...zur Modellierung der **Vektor-Iteration**.

**Erforderlich:** Verallgemeinerung des Strategiebegriffs auf einen Strategiebegriff für **Mengen**.

## Definition 11.3.1.2 (Faire Mengenstrategie)

1. Eine **Mengenstrategie** ist eine (beliebige) Funktion

$$\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}).$$

**Intuition:**  $\gamma(i)$  liefert eine Menge  $J_i$  von Indizes aus der Menge  $\{1, \dots, n\}$ , deren zugehörige Komponenten im  $i$ -ten Schritt der Iteration aktualisiert werden sollen.

2. Eine Mengenstrategie heißt **fair** gdw

$$\forall i \in \mathbb{N}, J \subseteq \mathbb{N}. (f_J(d_i) \neq d_i \Rightarrow \exists j > i. d_j \neq d_i)$$

# Modellierungsergebnisse (1)

Sei

- $(C, \sqsubseteq_C)$  wohlfundierte partielle Ordnung mit kleinstem Element  $\perp_C$ .
- $D =_{df} C^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , partiell geordnet durch die punktweise Ausdehnung von  $\sqsubseteq_C$  auf  $D$ .

## Lemma 11.3.1.3 (Ketten durch Vektor-Iteration)

Sei  $f = (f^1, \dots, f^n)$  eine monotone Funktion auf  $D$ , sei  $\mathcal{F} =_{df} \{f_J \mid J \subseteq \{1, \dots, n\}\}$  eine Familie von Funktionen  $f_J : D \rightarrow D$  im Sinn von Definition 11.3.1.1 und sei  $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$  eine Mengenstrategie.

Dann gilt:  $f_\gamma(\perp)$  liefert eine Kette.

Das heißt: Jede chaotische Iterationsfolge liefert eine Kette.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

840/169



# Modellierungsergebnisse (2)

## Theorem 11.3.1.4 (Chaotische Vektor-Iteration)

Sei  $f = (f^1, \dots, f^n)$  eine monotone Funktion auf  $D$ , sei  $\mathcal{F} =_{df} \{f_J \mid J \subseteq \{1, \dots, n\}\}$  eine Familie von Funktionen  $f_J : D \rightarrow D$  gemäß Definition 11.3.1.1 und sei  $\gamma$  eine faire Mengenstrategie.

Dann gilt:

1.  $\bigsqcup f_\gamma(\perp)$  ist der kleinste Fixpunkt  $\mu\mathcal{F}$  der Familie von Funktionen  $\mathcal{F}$ .
2.  $\mu\mathcal{F}$  wird stets in einer endlichen Zahl von Iterationsschritten erreicht.
3. Die kleinsten Fixpunkte von  $f$  und  $\mathcal{F}$  stimmen überein, d.h.:

$$\mu\mathcal{F} = \mu f$$

# Anmerkungen

Die Aussage von Theorem 11.3.1.4

- ist ein Spezialfall des Chaotischen Fixpunktiterationstheorems 11.2.9 für Vektor-Iterationen und folgt zusammen mit Lemma 11.3.1.3.

Für  $|\mathcal{F}| = 1$  reduziert sich

- die Aussage von Theorem 11.3.1.4 auf Tarskis Fixpunkttheorem für den Fall wohlfundierter partieller Ordnungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

# Kapitel 11.3.2

## Datenflussanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

# Anwendung von Fixpunkttheorem 11.2.4

...am Beispiel **intraprozeduraler DFA** und der **Gleichungssysteme** für die **MaxFP**- und **MinFP**-Semantik.

Das **Gleichungssystem** der **MaxFP**-Semantik:

$$\mathit{inf}(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = s \\ \bigcap \{ \llbracket (m, n) \rrbracket(\mathit{inf}(m)) \mid m \in \mathit{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die **MaxFP**-Semantik:

...definiert als die größte Lösung des **MaxFP**-Gleichungssysteme, bezeichnet mit:

$$\nu\text{-}\mathit{inf}_{c_s} : N \rightarrow \mathcal{C}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

8447169

# Dual zur *MaxFP*-Semantik

...die *MinFP*-Semantik.

Das Gleichungssystem der *MinFP*-Semantik:

$$\text{inf}(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = s \\ \bigsqcup \{ \llbracket (m, n) \rrbracket (\text{inf}(m)) \mid m \in \text{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die *MinFP*-Semantik:

...definiert als die kleinste Lösung des *MinFP*-Gleichungssystems, bezeichnet mit:

$$\mu\text{-inf}_{c_s} : N \rightarrow \mathcal{C}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

# Generischer *MinFP*-Fixpunktalgorithmus

## Generischer *MinFP*-Fixpunktalgorithmus 11.3.2.1

( Prolog: Initialisierung von *inf* und *workset* )

$inf[s] := c_s;$

FORALL  $n \in N \setminus \{s\}$  DO  $inf[n] := \perp$  OD;

$workset := N;$

( Hauptschleife: Iterative Fixpunktberechnung )

WHILE  $workset \neq \emptyset$  DO

    CHOOSE  $k \in workset$

$workset := workset \setminus \{k\};$

$new := \bigsqcup \{ \llbracket (m, k) \rrbracket (inf[m]) \mid m \in pred_G(k) \};$

        IF  $new \sqsubset inf[k]$  THEN

$inf[k] := new;$

$workset := workset \cup succ_G(k)$

        FI

ESOOHC OD.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

846/169

# Zur Fixpunktcharakt. der *MinFP*-Lösung (1)

## Vorbereitung:

Sei

- $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$  ein beliebiger, fest gewählter Flussgraph.
- $n =_{df} |N|$  die Zahl der Knoten in  $N$ .
- $\hat{\mathcal{C}} =_{df} (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top)$  ein vollständiger Verband.
- $\llbracket \cdot \rrbracket : E \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$  eine monotone lokale DFA-Semantik für  $G$ .

Die Knoten der Menge  $N$  von  $G$  werde mit der Menge

- der natürlichen Zahlen  $\{1, \dots, n\}$  als **Ordnungsnummern** identifiziert.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

# Zur Fixpunktcharakt. der *MinFP*-Lösung (2)

Sei  $D =_{df} \mathcal{C}^n$  versehen mit der punktweisen Ausdehnung der Ordnungsrelation  $\sqsubseteq_{\hat{\mathcal{C}}}$  von  $\hat{\mathcal{C}}$  auf  $D$ .

Mit dieser Festlegung gilt:

- $(D, \sqsubseteq)$  ist eine wohlfundierte partielle Ordnung.
- Ein Element  $d = (d^1, \dots, d^n) \in D$  stellt eine Annotation des Flussgraphen dar, wobei der Knoten mit der Ordnungsnummer  $k$  mit dem Verbandselement  $d^k \in \mathcal{C}$  als Wert benannt ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1



# Zur Fixpunktcharakt. der *MinFP*-Lösung (3)

Für jeden Knoten des Flussgraphen definieren wir jetzt die knotenspezifische Funktion  $f^k : D \rightarrow C$  durch

$$f^k(d^1, \dots, d^n) =_{df} d'^k$$

mit

$$d'^k = \bigsqcup \{ \llbracket (m, k) \rrbracket (d^m) \mid m \in \text{pred}_G(k) \}$$

wobei  $k$  die Ordnungsnummer des Knotens ist.

**Intuitiv:**  $f^k$  beschreibt den Effekt der Aktualisierung der DFA-Information am Knoten mit der Ordnungsnummer  $k$  entsprechend des Vorgehens im **Gen. Fixpunktalgorithmus 11.3.2.1**:

$$\text{new} := \bigsqcup \{ \llbracket (m, k) \rrbracket (\text{inf}[m]) \mid m \in \text{pred}_G(k) \}$$

entspricht:

$$d'^k = \bigsqcup \{ \llbracket (m, k) \rrbracket (d^m) \mid m \in \text{pred}_G(k) \}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

849/169

# Charakterisierungsergebnisse

## Lemma 11.3.2.2 (Lösung gdw. Fixpunkt)

Für alle Elemente  $d \in D$  gilt:

$d$  ist eine Lösung des *MinFP-Gleichungssystems* gdw  $d$  ist ein Fixpunkt der Funktion  $f =_{df} (f^1, \dots, f^n)$ .

## Theorem 11.3.2.3 (Korrektheit und Terminierung)

Jeder Lauf des *generischen MinFP-Fixpunktalgorithmus 11.3.2.1* terminiert mit der *MinFP-Semantik* von  $G$  für die lokale DFA-Semantik  $\llbracket \cdot \rrbracket$  und die Startzusicherung  $c_s$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

8507169

# Anmerkungen

...zum Beweis von Theorem 11.3.2.3:

- Der *MinFP*-Fixpunktalgorithmus 11.3.2.1 folgt dem Muster von Rumpfalgorithmus 11.2.10 mit  $\mathcal{F} = \{f_{\{k\}} \mid 1 \leq k \leq n\}$ .
- Die Verwendung von Variable *workset*, die die Invariante  $\text{workset} \supseteq \{k \mid f_{\{k\}}(d) \neq d\}$  erfüllt, trägt zu höherer Effizienz bei.
- Offensichtlich gilt:  $f$  ist monoton.

Damit sind insgesamt die Voraussetzungen von Theorem 11.3.1.4 erfüllt, womit Theorem 11.3.2.4 folgt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.3.1

8517169

...weitere Anwendungen des 'monotoniefreien' chaotischen  
Fixpunktiterationstheorems 11.2.9 in Kapitel 12 und 13 zum  
Beweis der Optimalität der Transformation für die

- Elimination partiell toten Codes
- Elimination partiell redundanter Anweisungen

Klassische Fixpunkttheoreme sind dafür nicht anwendbar.

# Kapitel 11.4

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11


11.1

11.2

11.3

**11.4**

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 11 (1)

-  Nicolas Bourbaki. *Sur la théorème de Zorn*. Archiv der Mathematik 2:434-437, 1949/50.
-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Constructive Versions of Tarski's Fixed Point Theorems*. Pacific Journal of Mathematics 82(1):43-57, 1979.
-  Alfons Geser, Jens Knoop, Gerald Lüttgen, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Non-monotone Fixpoint Iterations to Resolve Second Order Effects*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 106-120, 1996.
-  Jean-Louis Lassez, V.L. Nguyen, Elizabeth A. Sonenberg. *Fixed Point Theorems and Semantics: A Folk Tale*. Information Processing Letters 14(3):112-116, 1982.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11





11.1

11.2

11.3

11.4

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 11 (2)

-  F. Robert. *Convergence locale d'itérations chaotiques non linéaires*. Technical Report 58, Laboratoire d'Informatique, U.S.M.G., Grenoble, Frankreich, Dez. 1976.
-  Alfred Tarski. *A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its Applications*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):285-309, 1955.
-  Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008. (Kapitel 5, Fixed Points)
-  Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. MIT Press, 1993. (Chapter 8, Introduction to domain theory; Chapter 9, Recursion equations; Chapter 10, Recursion techniques)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

11.1

11.2

11.3

11.4

855/169

# Kapitel 12

## Unnötige Anweisungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

**Kap. 12**

12.1

12.2

12.3

856/169



# Kapitel 12.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

...Anweisungen sind unnötig, wenn sich durch Streichen das 'beobachtbare' Programmverhalten, die Programmsemantik nicht ändern und erhalten bleiben.

In diesem Sinn unnötige Anweisungen treten in vielerlei Form auf, darunter als:

- ▶ Unerreichbare Anweisungen (Kapitel 12.2)
- ▶ Partiell tote/geisterhafte Anweisungen (Kapitel 12.3)
- ▶ Partiell redundante Anweisungen (Kapitel 12.4)
- ▶ ...

# Transformationen

...zur **Beseitigung** (oder **Elimination**) **unnötiger Anweisungen** zielen darauf, die **Performanz** eines Programms zu verbessern, ohne dadurch das beobachtbare Verhalten oder die Semantik zu verändern.

Um dies handhabbar zu machen, ist es erforderlich, die Begriffe

- **beobachtbares Verhalten**
- zu **erhaltende Semantik**

zu **präzisieren** und **exakt** zu fassen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Transformationen: Korrektheit, Vollständigkeit

...ohne diese Präzisierungen ist es weder möglich für Transformationen

- Korrektheit

zu definieren und nachzuweisen, noch für Optimierungstransformationen, ob, wann und in welchem Sinn sie

- vollständig (oder optimal) sind.

Die Wahl der Präzisierung beeinflusst Korrektheits- und Vollständigkeits- (oder Optimalitäts-) Begriff maßgeblich.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Am Beispiel von Transformationen

..zur **Elimination unnötiger Anweisungen**:

Die Wahl der **Präzisierung** beeinflusst **maßgeblich**, ob, wann und in welchem Sinn eine

- **Anweisung** als **unnötig**

angesehen werden kann.

Erst die **Präzisierung** auch dieses Begriffs erlaubt es, entsprechende (Eliminations-) Transformationen zu definieren und ihre **Vollständigkeit** (oder **Optimalität**) in einem **wohldefinierten Sinn** zu definieren und nachzuweisen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

861/169

# Korrektheit und Vollständigkeit informell

Eine (Programm-) Transformation ist

- **korrekt**, wenn sie das beobachtbare Verhalten, die Semantik eines Programms erhält.

Eine Transformation für die Beseitigung unnötiger Anweisungen ist

- **vollständig** (oder **optimal**), wenn sie **alle** in einem wohldefinierten Sinn unnötigen Anweisungen in einem Programm beseitigt.

# Relativität von Korrektheit und Vollständigkeit

...Korrektheit und Vollständigkeit (oder Optimalität) von Transformationen sind keine absoluten, sondern relative Eigenschaften:

- Korrekt relativ zum beobachtbaren Verhalten, der Programmsemantik.
- Vollständig (oder optimal) relativ zu einem (oder mehreren) Optimierungsziel(en).

Wichtig: Beide Definitionen erlauben triviale Lösungen: Die

- identische Programmtransformation `tunix` ist korrekt.
- alles streichende Programmtransformation `streichalles` ist vollständig.

# Offenbar

...sind weder `tunix` noch `streichalles` sinnvoll oder gewollt:

- `tunix`: Stets korrekt, selten vollständig.
- `streichalles`: Stets vollständig, selten korrekt.

Mit der Suche nach Transformationen, die

- `korrekt` und `vollständig`

sind, aber auch

- `wirksam` (nicht nur in der `Theorie`, auch in der `Praxis`)
- `effizient` (in der `Theorie`)
- `performant` und `skalierbar` (in der `Praxis`)
- `elegant` und `einfach` (in `Theorie` und `Praxis`)
- ...

beginnt **Informatik!**



# Für die Entwicklung von Transformationen

...zur Beseitigung unnötiger Anweisungen sind somit Antworten zentral auf:

- Beobachtbares Verhalten, zu erhaltende Semantik: Wie definiert?
- Anwendungsbereich: Wie ist Unnötigkeit definiert?
- Korrektheit: Werden höchstens in diesem Sinn unnötige Anweisungen gestrichen?
- Vollständigkeit (oder Optimalität): Werden alle in diesem Sinn unnötige Anweisungen gestrichen?

...was wir für verschiedene Präzisierungen von:

- Beobachtbares Verhalten, zu erhaltende Semantik
- Unnötigkeit von Anweisungen

untersuchen und beantworten werden.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Vereinbarungen zu Flussgraphen

...in Kapitel 12 gehen wir davon aus, dass Flussgraphen

- knotenbenannt

sind und dass

- $\mathcal{G}$  die Menge aller Flussgraphen (oder: Programme)  $G$
- $\mathcal{AM}$  die Menge aller Anweisungsmuster  $\alpha, \alpha'$  der Form  
 $\alpha \equiv x := t, \alpha' \equiv x' := t'$

bezeichnen.

# Kapitel 12.2

## Unerreichbare Anweisungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

**12.2**

12.2.1

867/169

# Zusatzvereinbarungen für Flussgraphen

...für Kapitel 12.2.

Für jeden Flussgraphen  $G = (N, E, s) \in \mathcal{G}$  gilt:

- $s \in N$  hat keine Vorgänger:  $\text{pred}(s) = \emptyset$

und bezeichnet einen als **Startknoten** ausgezeichneten Knoten in  $G$ .

**Wichtig:** Anders als bisher verlangen wir nicht, dass es einen als Endknoten ausgezeichneten Knoten (ohne Nachfolger) in  $G$  gibt und jeder Knoten  $n \in N$  auf einem Pfad von  $s$  nach  $e$  liegt.

**Bezeichnung:**

- $\text{src}(e)$ ,  $\text{dst}(e)$ : Anfangs- bzw. Endknoten der Kante  $e$ .

# Kapitel 12.2.1

## Statisch unerreichbare Anweisungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1

869/169

# Statisch unerreichbare Knoten und Kanten

...sei  $G = (N, E, s)$  ein (knotenbenannter) Flussgraph.

## Definition 12.2.1.1 (Stat. unerr. Knoten/Kanten)

1. Ein Knoten  $n \in N$  ist **statisch unerreichbar** gdw  $n$  auf keinem Pfad vom Startknoten des Flussgraphen aus erreichbar ist, d.h., wenn:

$$\mathbf{P}_G[s, n] = \emptyset$$

2. Eine Kante  $e \in E$  ist **statisch unerreichbar** gdw der Anfangsknoten von  $e$  **statisch unerreichbar** ist, d.h., wenn:

$$\mathbf{P}_G[s, \text{src}(e)] = \emptyset$$

3. Knoten oder Kanten, die nicht statisch unerreichbar sind, heißen **statisch erreichbar**.

# Statisch unerreichbare Anweisungen

...eine 'syntaktische' Eigenschaft.

## Definition 12.2.1.2 (Statisch unerreichbare Anw.)

Eine Anweisung  $\alpha$  am Knoten  $n \in N$  in  $G$  ist **statisch unerreichbar** gdw  $n$  (und damit  $\alpha$ ) statisch unerreichbar ist.

# Ziel

...Elimination statisch unerreichbarer Knoten und Kanten als Optimierungstransformation  $OT$  zur

- Elimination statisch unerreichbarer Anweisungen als spezieller Klasse  $\mathcal{K}$  unnötiger Anweisungen

zusammen mit dem Nachweis, dass  $OT$

- Programmsemantik und beobachtbares Verhalten

in einem bestimmten Sinn erhält und für die Elimination unnötiger Anweisungen aus  $\mathcal{K}$

- korrekt, vollständig und optimal ist.



Beobachtbares Verhalten:

- Mengen von Programmezuständen an Programmpunkten.

## Definition 12.2.1.3 (Semantische Äquivalenz)

Zwei Programme  $G = (N, E, s)$  und  $G' = (N', E', s')$  heißen **semantisch äquivalent** bzgl. der nichtdeterministischen **Aufsammlungsemantik** (oder: **streichäquivalent**) (in Zeichen:  $G \approx_{\llbracket \cdot \rrbracket} G'$ ) gdw:

1.  $N' \subseteq N, E' \subseteq E, s = s'$
2.  $\forall n \in N'. \llbracket n \rrbracket_{G'}^{CS} = \llbracket n \rrbracket_G^{CS} \quad (\subseteq \Sigma)$
3.  $\forall n \in N \setminus N'. \llbracket n \rrbracket_G^{CS} = \emptyset$

# Beobachtungsäquivalenz

## Definition 12.2.1.4 (Beobachtungsäquivalenz)

Zwei Programme  $G$  und  $G'$  heißen **beobachtungsäquivalent** (in Zeichen:  $G \approx_B G'$ ) gdw  $G$  und  $G'$  sind streichäquivalent:  $G \approx_{[\ ]} G'$ .

## Lemma 12.2.1.5 (Beobachtungsäquivalenz)

Seien  $G = (N, E, s)$  und  $G' = (N', E', s')$  zwei Programme. Dann sind äquivalent:

1.  $G$  und  $G'$  sind beobachtungsäquivalent ( $G \approx_B G'$ ).
2.  $G$  und  $G'$  sind streichäquivalent ( $G \approx_{[\ ]} G'$ ).
3.  $(\forall n \in N \cap N'. \mathbf{P}_{G'}[s', n] = \mathbf{P}_G[s, n]) \wedge$   
 $(\forall n \in N \setminus (N \cap N'). \mathbf{P}_G[s, n] = \emptyset) \wedge$   
 $(\forall n \in N' \setminus (N \cap N'). \mathbf{P}_{G'}[s, n] = \emptyset)$

# Unnötige Anweisungen, Knoten und Kanten

## Definition 12.2.1.6 (Unnötig)

Seien  $G = (N, E, s)$  und  $G' = (N', E', s')$  zwei beobachtungs-äquivalente Programme mit  $N' \subseteq N$ ,  $E' \subseteq E$  und  $s = s'$ .

Dann heißt

1. eine Anweisung in  $G$  **unnötig**, wenn sie einen Knoten  $n \in N \setminus N'$  benennt.
2. ein Knoten  $n \in N$  **unnötig**, wenn er mit einer unnötigen Anweisung benannt ist.
3. eine Kante  $e \in E$  **unnötig**, wenn ihr Anfangsknoten unnötig ist.

# Klasse $\mathcal{K}$ unnötiger Anweisungen

## Definition 12.2.1.7 (Klasse $\mathcal{K}$ unnötiger Anw.)

1.  $\mathcal{K}$  ist die Klasse von Anweisungen, Knoten und Kanten von Programmen, die **unnötig** sind im Sinn von **Definition 12.2.1.6**.
2. Eine Anweisung, Knoten oder Kante aus  $\mathcal{K}$  heißt  **$\mathcal{K}$ -unnötige Anweisung**,  **$\mathcal{K}$ -unnötiger Knoten** oder  **$\mathcal{K}$ -unnötige Kante** (oder  **$\mathcal{K}$ -unnötig**).

Bezeichne für ein Programm  $G \in \mathcal{G}$ :

- $\mathcal{U}_G^A$ : Die Menge  $\mathcal{K}$ -unnötiger Anweisungen in  $G$ .
- $\mathcal{U}_G^N$ : Die Menge  $\mathcal{K}$ -unnötiger Knoten in  $G$ .
- $\mathcal{U}_G^E$ : Die Menge  $\mathcal{K}$ -unnötiger Kanten in  $G$ .

# $\mathcal{K}$ -Korrektheitstheorem

## Theorem 12.2.1.8 ( $\mathcal{K}$ -Korrektheit)

Seien  $G = (N, E, \mathbf{s})$  und  $G' = (N', E, \mathbf{s}')$  zwei Programme mit:

- $N' \subseteq N, E' \subseteq E, \mathbf{s} = \mathbf{s}'$
- $\forall n \in N \setminus N'. n \in \mathcal{U}_G^N$
- $\forall e \in E \setminus E'. n \in \mathcal{U}_G^E$

Dann gilt:

1.  $G$  und  $G'$  sind streich- und beobachtungsäquivalent:

$$G \approx_{\parallel} G' \wedge G \approx_{\mathcal{B}} G'$$

2.  $G'$  enthält höchstens so viele  $\mathcal{K}$ -unnötige Anweisungen wie  $G$ :

$$\mathcal{U}_{G'}^A \subseteq \mathcal{U}_G^A$$

## Definition 12.2.1.9 (Eliminationstransformation)

1. Eine Programmtransformation, die angewendet auf ein Programm  $G = (N, E, \mathbf{s})$  ein Programm  $G' = (N', E', \mathbf{s}')$  liefert mit  $N' \subseteq N$ ,  $E' \subseteq E$  und  $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$  heißt **Eliminations-transformation**.
2. Ist  $ET$  eine Eliminationstransformation und  $G$  ein Programm, so bezeichnet  $G_{ET}$  dasjenige Programm, das aus der Anwendung von  $ET$  auf  $G$  entsteht.
3. Die Menge aller Eliminationstransformationen wird mit  $\mathcal{ET}$  bezeichnet.

# Korrekte Eliminationstransformationen

...korrekte Transformationen erzeugen beobachtungsäquivalente Programme.

## Definition 12.2.1.10 (Korrekte Eliminationstransf.)

1. Eine Eliminationstransformation  $ET \in \mathcal{ET}$  heißt korrekt gdw für alle Programme  $G$  gilt, dass  $G$  und  $G_{ET}$  beobachtungsäquivalent sind:

$$G \approx_B G_{ET} \quad (\Leftrightarrow \quad G \approx_{\llbracket \cdot \rrbracket} G_{ET})$$

2. Die Menge aller korrekten Eliminationstransformationen wird mit  $\mathcal{ET}_{korr}$  bezeichnet.

# $\mathcal{K}$ -vollständige Eliminationstransformationen

... $\mathcal{K}$ -vollständige Transformationen eliminieren alle  $\mathcal{K}$ -unnötigen Anweisungen.

Definition 12.2.1.11 (  $\mathcal{K}$ -vollst. Eliminationstransf.)

1. Eine Eliminationstransformation  $ET \in \mathcal{ET}$  heißt  $\mathcal{K}$ -vollständig gdw für alle Programme  $G$  gilt, dass  $G_{ET}$  frei von  $\mathcal{K}$ -unnötigen Anweisungen ist:

$$\mathcal{U}_{G_{ET}}^A = \emptyset$$

2. Die Menge aller  $\mathcal{K}$ -vollständigen Eliminationstransformationen wird mit  $\mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-vollst}}$  bezeichnet.



# $\mathcal{K}$ -optimale Eliminationstransformationen

... $\mathcal{K}$ -optimale Transformationen eliminieren alle und ausschließlich  $\mathcal{K}$ -unnötige Anweisungen.

## Definition 12.2.1.12 ( $\mathcal{K}$ -optimale Eliminationstr.)

1. Eine Eliminationstransformation  $ET \in \mathcal{ET}$  heißt  $\mathcal{K}$ -optimal gdw  $ET$  ist korrekt und  $\mathcal{K}$ -vollständig:

$$\forall G \in \mathcal{G}. G \approx_B G_{ET} \wedge \mathcal{U}_{G_{ET}}^A = \emptyset$$

2. Die Menge aller  $\mathcal{K}$ -optimalen Eliminationstransformationen wird mit  $\mathcal{ET}_{\mathcal{K-opt}}$  bezeichnet.

# Besser als, best

## Definition 12.2.1.13 (Bessere Eliminationstransf.)

Seien  $ET, ET' \in \mathcal{ET}_{korr}$  zwei korrekte Eliminationstransformationen. Dann heißt  $ET$  **mindestens so gut wie** (oder **besser als**)  $ET'$  gdw für alle Programme  $G$  gilt:  $N_{GET} \subseteq N_{GET'}$  und  $E_{GET} \subseteq E_{GET'}$

## Definition 12.2.1.14 (Beste Eliminationstransf.)

1. Eine korrekte Eliminationstransformation  $ET \in \mathcal{ET}_{korr}$  heißt **best** gdw  $ET$  ist besser als jede andere zulässige Eliminationstransformation  $ET' \in \mathcal{ET}_{korr}$ .
2. Die Menge aller besten Eliminationstransformationen wird mit  $\mathcal{ET}_{best}$  bezeichnet.

# Best impliziert $\mathcal{K}$ -optimal und umgekehrt

## Lemma 12.2.1.15 ( $\mathcal{K}$ -Unnötigkeitsfreiheit)

Sei  $ET \in \mathcal{ET}_{best}$  eine beste Eliminationstransformation. Dann gilt für alle Programme  $G$ , dass  $G_{ET}$  frei von  $\mathcal{K}$ -unnötigen Anweisungen ist:

$$\mathcal{U}_{G_{ET}}^A = \emptyset$$

## Korollar 12.2.1.16 ( $\mathcal{K}$ -Optimalität)

Beste Eliminationstransformationen sind  $\mathcal{K}$ -optimal und umgekehrt:

$$\forall ET \in \mathcal{ET}. ET \in \mathcal{ET}_{best} \Leftrightarrow ET \in \mathcal{ET}_{\mathcal{K}-opt}$$

# Noch zu tun

...konkrete Angabe einer (Eliminations-) Transformation

$$OT : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

und der Nachweis:

$$OT \in \mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-opt}}$$

Arbeitsplan:

1. Statische Erreichbarkeitsanalysen induzieren Eliminations-transformationen.
2. Korrekte und vollständige Erreichbarkeitsanalysen induzieren  $\mathcal{K}$ -optimale Eliminationstransformationen.

# Charakterisierung stat. unerreichbarer Knoten

## Proposition 12.2.1.17 (Äquivalenz)

Sei  $n \in N \setminus \{s, e\}$  ein Knoten. Dann sind äquivalent:

1.  $n$  ist statisch unerreichbar.
2. Alle in  $n$  eingehenden Kanten sind statisch unerreichbar.
3. Alle von  $n$  ausgehenden Kanten sind statisch unerreichbar.

## Proposition 12.2.1.18 (Implikation)

Sei  $n \in N$  ein Knoten. Dann gilt:

1. Ist  $n$  statisch unerreichbar, dann gilt  $n \neq s$ .
2. Die Umkehrung von Teil 1) gilt nicht.

## Proposition 12.2.1.19 (Speziell)

$s$  ist statisch erreichbar.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1  
885/169

# Charakterisierung stat. unerreichbarer Kanten

## Proposition 12.2.1.20 (Äquivalenz)

Sei  $e \in E$  eine Kante. Dann sind äquivalent:

1.  $e$  ist statisch unerreichbar.
2. Der Anfangsknoten von  $e$  ist statisch unerreichbar.

## Proposition 12.2.1.21 (Implikation)

Sei  $e \in E$  eine Kante. Dann gilt:

1. Ist der Endknoten von  $e$  statisch unerreichbar, dann ist  $e$  statisch unerreichbar.
2. Die Umkehrung von Teil 1) gilt nicht.

## Proposition 12.2.1.22 (Speziell)

Gilt  $\text{src}(e) = s$ , so ist  $e$  statisch erreichbar.

# Charakterisierung von Unnötigkeit

...durch statische Unerreichbarkeit.

## Lemma 12.2.1.23 (Äquivalenz)

Seien  $G = (N, E, s, e)$  ein Programm. Dann gilt:

1. Eine Anweisung  $\alpha$  in  $G$  ist unnötig gdw  $\alpha$  ist statisch unerreichbar.
2. Ein Knoten  $n \in N$  ist unnötig gdw  $n$  ist statisch unerreichbar.
3. Eine Kante  $e \in E$  ist unnötig gdw  $e$  ist statisch unerreichbar.

## Korollar 12.2.1.24 (Unnötige Knoten, Kanten)

1. Ein statisch unerreichbarer Knoten ist unnötig.
2. Eine statisch unerreichbare Kante ist unnötig.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1  
887/169

# Korrekte, vollständige Erreichbarkeitsanalysen

## Definition 12.2.1.25 (Erreichbarkeitsanalyse)

Eine Analyse, die angewendet auf ein Programm  $G = (N, E, s)$  einige Knoten und Kanten als **erreichbar** markiert, heißt **Erreichbarkeitsanalyse**.

## Definition 12.2.1.26 (Korrekte Erreichb.-Analyse)

Eine Erreichbarkeitsanalyse  $EA$  heißt **korrekt** gdw ein Knoten oder eine Kante von  $EA$  als erreichbar gekennzeichnet worden ist, dann ist dieser Knoten oder Kante statisch erreichbar.

## Definition 12.2.1.27 (Vollständige Erreichb.-Analyse)

Eine Erreichbarkeitsanalyse  $EA$  heißt **vollständig** gdw ein Knoten oder eine Kante statisch erreichbar ist, dann ist dieser Knoten oder Kante von  $EA$  als erreichbar gekennzeichnet worden.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1  
888/169



# Optimale Erreichbarkeitsanalysen

## Definition 12.2.1.28 (Optimale Erreichb.-Analyse)

Eine Erreichbarkeitsanalyse  $EA$  heißt **optimal** gdw  $EA$  korrekt und vollständig ist.

## Korollar 12.2.1.29 (Statische Unerreichbarkeit)

Sei  $EA$  eine optimale Erreichbarkeitsanalyse. Dann gilt: Ein Knoten oder eine Kante ist statisch unerreichbar gdw dieser Knoten bzw. Kante von  $EA$  nicht als erreichbar markiert worden ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1

889/169

# Induzierte Eliminationstransformation

...einer Erreichbarkeitsanalyse.

## Definition 12.2.1.30 (Induzierte Eliminationstransf.)

Eine Erreichbarkeitsanalyse  $EA$  induziert eine Eliminationstransformation  $ET_{EA}$ , die angewendet auf ein Programm  $G$  alle Knoten und Kanten in  $G$  streicht, die von  $EA$  nicht als erreichbar markiert worden sind.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1

890/169

# Optimale Erreichbarkeitsanalyse $O_{EA}$

...ohne die Analyse im Detail auszuführen, ist offensichtlich, dass wir eine Erreichbarkeitsanalyse  $O_{EA}$  so realisieren können, dass für  $O_{EA}$  gilt:

**Lemma 12.2.1.31 (Optimalität von  $O_{EA}$ )**

$O_{EA}$  ist optimal, d.h.  $O_{EA}$  ist korrekt und vollständig.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1

891/169

# Optimierungstransformation $OT$

...zur Elimination unnötiger Anweisungen.

## Definition 12.2.1.32 (Optimierung)

Das **Optimierungsverfahren** zur Elimination  $\mathcal{K}$ -unnötiger Anweisungen besteht aus zwei Stufen:

1. **Analysestufe**: Erreichbarkeitsanalyse in Graphen mittels einer Erreichbarkeitsanalyse  $O_{EA}$ ,  $O_{EA}$  optimal.
2. **Transformationsstufe**: Die von  $O_{EA}$  induzierte Eliminationstransformation  $ET_{O_{EA}}$ , die alle von  $O_{EA}$  nicht als erreichbar erkannten Knoten und Kanten streicht.

Die **Optimierung** aus Analyse- und Transformationsstufe werde bezeichnet mit:

$$OT =_{df} ET_{O_{EA}}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1  
892/169

# Korrektheit, Vollständigkeit, Optimalität

...von  $OT$  zur Elimination  $\mathcal{K}$ -unnötiger Anweisungen.

## Lemma 12.2.1.33 (Korrektheit)

$OT$  ist

1. korrekt ( $OT \in \mathcal{ET}_{korr}$ ).
2. vollständig ( $OT \in \mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-vollst}}$ ).
3. best ( $OT \in \mathcal{ET}_{best} (= \mathcal{ET}_{korr} \cap \mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-vollst}})$ ).

## Korollar 12.2.1.34 (Optimalität)

$OT$  ist  $\mathcal{K}$ -optimal ( $OT \in \mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-opt}} (= \mathcal{ET}_{best})$ ).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

893/169

# Übungsaufgabe 12.2.1.35

...Beobachtungs- und äquivalent dazu Streichäquivalenz erhalten die Semantik nicht nur im Aufsammeisinn, sondern pfadweise (oder: pfadgenau).

**Zeige:** Zwei Programme  $G$  und  $G'$  sind streichäquivalent gdw  $G$  und  $G'$  beschreiben pfadweise dieselbe Zustandstransformation:

$$G \approx_{\llbracket \cdot \rrbracket} G' \text{ gdw}$$

1.  $\forall v \in N_G \cap N_{G'}. \forall p \in \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n] \cup \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, n] \forall \sigma \in \Sigma.$   
 $\llbracket p \rrbracket_G(\sigma) = \llbracket p' \rrbracket_{G'}(\sigma)$
2.  $\forall v \in N_G \setminus N_{G'}. \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n] = \emptyset = \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, n]$
3.  $\forall v \in N_{G'} \setminus N_G. \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, n] = \emptyset = \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n]$

wobei  $p$  und  $p'$  sich entsprechende Pfade in  $G$  und  $G'$  sind.

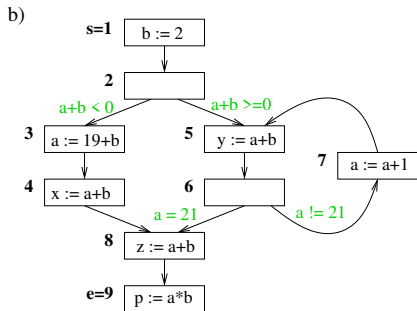
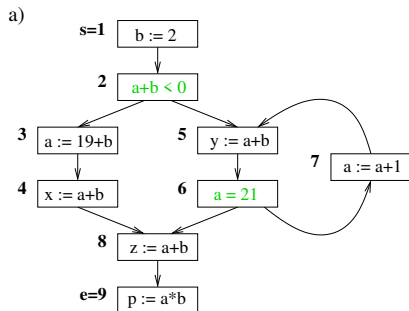
# Kapitel 12.2.2

## Dynamisch unerreichbare Anweisungen

# Informell

...ein Knoten  $n \in N$  ist **dynamisch unerreichbar** gdw  $n$  von einer mit einer Bedingung  $b \in \mathbf{Bexpr}$  benannten Kante  $e \in E$  dominiert wird, die nie erfüllt ist, d.h. für 'keinen an  $e$  möglichen Programmzustand wahr' ist, d.h.:

$$\forall \sigma \in \Sigma. \llbracket b \rrbracket_B(\llbracket src(e) \rrbracket_{W_{HILE}}(\sigma)) = \mathbf{falsch}$$





# Dynamisch unerreichbare Anweisungen

...eine 'semantische' Eigenschaft.

## Definition 12.2.2.1 (Dynamisch unerreichbare Anw.)

Eine Anweisung  $\alpha$  am Knoten  $n \in N$  in  $G$  ist **dynamisch unerreichbar** gdw  $n$  (und damit  $\alpha$ ) dynamisch unerreichbar ist.

Aus der Unentscheidbarkeit des Konstantenproblems (s. Kapitel 7.10.2, if  $x=0$  then ... else ... fi) folgt unmittelbar:

## Lemma 12.2.2.2 (Unentscheidbarkeit)

Dynamische Unerreichbarkeit von Anweisungen ist unentscheidbar.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1

# Entscheidbare Teilklassen dyn. Unerreichbark.

...Lemma 12.2.2.2 erfordert es eingeschränkte entscheidbare Klassen  $\mathcal{K}$  dynamisch unerreichbarer Anweisungen  $\alpha$  zu identifizieren, für die gilt:

Ist  $\alpha$   $\mathcal{K}$ -unerreichbar, dann ist  $\alpha$  dynamisch unerreichbar.

Die Identifikation möglicher Kandidaten für entscheidbare Klassen  $\mathcal{K}$  kann an entscheidbaren Teilklassen des Konstantenproblems ansetzen:

Eine Anweisung  $\alpha$  am Knoten  $n$  mit einer mit  $b$  benannten dominierenden Bedingungskante  $e$  ist

- $\mathcal{K}_{\text{einfK}}$ -unerreichbar, wenn  $b$  eine einfache Konstante
- $\mathcal{K}_{\text{endlK}}$ -unerreichbar, wenn  $b$  eine endliche Konstante
- $\mathcal{K}_{\text{polyK}}$ -unerreichbar, wenn  $b$  eine polynomiale Konstante
- ...

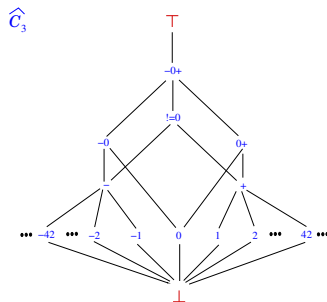
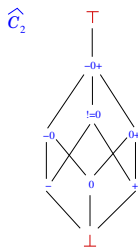
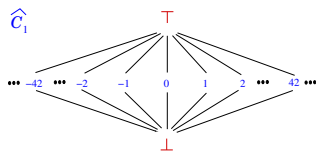
vom Wert **wahr** ist.

# Übungsaufgabe 12.2.2.3

Führe die Idee der  $\mathcal{K}$ -Unerreichbarkeit von Anweisungen nach dem Vorbild [statisch unerreichbarer Anweisungen](#) aus [Kapitel 12.2.1](#) im Detail für [Konstanten-](#) oder/und [Vorzeichenanalysen](#) über folgenden (Grund-) Verbänden und Zustandsmengen

$$\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{C}_i\}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

aus:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1  
899/169

# Kapitel 12.2.3

## Senken, Sackgassen und schwarze Löcher

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1  
900/169

# Senken, Sackgassen, schwarze Löcher (1)

Sei  $G = (N, E, s, e)$  ein Programm.

## Definition 12.2.3.1 (Statisch liegen in)

Ein Knoten  $n \in N$  liegt **statisch** in

1. einer **Senke** gdw  $e$  ist auf keinem Pfad von  $n$  aus erreichbar, d.h. wenn:  $P_G[n, e] = \emptyset$ .
2. einem **schwarzen Loch** gdw  $n$  liegt statisch in einer Senke und es gilt:  $\bigcup_{m \in N} \{P_G[n, m]\}$  ist unendlich.
3. einer **Sackgasse** gdw  $n$  liegt statisch in einer Senke und es gilt:  $\bigcup_{m \in N} \{P_G[n, m]\}$  ist endlich.

# Senken, Sackgassen, schwarze Löcher (2)

## Definition 12.2.3.2 (Statische Senken, etc.)

1. Eine **statische Senke** ist eine Menge von Knoten, die statisch in einer Senke liegen.
2. Ein **statisches schwarzes Loch** ist eine Menge von Knoten, die statisch in einem schwarzen Loch liegen.
3. Eine **statische Sackgasse** ist eine Menge von Knoten, die statisch in einer Sackgasse liegen.

Wir bezeichnen mit  $N_G^{st-S}$ ,  $N_G^{st-sl}$  und  $N_G^{st-Sg}$  die Mengen aller Knoten eines Programms  $G$ , die in einer statischen Senke, einem statischen schwarzen Loch bzw. einer statischen Sackgasse von  $G$  liegen.

# Eigensch. v. Senken, Sackg., schw. Löchern (1)

Es ist leicht einzusehen:

## Proposition 12.2.3.3

Liegt  $n \in N$  in

1. einer **statischen Senke**, so kann  $n$  statisch erreichbar sein oder nicht.
2. einem **statischen schwarzen Loch**, so
  - 2.1 ist von  $n$  aus ein Knoten  $m$  erreichbar, der in einer **Schleife** liegt, d.h.:  $\mathbf{P}_G[n, m] \neq \emptyset$  und  $\mathbf{P}_G[m, m]$  unendlich.
  - 2.2 sind **fast alle** (d.h. bis auf endlich viele) von  $n$  ausgehenden Pfade **unendlich** lang.
3. einer **statischen Sackgasse**, so ist **jeder** von  $n$  ausgehende Pfad **endlich** lang.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1

903/169

# Eigensch. v. Senken, Sackg., schw. Löchern (2)

## Proposition 12.2.3.4

Die Knotenmengen statischer schwarzer Löcher und Sackgasen  $N_G^{st-sl}$  und  $N_G^{st-Sg}$  partitionieren die Knotenmenge  $N_G^{st-S}$  statischer Senken eines Programms  $G$ , d.h.:

$$N_G^{st-S} = N_G^{stsl} \dot{\cup} N_G^{st-Sg}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1

904/169



# Rückbetrachtung

...unserer Generalvereinbarung (oder Generalvoraussetzung) für Programme  $G = (N, E, s, e)$  aus Kapitel 7:

- ▶ Jeder Knoten  $n \in N$  liegt auf einem Pfad von  $s$  nach  $e$

unter den Aspekten

- ▶ Erhaltung von Semantik
- ▶ Gewährleistung von Beobachtungsäquivalenz

bezüglich des möglicherweise nötigen Streichens von Knoten und Kanten zur Etablierung der Generalvoraussetzung für ein Programm.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.2.1  
905/169

# Zerlegung der Generalvorauss. für Programme

Sei  $G = (N, E, s, e)$  ein Programm. Dann gilt:

## Proposition 12.2.3.5

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $G$  erfüllt die Generalvoraussetzung.
2.  $\forall n \in N. \mathbf{P}_G[s, n] \neq \emptyset \wedge \mathbf{P}_G[n, e] \neq \emptyset$

D.h.: Für Programme gemäß der Generalvoraussetzung gilt:

## Korollar 12.2.3.6

$G$  erfüllt die Generalvoraussetzung gdw:

1. Alle Knoten in  $G$  sind statisch erreichbar.
2. Kein Knoten von  $G$  liegt in einer statischen Senke.

# Zusicherbarkeit der Generalvoraussetzung

...offenbar ist es leicht möglich, **jedes** Programm (oder Flussgraphen)  $G = (N, E, s, e)$  so zu transformieren, dass die **Generalvoraussetzung** erfüllt ist:

## Elimination

- statisch unerreichbarer Knoten: Siehe Kapitel 12.2.1.
- der Knoten statischer Senken: Anwendung des Konzepts statischer Unerreichbarkeit aus Kapitel 12.2.1 auf den reversen Flussgraphen  $G_{rev} = (N, E_{rev}, e, s)$  von  $G$  mit

$$E_{rev} =_{df} \{(n, m) \mid (m, n) \in E\}$$

OBdA kann deshalb angenommen werden, dass die **Generalvoraussetzung** von allen Programmen erfüllt ist.

# Allerdings

...die Konzepte **statisch unerreichbarer Knoten** und von **Knoten statischer Senken** adressieren unterschiedliche Konzepte von **Unnötigkeit von Anweisungen**:

1. **Unnötig**, weil **statisch nicht erreichbar** (und damit definitiv unausführbar zur Laufzeit des Programms).
2. **Unnötig**, weil in **statischer Sackgasse** oder **schwarzem Loch gefangen** (und damit definitiv unausführbar zur Laufzeit des Programms im Zuge einer regulär am Endknoten terminierenden Ausführung).

# Daraus folgt

...die **Elimination von Anweisungen**

- statisch unerreichbarer **Knoten** erhält **jede** (vernünftige) Form von **Programmsemantik** und gewährleistet **jede** (vernünftige) Form von **Beobachtungsäquivalenz** bei Streichen solcher Knoten und inzidierender Kanten.

Für die **Elimination von Anweisungen**

- in **statischen Senken** gilt dies nur für Laufzeitausführungen des Programms entlang von Pfaden in  $\mathbf{P}_G[s, e]$ .

# Sackgassen und schwarze Löcher

...können 'Licht' emittieren.

Enthalten Knoten in **dynamisch erreichbaren** statischen **Senken** **Ausgabeanweisungen**, so terminieren entsprechende Laufzeitausführungen zwar nie regulär am Endknoten des Programms, aber erzeugen (möglicherweise sogar unendlich viel)

- ▶ **beobachtbares Verhalten.**

Das **Streichen** von Knoten (und damit Anweisungen) in statischen **Senken** ist damit anders als das Streichen **statisch un-erreichbarer Knoten** (und damit Anweisungen)

- ▶ **willkürlich**

und eine (hoffentlich)

- ▶ **bewusste Designentscheidung.**

# Ob die Designentscheidung

...für das **Streichen von Senken** und damit die Außerachtlassung nicht regulär terminierender Ausführungen zur Sicherstellung des zweiten Teils der **Generalvoraussetzung** für Programme aus **Kapitel 7** unter den Aspekten **Erhaltung** von **Semantik** und **Beobachtungsäquivalenz** gerechtfertigt ist, kann einzig im Anwendungskontext begründet sein. Vergleiche z.B.:

- ▶ **Semi-Entscheidungsverfahren** (möglicherweise gerechtfertigt).

und

- ▶ **Steuerungsprogramme reaktiver Systeme** (vermutlich nicht oder nie gerechtfertigt).

**Zu guter Letzt:** In Programmen ohne **goto**-Anweisung ist die Existenz statischer Senken ein Indikator **fehlerhafter Flussgraphkonstruktion** und sollte Anlass einer Fehlermeldung sein.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3  
911/169

# Übungsaufgabe 12.2.3.7

Analog zu dynamisch unerreichbaren Anweisungen gibt es dynamisch unerreichbare Sackgassen und schwarze Löcher.

1. Übertrage die Konzepte und Überlegungen für statisch unerreichbare Sackgassen und schwarze Löcher auf ihre dynamischen Gegenstücke und arbeite sie aus. Was gilt weiterhin? Was stellt sich möglicherweise anders dar?
2. Was gilt für die Entscheidbarkeit dynamischer Sackgassen und schwarzer Löcher?
3. Welches Vorgehen oder welche Methoden bieten sich zur korrekten approximativen Berechnung dynamischer Sackgassen und schwarzer Löcher an?
4. Arbeite eine dieser Methoden in größerem Detail aus.



# Kapitel 12.3

## Partiell tote und geisterhafte Anweisungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

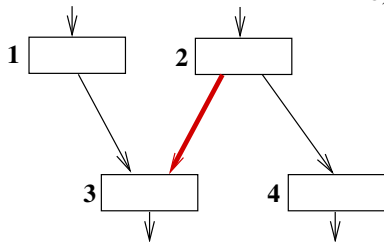
12.3

# Kritische Kanten

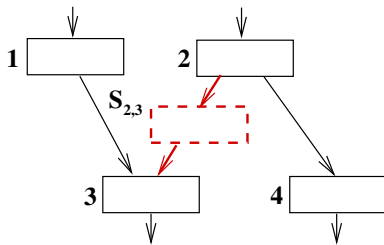
## Definition 12.3.1 (Kritische Kanten)

Eine Kante heißt **kritisch** gdw sie von einem Knoten mit mehr als einem Nachfolger zu einem Knoten mit mehr als einem Vorgänger führt (s. Abb. a)).

a)



b)



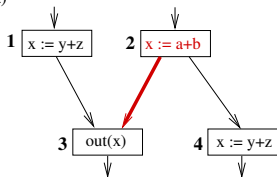
...**kritische Kanten** können durch Spalten und Einfügen eines sog. **synthetischen Knotens** beseitigt werden (s. Abb. b)).

# Illustration: Kritische Kanten (1)

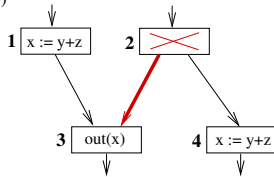
...können die Elimination unnötiger Anweisungen **verhindern**:

- Abb. a): Der Wert von  $x$  aus der Zuweisung in Knoten 2 wird nur für Programmfortsetzungen über Knoten 3 benötigt, nicht über Knoten 4.
- Abb. b) und c): Beide Transformationen verändern das beobachtbare Verhalten und sind daher **nicht korrekt**.

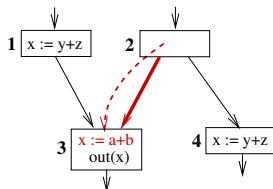
a)



b)



c)

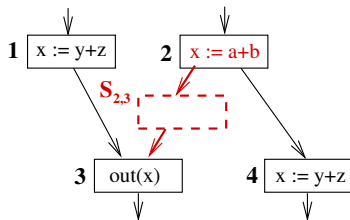


# Illustration: Kritische Kanten (2)

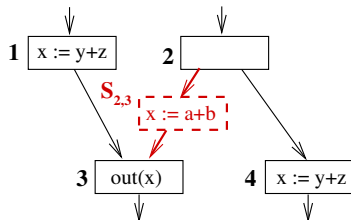
## Spalten kritischer Kanten:

- Abb. a): Die kritische Kante wird durch Einfügen des synthetischen Knotens  $S_{2,3}$  gespalten und beseitigt.
- Abb. b): Die Transformation verbessert die Performanz, ohne das beobachtbare Verhalten zu verändern.

a)

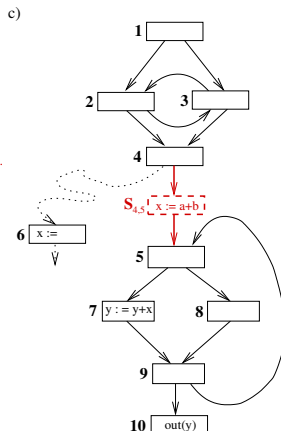
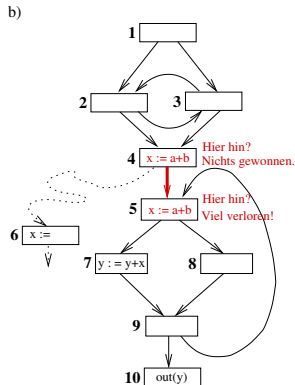
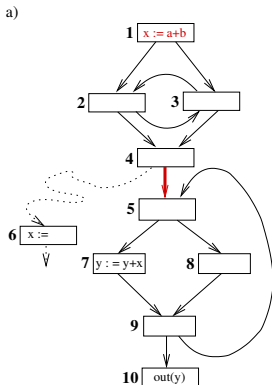


b)



Beachte: Die performanzverbessernde Transformation wird erst durch das Spalten der kritischen Kante möglich.

# Kritische Kanten in einem größeren Beispiel



...auch hier ist **performanzverbessernde Transformation** erst durch das **Spalten** der **kritischen Kante** möglich.

# Vereinbarung zu kritischen Kanten

...um **bestmögliche** Transformationsresultate zu ermöglichen, insbesondere garantieren zu können, **niemals Anweisungen in Schleifen zu verschieben**, nehmen wir an, dass jede

- **kritische Kante**

in einem Flussgraphen durch Einfügen eines (**synthetischen**) **Knotens gespalten** und dadurch **beseitigt** ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Zusatzvereinbarungen für Flussgraphen

...für Kapitel 12.3 (und 12.4).

Für jeden Flussgraphen  $G = (N, E, s, e) \in \mathcal{G}$  gilt:

- $s \in N$  hat keine Vorgänger:  $pred(s) = \emptyset$
- $e \in N$  hat keine Nachfolger:  $succ(e) = \emptyset$
- Jeder Knoten  $n \in N$ 
  - liegt auf einem Pfad von  $s$  nach  $e$ .
  - ist mit einer Instruktion (Zuweisung, Schreibanweisung, Bedingung) benannt (keine Basisblöcke).
- Keine Kante ist kritisch.

$s$  und  $e$  bezeichnen als Start- und Endknoten ausgezeichnete Knoten in  $G$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

919/169

# Kapitel 12.3.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

920/169

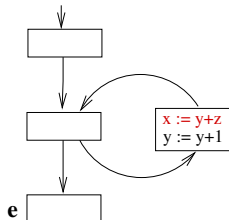


# Tote Anweisungen

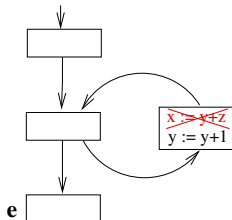
...und ihre **Elimination**.

Das **Grundmuster**: Die Anweisung  $x := y+z$  ist **tot** (oder **total tot**) (engl. **(totally) dead**):  $x$  zugewiesene Werte werden an keiner Stelle im Programm gelesen.

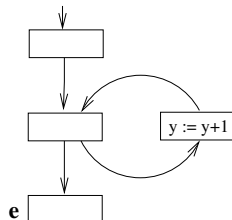
a)



b)



c)

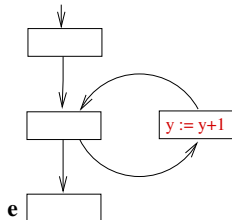


# Geisterhafte Anweisungen

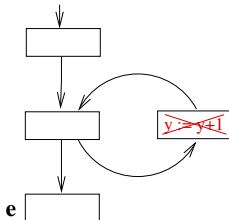
.....und ihre **Elimination**.

Das **Grundmuster**: Die Anweisung  $y := y+1$  ist nicht tot, sondern **lebendig** (engl. **live**), aber **geisterhaft** (engl. **faint**):  $y$  zugewiesene Werte beeinflussen weder direkt noch indirekt Ausgabe- oder Bedingungs-werte (und damit das beobachtbare Programmverhalten).

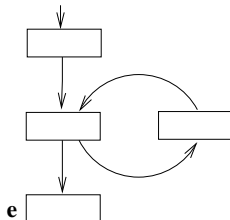
a)



b)



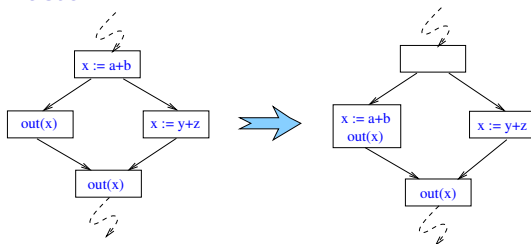
c)



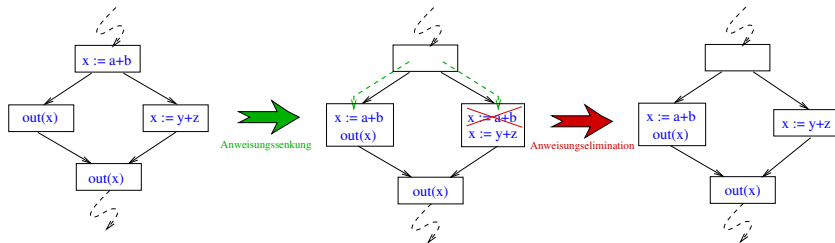
# Partiell tote Anweisungen

...und ihre Elimination.

Das Grundmuster:



Die konzeptuelle Verfahrensidee:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Kapitel 12.3.2

## Beispiele

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

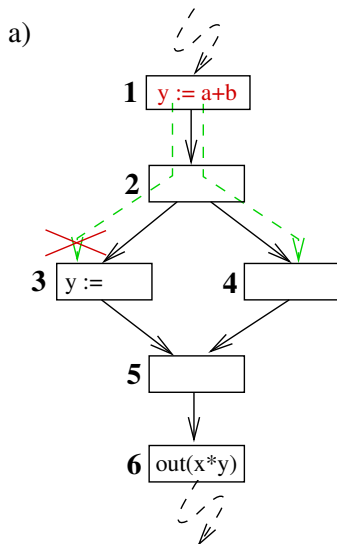
12.1

12.2

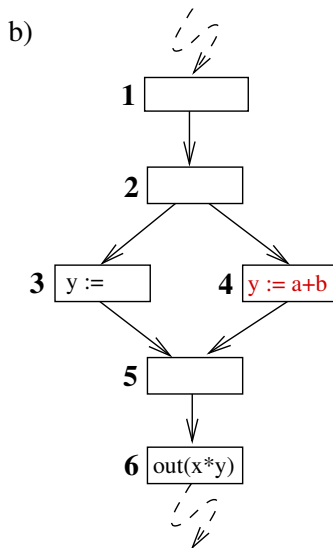
12.3

# Bsp. 1: Elimination partiell toter Anweisungen

Ausgangsprogramm:



Optimiertes Programm:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

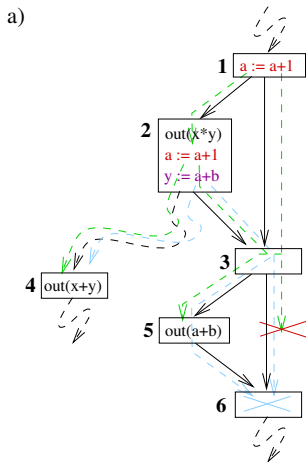
12.2

12.3

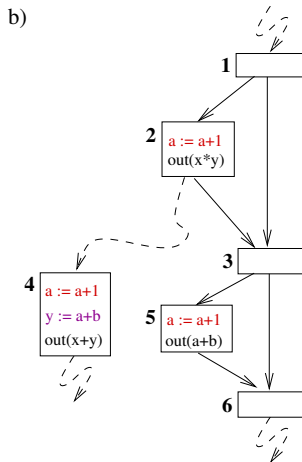
925/169

# Bsp. 2: Elimination partiell toter Anweisungen

Ausgangsprogramm:



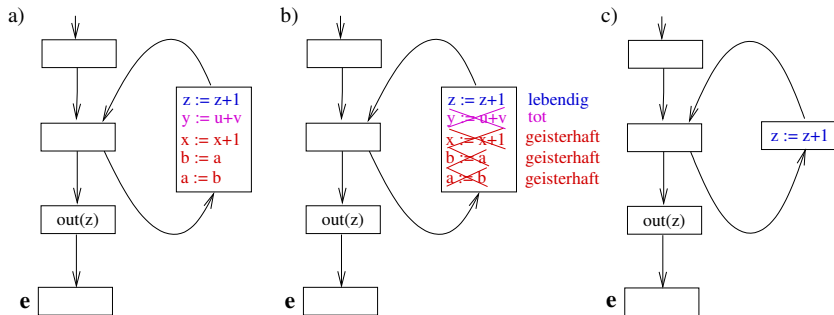
Optimiertes Programm:



...ist i.a. eine 'm2n'-Transformation (hier für  $\alpha \equiv a := a + 1$ ).

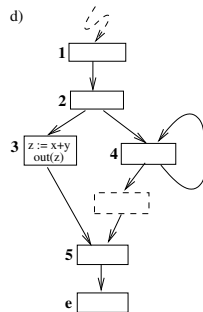
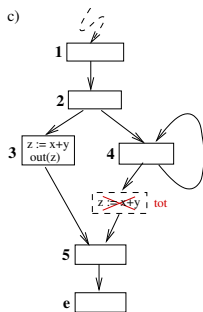
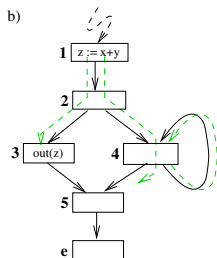
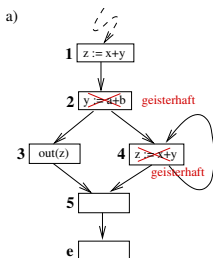
# Bsp. 3: Elimination geisterhafter Anweisungen

Ausgangsprogramm:



# Bsp. 4: Elimination geisterhafter Anweisungen

Ausgangs-Prg.: Geisteranw.-Elim.: Anw.-Senkung: Elim. toter Anw.:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3



# Anmerkung

...‘echt’ partiell geisterhafte Anweisungen gibt es nicht:

Anweisungen, die auf

- jeder Programmfortsetzung geisterhaft oder tot sind, sind geisterhaft.
- mindestens einer Programmfortsetzung weder geisterhaft noch tot sind, sind lebendig (nicht ‘partiell geisterhaft’).

Die Elimination geisterhafter Anweisungen

- kann aber durch die Beseitigung von Senkungsblockaden die Elimination weiterer partiell toter Anweisungen ermöglichen.

In diesem Sinne ist hier

- Elimination partiell geisterhafter Anweisungen

zu verstehen (s. Bsp. 3)).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Elimination partiell toter/geisterhafter Anw.

...zwei verschiedene (Optimierungs-) Transformationen:

- EPTA: Elimination partiell toter Anweisungen  
     $\rightsquigarrow$  Partial Dead-Code Elimination (PDCE)
- EPGA: Elimination partiell geisterhafter Anweisungen  
     $\rightsquigarrow$  Partial Faint-Code Elimination (PFCE)

als Wiederholung von 3 Elementartransformationen:

- ETA: Elimination toter Anweisungen  
     $\rightsquigarrow$  Dead-Code Elimination (DCE)
- EGA: Elimination geisterhafter Anweisungen  
     $\rightsquigarrow$  Faint-Code Elimination (FCE)
- AS: Anweisungssenkungen  
     $\rightsquigarrow$  Assignment Sinking (AS)

wobei AS-Schritte (immer wieder) Potential für E-Schritte schaffen (sog. Effekte 2. Ordnung).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Kapitel 12.3.3

## Elementartransformationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Tote und geisterhafte Anweisungen

## Definition 12.3.3.1 (Tote Anweisung)

Eine Anweisung  $x := t$  am Knoten  $n$  ist **tot** gdw auf jeder Programmfortsetzung bis zum Endknoten gilt:

- $x$  wird nicht gelesen oder
- dem ersten Lesen von  $x$  geht ein Schreiben von  $x$  voraus.

## Definition 12.3.3.2 (Geisterhafte Anweisung)

Eine Anweisung  $x := t$  am Knoten  $n$  ist **geisterhaft** gdw auf jeder Programmfortsetzung bis zum Endknoten gilt:

- $x$  wird nicht gelesen oder
- dem ersten Lesen von  $x$  geht ein Schreiben von  $x$  voraus oder
- $x$  wird rechtsseitig in einer selbst geisterhaften Anweisung gelesen.

# Tot impliziert geisterhaft

## Proposition 12.3.3.3

Tote Anweisungen sind geisterhaft.

**Beachte:** Die Umkehrung von Proposition 12.3.3.3 gilt i.a. nicht.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

933/169

# Anweisungseliminationen

## Definition 12.3.3.4 (Anweisungselimination)

Eine Programmtransformation, die einige Anweisungen aus dem Programm streicht, heißt **Anweisungselimination** (engl. *code elimination*).

## Definition 12.3.3.5 (t/g-Anweisungselimination)

Eine Anweisungselimination, die einige

1. **tote Anweisungen** aus dem Programm streicht, heißt **t-Anweisungselimination** (engl. *dead-code elimination*).
2. **geisterhafte Anweisungen** aus dem Programm streicht, heißt **g-Anweisungselimination** (engl. *faint-code elimination*).

## Definition 12.3.3.6 (Korrekte Anweisungselim.)

Eine Anweisungselimination ist **korrekt**, wenn sie eine **t**- oder **g**-Anweisungselimination ist.

# Anweisungssenkungen

## Definition 12.3.3.7 (Anweisungssenkung)

Eine **Anweisungssenkung** für ein Anweisungsmuster  $\alpha \equiv x := t$  (oder  $\alpha$ -Anweisungssenkung) ist das **simultane stetige Verschieben** eines oder mehrerer Vorkommen von  $\alpha$  in **Richtung des Kontrollflusses** zu einem oder mehreren anderen Knoten.

## Definition 12.3.3.8 (Korrekte Anweisungssenkung)

Eine  $\alpha$ -Anweisungssenkung,  $\alpha \equiv x := t$ , ist **korrekt**, wenn zu jedem Zeitpunkt während des Schiebens gilt:

1. Kein  $\alpha$ -Vorkommen wird über eine Anweisung hinweggeschoben, die  $x$  liest oder modifiziert oder einen Operanden von  $t$  modifiziert (und  $\alpha$  dadurch **blockiert**).
2. Kein  $\alpha$ -Vorkommen wird in einen Zusammenflussknoten geschoben, wenn dies nicht von jedem Vorgänger des Zusammenflussknotens aus geschieht.

## Definition 12.3.3.9 (Blockiert)

Ein Anweisung  $\alpha$  der Form  $x := t$  ist von einer Anweisung  $\alpha'$  **senkungsblockiert** (oder: **blockiert**), wenn  $\alpha'$

- Variable  $x$ 
  - liest ( $\alpha' \equiv \dots := \dots x \dots$ ) oder
  - modifiziert ( $\alpha' \equiv x := \dots$ ) oder einen
- Operanden von  $t$  modifiziert ( $\alpha' \equiv y := \dots, t \equiv \dots y \dots$ ).



# Kapitel 12.3.4

## Effekte zweiter Ordnung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

937/169

# Effekte zweiter Ordnung

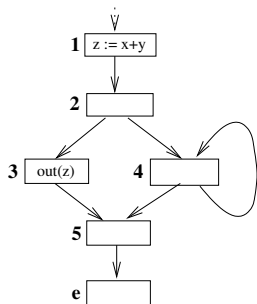
...(engl. **second-order effects**) treten in **4 Formen** auf und sind **essentiell** für die kombinierte Wirkung der Elementartransformationen von **EPTA** und **EPGA**:

1. **Senkungs-Eliminations-Effekte** (**Zieleffekt**)  
     $\rightsquigarrow$  Sinking-elimination effects
2. **Senkungs-Senkungs-Effekte** (**Potentialeffekt**)  
     $\rightsquigarrow$  Sinking-sinking effects
3. **Eliminations-Senkungs-Effekte** (**Potentialeffekt**)  
     $\rightsquigarrow$  Elimination-sinking effects
4. **Eliminations-Eliminations-Effekte** (**Zieleffekt**)  
     $\rightsquigarrow$  Elimination-elimination effects

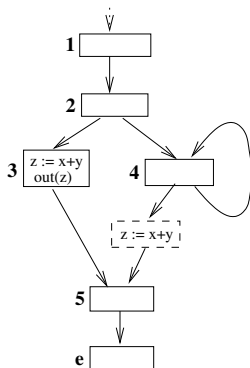
# 1) Senkungs-Eliminations-Effekt

...**Zieleffekt**: Eine Elementartransformation (hier: Senkung) ermöglicht anschließend eine Elimination (die erneut Senkungs- oder Eliminationspotential schaffen kann).

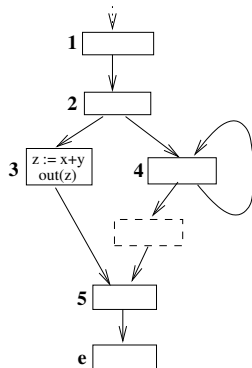
Ausgangsprogramm



Senkung 1. Ord.



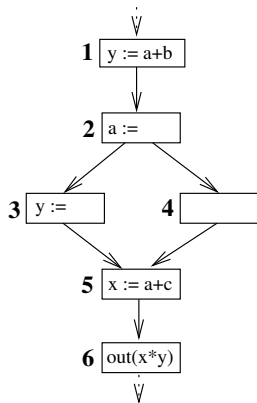
Elimination 2. Ord.



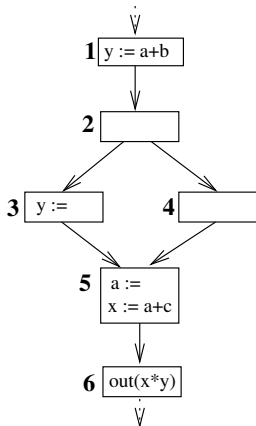
## 2) Senkungs-Senkungs-Effekt

...**Potentialeffekt**: Eine Elementartransformation (hier: Senkung) ermöglicht anschließend eine (weitere) Senkung, die erneut Senkungs- oder Eliminationspotential schaffen kann.

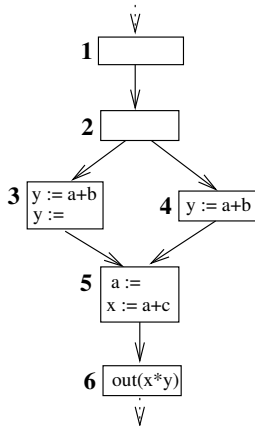
Ausgangsprogramm



Senkung 1. Ord.



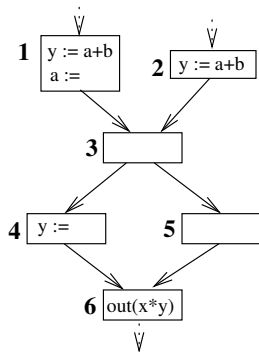
Senkung 2. Ord.



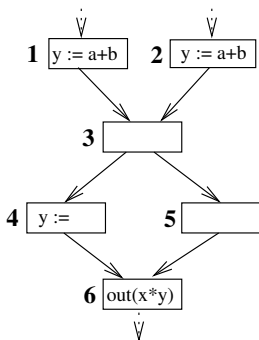
### 3) Eliminations-Senkungs-Effekt

...**Potentialeffekt**: Eine Elementartransformation (hier: Elimination) ermöglicht anschließend eine Senkung, die erneut Senkungs- oder Eliminationspotential schaffen kann.

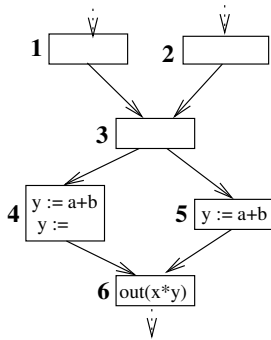
Ausgangsprogramm



Elimination 1. Ord.



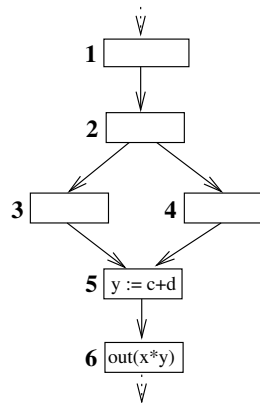
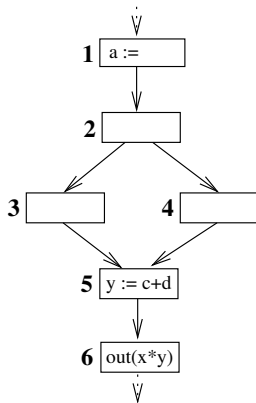
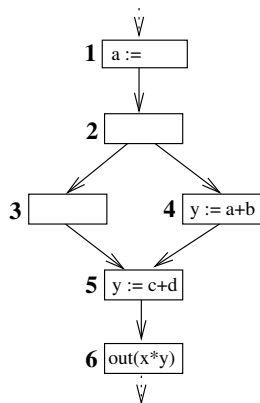
Senkung 2. Ord.



## 4) Eliminations-Eliminations-Effekt

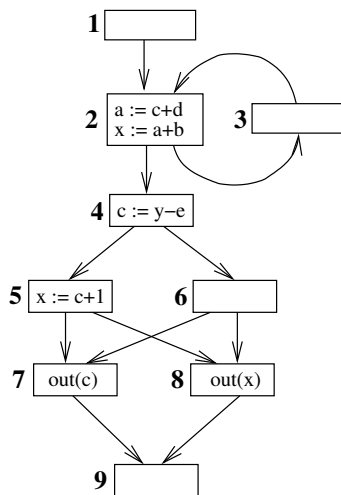
...**Zieleffekt**: Eine Elementartransformation (hier: Elimination) ermöglicht anschließend eine (weitere) Elimination (die erneut Senkungs- oder Eliminationspotential schaffen kann).

Ausgangsprogramm    Elimination 1. Ord.    Elimination 2. Ord.

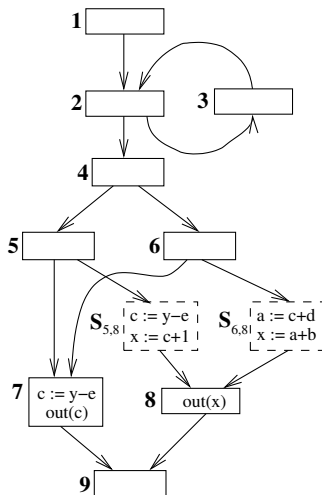


# Sequenzwirkung von Effekten 2. Ordnung

## Ausgangsprogramm



## Optimiertes Programm



# Kapitel 12.3.5

## EPTA/EPGA: Transformationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

944/169



# Unnötige Anweisungen

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 12.3.5.1 (t-unnötige Anweisung)

Eine Anweisung  $\alpha$  am Knoten  $n$  in  $G$  heißt **t-unnötig** gdw  $\alpha$  ist **tot** am Knoten  $n$ .

## Definition 12.3.5.2 (g-unnötige Anweisung)

Eine Anweisung  $\alpha$  am Knoten  $n$  in  $G$  heißt **g-unnötig** gdw  $\alpha$  ist **geisterhaft** am Knoten  $n$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Sprechweisen und Bezeichnungen (1)

Wir bezeichnen informell mit

- $AS =_{df} \bigcup \{AS_{\alpha}^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$
- $ETA =_{df} \bigcup \{ETA_{\alpha}^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$
- $EGA =_{df} \bigcup \{EGA_{\alpha}^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$

die Mengen aller zulässigen Anweisungssenkungen und -eliminationen (für beliebige Programme und Anweisungsmuster).

Wir bezeichnen ebenso informell mit Wörtern der von den regulär-artigen Ausdrücken

$$(AS + ETA)^*, (AS + EGA)^*, (AS + ETA + EGA)^*$$

erzeugten Sprachen

$$\mathcal{L}((AS + ETA)^*), \mathcal{L}((AS + EGA)^*), \mathcal{L}((AS + ETA + EGA)^*)$$

Folgen zulässiger AS-, ETA- und EGA-Transformationen (für beliebige Programme und Anweisungsmuster).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

946/169

# Sprechweisen und Bezeichnungen (2)

Mit diesen Schreibweisen bezeichne:

- $T_{AS,ETA}^G = \{\tau \mid \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS + ETA)^*)\}$
- $T_{AS,EGA}^G = \{\tau \mid \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS + EGA)^*)\}$

die Menge aller Transformationsfolgen aus zulässigen **AS**- und **ETA**- bzw. **EGA-Transformationen** für ein Programm  $G$ .

Geht  $G$  aus dem Kontext hervor, schreiben wir statt  $T_{AS,ETA}^G$  und  $T_{AS,EGA}^G$  einfacher  $T_{AS,ETA}$  und  $T_{AS,EGA}$ .

Ist  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Transformationsfolge, so bezeichne:

- $(\tau_i)_{i \leq k}$  das Anfangsstück von  $\tau$  bis zum Index  $k$  einschließlich.
- $\tau_j$  die Elementartransformation mit Index  $j$  von  $\tau$ .
- $G_\tau$ ,  $G_{(\tau_i)_{i \leq k}}$  und  $G_{(\tau_j)}$  diejenigen Programme, die aus  $G$  durch Anwendung von  $\tau$ ,  $(\tau_i)_{i \leq k}$ , auf  $G$  entstehen.

# EPTA- und EPGA-Transformationen

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 12.3.5.3 (EPTA/EPGA-Transf.)

1. Eine EPTA-Transformation (EPGA-Transformation) ist eine beliebige Abfolge zulässiger Anweisungssenkungen und Eliminationen toter (geisterhafter) Anweisungen.
2.  $T_{EPTA}^G$  und  $T_{EPGA}^G$  bezeichnen die Mengen aller EPTA- und EPGA-Transformationen für  $G$ , in Zeichen:
  - $T_{EPTA}^G =_{df} T_{AS,ETA}^G$
  - $T_{EPGA}^G =_{df} T_{AS,EGA}^G$
3. Ist  $\tau \in T_{EPTA}^G \cup T_{EPGA}^G$ , so bezeichnet  $G_\tau$  das Programm, das  $\tau$  angewendet auf  $G$  liefert.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

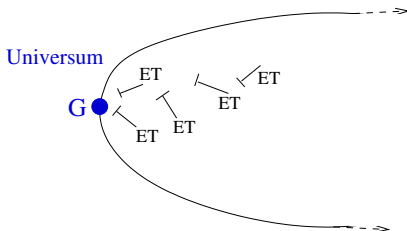
# Transformationsrelation, Programmuniversum

## ► Transformationsrelation:

$G \vdash_{\tau} G', \tau \in AS \cup ETA \cup EGA$ :  $G'$  resultiert aus  $G$  durch Anwendung von  $\tau$  mit  $\tau$  zulässige Senkungs- oder Eliminationstransformation toter/geisterhafter Anweisungen.

## ► Induziertes Programmuniversum:

$\mathcal{U}_T^G =_{df} \{ G' \mid G \vdash_{(\tau_i)_{i \leq k}} G', \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T, k \in \mathbb{N} \}$ ,  
 $T = T_{EPTA}^G$  oder  $T = T_{EPGA}^G$ : Das von  $G$  durch die Präfixe der Transformationsfolgen  $\tau \in T$  aufgespannte **Universum**.



# Kapitel 12.3.6

## EPTA/EPGA: Besser, best, optimal

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

950/169

# Vergleichsrelation 'besser' für Programme

Sei  $G = (N, E, s, e)$  ein Programm und seien  $G', G'' \in \mathcal{U}_T^G$  mit  $T = T_{EPTA}^G$  oder  $T = T_{EPGA}^G$ .

## Definition 12.3.6.1 (Besser)

$G'$  heißt **besser** als  $G''$  (in Zeichen:  $G'' \sqsubset G'$ ) gdw:

$$\forall p \in \mathbf{P}_G[s, e] \forall \alpha \in \mathcal{AM}. \#_{\alpha}(p_{G'}) \leq \#_{\alpha}(p_{G''})$$

wobei  $\#_{\alpha}(p_{G'})$  und  $\#_{\alpha}(p_{G''})$  die Anzahl von Anweisungen des Anweisungsmusters  $\alpha$  auf  $p$  in  $G'$  bzw.  $G''$  bezeichnen.

**Beachte:** Anweisungssenkungen und -eliminationen erhalten die Verzweigungs- und Knotenstruktur eines Programms  $G$ . Die einem Pfad in  $G$  eindeutig in  $G'$  und  $G''$  entsprechenden Pfade können deshalb einfach identifiziert werden.

# Eigenschaften der Relation 'besser'

## Lemma 12.3.6.2 (Quasiordnung)

Die Programmvergleichsrelation **besser**  $\sqsubseteq$  ist eine **Quasiordnung** (d.h. **reflexiv** und **transitiv**, aber nicht **antisymmetrisch**).

## Lemma 12.3.6.3 (Verbesserung, Verb.-Neutralität)

Seien  $G$  und  $G'$  zwei Programme mit  $G \vdash_{\tau} G'$  und  $\tau \in ASU \cup ETA \cup EGA$ . Dann gilt:

1.  $G \sim G'$ , falls  $\tau$  eine zulässige Anweisungssenkung ist.
2.  $G \sqsubsetneq G'$ , falls  $\tau$  eine nichttriviale ( $\neq Id$ ) zulässige Elimination toter oder geisterhafter Anweisungen ist.

...das heißt: **Eliminationen** bewirken **unmittelbar echte Verbesserungen**, während **Senkungen verbesserungsneutral** sind, aber durch spätere Eliminationen als **Effekte zweiter Ordnung mittelbar Verbesserungen** ermöglichen können.



# Global beste (oder optimale) Programme

Sei  $G$  ein Programm und  $T = T_{EPTA}^G$  oder  $T = T_{EPGA}^G$ .

## Definition 12.3.6.4 (Global beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm  $G^* \in \mathcal{U}_T^G$  heißt **global  $T$ -best** (oder **global  $T$ -optimal**) gdw  $G^*$  ist besser als jedes andere Programm aus  $\mathcal{U}_T^G$ :

$$\forall G' \in \mathcal{U}_T^G. G' \sqsubset G^*$$

2. Bezeichne  $\mathcal{G}_T^{opt}(G)$  die Menge der global  $T$ -besten (oder global  $T$ -optimalen) Programme in  $\mathcal{U}_T^G$ .

# Lokal beste (oder optimale) Programme

Sei  $G$  ein Programm und  $T = T_{EPTA}^G$  oder  $T = T_{EPGA}^G$ .

## Definition 12.3.6.5 (Lokal beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm  $G^* \in \mathcal{U}_T^G$  heißt **lokal  $T$ -best** gdw:

$$\forall G' \in \mathcal{U}_T^{G^*}. G^* \approx G'$$

2. Bezeichne  $\mathcal{G}_T^{loko\!pt}(G)$  die Menge der lokal  $T$ -besten (oder lokal  $T$ -optimalen) Programme in  $\mathcal{U}_T^G$ .

**Intuitiv:** Ein Programm ist **lokal optimal**, wenn beliebige weitere (Folgen von) Elementartransformationen nicht mehr zu einer echten Verbesserung führen, sondern höchstens noch Anweisungen durch Senkungen an anderen Programmstellen platzieren.

# Vergleichsrelation 'besser' für Transf.-Folgen

Sei  $G$  ein Programm und  $T = T_{EPTA}^G$  oder  $T = T_{EPGA}^G$ .

## Definition 12.3.6.6 (EPTA/EPGA-bessere Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)

1.  $\tau \in T_{EPTA}^G$  heißt **EPTA-besser** für  $G$  als  $\tau' \in T_{EPTA}^G$  gdw:  
 $G_{\tau'} \sqsubseteq G_{\tau}$ .
2.  $\tau \in T_{EPGA}^G$  heißt **EPGA-besser** für  $G$  als  $\tau' \in T_{EPGA}^G$  gdw:  
 $G_{\tau'} \sqsubseteq G_{\tau}$ .

# Global, lokal beste Transformationsfolgen

## Definition 12.3.6.7 (Global EPTA/EPGA-beste T.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)

1.  $\tau \in T_{EPTA}^G$  heißt **global EPTA-best** für  $G$  gdw  $\tau$  ist EPTA-besser für  $G$  als jede andere Transformation in  $T_{EPTA}^G$ .
2.  $\tau \in T_{EPGA}^G$  heißt **global EPGA-best** für  $G$  gdw  $\tau$  ist EPGA-besser für  $G$  als jede andere Transformation in  $T_{EPGA}^G$ .

## Definition 12.3.6.8 (Lokal EPTA/EPGA-beste T.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)

1.  $\tau \in T_{EPTA}^G$  heißt **lokal EPTA-best** für  $G$  gdw keine EPTA-Verlängerung von  $\tau$  ist echt EPTA-besser als  $\tau$
2.  $\tau \in T_{EPGA}^G$  heißt **lokal EPGA-best** für  $G$  gdw keine EPGA-Verlängerung von  $\tau$  ist echt EPGA-besser als  $\tau$

d.h.  $\tau$  ist genauso gut wie jede Verlängerung von  $\tau$ .

# Mengen bester (oder optimaler) Transf.-Folgen

## Definition 12.3.6.9 (Beste (oder optimale) Transf.)

Wir bezeichnen mit:

1.  $T_{EPTA}^{opt}(G)/T_{EPTA}^{lokopt}(G)$  die Menge der global/lokal EPTA-besten (oder EPTA-optimalen) Transformationen für  $G$ .
2.  $T_{EPGA}^{opt}(G)/T_{EPGA}^{lokopt}(G)$  die Menge der global/lokal EPGA-besten (oder EPGA-optimalen) Transformationen für  $G$ .

# Globale Optimalität

...von Programmen und Transformationen impliziert ihre **lokale Optimalität**.

## Proposition 12.3.6.10

1. Global **EPTA/EPGA**-optimale Programme sind lokal **EPTA/EPGA**-optimal.
2. Global **EPTA/EPGA**-optimale Transformationen sind lokal **EPTA/EPGA**-optimal.

# Universumskorrekt, universumsoptimal

Sei  $G$  ein Programm.

## Lemma 12.3.6.11 (Universumskorrekt)

1. Ist  $\tau \in T_{EPTA}^G$ , so ist  $G_\tau \in \mathcal{U}_{T_{EPTA}}^G$ .
2. Ist  $\tau \in T_{EPGA}^G$ , so ist  $G_\tau \in \mathcal{U}_{T_{EPGA}}^G$ .

## Lemma 12.3.6.12 (Universumsoptimal)

1. Ist  $\tau \in T =_{df} T_{EPTA}^G$  global EPTA-best für  $G$ , so ist  $G_\tau \in \mathcal{G}_T^{opt}(G)$  global  $T$ -best.
2. Ist  $\tau \in T =_{df} T_{EPGA}^G$  global EPGA-best für  $G$ , so ist  $G_\tau \in \mathcal{G}_T^{opt}(G)$  global  $T$ -best.

# Kapitel 12.3.7

## EPTA/EPGA: Optimalität

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

960/169



# Maximale Transformationsfolgen

Sei  $G$  ein Programm und  $T = T_{EPGA}^G$  oder  $T = T_{EPGA}^G$ .

## Definition 12.3.7.1 (Maximale Transf.-Folge)

Eine unendliche oder endliche Transformationsfolge  $\tau$  für  $G$  mit  $\tau \in T$  und

- $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  oder
- $\tau = (\tau_i)_{i \leq k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$

heißt **maximal**, wenn  $\tau$  lokal optimal ist (d.h. weitere Eliminationstransformationen lassen das Programm  $G_\tau$  unverändert, weitere Senkungstransformationen platzieren lediglich Anweisungen an anderen Programmstellen ohne dadurch neue Eliminationsmöglichkeiten zu eröffnen).

# Faire Transformationsfolgen

Sei  $G$  ein Programm und  $T = T_{EPGA}^G$  oder  $T = T_{EPGA}^G$ .

## Definition 12.3.7.2 (Faire Transf.-Folge)

Eine Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau \in T$ , für  $G$  heißt **fair**, wenn

$\forall k \in \mathbb{N}. (\tau_i)_{i \leq k}$  nicht maximal  $\Rightarrow \exists k' > k. G_{(\tau_i)_{i \leq k}} \sqsubset G_{(\tau_i)_{i \leq k'}}$

## Lemma 12.3.7.3 (Maximale Transf.-Folge fair)

Maximale Transformationsfolgen für  $G$  sind fair.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

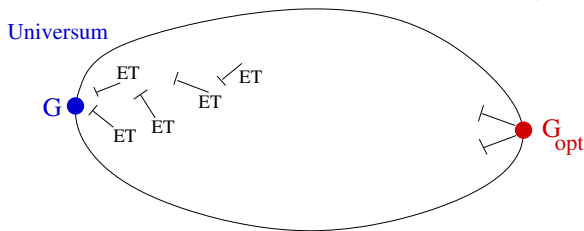
12.3

# Globale EPTA/EPGA-Optimalität

Sei  $G$  ein Programm und  $T = T_{EPTA}^G$  oder  $T = T_{EPGA}^G$ .

## Theorem 12.3.7.4 (Glob. EPTA/EPGA-Optimalität)

1. Jede faire Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau \in T$ , für  $G$  ist **global optimal**, d.h. endet in einem bis auf irrelevante ( $\hat{=}$  bedeutungsgleiche) Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programm  $G_{opt} \in \mathcal{G}_T^{opt}(G)$ .
2. Jede faire Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau \in T$ , hat ein endliches Anfangsstück  $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$  mit  $G_{opt} \sim G_{\tau'} \sim G_{\tau'}$ .



# Beweisskizze von Theorem 12.3.7.4

...für zwei Beweisvarianten: Über

1. Monotonie, Dominanz und Fixpunkttheorem 11.2.9 (Variante 1).
2. Konfluenz und Termination der Transformationsrelation, s. Theorem 12.3.7.5 (Variante 2).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

964/169

# Variante 1: Monotonie, Dominanz, FP-Theor.

**Zeige:** Die Menge der **EPTA**- und **EPGA**-Elementartransformationen bildet für  $\vec{\sqsubseteq}_\tau =_{df} (\vec{\sqsubseteq} \cap \vdash_\tau)^*$  eine Familie  $\mathcal{F}_\tau$  von Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

►  $\mathcal{F}_\tau \subseteq \{f \mid f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}\}$  ist **endliche Familie** von Funktionen mit

1. **Monotonie:**

$$\forall G', G'' \in \mathcal{G} \forall f \in \mathcal{F}_\tau. G' \vec{\sqsubseteq}_\tau G'' \Rightarrow f(G') \vec{\sqsubseteq}_\tau f(G'')$$

2. **Dominanz:**

$$\forall G', G'' \in \mathcal{G}. G' \vdash_\tau G'' \Rightarrow \exists f \in \mathcal{F}_\tau. G'' \vec{\sqsubseteq}_\tau f(G')$$

Zusammen mit dem **Fixpunkttheorem 11.2.9** folgt daraus die

► **Korrektheit** und **Optimalität**

fairer **EPTA**- und **EPGA**-Transformationsfolgen.

# Variante 2: Konfluenz, Terminierung

Zeige: Die ETPA- und EPGA-Transformationsrelationen

$$1. \cdot \vdash_{\tau} \cdot, \tau \in AS \cup ETA \quad (\text{EPTA})$$

$$2. \cdot \vdash_{\tau} \cdot, \tau \in AS \cup EGA \quad (\text{EPGA})$$

sind (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken) **konfluent** und **terminierend**.

Beide Eigenschaften zusammen liefern die

– **Korrektheit** und **globale Optimalität**

fairer EPTA- und EPGA-Transformationsfolgen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# EPTA, EPGA: Konfluenz, Terminierung

## Theorem 12.3.7.5 (Konfluenz, Terminierung)

Die EPTA- und EPGA-Transformationsrelationen

1.  $\cdot \vdash_{\tau} \cdot, \tau \in AS \cup ETA$  (EPTA)
2.  $\cdot \vdash_{\tau} \cdot, \tau \in AS \cup EGA$  (EPGA)

sind (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken) **konfluent** und **terminierend**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Determiniertheit maximaler Transformationen

Sei  $G$  ein Programm und  $T = T_{EPTA}^G$  oder  $T = T_{EPGA}^G$ .

## Korollar 12.3.7.6 (Determiniertheit max. Transf.-F.)

Sind  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau' = (\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau, \tau' \in T$ , maximal (und damit fair) für  $G$ , so stimmen  $G_\tau$  und  $G_{\tau'}$  bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken überein, d.h. das finale Programm maximaler Transformationsfolgen ist determiniert

## Korollar 12.3.7.7 (Maximale endl. Transf.-Folge)

Ist  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau \in T$ , fair für  $G$ , so hat  $\tau$  ein endliches Anfangsstück, das maximal für  $G$  ist, d.h. es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$  maximal für  $G$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3



# Endliche faire Transformationsfolgen

## Theorem 12.3.7.8 (Endliche faire Transf.-Folge)

1. Eine Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau \in T$ , für  $G$ , die für jedes Anweisungsmuster Senkungs- und Eliminations- und Senkungstransformationen für andere Anweisungsmuster wieder anwendet, ist fair.
2. Eine endliche Transformationsfolge für  $G$  ist maximal (und damit fair), wenn ein voller Zyklus von Senkungs- und Eliminationstransformationen für alle Anweisungsmuster keine echte Verbesserung mehr erbracht hat.

## Korollar 12.3.7.9 (Existenz global opt. Transf.)

1.  $\forall G \in \mathcal{G}. T_{EPTA}^{opt}(G) \neq \emptyset.$
2.  $\forall G \in \mathcal{G}. T_{EPGA}^{opt}(G) \neq \emptyset.$

# Existenz und Konstruktion

...global optimaler Programme und Transformationen.

## Korollar 12.3.7.10 (Existenz global opt. Programme)

1.  $\forall G \in \mathcal{G}. \mathcal{G}_{T_{EPTA}}^{opt}(G) \neq \emptyset.$
2.  $\forall G \in \mathcal{G}. \mathcal{G}_{T_{EPGA}}^{opt}(G) \neq \emptyset.$

## Korollar 12.3.7.11 (Determiniertheit)

Bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen gilt:

1.  $|\mathcal{G}_{T_{EPTA}}^{opt}(G)| = 1.$
2.  $|\mathcal{G}_{T_{EPGA}}^{opt}(G)| = 1.$

## Korollar 12.3.7.12

Theorem 12.3.7.8 beschreibt konstruktiv und effektiv die Bildung endlicher maximaler (und damit fairer und optimaler) EPTA/EPGA-Transformationsfolgen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# EPGA wirkmächtiger als EPTA

...jede tote Anweisung ist eine Geisteranweisung.

Für die bis auf irrelevante Umsortierungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programme

$$G_{EPTA}^{opt} \in \mathcal{G}_{T_{EPTA}}^{opt}(G) \text{ und } G_{EPGA}^{opt} \in \mathcal{G}_{T_{EPGA}}^{opt}(G)$$

gilt deshalb:  $G_{opt}^{EPGA}$  ist besser (i.S.v. Definition 12.3.6.1) als  $G_{EPTA}^{opt}$ :

Lemma 12.3.7.13 (EPGA besser als EPTA)

$$\forall G \in \mathcal{G}. G_{EPTA}^{opt} \sqsubseteq G_{EPGA}^{opt}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

971/169

# Übungsaufgabe 12.3.7.14

Gemäß Lemma 12.3.7.13 ist EPGA wirkmächtiger als EPTA. Wie oft allerdings müssen durch Eliminationstransformationen Geisteranweisungen in einer maximalen Transformationsfolge zu  $G_{EPGA}^{opt}$  eliminiert werden? Mehrfach? Stets? Reicht einmal?

Betrachte folgende Transformationsmengen:

1.  $T_1 =_{df} T_{AS, EGA}^G = \{\tau \mid \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS + EGA)^*)\}$
2.  $T_2 =_{df} T_{EGA \circ (AS, ETA)}^G = \{\tau \mid \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(EGA_{\mathcal{AM}} * (AS + ETA)^*)\}$
3.  $T_3 =_{df} T_{(AS, ETA) \circ EGA \circ (AS, ETA)}^G = \{\tau \mid \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS + ETA)^* * EGA_{\mathcal{AM}} * (AS + ETA)^*)\}$

wobei  $T_2$  und  $T_3$  genau eine EGA-Transformation simultan für alle Anweisungsmuster zu Anfang oder an beliebiger Stelle in einer Transformationsfolge vorsehen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Übungsaufgabe 12.3.7.14 (fgs.)

Untersuche die Gültigkeit folgender Behauptung:

Die bis auf irrelevante Umsortierungen eindeutig bestimmten global optimalen Programme  $G_1^{opt} \in \mathcal{G}_{T_1}^{opt}(G) = \mathcal{G}_{T_{EPGA}}^{opt}(G)$ ,  $G_2^{opt} \in \mathcal{G}_{T_2}^{opt}(G)$  und  $G_3^{opt} \in \mathcal{G}_{T_3}^{opt}(G)$  sind gleich gut bzgl. der Relation besser (aus Definition 12.3.6.1):

$$G_1^{opt} \sim G_2^{opt} \sim G_3^{opt}$$

Beweis oder Gegenbeispiel.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

973/169

# Kapitel 12.3.8

## EPTA/EPGA: Implementierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Beobachtung

...um die Elementartransformationen von **EPTA** und **EPGA** und diese selbst implementieren zu können, ist die Angabe von **DFAs** für folgende Aufgaben nötig (und ausreichend):

**Datenflussanalyseverfahren** zur Berechnung

- ▶ toter Anweisungen
- ▶ schattenhafter Anweisungen
- ▶ der Endpunkte von Anweisungssenkungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Tote Variablenanalyse (1)

...für **knotenbenannte Instruktionsgraphen**.

**Lokale Prädikate** (assoziiert mit **Instruktionsknoten**):

- $\text{Mod}_n^v$ : Die Anweisung von Knoten  $n$  modifiziert Variable  $v$ .
- $\text{Use}_\epsilon^v$ : Variable  $v$  wird von der Anweisung von Knoten  $n$  gelesen. (z.B. rechtsseitig in einer Zuweisung, in einer Ausgabeanweisung, Verzweigungsbedingung oder Schleifenabbruchbedingung).
- $\text{LhsVar}_n$ : Bezeichnet die **linksseitige** Variable der Zuweisung von Knoten  $n$ .



# Tote Variablenanalyse (2)

Das TVA-Gleichungssystem für knotenbenannte Instruktionsgraphen (simultan für alle Variablen  $v$ ):

$$\text{N-DEAD}_n^v = \overline{\text{Use}_n^v} * (\text{X-DEAD}_n^v + \text{Mod}_n^v)$$

$$\text{X-DEAD}_n^v = \prod_{m \in \text{succ}(n)} \text{N-DEAD}_m^v$$

Größte Lösung:  $\nu\text{-N-DEAD}_n^v$ ,  $\nu\text{-X-DEAD}_n^v$ .

## Lemma 12.3.8.1 (Tote Anweisungen)

Eine Anweisung  $\alpha$  am Knoten  $n$  ist tot gdw die linksseitige Variable von  $\alpha$  ist geisterhaft am Ausgang von Knoten  $n$ , d.h.  $\nu\text{-X-DEAD}_n^{\text{LhsVar}_\alpha} = \mathbf{wahr}$ .

- ...eine Variable  $v$  ist **tot** am **Eingang** des Knotens  $n$ , wenn  $v$
- von der Anweisung am Knoten  $n$  nicht durch lesen ‘zu leben gezwungen’ wird (**1-tes Konjunktionsglied**).
  - am Ausgang des Knotens  $n$  bereits tot ist oder durch die Anweisung am Knoten  $n$  modifiziert und dadurch das Leben verliert und zu Tode kommt, tot wird (**2-tes Konjunktionsglied**).
- ...eine Variable  $v$  ist **tot** am **Ausgang** des Knotens  $n$ , wenn  $v$
- am Eingang aller Nachfolgeknoten tot ist.

# Geistervariablenanalyse (1)

...für **knotenbenannte Instruktionsgraphen**.

**Lokale Prädikate** (assoziiert mit **Instruktionsknoten**):

- $\text{Mod}_n^v$ : Die Anweisung von Knoten  $n$  modifiziert Variable  $v$ .
- $\text{AssUse}_n^v$ : Die Anweisung von Knoten  $n$  ist eine Zuweisung und liest Variable  $v$ .
- $\text{LifeEnforcingUse}_n^v$ : Variable  $v$  wird von der Anweisung am Knoten  $n$  gelesen und dadurch 'zu leben gezwungen' (z.B. wenn die Anweisung eine Ausgabeanweisung, Verzweigungsbedingung oder Schleifenabbruchbedingung ist).
- $\text{LhsVar}_n$ : Bezeichnet die **linksseitige** Variable der Zuweisung von Knoten  $n$ .

# Geistervariablenanalyse (2)

Das GVA-Gleichungssystem für knotenbenannte Instruktionsgraphen (simultan für alle Variablen  $v$ ):

$$\begin{aligned} \text{N-FAINT}_n^v &= \overline{\text{LifeEnforcingUse}_n^v} * \\ &\quad (\text{X-FAINT}_n^v + \text{Mod}_n^v) * \\ &\quad (\text{X-FAINT}_n^{\text{LhsVar}_n} + \overline{\text{AssUse}_n^v}) \end{aligned}$$

$$\text{X-FAINT}_n^v = \prod_{m \in \text{succ}(n)} \text{N-FAINT}_m^v$$

Größte Lösung:  $\nu\text{-N-FAINT}_n^v$ ,  $\nu\text{-X-FAINT}_n^v$ .

## Lemma 12.3.8.2 (Geisterhafte Anweisungen)

Eine Anweisung  $\alpha$  am Knoten  $n$  ist geisterhaft gdw die linksseitige Variable von  $\alpha$  ist geisterhaft am Ausgang von Knoten  $n$ , d.h.  $\nu\text{-X-FAINT}_n^{\text{LhsVar}_\alpha} = \text{wahr}$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

980/169

# Intuitiv

...eine Variable  $v$  ist geisterhaft am Eingang des Knotens  $n$ , wenn  $v$

- von der Anweisung am Knoten  $n$  nicht 'zu leben gezwungen' wird (1-tes Konjunktionsglied).
- am Ausgang des Knotens  $n$  bereits geisterhaft ist oder durch die Anweisung am Knoten  $n$  modifiziert und dadurch geisterhaft wird (2-tes Konjunktionsglied).
- von der Anweisung am Knoten  $n$  nicht benutzt wird oder höchstens der Wertzuweisung an eine andere geisterhafte Variable dient (3-tes Konjunktionsglied).

...eine Variable  $v$  ist geisterhaft am Ausgang des Knotens  $n$ , wenn  $v$

- am Eingang aller Nachfolgeknoten geisterhaft ist.

# Anweisungssenkungsanalyse

...für knotenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionsknoten):

- $\text{Sinkable}_n^\alpha$ : Die Anweisung von Knoten  $n$  ist vom Anweisungsmuster  $\alpha$  (und steht deshalb bereits am Ende von  $n$ ).
- $\text{Blocked}_n^\alpha$ : Die Senkung (oder Verschiebung) von  $\alpha$  über die Anweisung am Knoten  $n$  hinweg wird von dieser  $n$  blockiert.

# Die Anweisungssenkungsanalyse

Das ASA-Gleichungssystem für knotenbenannte Instruktionsgraphen (simultan für alle Anweisungsmuster  $\alpha$ ):

$$\text{N-SINK}_n^\alpha = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \prod_{m \in \text{pred}(n)} \text{X-SINK}_m^\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{X-SINK}_n^\alpha = \text{Sinkable}_n^\alpha + \text{N-SINK}_n^\alpha * \overline{\text{Blocked}_n^\alpha}$$

Größte Lösung:  $\nu\text{-N-SINK}_n^\alpha$ ,  $\nu\text{-X-SINK}_n^\alpha$ .

# Endpunkte der Anweisungssenkung

Die sich aus der AS-Analyse ergebenden Einsetzungspunkte:

$$\text{N-Insert}_n^\alpha =_{df} \nu\text{-N-SINK}_n^\alpha * \text{Blocked}_n^\alpha$$

$$\text{X-Insert}_n^\alpha =_{df} \nu\text{-X-SINK}_n^\alpha * \sum_{m \in \text{succ}(n)} \overline{\nu\text{-N-SINK}_m^\alpha}$$

**Wichtig:** Die Berechnung der Einsetzungspunkte (d.h. der Endpunkte der Schiebung) erfordert **keine iterative globale DFA**, sondern kann lokal an jedem Knoten berechnet werden mithilfe des lokalen Prädikats **Blocked** und der größten Lösung des **AS-Gleichungssystems**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3



# Übungsaufgabe 12.3.8.1

Wie lauten die **Spezifikationen** der Analysen zur

1. Erkennung toter Anweisungen
2. Erkennung geisterhafter Anweisungen
3. Senkung von Anweisungen

im Stil von **Kapitel 7**?

Gib die entsprechenden **Spezifikationstupel** an.

# Anmerkung zu Basisblock-Graphen (1)

...wenn sie existieren, sind **Senkungskandidaten** in Basisblöcken eindeutig bestimmt:

```
⋮  
y := a+b  
a := c  
x := 3*y  
y := a+b  
x := d
```

```
⋮  
y := a+b  
a := c  
x := 3*y  
y := a+b  
a := d
```



Senkungskandidat



Blockierte Vorkommen

Nur das **blau** markierte Vorkommen von **y := a+b** ist ein **Senkungskandidat**; die **pink** markierten Vorkommen von **y := a+b** sind lokal in den Basisblöcken blockiert.

# Anmerkung zu Basisblock-Graphen (2)

## Senkungsanalyse

- Die Eindeutigkeit von Senkungskandidaten erlaubt die Senkungsanalyse unmittelbar (ohne Änderungen oder Anpassungen) von Instruktions- auf Basisblockgraphen zu übertragen.

## Tote Variablenanalyse

- Anpassungen zur Übertragung der Analyse von Instruktions- auf Basisblockgraphen sind erforderlich; siehe [Anhang B](#) für Details.

## Geistervariablenanalyse

- Als sog. [nicht-separates](#) Analyseproblem keine Übertragung auf Basisblockgraphen möglich; siehe [Anhang B](#) für Details.

# Kapitel 12.4

## Partiell redundante Anweisungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Kapitel 12.4.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

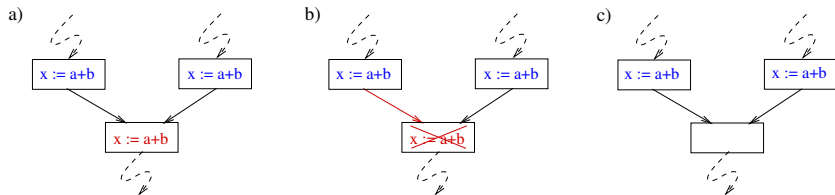
12.3

989/169

# Redundante Anweisungen

...und ihre Elimination.

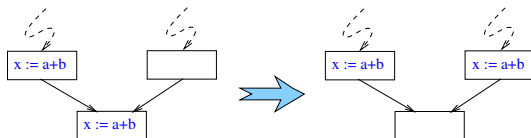
Das **Grundmuster**: Das rote Vorkommen der Anweisung  $x := a+b$  ist **redundant** (oder **total redundant**) (engl. **(totally) redundant**) gegenüber den beiden blauen, da weder  $x$  noch  $a$  oder  $b$  zwischen den Vorkommen geschrieben werden.



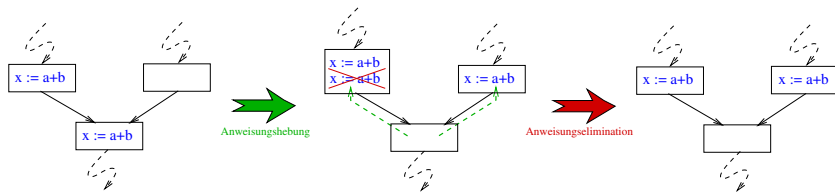
# Partiell redundante Anweisungen

...und ihre Elimination.

Das Grundmuster:



Die konzeptuelle Verfahrensidee:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Kapitel 12.4.2

## Elementartransformationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3



# Redundante Anweisungen

## Definition 12.4.2.1 (Redundante Anweisung)

Eine Anweisung vom Muster  $\alpha \equiv x := t$  am Knoten  $n$  ist **redundant** gdw jeder Programmpfad vom Startknoten zu einem Vorgänger  $m$  von  $n$  führt über einen Knoten  $k$ , wobei gilt:

- $m$  enthält ein  $\alpha$ -Vorkommen als Anweisung.
- auf der Pfadfortsetzung von  $k$  zu  $m$  werden  $x$ ,  $a$  und  $b$  nicht geschrieben.

# Anweisungseliminationen

## Definition 12.4.2.2 (Elimination redundanter Anw.)

Eine Anweisungselimination, die einige **redundante Anweisungen** aus dem Programm streicht, heißt **Elimination redundanter Anweisungen** (engl. **redundant assignment elimination**).

## Definition 12.4.2.3 (Korrekte Anweisungselim.)

Eine Anweisungselimination ist **korrekt**, wenn sie eine Elimination redundanter Anweisungen ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

994/169

# Anweisungshebungen

## Definition 12.4.2.4 (Anweisungshebung)

Eine **Anweisungshebung** für ein Anweisungsmuster  $\alpha \equiv x := t$  (oder  $\alpha$ -**Anweisungshebung**) ist das **simultane stetige Verschieben** eines oder mehrerer Vorkommen von  $\alpha$  **entgegen der Richtung des Kontrollflusses** zu einem oder mehreren anderen Knoten.

## Definition 12.4.2.5 (Korrekte Anweisungshebung)

Eine  $\alpha$ -**Anweisungshebung**,  $\alpha \equiv x := t$ , ist **korrekt**, wenn zu jedem Zeitpunkt während des Schiebens gilt:

1. Kein  $\alpha$ -Vorkommen wird über eine Anweisung hinweggeschoben, die  $x$  liest oder modifiziert oder einen Operanden von  $t$  modifiziert (und  $\alpha$  dadurch **blockiert**).
2. Kein  $\alpha$ -Vorkommen wird (rückwärts) in einen Verzweigungsknoten geschoben, wenn dies nicht von jedem Nachfolger des Verzweigungsknotens aus geschieht.

# Sprechweisen und Bezeichnungen

## Definition 12.4.2.6 (Blockiert)

Ein Anweisung  $\alpha$  der Form  $x := t$  ist von einer Anweisung  $\alpha'$  **hebungsblockiert** (oder: **blockiert**), wenn  $\alpha'$

- Variable  $x$ 
  - liest ( $\alpha' \equiv \dots := \dots x \dots$ ) oder
  - modifiziert ( $\alpha' \equiv x := \dots$ ) oder
- einen Operanden von  $t$  modifiziert.

## Proposition 12.4.2.7

Eine Anweisung blockiert die Hebung einer Anweisung gdw sie deren Senkung blockiert.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

996/169

# Kapitel 12.4.3

## Effekte zweiter Ordnung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Effekte zweiter Ordnung

...treten bei EPRA ähnlich wie bei EPTA und EPGA in 4 Formen auf und sind auch hier maßgeblich für die kombinierte Wirkung der Elementartransformationen von EPRA:

1. Hebungs-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)  
     $\rightsquigarrow$  Hoisting-elimination effects
2. Hebungs-Hebungs-Effekte (Potentialeffekt)  
     $\rightsquigarrow$  Hoisting-hoisting effects
3. Eliminations-Hebungs-Effekte (Potentialeffekt)  
     $\rightsquigarrow$  Elimination-hoisting effects
4. Eliminations-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)  
     $\rightsquigarrow$  Elimination-elimination effects

# Übungsaufgabe 12.4.3.1

Gib für jeden der vier Effekte zweiter Ordnung von EPRA ein Beispiel an:

1. Hebungs-Eliminations-Effekt
2. Hebungs-Hebungs-Effekt
3. Eliminations-Hebungs-Effekt
4. Eliminations-Eliminations-Effekt

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

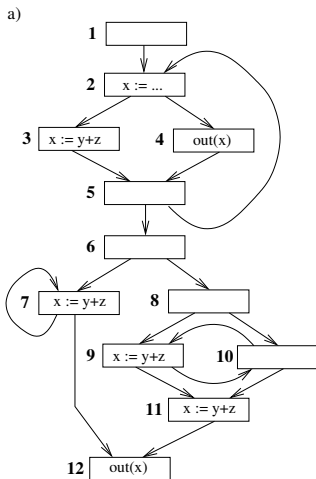
12.1

12.2

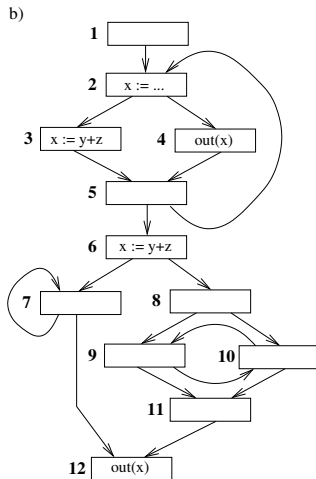
12.3

# Sequenzwirkung von Effekten 2. Ordnung

## Ausgangsprogramm



## Optimiertes Programm



**Beachte:** Kein Schieben von Anweisungen in Schleifen!



# Kapitel 12.4.4

## EPRA: Transformation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1001/16

# Unnötige Anweisungen

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 12.4.4.1 (Unnötige Anweisung)

Eine Anweisung  $\alpha$  am Knoten  $n$  in  $G$  heißt **unnötig** gdw  $\alpha$  ist **redundant** am Knoten  $n$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1002/16

# Sprechweisen und Bezeichnungen (1)

Wir bezeichnen informell mit

- ▶  $AH =_{df} \bigcup \{AH_{\alpha}^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$
- ▶  $ERA =_{df} \bigcup \{ERA_{\alpha}^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$

die Mengen aller **zulässigen Anweisungshebungen** und **-eliminationen** (für beliebige Programme).

Wir bezeichnen ebenso informell mit **Wörtern** der von dem **regulär-artigen Ausdruck**

$$(AH + ERA)^*$$

erzeugten Sprache

$$\mathcal{L}((AH + ERA)^*)$$

**Folgen** zulässiger **AH-** und **ERA-Transformationen** (für beliebige Programme und Anweisungsmuster).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1003/16

## Sprechweisen und Bezeichnungen (2)

Mit diesen Schreibweisen bezeichne:

$$- T_{AH,ERA}^G = \{\tau \mid \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AH + ERA)^*)\}$$

die Menge aller Transformationsfolgen aus zulässigen AH- und ERA-Transformationen für ein Programm  $G$ .

Geht  $G$  aus dem Kontext hervor, schreiben wir statt  $T_{AH,ERA}^G$  einfacher  $T_{AH,ERA}$ .

Ist  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Transformationsfolge, so bezeichne:

- $(\tau_i)_{i \leq k}$  das Anfangsstück von  $\tau$  bis zum Index  $k$  einschließlich.
- $\tau_j$  die Elementartransformation mit Index  $j$  von  $\tau$ .
- $G_\tau$ ,  $G_{(\tau_i)_{i \leq k}}$  und  $G_{(\tau_j)}$  diejenigen Programme, die aus  $G$  durch Anwendung von  $\tau$ ,  $(\tau_i)_{i \leq k}$ , auf  $G$  entstehen.

# EPRA-Transformation

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 12.4.4.2 (EPRA-Transformation)

1. Eine EPRA-Transformation ist eine beliebige Abfolge zulässiger Anweisungshebungen und Eliminationen redundanter Anweisungen.
2.  $T_{EPRA}^G$  bezeichnet die Menge aller EPRA-Transformationen für  $G$ , in Zeichen:

$$T_{EPRA}^G =_{df} T_{AH,ERA}^G$$

3. Ist  $\tau \in T_{EPRA}^G$ , so bezeichnet  $G_\tau$  das Programm, das  $\tau$  angewendet auf  $G$  liefert.

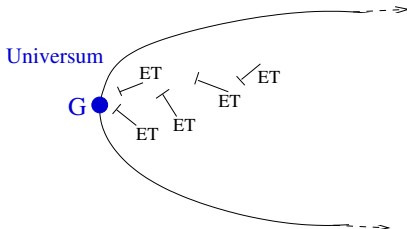
# Transformationsrelation, Programmuniversum

## ► Transformationsrelation:

$G \vdash_{\tau} G', \tau \in AH \cup ERA$ :  $G'$  resultiert aus  $G$  durch Anwendung von  $\tau$  mit  $\tau$  zulässige Hebungs- oder Eliminationstransformation redundanter Anweisungen.

## ► Induziertes Programmuniversum:

$\mathcal{U}_{T_{EPRA}}^G =_{df} \{G' \mid G \vdash_{(\tau_i)_{i \leq k}} G', \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T_{EPRA}^G, k \in \mathbb{N}\}$ :  
Das von  $G$  durch die Präfixe der Transformationsfolgen  $\tau \in T_{EPRA}^G$  aufgespannte **Universum**.



# Kapitel 12.4.5

## EPRA: Besser, best, optimal

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1007/16

# Vergleichsrelation 'besser' für Programme

Sei  $G = (N, E, s, e)$  ein Programm und seien  $G', G'' \in \mathcal{U}_{TEPRA}^G$ .

## Definition 12.4.5.1 (Besser)

$G'$  heißt **besser** als  $G''$  (in Zeichen:  $G'' \sqsubseteq G'$ ) gdw.  $G'$  ist besser als  $G''$  i.S.v. Definition 12.3.6.1, d.h.:

$$\forall p \in \mathbf{P}_G[s, e] \quad \forall \alpha \in \mathcal{AM}. \quad \#_{\alpha}(p_{G'}) \leq \#_{\alpha}(p_{G''})$$

wobei  $\#_{\alpha}(p_{G'})$  und  $\#_{\alpha}(p_{G''})$  die Anzahl von Anweisungen des Anweisungsmusters  $\alpha$  auf  $p$  in  $G'$  bzw.  $G''$  bezeichnen.

**Beachte:** Anweisungshebungen und -eliminationen erhalten die Verzweigungs- und Knotenstruktur eines Programms  $G$ . Die einem Pfad in  $G$  eineindeutig in  $G'$  und  $G''$  entsprechenden Pfade können deshalb einfach identifiziert werden.



# Eigenschaften der Relation 'besser'

## Lemma 12.4.5.2 (Quasiordnung)

Die Programmvergleichsrelation **besser**  $\sqsubseteq$  ist eine **Quasiordnung** (d.h. **reflexiv** und **transitiv**, aber nicht **antisymmetrisch**).

## Lemma 12.4.5.3 (Verbesserung, Verb.-Neutralität)

Seien  $G$  und  $G'$  zwei Programme mit  $G \vdash_{\tau} G'$  und  $\tau \in AH \cup ERA$ . Dann gilt:

1.  $G \sim G'$ , falls  $\tau$  eine zulässige Anweisungshebung ist.
2.  $G \sqsubsetneq G'$ , falls  $\tau$  eine nichttriviale ( $\neq Id$ ) zulässige Elimination redundanter Anweisungen ist.

...das heißt: **Eliminationen** bewirken **unmittelbar echte Verbesserungen**, während **Hebungen verbesserungsneutral** sind, aber durch spätere Eliminationen als **Effekte zweiter Ordnung mittelbar Verbesserungen** ermöglichen können.

# Beste (oder optimale) Programme

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 12.4.5.4 (Global beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm  $G^* \in \mathcal{U}_{TEPRA}^G$  heißt **global EPRA-best** (oder **global EPRA-optimal**) gdw  $G^*$  ist besser als jedes andere Programm aus  $\mathcal{U}_{TEPRA}^G$ :

$$\forall G' \in \mathcal{U}_{TEPRA}^G. G' \sqsubset G^*$$

2. Bezeichne  $\mathcal{G}_{TEPRA}^{opt}(G)$  die Menge der global EPRA-besten (oder global EPRA-optimalen) Programme in  $\mathcal{U}_{TEPRA}^G$ .

# Lokal beste (oder optimale) Programme

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 12.4.5.5 (Lokal beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm  $G^* \in \mathcal{U}_{T_{EPRA}}^G$  heißt **lokal EPRA-best** gdw:

$$\forall G' \in \mathcal{U}_{T_{EPRA}}^{G^*}. G^* \sim G'$$

2. Bezeichne  $\mathcal{G}_{T_{EPRA}}^{lokopt}(G)$  die Menge der lokal **EPRA**-besten (oder lokal **EPRA**-optimalen) Programme in  $\mathcal{U}_{T_{EPRA}}^G$ .

**Intuitiv:** Ein Programm ist **lokal optimal**, wenn beliebige weitere (Folgen von) Elementartransformationen nicht mehr zu einer echten Verbesserung führen, sondern höchstens noch Anweisungen durch Hebungen an anderen Programmstellen platzieren.

# Vergleichsrelation 'besser' für Transf.-Folgen

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 12.4.5.6 (EPRA-bessere Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)  $\tau \in T_{EPRA}^G$  heißt **EPRA-besser** für  $G$  als  $\tau' \in T_{EPRA}^G$  gdw:  $G_{\tau'} \sqsubseteq G_{\tau}$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1012/16

# Global, lokal beste Transformationsfolgen

## Definition 12.4.5.7 (Global EPRA-beste Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)  $\tau \in T_{EPRA}^G$  heißt **global EPRA-best** für  $G$  gdw  $\tau$  ist **EPRA-besser** für  $G$  als jede andere Transformation in  $T_{EPRA}^G$ .

## Definition 12.4.5.8 (Lokal EPRA-beste Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)  $\tau \in T_{EPRA}^G$  heißt **lokal EPRA-best** für  $G$  gdw keine **EPRA-Verlängerung** von  $\tau$  ist echt **EPRA-besser** als  $\tau$ , d.h.  $\tau$  ist genauso gut wie jede Verlängerung von  $\tau$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1013/16

# Mengen bester (oder optimaler) Transf.-Folgen

## Definition 12.4.5.9 (Beste (oder optimale) Transf.)

Wir bezeichnen mit  $T_{EPRA}^{opt}(G)/T_{EPRA}^{lokopt}(G)$  die Menge der global/lokal EPRA-besten (oder EPRA-optimalen) Transformationen für  $G$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1014/16

# Globale Optimalität

...von Programmen und Transformationen impliziert ihre lokale Optimalität.

## Proposition 12.4.5.10

1. Global EPRA-optimale Programme sind lokal EPRA-optimal.
2. Global EPRA-optimale Transformationen sind lokal EPRA-optimal.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Universumskorrekt, universumsoptimal

Sei  $G$  ein Programm.

## Lemma 12.4.5.11 (Universumskorrekt)

Ist  $\tau \in T_{EPRA}^G$ , so ist  $G_\tau \in \mathcal{U}_{T_{EPRA}}^G$ .

## Lemma 12.4.5.12 (Universumsoptimal)

Ist  $\tau \in T_{EPRA}^G$  global EPRA-best für  $G$ , so ist  $G_\tau \in \mathcal{G}_T^{opt}(G)$  global EPRA-best.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3



# Kapitel 12.4.6

## EPRA: Optimalität

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1017/16

# Maximale Transformationsfolgen

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 12.4.6.1 (Maximale Transf.-Folge)

Eine unendliche oder endliche Transformationsfolge  $\tau$  für  $G$  mit  $\tau \in T_{EPRA}^G$  und

- $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  oder
- $\tau = (\tau_i)_{i \leq k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$

heißt **maximal**, wenn  $\tau$  lokal optimal ist (d.h. weitere Eliminationstransformationen lassen das Programm  $G_\tau$  unverändert, weitere Senkungstransformationen platzieren lediglich Anweisungen an anderen Programmstellen ohne dadurch neue Eliminationsmöglichkeiten zu eröffnen).

# Faire Transformationsfolgen

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 12.4.6.2 (Faire Transf.-Folge)

Eine Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau \in T_{EPRA}^G$ , für  $G$  heißt **fair**, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N}. (\tau_i)_{i \leq k} \text{ nicht maximal} \Rightarrow \exists k' > k. G_{(\tau_i)_{i \leq k}} \sqsubseteq \approx G_{(\tau_i)_{i \leq k'}}$$

## Lemma 12.4.6.3 (Maximale Transf.-Folge fair)

Maximale Transformationsfolgen für  $G$  sind fair.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

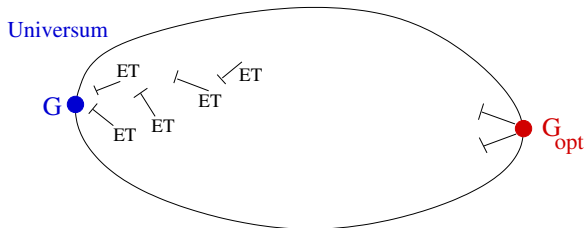
12.2

12.3

# Globale EPRA-Optimalität

## Theorem 12.4.6.4 (Globale EPRA-Optimalität)

1. Jede faire EPRA-Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  für ein Programm  $G$  ist **global optimal**, d.h. endet in einem bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programm  $G_{opt} \in \mathcal{G}_{EPRA}^{opt}(G)$ .
2. Jede faire EPRA-Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  hat ein endliches Anfangsstück  $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$  mit  $G_{opt} \sim G_{\tau} \sim G_{\tau'}$



# Beweis von Theorem 12.4.6.4

...analog zum Beweis von Theorem 12.3.7.4 in zwei Varianten.  
Über:

1. Monotonie, Dominanz und Fixpunkttheorem 11.2.9 (Variante 1).
2. Konfluenz und Termination der Transformationsrelation, s. Theorem 12.4.6.5 (Variante 2).

## Theorem 12.4.6.5 (Konfluenz, Terminierung)

Die EPRA-Transformationsrelation

$$\cdot \vdash_{\tau} \cdot, \tau \in AH \cup ERA$$

ist (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken) **konfluent** und **terminierend**.

# Determiniertheit maximaler Transformationen

## Korollar 12.4.6.6 (Determiniertheit max. Transf.-F.)

Sind  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau' = (\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau, \tau' \in T_{EPRA}^G$ , maximal (und damit fair) für  $G$ , so stimmen  $G_\tau$  und  $G_{\tau'}$  bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken überein, d.h. das finale Programm maximaler Transformationsfolgen ist determiniert

## Korollar 12.4.6.7 (Endliche max. Transf.-Folge)

Ist  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau \in T_{EPRA}^G$ , fair für  $G$ , so hat  $\tau$  ein endliches Anfangsstück, das maximal für  $G$  ist, d.h. es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$  maximal für  $G$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1023/16

# Endliche faire Transformationsfolgen

## Theorem 12.4.6.8 (Endliche faire Transf.-Folge)

1. Eine Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau \in T_{EPRA}^G$ , für  $G$ , die für jedes Anweisungsmuster Hebungs- und Eliminationstransformation nach höchstens endlich vielen Eliminations- und Hebungstransformationen für andere Anweisungsmuster wieder anwendet, ist fair.
2. Eine endliche Transformationsfolge für  $G$  ist maximal (und damit fair), wenn ein voller Zyklus von Hebungs- und Eliminationstransformationen für alle Anweisungsmuster keine echte Verbesserung mehr erbracht hat.

## Korollar 12.4.6.9 (Existenz global opt. Transf.)

$$\forall G \in \mathcal{G}. T_{EPRA}^{opt}(G) \neq \emptyset$$



# Existenz und Konstruktion

...global optimaler Programme und Transformationen.

## Korollar 12.4.6.10 (Existenz global opt. Programme)

$$\forall G \in \mathcal{G}. \mathcal{G}_{T_{EPRA}}^{opt}(G) \neq \emptyset$$

## Korollar 12.4.6.11 (Determiniertheit)

Bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen gilt:

$$|\mathcal{G}_{T_{EPRA}}^{opt}(G)| = 1$$

## Korollar 12.4.6.12

Theorem 12.4.6.7 beschreibt konstruktiv und effektiv die Bildung endlicher maximaler (und damit fairer und optimaler) EPRA-Transformationsfolgen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1025/16

# Kapitel 12.4.7

## EPRA: Implementierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1026/16

# Beobachtung

...um die Elementartransformationen von EPRA und EPRA selbst implementieren zu können, ist die Angabe von DFAs für folgende Aufgaben nötig (und ausreichend):

Datenflussanalysen zur Berechnung

- ▶ redundanter Anweisungen
- ▶ der Endpunkte von Anweisungshebungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Redundante Anweisungsanalyse

...für **knotenbenannte Instruktionsgraphen**.

**Lokale Prädikate** (assoziiert mit **Instruktionsknoten**):

- $\text{Transp}_n^\alpha$ : Die Anweisung von Knoten  $n$  modifiziert weder die linksseitige Variable noch einen Operanden des rechtsseitigen Ausdrucks von  $\alpha$ .
- $\text{Comp}_n^\alpha$ : Die Anweisung von Knoten  $n$  ist vom Muster  $\alpha$ .

# Übungsaufgabe 12.4.7.1: Red. Anw.-Analyse

Spezifiziere das **RAA**-Gleichungssystem für die Erkennung redundanter Anweisungen:

$$\text{N-RED}_n^\alpha = \dots$$

$$\text{X-RED}_n^\alpha = \dots$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1029/16

# Anweisungshebungsanalyse

...für knotenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionsknoten):

- $\text{Hoistable}_n^\alpha$ : Die Anweisung von Knoten  $n$  ist vom Anweisungsmuster  $\alpha$  (und steht deshalb bereits am Anfang von  $n$ ).
- $\text{Blocked}_n^\alpha$ : Die Hebung (oder Verschiebung) von  $\alpha$  über die Anweisung am Knoten  $n$  hinweg wird von dieser blockiert.

# Übungsaufgabe 12.4.7.2: Anw.-Heb.-Analyse

Spezifiziere das AHA-Gleichungssystem für Anweisungshebung:

$$\text{N-HOIST}_n^\alpha = \dots$$

$$\text{X-HOIST}_n^\alpha = \dots$$

sowie die Prädikate für die Endpunkte (oder Einsetzungspunkte) von Anweisungshebungen:

$$\text{N-Insert}_n^\alpha =_{df} \dots$$

$$\text{X-Insert}_n^\alpha =_{df} \dots$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

1031/16

# Übungsaufgabe 12.4.7.3

Wie lauten die Spezifikationen der Analysen zur

1. Erkennung redundanter Anweisungen
2. Hebung von Anweisungen

im Stil von Kapitel 7?

Gib die entsprechenden Spezifikationstupel an.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3



# Anmerkung zu Basisblock-Graphen (1)

...wenn sie existieren, sind **Hebungskandidaten** in **Basisblöcken** eindeutig bestimmt:

```
x := d
y := a+b
x := 3*y
a := c
y := a+b
⋮
```

```
a := d
y := a+b
x := 3*y
a := c
y := a+b
⋮
```



Hebungskandidat



Blockierte Vorkommen

Nur das **blau** markierte Vorkommen von **y := a+b** ist ein **Hebungskandidat**; die **pink** markierten Vorkommen von **y := a+b** sind lokal in den Basisblöcken blockiert.

# Anmerkung zu Basisblock-Graphen (2)

## Hebungsanalyse

- Die Eindeutigkeit von Hebungskandidaten erlaubt die Hebungsanalyse unmittelbar (ohne Änderungen oder Anpassungen) von Instruktions- auf Basisblockgraphen zu übertragen.

## Redundanzanalyse

- Anpassungen zur Übertragung der Analyse von Instruktions- auf Basisblockgraphen sind erforderlich; siehe [Anhang B](#) für Details.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Kapitel 12.5

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

12.1

12.2

12.3

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 12 (1)



Ras Bodik, Rajiv Gupta. *Partial Dead Code Elimination using Slicing Transformations*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'97 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'97), ACM SIGPLAN Notices 32(6):159-170, 1997.



L. Feigen, D. Klappholz, R. Casazza, X. Xue. *The Revival Transformation*. In Conference Record of the 21st ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'94), 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12



12.1

12.2

12.3

1036/16

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 12 (2)

-  Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Partial Dead Code Elimination*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'94 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'94), ACM SIGPLAN Notices 29(6):147-158, 1994.
-  Ronald J. Mintz, Gerald A. Fisher, Micha Sharir. *The Design of a Global Optimizer*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'79 Symposium on Compiler Construction (SoCC'79), ACM SIGPLAN Notices 14(8):226-234, 1979.
-  Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Partial Dead Code Elimination Using Extended Value Graph*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 179-193, 1999.

# Kapitel 13

## Transformationskombinationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

**Kap. 13**

13.1

1038/16

# Kapitel 13.1

## EPTRA: EPTA/EPRA-Kombination

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# Kapitel 13.1.1

## EPTA, EPRA: Grundtransformationen



# Motivation

...konzeptuell können wir **EPTA** und **EPRA** als 'Summe' von je zwei fair wiederholt angewendeter **Elementartransformationen** verstehen:

$$\blacktriangleright \text{EPTA} = (\text{AS} + \text{ETA})^*$$

$$\blacktriangleright \text{EPRA} = (\text{AH} + \text{ERA})^*$$

Das legt nahe, auch die 'Summe' aller vier fair wiederholt angewendeter Elementarfunktionen als **Verfahrenskombination** einzuführen für die **Elimination partiell toter und redundanter Anweisungen (EPTRA)** :

$$\blacktriangleright \text{EPTRA} = (\text{AS} + \text{ETA} + \text{AH} + \text{ERA})^*$$

**Erwartung:**

$\blacktriangleright$  **EPTRA** ist mächtiger als **EPTA** und **EPRA** für sich!

# Zur Wiederholung

Bezeichne:

$$- T_{AS,ETA,AH,ERA}^G = \{\tau \mid \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS + ETA + AH + ERA)^*)\}$$

die Menge aller Transformationsfolgen aus zulässigen Anweisungssenkungen, -hebungen und Eliminationen toter oder redundanter Anweisungen für ein Programm  $G$ .

Geht  $G$  aus dem Kontext hervor, schreiben wir statt

$T_{AS,ETA,AH,ERA}^G$  einfacher  $T_{AS,ETA,AH,ERA}$ .

Ist  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Transformationsfolge, so bezeichne:

- $(\tau_i)_{i \leq k}$  das Anfangsstück von  $\tau$  bis zum Index  $k$  einschließlich.
- $\tau_j$  die Elementartransformation mit Index  $j$  von  $\tau$ .
- $G_\tau$ ,  $G_{(\tau_i)_{i \leq k}}$  und  $G_{(\tau_j)}$  diejenigen Programme, die aus  $G$  durch Anwendung von  $\tau$ ,  $(\tau_i)_{i \leq k}$ , auf  $G$  entstehen.

# EPTA/EPRA: Konfluenz, Terminierung

...für die EPTA/EPRA-Transformationsrelationen gilt (s. Kapitel 12.3 und 12.4):

## Theorem 13.1.1.1 (Konfluenz, Terminierung)

Die EPTA- und EPRA-Transformationsrelationen

1.  $\cdot \vdash_{\tau} \cdot, \tau \in AS \cup ETA$  (EPTA)
2.  $\cdot \vdash_{\tau} \cdot, \tau \in AH \cup ERA$  (EPRA)

sind (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken) **konfluent** und **terminierend**.

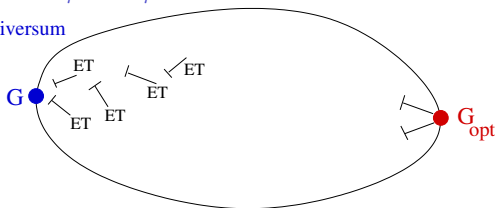
# EPTA/EPRA: Globale Optimalität

...für faire EPTA/EPRA-Transformationsfolgen gilt (s. Kapitel 12.3 und 12.4):

## Theorem 13.1.1.2 (Globale EPTA-/EPRA-Opt.)

1. Jede faire EPTA- und EPRA-Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ist **global optimal**, d.h. endet in einem bis auf irrelevante Umsortierungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programm  $G_{opt} \in \mathcal{G}_T^{opt}(G)$ .
2. Jede faire EPTA- und EPRA-Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  hat ein endliches Anfangsstück  $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$  mit  $G_{opt} \sim G_\tau \sim G_{\tau'}$ .

Universum



# Kapitel 13.1.2

## EPTRA: Transformation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1045/16

# EPTRA-Transformationsfolgen

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 13.1.2.1 (EPTRA-Transformationsfolge)

1. Eine EPTRA-Transformationsfolge (oder EPTRA-Transformation) ist eine beliebige Abfolge zulässiger Anweisungssenkungen, -hebungen und Eliminationen toter oder redundanter Anweisungen.
2.  $T_{EPTRA}^G$  bezeichne die Menge aller EPTRA-Transformation(sfolge)n für  $G$ , in Zeichen:

$$T_{EPTRA}^G = T_{AS,ETA,AH,ERA}^G$$

3. Ist  $\tau \in T_{EPTRA}^G$ , so bezeichnet  $G_\tau$  das Programm, das  $\tau$  angewendet auf  $G$  liefert.

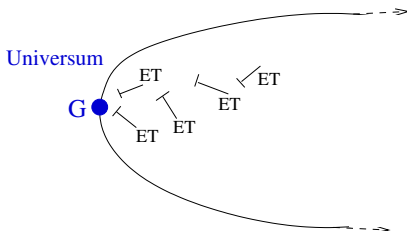
# Transformationsrelation, Programmuniversum

## ► Transformationsrelation:

$G \vdash_{\tau} G', \tau \in AS \cup ETA \cup AH \cup ERA$ :  $G'$  resultiert aus  $G$  durch Anwendung einer zulässigen Senkungs-, Hebungs- oder Eliminationstransformation toter oder redundanter Anweisungen.

## ► Induziertes Programmuniversum:

$\mathcal{U}_{EPTRA}^G =_{df} \{G' \mid G \vdash_{(\tau_i)_{i \leq k}} G', \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T_{EPTRA}^G, k \in \mathbb{N}\}$ :  
Das von  $G$  durch die Präfixe der Transformationsfolgen  $\tau \in T_{EPTRA}^G$  aufgespannte **Universum**.



# Kapitel 13.1.3

## EPTRA: Besser, best, optimal

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13



# Vergleichsrelation 'besser' für Programme

Sei  $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$  ein Programm und seien  $G', G'' \in \mathcal{U}_{T_{EPTRA}}^G$ .

## Definition 13.1.3.1 (Besser)

$G'$  heißt **besser** als  $G''$  (in Zeichen:  $G'' \sqsubseteq G'$ ) gdw  $G'$  ist besser als  $G''$  i.S.v. Definition 12.3.6.1, d.h.:

$$\forall p \in \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, \mathbf{e}] \forall \alpha \in \mathcal{AM}. \#_{\alpha}(p_{G'}) \leq \#_{\alpha}(p_{G''})$$

wobei  $\#_{\alpha}(p_{G'})$  und  $\#_{\alpha}(p_{G''})$  die Anzahl von Anweisungen des Anweisungsmusters  $\alpha$  auf  $p$  in  $G'$  bzw.  $G''$  bezeichnen.

# Eigenschaften der Relation 'besser'

## Lemma 13.1.3.2 (Quasiordnung)

Die Programmvergleichsrelation **besser**  $\sqsubseteq$  ist eine **Quasiordnung** (d.h. **reflexiv** und **transitiv**, aber nicht **antisymmetrisch**).

## Lemma 13.1.3.3 (Verbesserung, Verb.-Neutralität)

Seien  $G$  und  $G'$  zwei Programme mit  $G \vdash_{\tau} G'$  und  $\tau \in AS \cup ETA \cup AS \cup ERA$ . Dann gilt:

1.  $G \sim_{\tau} G'$ , falls  $\tau$  eine zulässige Anweisungssenkung oder -hebung ist.
2.  $G \sqsubset_{\tau} G'$ , falls  $\tau$  eine nichttriviale ( $\neq Id$ ) zulässige Elimination toter oder redundanter Anweisungen ist.

...d.h.: **Eliminationen** bewirken **echte Verbesserungen**, während **Senkungen** und **Hebungen** **verbesserungsneutral** sind, aber durch spätere Eliminationen als **Effekte zweiter Ordnung** mittelbar **Verbesserungen** ermöglichen können.

# Global beste (oder optimale) Programme

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 13.1.3.4 (Global beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm  $G^* \in \mathcal{U}_{T_{EPTRA}}^G$  heißt **global EPTRA-best** (oder **global EPTRA-optimal**) gdw  $G^*$  ist besser als jedes andere Programm aus  $\mathcal{U}_{T_{EPTRA}}^G$ :

$$\forall G' \in \mathcal{U}_{T_{EPTRA}}^G. G' \sqsubseteq G^*$$

2. Bezeichne  $\mathcal{G}_{T_{EPTRA}}^{opt}(G)$  die Menge der global **EPTRA**-besten (oder global **EPTRA**-optimalen) Programme in  $\mathcal{U}_{T_{EPTRA}}^G$ .

# Lokal beste (oder optimale) Programme

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 13.1.3.5 (Lokal beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm  $G^* \in \mathcal{U}_{T_{EPTRA}}^G$  heißt **lokal EPTRA-best** (oder **lokal EPTRA-optimal**) gdw:

$$\forall G' \in \mathcal{U}_{T_{EPTRA}}^G. G' \approx G^*$$

2. Bezeichne  $\mathcal{G}_{T_{EPTRA}}^{lokopt}(G)$  die Menge der lokal EPTRA-besten (oder lokal EPTRA-optimalen) Programme in  $\mathcal{U}_{T_{EPTRA}}^G$ .

**Intuitiv:** Ein Programm ist lokal optimal, wenn beliebige weitere Anwendungsfolgen von Elementartransformationen nicht mehr zu einer echten Verbesserung führen, sondern nur Anweisungen durch Senkungen oder Hebungen an anderen Programmstellen platzieren.

# Vergleichsrelation 'besser' für Transf.-Folgen

Sei  $G$  ein Programm.

## Definition 13.1.3.6 (EPRTA-bessere Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)  $\tau \in T_{EPRTA}^G$  heißt **EPRTA-besser** für  $G$  als  $\tau' \in T_{EPRTA}$  gdw:  $G_{\tau'} \sqsubseteq G_{\tau}$

## Definition 13.1.3.7 (Global, lokal EPRTA-beste T.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)  $\tau \in T_{EPRTA}^G$  heißt

1. **global EPRTA-best** für  $G$  gdw  $\tau$  ist **EPRTA-besser** für  $G$  als jede andere Transformation in  $T_{EPRTA}^G$ .
2. **lokal EPRTA-best** für  $G$  gdw keine **EPRTA-Verlängerung** von  $\tau$  ist echt **EPRTA-besser** als  $\tau$ , d.h.  $\tau$  ist genauso gut wie jede Verlängerung von  $\tau$ .

# Kapitel 13.1.4

## EPTRA: Optimalität

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# EPTRA: Nicht-Konfluenz, Termination

...für die EPTRA-Transformationsrelation gilt:

## Theorem 13.1.4.1 (Nicht-Konfluenz, Terminierung)

Die EPTRA-Transformationsrelation

$$\cdot \vdash_{\tau} \cdot, \tau \in AS \cup ETA \cup AH \cup ERA \quad (\text{EPTRA})$$

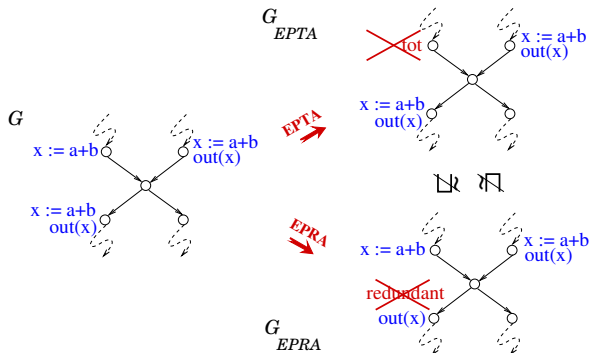
ist (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen im Programm) **terminierend**, aber (i.a.) nicht konfluent.

**Beachte:** Irrelevante Umsortierungen sind nicht länger auf Basisblöcke beschränkt, sondern können das gesamte Programm betreffen, da sowohl irrelevante Hebungen als auch Senkungen über Basisblockgrenzen hinaus möglich sind.)

# Beweisskizze zu Theorem 13.1.4.1

...durch Angabe eines Beispiels:

Betrachte die Effekte von **EPTA** und **EPRA** auf Programm  $G$ :



Offenbar gilt:  $G_{EPTA}$  und  $G_{EPRA}$  sind unvergleichbar bezüglich der Relation **besser**  $\sqsubseteq$ ; es gilt:

$$G_{EPTA} \not\sqsubseteq G_{EPRA} \wedge G_{EPRA} \not\sqsubseteq G_{EPTA}$$



# EPTRA: Lokale, keine globale Optimalität

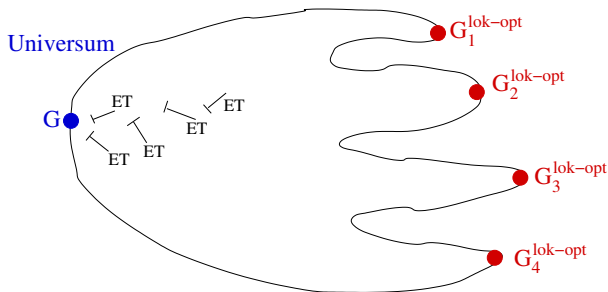
...für faire EPTRA-Transformationsfolgen gilt:

## Theorem 13.1.4.2 (Lokale EPTRA-Optimalität)

1. Jede faire EPTRA-Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ist lokal optimal, d.h. endet in einem bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen eindeutig bestimmten lokal optimalen Programm  $G_{\text{lokopt}} \in \mathcal{G}_{\text{EPTRA}}^{\text{lokopt}}(G)$ .
2. Jede faire bis auf irrelevante Umsortierungen in einem Programm  $G_{\text{lokopt}} \in \mathcal{G}_{\text{EPTRA}}^{\text{lokopt}}(G)$  endende EPTRA-Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  hat ein endliches Anfangsstück  $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$  mit  $G_{\text{lokopt}} \sim G_{\tau} \sim G_{\tau'}$ .
3. Global optimale EPTRA-Transformationsfolgen und -Programme existieren i.a. nicht.

# EPTRA: Verlust von Konfluenz, globaler Opt.

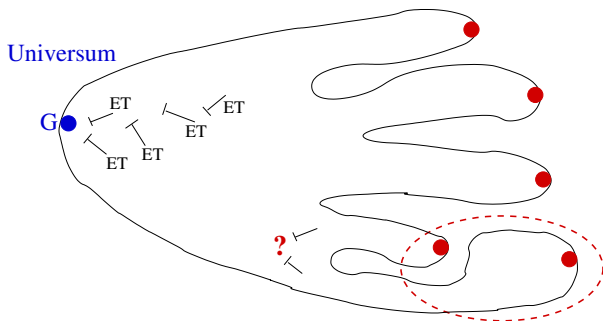
...Konfluenz und globale Optimalität sind für EPTRA verloren!



Lokale Optimalität bleibt für EPTRA zumindest erhalten!

# EPTRA: Verlust auch lokaler Optimalität

...allerdings möglich in speziellen Szenarien aufgrund spezieller Instruktionen (konkret: [High-Performance Fortran](#)):



Für Details siehe:

- Jens Knoop, Eduard Mehofer. [Distribution Assignment Placement: Effective Optimization of Redistribution Costs](#). IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 13(6):628-647, 2002.

# Kapitel 13.1.5

## EPTRA: Purismus vs. Pragmatismus

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# Purismus vs. Pragmatismus

...aus theoretischer Sicht ist das lokale Optimalitätsergebnis für

$$\blacktriangleright \text{EPTRA} = (\text{AS} + \text{ETA} + \text{AH} + \text{ERA})^*$$

weniger elegant und befriedigend als die globalen Optimalitätsergebnisse für

$$\blacktriangleright \text{EPRA} = (\text{AH} + \text{ERA})^*$$

$$\blacktriangleright \text{EPTA} = (\text{AS} + \text{ETA})^*$$

Aus pragmatischer Sicht ist allerdings

$$\blacktriangleright \text{EPTRA}$$

EPRA ebenso wie EPTA überlegen, weil wirkmächtiger; im Fall von High-Performance Fortran durch die Einsparung besonders rechenaufwändiger unnötiger Distributionsanweisungen sogar in der Größenordnung mehrerer hundert Prozent!

# EPTRA wirkmächtiger als EPRA und EPTA

Für die bis auf irrelevante Umsortierungen in Programmen bzw. Basisblöcken eindeutig bestimmten lokal bzw. global optimalen Programme

$$G_{EPTRA}^{loko\!pt} \in \mathcal{G}_{T_{EPTRA}}^{loko\!pt}(G), G_{EPRA}^{opt} \in \mathcal{G}_{T_{EPRA}}^{opt}(G) \text{ und } G_{EPTA}^{opt} \in \mathcal{G}_{T_{EPTA}}^{opt}(G)$$

gilt:  $G_{EPTRA}^{loko\!pt}$  ist besser (i.S.v. Definition 12.3.6.1) als  $G_{EPRA}^{opt}$  und  $G_{EPTA}^{opt}$ :

Lemma 13.1.5.1 (EPTRA besser als EPRA, EPTA)

$$\forall G \in \mathcal{G}. G_{EPRA}^{opt} \sqsubseteq G_{EPTRA}^{loko\!pt} \wedge G_{EPTA}^{opt} \sqsubseteq G_{EPTRA}^{loko\!pt}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1062/16

# Übungsaufgabe 13.1.5.2

Zeige, dass die Erwartung, dass **EPTRA** mächtiger ist als **EPTA** und **EPRA** für sich, begründet ist:

Finde dazu ein Programm **G**, so dass **EPTRA** angewendet auf **G** zu einem performanteren Programm führt als **EPTA** und **EPRA** jeweils für sich alleine.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# Kapitel 13.2

## EPRAA: EPRA/EPRA<sub>d</sub>-Kombination

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1064/16



# Kapitel 13.2.1

## EPRA, EPRA<sub>d</sub>: Grundtransformationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1065/16

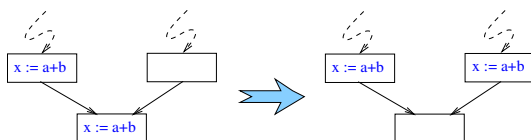
# EPRA und EPRA<sub>d</sub>

...zwei Grundtransformationen zur Elimination redundanten Berechnungsaufwands:

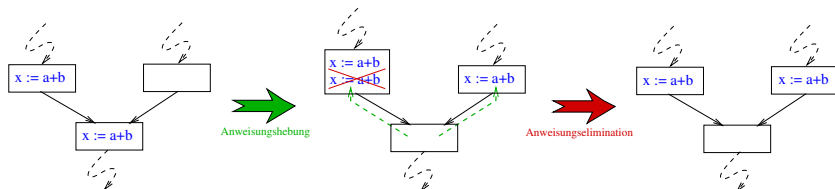
- ▶ Elimination partiell redundanter Ausdrücke (EPRA<sub>d</sub>)
  - ↪ Partially Redundant Expression Elimination (PREE)
  - ↪ Expression Motion (EM)
- ▶ Elimination partiell redundanter Anweisungen (EPRA)
  - ↪ Partially Redundant Assignment Elimination (PRAE)
  - ↪ Assignment Motion (AM)

# Elimination partiell redundanter Anweisungen

Das EPRA-Grundmuster:

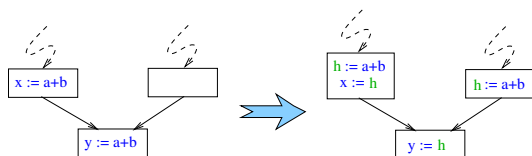


Die konzeptuelle EPRA-Verfahrens-idee:

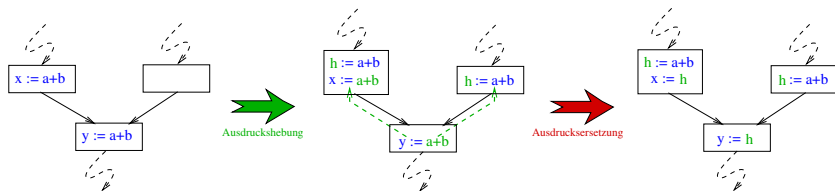


# Elimination partiell redundanter Ausdrücke

Das **EPRAd**-Grundmuster:

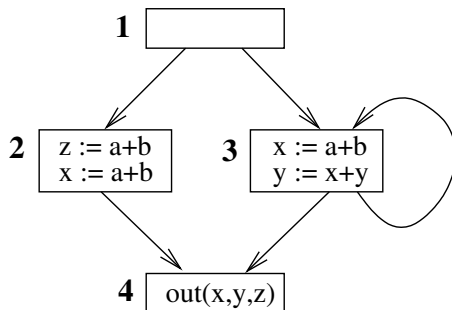


Die konzeptuelle **EPRAd**-Verfahrensidee:



# Ein gemeinsames Beispiel

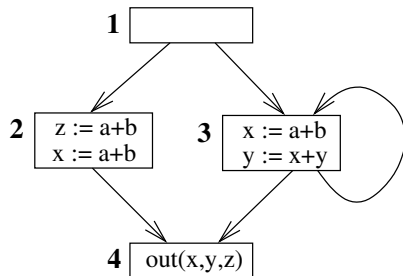
...für die Illustration der verschiedenen **Transformationseffekte**:



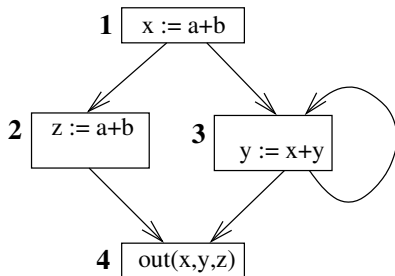
# Elimination partiell redundanter Anweisungen

...der EPRA-Effekt auf das gemeinsame Beispiel:

Ausgangsprogramm



Optimiertes Programm

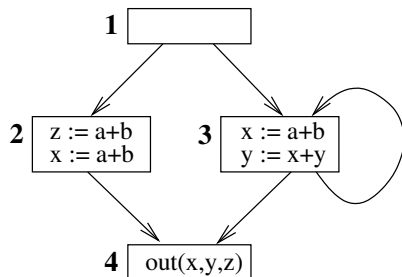


**Beachte:** Wären die kritischen Kanten (1, 3) und (3, 3) gespalten, würden maximale EPRA-Transformationen die Anweisung  $y := x+y$  vom Knoten 3 in die synthetischen Knoten  $S_{1,3}$  und  $S_{3,3}$  schieben, was bezüglich der Relation 'besser' keinen Unterschied zum obigen optimierten Programm machte.

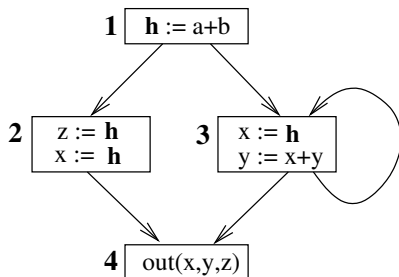
# Elimination partiell redundanter Ausdrücke

...der **EPRAd**-Effekt auf das gemeinsame Beispiel:

Ausgangsprogramm



Optimiertes Programm



**Beachte:** Der Term  $x+y$  ist nicht schleifeninvariant. Merken seines Wertes in einer Hilfsvariablen und Wiederbenutzung des gemerkten Werts führt deshalb nicht zu einer Verbesserung.

# Globale Optimalität d. Grundtransformationen

...konzeptuell können die

- Elimination partiell redundanter Anweisungen (EPRA)
- Elimination partiell redundanter Ausdrücke (EPRAd)

im Sinne folgender regulär-ähnlicher Ausdrücke verstanden werden:

- $EPRA = (AH + ERA)^*$
- $EPRAd = AdH_{max} * ETRAd_{max} * (AdS_{max})^k, k \in \{0, 1\}$ .

**Beachte:** EPRAd ist anders als EPRA frei von Effekten zweiter Ordnung: Eine maximale Ausdruckshebung (oder Vorziehen) gefolgt von einer anschließenden einmaligen Elimination total redundanter Ausdrücke und einer optionalen berechnungsneutralen maximalen Zurückschiebung liefert deshalb bereits die **bestmögliche Verbesserung** und optional **geringste Zahl** an **Hilfsvariableninitialisierungen** und **-lebenszeiten**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

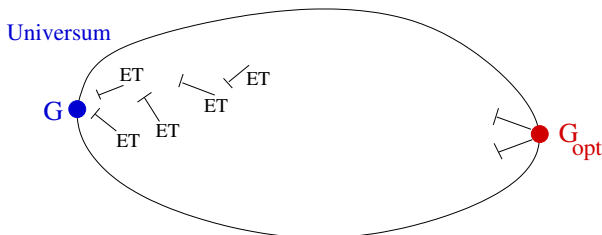


# Globale Optimalität von EPRA

...für EPRA gilt (s. Kapitel 12.4):

## Theorem 13.2.1.1 (Globale EPRA-Optimalität)

1. Jede faire EPRA-Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  für ein Programm  $G$  ist **global optimal**, d.h. endet in einem bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programm  $G_{opt} \in \mathcal{G}_{T_{EPRA}}^{opt}(G)$ .
2. Jede faire EPRA-Transformationsfolge  $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$  hat ein endliches Anfangsstück  $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$  mit  $G_{opt} \sim G_{\tau} \sim G_{\tau'}$



# Globale Optimalität von EPRA<sub>d</sub>

...für EPRA<sub>d</sub> gilt (s. Vorlesung 185.A04 Optimierende Übersetzer):

## Theorem 13.2.1.2 (Globale Berechnungsoptimalität)

Initialisieren der Hilfsvariablen an den **frühest** möglichen **sicheren** Programmpunkten führt zu **global besten berechnungsoptimalen** Programmen.

## Theorem 13.2.1.3 (Globale Lebenszeitoptimalität)

Initialisieren der Hilfsvariablen an den **spätest** möglichen **berechnungsoptimalen** Programmpunkten führt zu **global besten berechnungs- und hilfsvariablenlebenszeitoptimalen** Programmen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

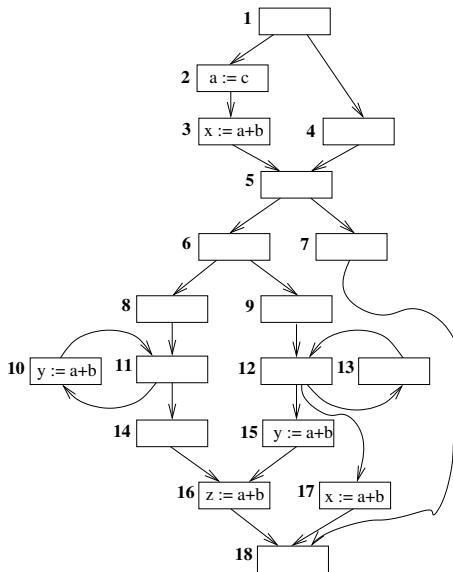
Kap. 13

13.1

1074/16

# Veranschaul. v. Theorem 13.2.1.2 u. 13.2.1.3

...anhand eines Beispiels:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

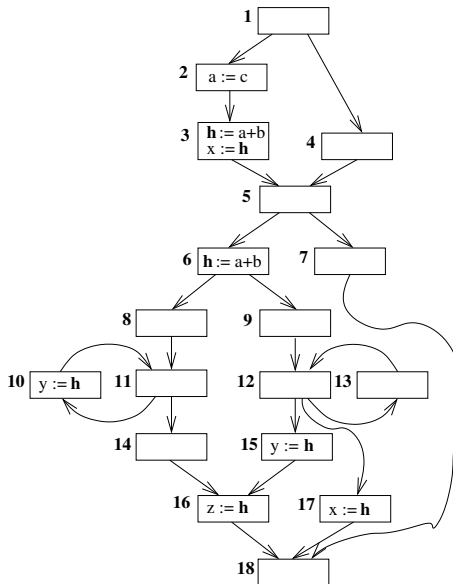
Kap. 13

13.1

1075/16

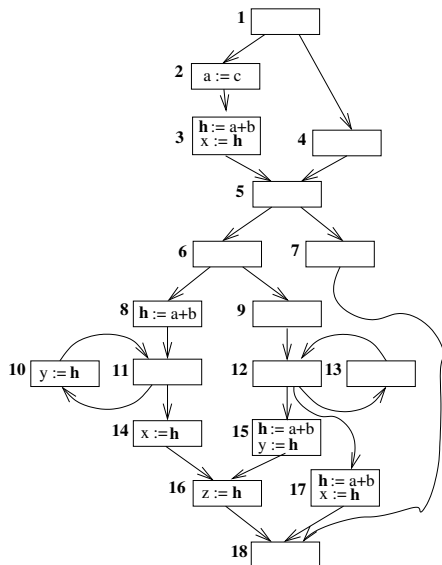
# Th. 13.2.1.2: Frühestmögl. sichere Platzierung

...ist global berechnungsoptimal:



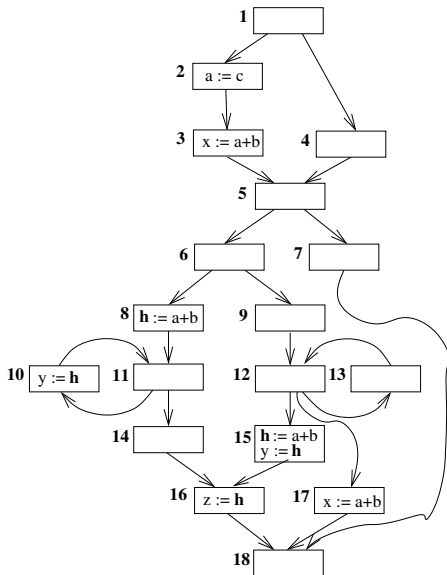
# Th. 13.2.1.3: Spätestm. berechn.-opt. Platz.

...ist global berechnungs- und hilfsvariablenlebenszeitoptimal:



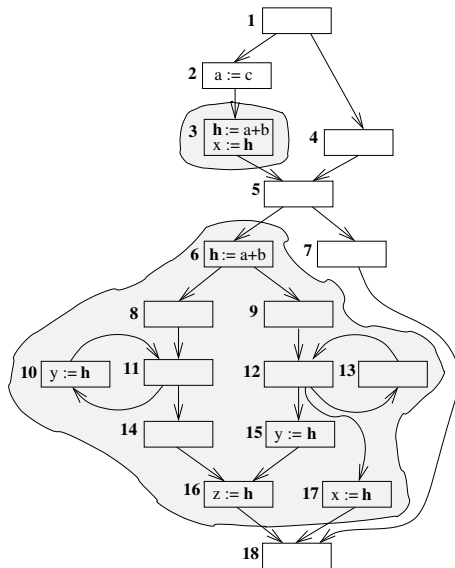
# Th. 13.2.1.3: Spätestm. berechn.-opt. Platz.

...nach abschließendem 'Aufräumen':



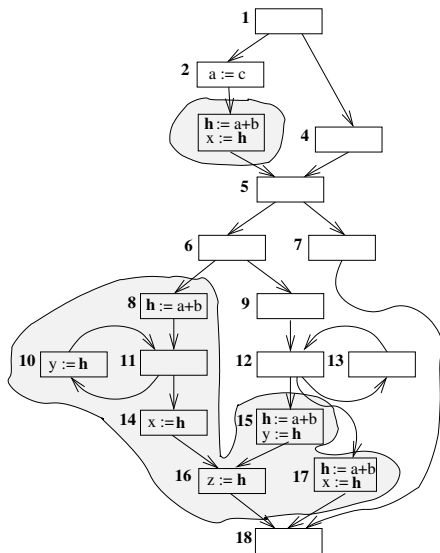
# Frühestmögliche sichere Platzierung

...berechnungsoptimal, aber max. Hilfsvariablenlebenszeiten.



# Spätestmögliche berechn.-optimale Platzierung

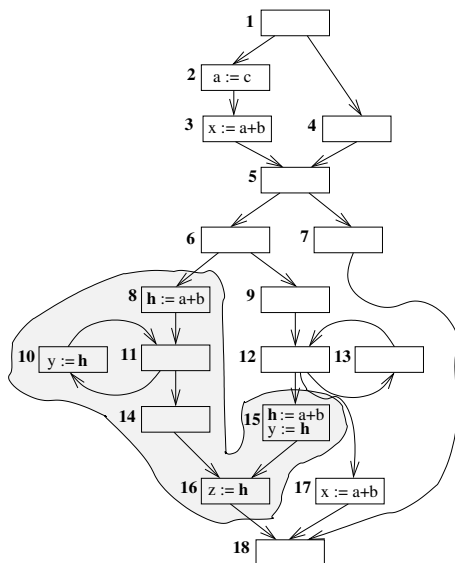
...berechnungsoptimal, aber min. Hilfsvariablenlebenszeiten.





# Spätestmögliche berechn.-optimale Platzierung

...nach 'Aufräumen': min. Hilfsvariableninitialisierungen und -lebenszeiten.



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1081/16

# Kapitel 13.2.2

## EPRAA: Transformation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1082/16

# Die EPRAA-Transformation

...EPRAA, einheitliche, kombinierte Transformation zur:

- Elimination partiell redundanter Ausdrücke und Anweisungen (EPRAA)
  - ↪ Partially Redundant Expression and Assignment Elimination (PREAE)
  - ↪ Expression and Assignment Motion (EAM)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1083/16

# Das EPRAA-Verfahren

...ein dreistufiger Algorithmus:

## 1. Präprozess

Ersetze jedes Vorkommen einer Anweisung  $x := t$  durch die Anweisungssequenz  $h_t := t; x := h_t$ .

## 2. Hauptprozess

Wende die Transformationen

### 2.1 Heben von Anweisungen (AH)

$\rightsquigarrow$  Assignment Hoisting

### 2.2 Eliminieren (total) redundanter Anweisungen (ERA)

$\rightsquigarrow$  (Totally) Redundant Assignment Elimination

wiederholt so lange an bis Stabilität eintritt.

## 3. Postprozess

Aufräumen isolierter Initialisierungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1084/16

# Der Präprozess ist Schlüssel

...zur einheitlichen Behandlung von Ausdrücken und Anweisungen.

Die Einführung spezifischer Hilfsvariablen  $h_t$  für jedes rechtsseitig in einer Anweisung auftretende Termmuster  $t$  im Präprozess bewirkt, dass

- EPRA als Hauptprozess des EPRAA-Verfahrens

die Effekte von EPRA und EPRA<sub>d</sub> einheitlich erfasst und abdeckt!

Dabei gilt:

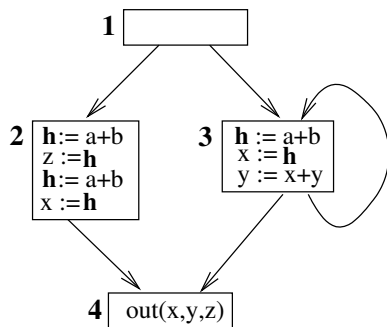
- 'Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile':

$$\text{EPRAA} > \text{EPRA} + \text{EPRA}_d$$

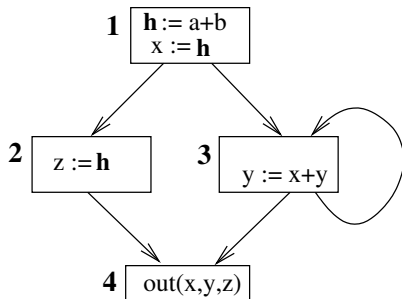
# Einheitl. Elimination part. red. Ausd. u. Anw.

...der EPRAA-Effekt auf das gemeinsame Beispiel:

Ausgangsprogramm  
nach Präprozess



Optimiertes Programm



# Effekte zweiter Ordnung für EPRAA

...(engl. *second order effects*) im EPRAA-Fall:

- ▶ Hebungs-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)  
     $\rightsquigarrow$  Hoisting-Elimination effects (HE)
- ▶ Hebungs-Hebungs-Effekte (Potentialeffekt)  
     $\rightsquigarrow$  Hoisting-Hoisting effects (HH)
- ▶ Eliminations-Hebungs-Effekte (Potentialeffekt)  
     $\rightsquigarrow$  Elimination-Hoisting effects (EH)
- ▶ Eliminations-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)  
     $\rightsquigarrow$  Elimination-Elimination effects (EE)

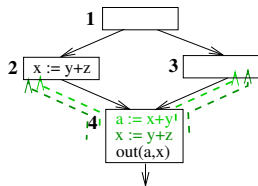
# Beispiel für einen Hebungs-Eliminations-Effekt

Ausgangsprogramm

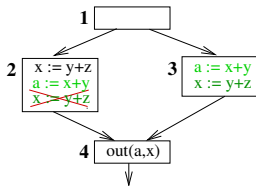
Anweisungshebung  
(Effekt 1. Ord.)

Elim. red. Anw.  
(Effekt 2. Ord.)

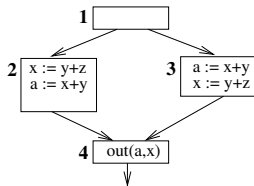
a)



b)



c)

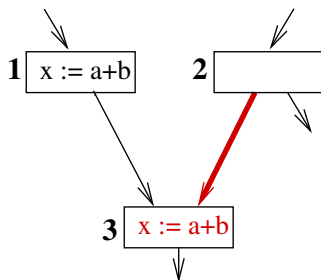




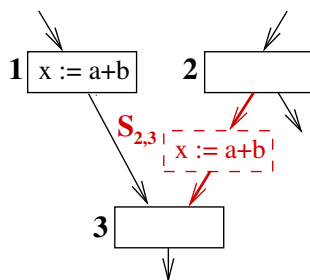
# Anmerkung zu kritischen Kanten

...wie für EPTA, EPGA und EPRA müssen **kritische Kanten** gespalten werden, um bestmögliche Ergebnisse erzielen zu können:

a)



b)



# Kapitel 13.2.3

## EPRAA: Beispiel

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

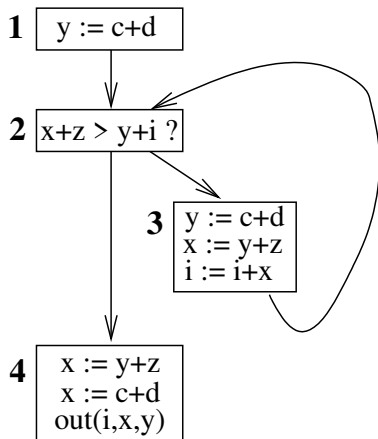
Kap. 12

Kap. 13

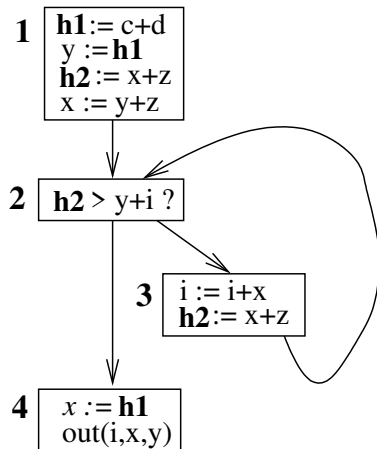
# Die EPRAA-Transformation

...illustriert anhand eines größeren Beispiels.

## Ausgangsprogramm

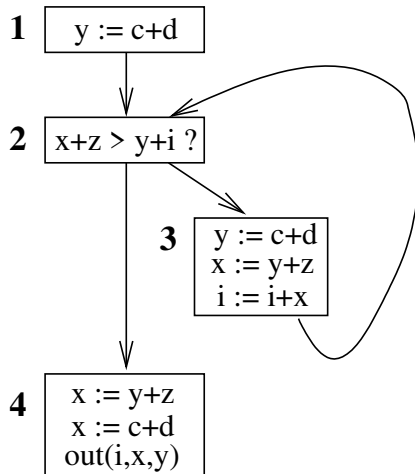


## Optimiertes Programm



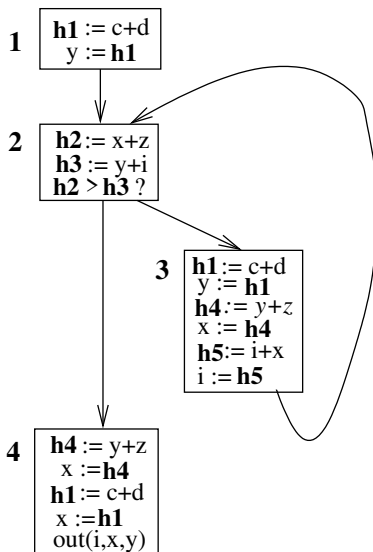
# Die EPRAA-Transformation im Detail (1)

## Ausgangsprogramm



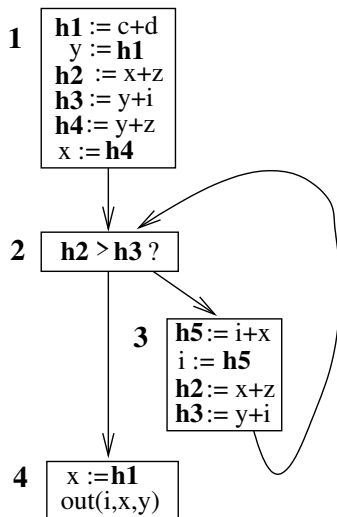
# Die EPRAA-Transformation im Detail (2)

## Programm nach Präprozess



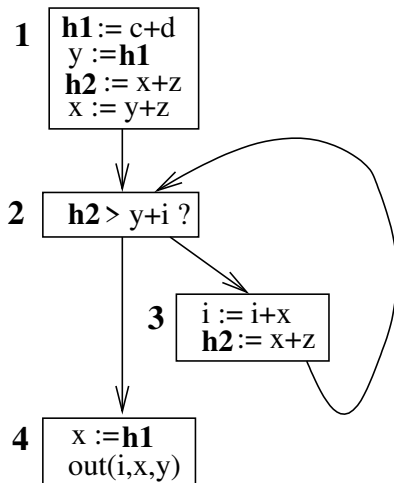
# Die EPRAA-Transformation im Detail (3)

## Programm nach Hauptprozess



# Die EPRAA-Transformation im Detail (4)

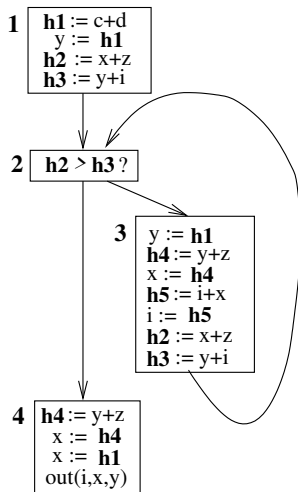
Programm nach Postprozess - das EPRAA-optimierte Prg.



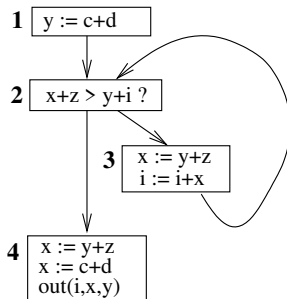
# Zum Vergleich: Die schwächeren Effekte

...der **EPRA<sub>d</sub>**- und **EPRA**-Transformationen:

## EPRA<sub>d</sub>-Effekt



## EPRA-Effekt





# Kapitel 13.2.4

## EPRAA: Optimalität

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# EPRAA-Optimalitätsresultate

...anders als für EPTA, EPGA und EPRA mit je einer globalen Optimalitätsaussage zerfällt Optimalität für EPRAA in drei Aussagen über:

- Ausdrücke (globale Optimalität)
- Anweisungen (lokale Optimalität)
- Hilfsvariablen (lokale Optimalität)

Im folgenden bezeichnen für ein Programm  $G$ :

- $\mathcal{U}_{EPRAA}^G =_{df} \{G' \mid G \vdash_{(\tau_i)_{i \leq k}} G', \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T_{EPRAA}^G, k \in \mathbb{N}\}$ :  
Das von  $G$  durch die Präfixe der Transformationsfolgen  $\tau \in T_{EPRAA}^G$  aufgespannte Universum.
- $G_\tau$ : Das durch Anwendung von  $\tau \in T_{EPRAA}^G$  auf  $G$  entstehende Programm.

# EPRAA: Globale, lokale Optimalität

Sei  $\tau_{max} \in T_{EPRAA}^G$  eine maximale EPRAA-Transformation.

## Theorem 13.2.4.2 (Globale Ausdrucksoptimalität)

$G_{\tau_{max}}$  ist ausdrucks optimal in  $\mathcal{U}_{EPRAA}^G$ , d.h., während seiner Ausführung werden höchstens so viele Ausdrücke ausgewertet wie in jedem anderen Programm in  $\mathcal{U}_{EPRAA}^G$ .

## Theorem 13.2.4.3 (Lokale Anweisungsoptimalität)

$G_{\tau_{max}}$  ist lokal anweisungsoptimal in  $\mathcal{U}_{EPRAA}^G$ , d.h. es ist nicht möglich, die Zahl der von  $G_{\tau_{max}}$  zur Laufzeit ausgeführten Anweisungen durch weitere EPRAA-Elementartransformationen zu verringern.

## Theorem 13.2.4.4 (Lokale Hilfsvariablenoptimalität)

$G_{\tau_{max}}$  ist lokal hilfsvarenblenoptimal in  $\mathcal{U}_{EPRAA}^G$ , d.h. es ist nicht möglich, die Zahl der Zuweisungen an Hilfsvariablen oder die Länge der Lebenszeiten von Hilfsvariablen in  $G_{\tau_{max}}$  durch weitere EPRAA-Elementartransformationen zu verringern.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

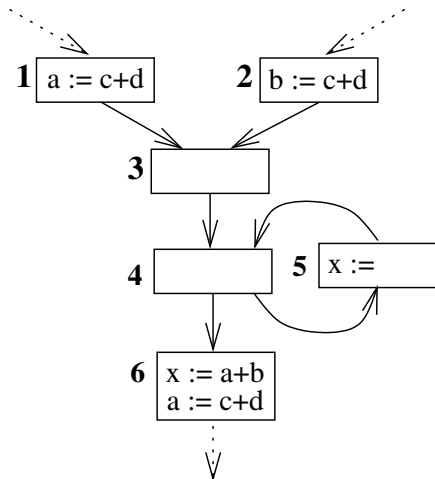
Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# Warum nur lokale Anw./Hilfsv.-Optimalität?

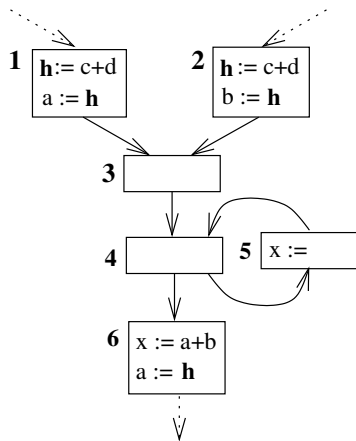
...betrachte folgendes Programm:



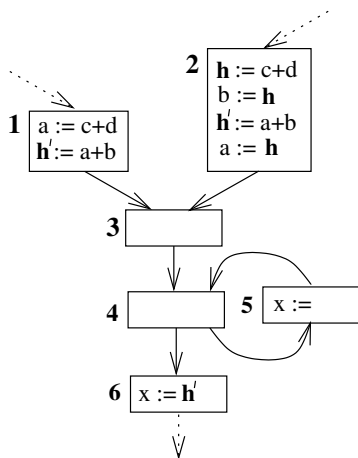
# Darum nur lokale Anw./Hilfsv.-Optimalität!

...und folgende zwei unvergleichbare Transformationsresultate:

a)



b)



$\Rightarrow$  Lokale Anw./Hilfsv.-Optimalität ist das bestmögliche!

# Kapitel 13.3

## Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

# Kapitel 13.3.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

...eine häufig getroffene Annahme, z.B.:

- Jeder Knoten eines Flussgraphen liegt auf einem Pfad vom Start- zum Endknoten (s. Kap. 12.2.3).
- Gibt es mehrere Endknoten, kann durch Einfügen eines künstlichen Endknotens und entsprechender Kanten dies erreicht werden (s. Kap. 12.2.3, indirekt behandelt).
- Anweisungen liegen im Format von Drei-Adress-Code vor (s. Kap. 13.3.2).
- Flussgraphen sind wahlfrei knoten- oder kantenbenannt, mit einzelnen Instruktionen oder mit Sequenzen von Instruktionen (sog. Basisblöcken) (s. Kap. 13.3.3 und Anhang B).
- ...

Nicht immer sind solche Annahmen uneingeschränkt unbeschränkend und frei von Nebenwirkungen...

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1104/16



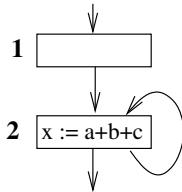
# Kapitel 13.3.2

## Drei-Adress-Code vs. allgemeiner Code

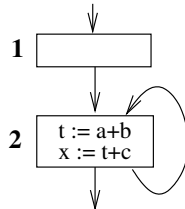
# Drei-Adress-Code

...entsteht durch **Aufspalten** von Anweisungen mit rechten Seiten mit **mehr als einem Operator** in **Anweisungssequenzen**, in der die rechten Seiten jeder Anweisung (höchstens) **einen Operator** besitzen (**allgemein**: Zahl der Operatoren der Ausgangsanweisung ist gleich Zahl der Anweisungen der Anweisungssequenz):

a)



b)

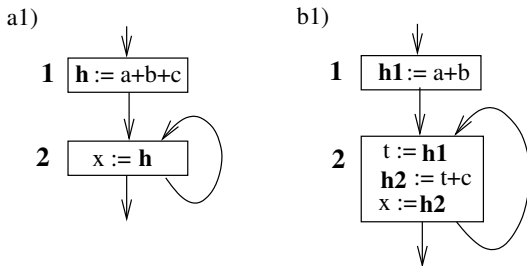


...offenbar ist eine solche Aufspaltung immer möglich;

- **OBdA** darf deshalb angenommen werden, dass Anweisungen in **Drei-Adress-Form** vorliegen.

# Frei von Nebenwirkungen oBdA?

...vergleiche die Wirkung von EPRA auf die Programme aus Abb. a) und b) in Abb. a1) und b1):



...offenbar ist das transformierte Programm in Abb. a1) performanter als das in Abb. b1). Ist 'OBdA' hier gerechtfertigt? Nebenwirkungsfrei möglicherweise dank Variablensubsumption?

# Variablensubsumption

...die mit dem Übergang zu **Drei-Adress-Code** verbundene Einführung zunächst vieler neuer Variablen ist nicht wesentlich, da nach Transformationsabschluss das Programm abschließend mittels

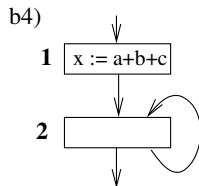
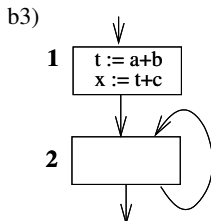
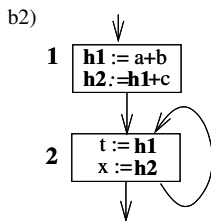
- **Variablensubsumption** (engl. **variable subsumption**)

**'aufgeräumt'** werden kann, wodurch Variablen zusammengefasst und in ihrer Zahl reduziert werden.

# Frei von Nebenwirkungen oBdA?

...vergleiche die Wirkungen von

- EPRA gefolgt von Variablensubsumption auf das Programm aus Abb. b) in Abb. b2).
- EPRAA ohne/mit Variablensubsumption auf das Programm aus Abb. b) in Abb. b3) und b4).



...offenbar ist das transformierte Programm in Abb. b3) bereits performanter als das in Abb. b2). 'OBdA' durch Variablensubsumption gerechtfertigt? Allenfalls bei richtiger Transformationswahl (im Beispiel EPRAA statt EPRA).

# Kapitel 13.3.3

Basisblock- vs. Instruktionsgraphen,  
knoten- vs. kantenbenannte Graphen

# Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

...wird die Wahl der Programmdarstellung als

- knoten- oder kantenbenannte
- Instruktions- oder Basisblockflussgraphen

i.a. als ohne Nebenwirkungen und deshalb oBdA freie Wahlentscheidung gesehen.

**Einschätzung:** Fast immer zutreffend gibt es Ausnahmen, die eine genauere Betrachtung und sorgfältigere Wahl nahelegen oder gar verlangen...

# Basisblock- vs. Instruktionsgraphen

...eine Abwägung, die historisch zugunsten von

- Basisblockgraphen

ausgefallen ist, da Basisblockgraphen weniger Knoten als Instruktionsgraphen enthalten und deshalb

- zu schnellerer Konvergenz von Fixpunktanalysen führen.

Der konzeptuelle und implementierungstechnische Mehraufwand durch die erforderliche Dreistufigkeit der Analyse aus

- Präprozess (Berechnung der Basisblocksemantik)
- Hauptprozess (Fixpunktanalyse auf Basisblockgraph)
- Postprozess (Basisblockanalyse)

würde dadurch aufgewogen.

**Einschätzung:** Während der Mehraufwand real ist, realisiert sich der Performanzvorteil in der Praxis nicht (oder heute nicht mehr); siehe Anhang B für eine genauere Betrachtung.



# Knoten- vs. kantenbenannte Graphen

...eine Abwägung, die historisch zugunsten von

- ▶ **knotenbenannten** Graphen

ausgefallen ist, ohne aus der Literatur ersichtliche tiefergehende Überlegungen.

## Einschätzung:

- ▶ Pragmatische Unterschiede zwischen knoten- und kantenbenannten Graphen beschränken sich für DFA-Probleme i.w. auf die konzeptuelle Ebene mit leichten Vorteilen für kantenbenannte Graphen, die zu knapperen Analysespezifikationen führen; siehe **Anhang B** für Details.
- ▶ Interessant ist, dass im Bereich von **Modellprüfung** mit **Kripke-Strukturen** (knotenbenannte Graphen) und **Transitionssystemen** (kantenbenannte Graphen) beide Varianten gezielt gewählt werden; siehe **Kapitel 16** für Details.

# Von Instruktions- zu Basisblockgraphen

...die Analysen der Elementartransformationen für die Berechnung

- toter und redundanter Anweisungen
- der Endpunkte von Anweisungssenkungen und -hebungen

lassen sich in natürlicher Weise von Instruktions- auf Basisblockgraphen ausdehnen; für die Analyse zur Berechnung

- geisterhafter Anweisungen

als sog. **nicht-separables Problem** gilt das nicht, eine Ausdehnung auf Basisblockgraphen ist nicht möglich (s. **Kapitel 13.3** und **Anhang B** für Details).

# Senkungs-/Hebungskandidaten in Basisblöcken

...sind für jedes Anweisungsmuster **eindeutig** bestimmt: Höchstens das letzte bzw. erste Vorkommen eines Musters ist Senkungs-/Hebungskandidat, wenn es nicht lokal blockiert ist.

```
⋮  
y := a+b  
a := c  
x := 3*y  
y := a+b  
x := d
```

```
⋮  
y := a+b  
a := c  
x := 3*y  
y := a+b  
a := d
```

```
x := d  
y := a+b  
x := 3*y  
a := c  
y := a+b  
⋮
```

```
a := d  
y := a+b  
x := 3*y  
a := c  
y := a+b  
⋮
```



Senkungskandidat



Hebungskandidat



Blockierte Vorkommen



Blockierte Vorkommen

**Beispiel:** Blau markiert sind die eindeutig bestimmten **Senkungs-** bzw. **Hebungskandidaten** des Anweisungsmusters  $\alpha \equiv y := a+b$ ; rot markiert sind **lokal blockierte**  $\alpha$ -Vorkommen, die keine Senkungs- oder Hebungskandidaten sind.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1115/16

# Anpassung der Senkungs-/Hebungsanalyse

...auf Basisblockgraphen.

Es reicht, die Interpretation (oder Bedeutung) der lokalen Prädikate wie folgt zu ändern:

Lokale Prädikate (assoziiert mit Basisblockknoten):

- $\text{Sinkable}_n^\alpha / \text{Hoistable}_n^\alpha$ : Es gibt einen  $\alpha$ -Senkungs-/Hebungskandidaten im Basisblockknoten  $n$  (d.h. es gibt ein letztes/erstes  $\alpha$ -Vorkommen in  $n$ ), das von keiner nachfolgenden/vorausgehenden Anweisung in  $n$  blockiert wird.
- $\text{Blocked}_n^\alpha$ : Basisblockknoten  $n$  enthält eine Anweisung, die das Schieben eines weiteren  $\alpha$ -Vorkommens an den Basisblockausgang/-eingang blockiert.

...mit diesen Änderungen können das AS/HS-Gleichungssystem für Instruktionsgraphen aus Kapitel 12.3.8 bzw. 12.4.7 unverändert für Basisblockgraphen übernommen werden.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

13.1

1116/16

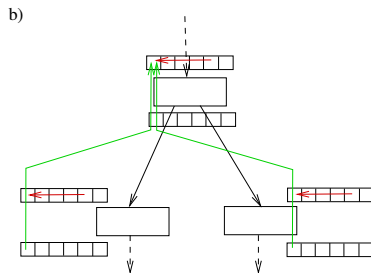
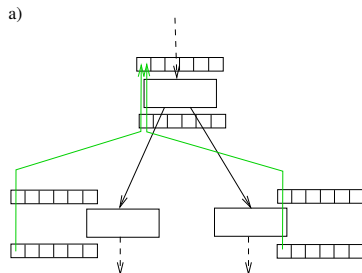
# Separable vs. nicht-separable DFA-Probleme

...nicht für alle DFA-Probleme ist die Ausdehnung auf Basisblockgraphen so natürlich und einfach möglich; für sog. **nicht-separable** DFA-Probleme sogar gar nicht. Der Grund liegt im zusätzlich 'quer' verlaufenden Informationsfluss bei nicht-separablen Problemen wie der **Geistervariablenanalyse**; s.a. **Anh. B.**

## Informationsfluss in Bitvektoren

Tote-Variablen-Analyse  
(separabel)




Geistervariablenanalyse  
(nicht-separabel)



# Kapitel 13.4

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 13 (1)

-  Dhananjay M. Dhamdhere. *Register Assignment using Code Placement Techniques*. Journal of Computer Languages 13(2):75-93, 1988.
-  Dhananjay M. Dhamdhere. *A usually linear Algorithm for Register Assignment using Edge Placement of Load and Store Instructions*. Journal of Computer Languages 15(2):83-94, 1990.
-  Dhananjay M. Dhamdhere. *Practical Adaptation of the Global Optimization Algorithm of Morel and Renvoise*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 13(2):291-294, 1991. Technical Correspondence.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 13 (2)



Jens Knoop, Eduard Mehofer. *Distribution Assignment Placement: Effective Optimization of Redistribution Costs*. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 13(6):628-647, 2002.



Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Lazy Code Motion*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'92 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'92), ACM SIGPLAN Notices 27(7):224-234, 1992.



Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Optimal Code Motion: Theory and Practice*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 16(4):1117-1155, 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 13 (3)



Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *The Power of Assignment Motion*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'95 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'95), ACM SIGPLAN Notices 30(6):233-245, 1995.



Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Code Motion and Code Placement: Just Synonyms?* In Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98), Springer-V., LNCS 1381, 154-169, 1998.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 13 (4)



Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Retrospective: Lazy Code Motion*. In '20 Years of the ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (1979 - 1999): A Selection,' ACM SIGPLAN Notices 39(4):460-461&462-472, 2004.



Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Effective Partial Redundancy Elimination based on Extended Value Graph*. Information Processing Society of Japan 38(11):2237-2250, 1990.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# Kapitel 14

## Konstantenanalyse auf nicht-klassischen Programm- und Datenstrukturen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Konstantenanalyse

...auf dem Wertegraphen (engl. value graph) eines Programms bzw. Flussgraphen.

- ▶ Hintergrund, Motivation
- ▶ Die VG-Konstantenanalyse
  - Basisalgorithmus
  - Voller Algorithmus
- ▶ Die PVG-Konstantenanalyse auf prädikatiertem Code

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 14.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

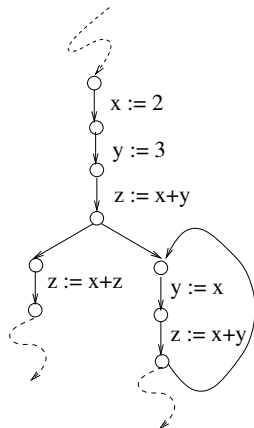
Kap. 13

Kap. 14

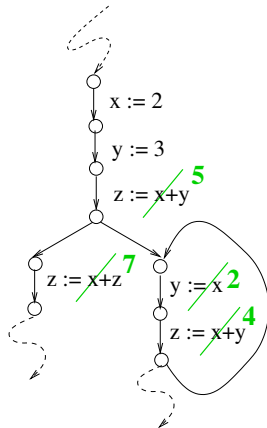
# Konstantenanalyse

...anhand eines Beispiels für einfache Konstanten:

a)



b)



Ausgangsprogramm

Nach "einfacher Konstanten"-Analyse

# Ausgangspunkt und Treiber

...von Algorithmen zur **Konstantenanalyse**:

- Gary A. Kildalls Algorithmus zur Berechnung **einfacher Konstanten** (engl. **simple constants (SC)**) (POPL'73).

**Beachte:** Der Algorithmus zur Berechnung einfacher Konstanten aus **Kapitel 7.10.2** stimmt im Ergebnis, nicht jedoch in den verwendeten Datenstrukturen mit **Kildalls** Algorithmus überein.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Erweiterungen von Kildalls SC-Algorithmus (1)

...zielen auf Verstärkung oder Verbesserung der:

## ► Ausdruckskraft

- ‘SC+’: Kam, Ullman (Acta Informatica, 1977)
- **Konditionale Konstanten** (engl. **conditional constants**): Wegman, Zadeck (POPL’85)
- **Endliche Konstanten** (engl. **finite constants**): Steffen, Knoop (MFCS’89)
- **Polynomiale Konstanten** (engl. **polynomial constants**): Müller-Olm, Seidl (SAS 2002)
- ...

zulasten der **Performanz**.

## ► Performanz

- **SSA-Form**: Wegman, Zadeck (POPL’85)
- ...

ohne **Erhöhung** der **Ausdruckskraft**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Erweiterungen von Kildalls SC-Algorithmus (2)

## ► Anwendungsreichweite

### – Interprozedural

- Callahan, Cooper, Kennedy, Torczon (SCC'86)
- Grove, Torczon (PLDI'93)
- Metzer, Stroud (LOPLAS, 1993)
- Sagiv, Reps, Horwitz (TAPSOFT'95)
- Duesterwald, Gupta, Soffa (TOPLAS, 1997)
- ...

### – Explizit parallel

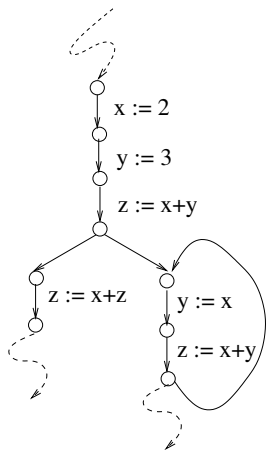
- Lee, Midkiff, Padua (J. of Parallel Prog., 1998)
- Knoop (Euro-Par'98)
- ...

zulasten der **Ausdruckskraft**, z.B. **Kopier- und lineare Konstanten** (engl. **copy constants**, **linear constants**)  
anstelle **einfacher Konstanten** (engl. **simple constants**).

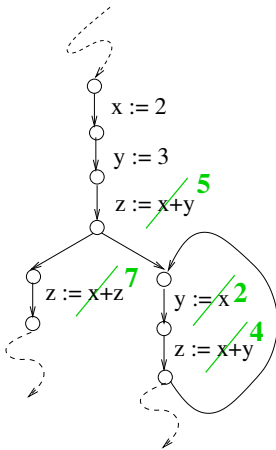
...siehe auch **LVA 185.A04, Kapitel 5**.

# Warum streben nach größerer Ausdruckskraft?

a)



b)



Ausgangsprogramm    Nach "einfacher Konstanten"-Analyse

...das Ergebnis der SC-Analyse scheint hier überzeugend.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Der Schein trügt

...das Konzept **einfacher Konstanten** ist tatsächlich **schwach**:

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

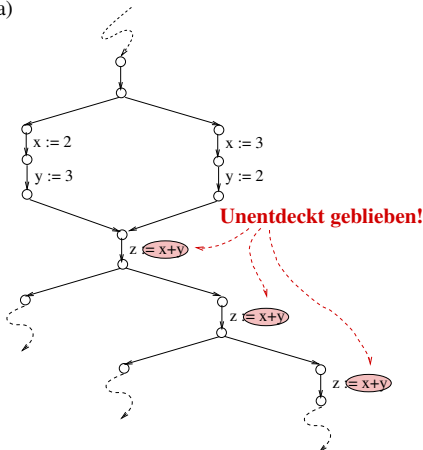
Kap. 11

Kap. 12

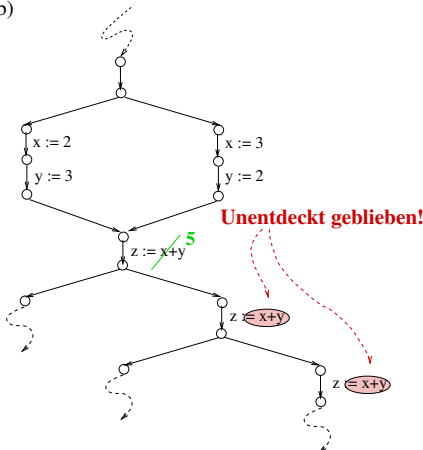
Kap. 13

Kap. 14

a)



b)



Nach "einfacher Konstanten"-Analyse  
(Beachte: Ueberhaupt kein Effekt!)

Nach "einfacher Konstanten"-Analyse  
verstärkt um die "1-Block-Vorschau"  
von Kam und Ullman

# Entscheidbarkeitsfragen für Konstantenanalyse

Einerseits: Konstantenanalyse ist

- ▶ **unentscheidbar**: Reif, Lewis (POPL 1977, vgl. Kapitel 7.10.2)

für allgemeine Programme.

Andererseits: Konstantenanalyse ist definitiv

- ▶ **entscheidbar**

für schleifenfreie, azyklische Programme (engl. directed acyclic graphs (DAGs)):

- ▶ Die Zahl der Programmpfade ist endlich!

# Das Konzept endlicher Konstanten

...ist **optimal** (oder **vollständig**) für **schleifenfreie Programme**, d.h. jede Konstante in einem schleifenfreien Programm ist eine **endliche Konstante** (engl. **finite constant**)!

Der Schlüssel **endlicher Konstantenanalyse** ist

- in einem **Präprozess** für jeden Programmpunkt  $n$  eine **endliche Menge interessanter Terme**  $\mathbf{T}_n$  zu berechnen.
- im **Hauptprozess** DFA-Zustandsmenge und lokale Semantikfunktionen **einfacher Konstantenanalyse**:

$$\Sigma = \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}^{\top}\}, \llbracket e \rrbracket_{sc} : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

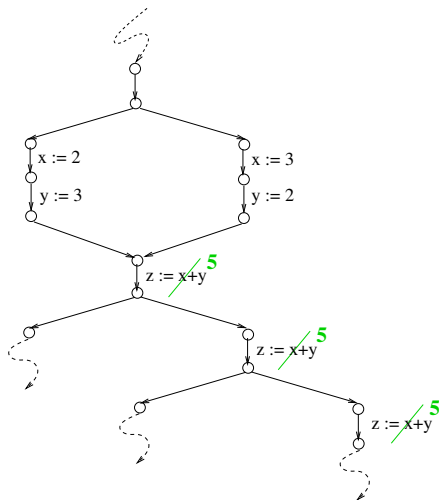
durch jene **endlicher Konstantenanalyse**:

$$\Sigma_N = \{\sigma_n \mid \sigma_n : \mathbf{T}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}^{\top}, n \in N\}, \llbracket e \rrbracket_{fc} : \Sigma_{\mathbf{T}_{src(e)}} \rightarrow \Sigma_{\mathbf{T}_{dst(e)}}$$

zu ersetzen.

# Endliche Konstanten

...überkommen die konzeptuelle Schwäche einfacher Konstanten:



Die Wirkung des neuen Verfahrens

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Hauptergebnisse für endliche Konstanten

**Positiv:** Endliche Konstanten sind

- optimal (oder vollständig) für schleifenfreie Programme.
- echte Obermenge einfacher Konstanten für allgemeine Programme (d.h. mit beliebigem Kontrollfluss).

**Aber:** Der Algorithmus für endliche Konstantenanalyse ist

- exponentiell (bereits für schleifenfreie Programme).

Allerdings, bevor man den Stab vorschnell bricht:

## Theorem 14.1.1

Konstantenanalyse für schleifenfreie Programme ist co-NP-vollständig.

Knoop, Rüthing (CC'00)

Müller-Olm, Rüthing (ESOP'01)

# Die Herausforderung von Konstantenanalyse

...eine angemessene und gute Balance zu wahren zwischen Genauigkeit und Effizienz!

## Einfache Konstanten

- effizient, aber ungenau.

## Endliche Konstanten

- genau, aber ineffizient.

## Gesucht: Eine entscheidbare Konstantenklasse

- deutlich umfassender als einfache Konstanten.
- wesentlich effizienter als endliche Konstanten.



# Konstantenanalyse auf dem Wertegraphen

...oder VG-Konstantenanalyse bietet eine ausgewogene Balance zwischen

- Ausdruckskraft und Effizienz.

Die VG-Konstantenanalyse stützt sich auf den

- Wertegraphen (engl. *value graph*)

von Alpern, Wegman, and Zadeck (POPL'88).

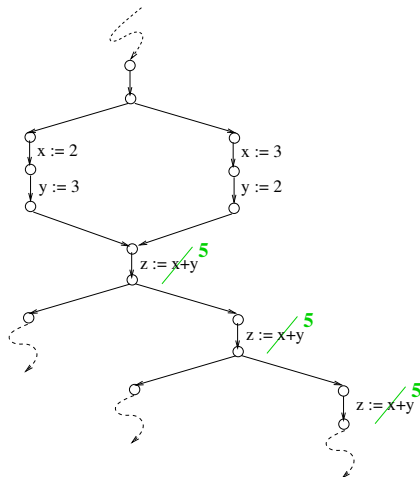
Der Wertegraph stützt sich seinerseits auf die

- Einmal-Zuweisungs-Repräsentation (engl. *static single assignment (SSA) form*) von Programmen

von Cytron et al. (POPL'89)).

# Zurück zum laufenden Beispiel

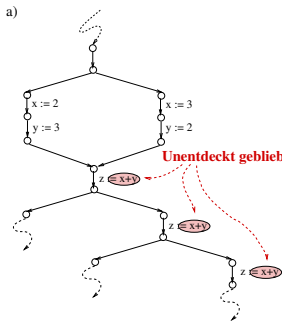
...wie **endliche Konstantenanalyse** erkennt auch **VG-Konstantenanalyse** alle Terme als **Konstanten**:



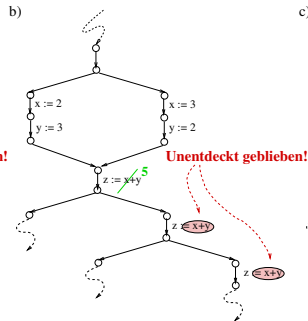
Die Wirkung des neuen Verfahrens

# Insbesondere

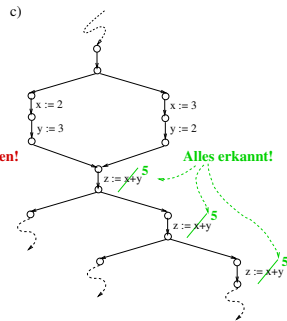
...geht **VG-Konstantenanalyse** weit über eine frühere effiziente *ad hoc*-Verbesserung von **Kam** und **Ullman, 1977**, von **Kildalls SC-Algorithmus** hinaus und eine hier **SC+** genannte Klasse von **'1-Vorschau'**-Konstanten erkennt:



Nach "einfacher-Konstanten"-Analyse  
(Beachte: Ueberhaupt kein Effekt!)



Nach "einfacher-Konstanten"-Analyse  
verstärkt um die "1-Block-Vorschau"  
von Kam und Ullman



Die Wirkung des neuen Verfahrens

# Kapitel 14.2

## Konstantenanalyse auf dem Wertegraph

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

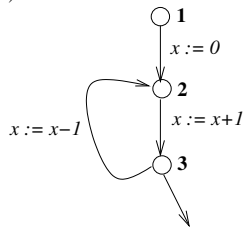
Kap. 13

Kap. 14

# Der Wertegraph

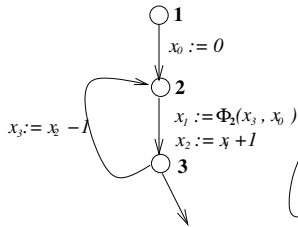
...eines Programms nach [Alpern](#), [Wegman](#), [Zadec \(POPL'88\)](#):

a)



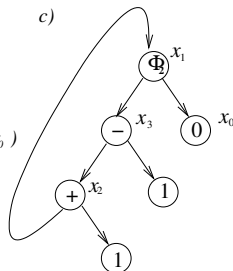
Flussgraph

b)



SSA-Graph

c)



Wertegraph

# Konstantenanalyse auf dem Wertegraphen

...in zwei unterschiedlich mächtigen Varianten:

- ▶ VG-Basiskonstantenanalyse  
...erkennt die Klasse einfache Konstanten.
- ▶ Volle VG-Konstantenanalyse  
...erkennt eine Klasse von Konstanten, die weit über die Klassen der einfachen und SC+-Konstanten hinausgeht.

# Kapitel 14.2.1

## VG-Basiskonstantenanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

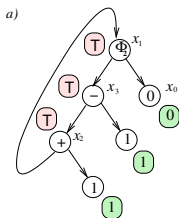
Kap. 12

Kap. 13

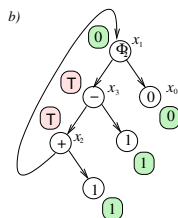
Kap. 14

# Konstantenanalyse auf dem Wertegraphen

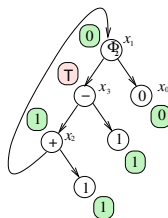
...illustriert anhand eines Beispiels:



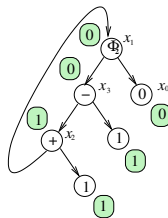
Nach der Initialisierung



Nach der 1. Iteration



Nach der 2. Iteration



Nach der 3. Iteration: Stabil!

Analyseresultat:  $x_2$  und  $x_3$  sind (einfache) Konstanten!



# Hauptresultat

...für die VG-Basiskonstantenanalyse.

## Lemma 14.2.1.1

Die VG-Basiskonstantenanalyse ist korrekt und erkennt die Klasse der einfachen Konstanten.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 14.2.2

## Volle VG-Konstantenanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

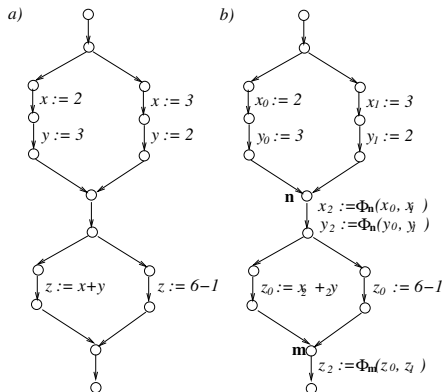
Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

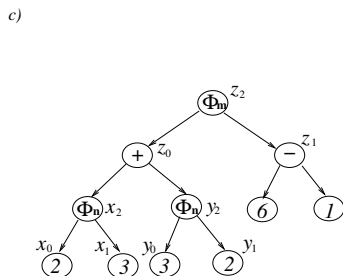
Kap. 14

# Illustrierendes Beispiel



Flussgraph

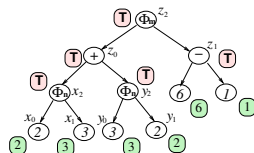
SSA-Graph



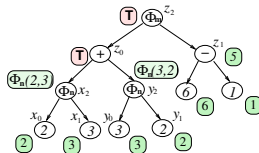
Wertegraph

# Volle VG-Konstantenanalyse

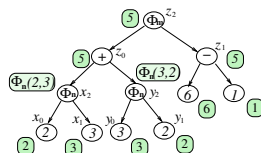
...illustriert anhand des laufenden Beispiels:



Nach der Initialisierung



Nach der 1. Iteration



Nach der 2. Iteration: Stabil!

Der technische Clou: Die

- Einführung von  $\Phi$ -Konstanten
- Anpassung der Evaluationsfunktion auf Wertegraphen!

# Hauptresultate

## Lemma 14.2.2.1

Die volle VG-Konstantenanalyse ist korrekt und erkennt

- eine Obermenge der Klasse einfacher Konstanten.
- in schleifenfreien Programmen jede injektive Konstante, d.h. jeden Term, dessen relevante Operanden ausschließlich durch injektive Operatoren verknüpft sind.

Insgesamt erreicht die volle VG-Konstantenanalyse damit eine

- ausgewogene Balance zwischen Ausdruckskraft und Effizienz.

Essentiell dafür ist die Abstützung auf den Wertegraph (und damit indirekt auf den SSA-Graphen eines Programms).

# Kapitel 14.3

## Konstantenanalyse auf dem prädikatierten Wertegraph

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

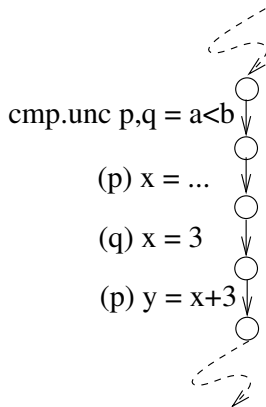
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## Prädikatierter Code

...als Resultat sog. **if-Konversion**:

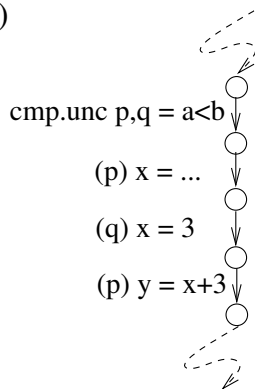


...mit dem Ziel besserer Parallelisierbarkeit durch erhöhte Parallelität auf Instruktionsebene (engl. instruction-level parallelism).

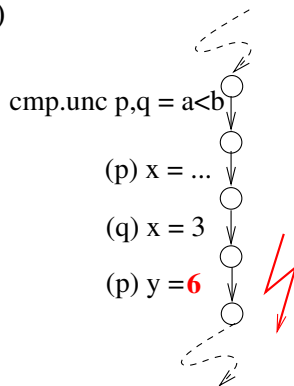
# Naive Übertragung

...von Konstantenanalysetechniken von unprädikatiertem auf prädikatierten Code schlägt fehl:

a)



b)

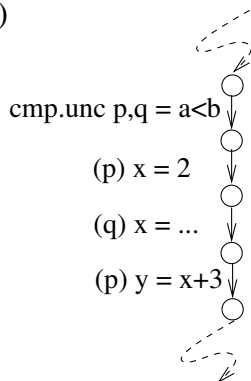




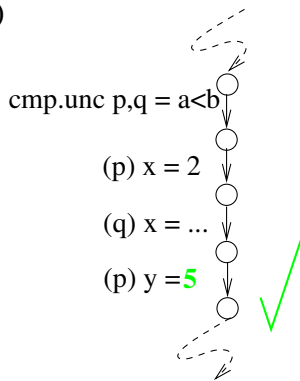
# Naive korrekte Übertragung

...von Konstantenanalysetechniken von unprädikatiertem auf prädikatierten Code ist andererseits zu konservativ und erkennt zu viele Konstanten nicht wie etwa im folgenden Beispiel:

a)



b)



# PVG-Konstantenanalyse

...für einen angemesseneren Umgang mit prädikatiertem Code zur Konstantenanalyse mit 'zwei+' Varianten:

- PVG-Basiskonstantenanalyse
- Volle PVG-Konstantenanalyse

zuzüglich

- performanz-verbesserter Variationen.

Alle Varianten und Variationen sind zweistufig und bestehen aus einer

- lokalen
- globalen

Analysestufe.

# Kapitel 14.3.1

## Hyperblöcke, Hyperblockgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

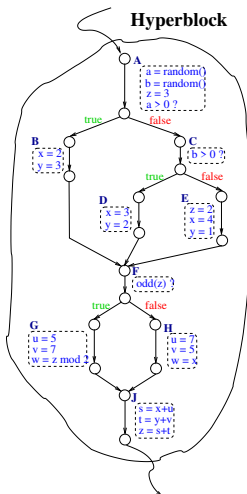
Kap. 13

Kap. 14

# Hyperblöcke

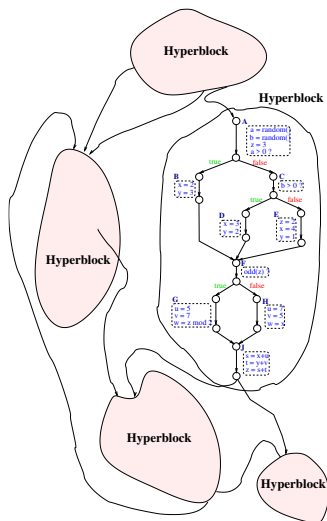
...sind **Schlüsselbausteine** prädikatierten Codes gekennzeichnet durch:

- ein Eintrittspunkt, **mehrere** Austrittspunkte.



# Hyperblockgraphen

...sind die **Hyperblockzerlegung** eines Flussgraphen, hier anhand des durchgehenden **Beispiels** illustriert:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Aufbau der PVG-Konstantenanalyse

## 1. Stufe: Lokale Analyse

- Separate und unabhängige Analyse aller Hyperblöcke eines Programms.

## 2. Stufe: Globale Analyse

- Globalisierung der Ergebnisse der lokalen Analysestufe.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 14.3.2

## Lokale Hyperblock-Konstantenanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

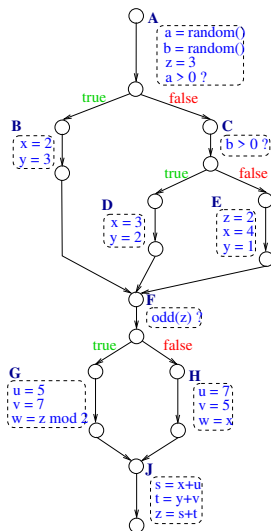
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Diskussion der lokalen Analysestufe

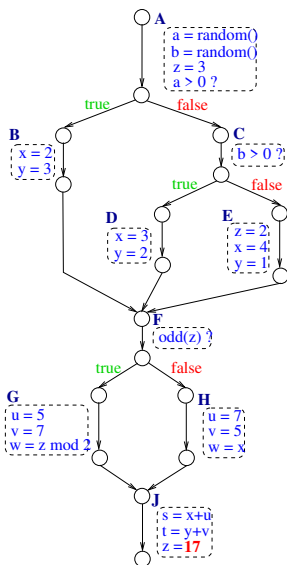
....anhand des **Hyperblocks** unseres durchgehenden Beispiels:



Der Ausgangs-Hyperblock



# Die PVG-Grundalgorithmustransformation



Nach nichtdeterministischer  
pfadpraeziser Grundoptimierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

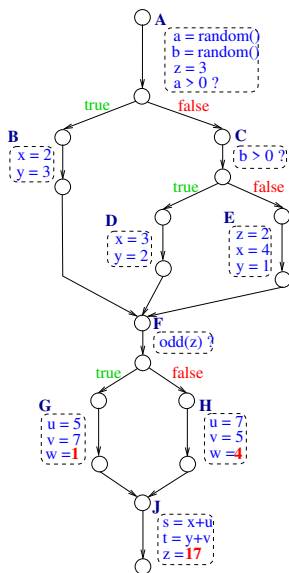
Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Die volle PVG-Algorithmustransformation



Nach deterministischer  
pfadpraeziser voller Optimierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

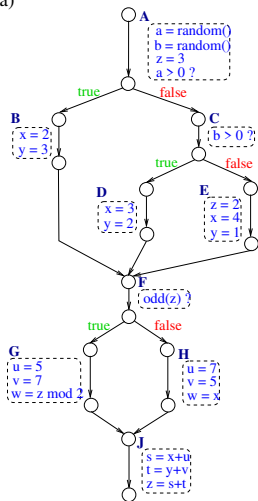
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

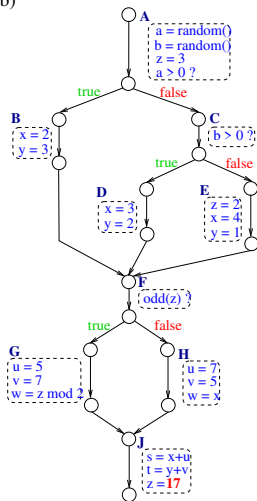
# Ausgangsprogramm & beide Transformationen

a)



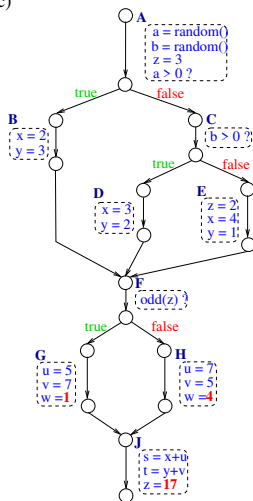
Der Ausgangs-Hyperblock

b)



Nach nichtdeterministischer  
pfadpraeziser Grundoptimierung

c)



Nach deterministischer  
pfadpraeziser voller Optimierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

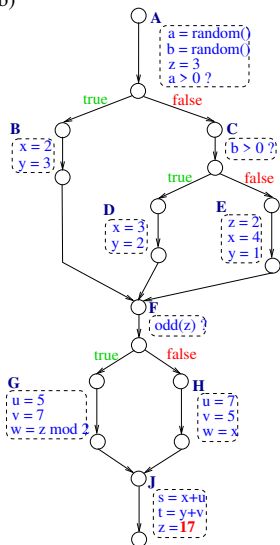
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

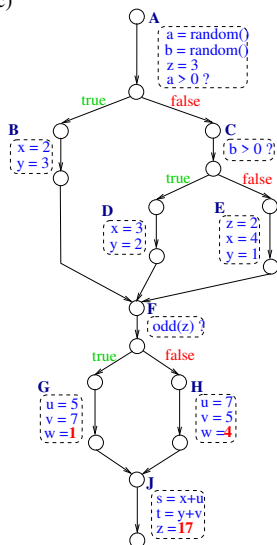
# Beide Transformationen auf einen Blick

b)



Nach nichtdeterministischer  
pfadpraeziser Grundoptimierung

c)



Nach deterministischer  
pfadpraeziser voller Optimierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Ursprünglicher und prädikatierter Code

## Urspruenglicher Hyperblock | Nach if-Konversion

===== | =====

|   |  |
|---|--|
| <pre>begin \\ Original Hyperblock (a,b) = (random(),random()); z = 3; if a&gt;0 then   x = 2;   y = 3 elseif b&gt;0 then   x = 3;   y = 2 else   z = 2;   x = 4;   y = 1 fi; if odd(z) then   u = 5;   v = 7;   w = z mod 2 else   u = 7;   v = 5;   w = x fi; s = x+u; t = y+v; z = s+t end.</pre> | <pre>begin \\ After if-Conversion   (p0) (a,b) = (random(),random());   (p0) z = 3;   (p0) cmp.unc B,C (a&gt;0);   (B) x = 2;   (B) y = 3;   (C) cmp.unc D,E (b&gt;0);   (D) x = 3;   (D) y = 2;     (E) z = 2;   (E) x = 4;   (E) y = 1;   (p0) cmp.unc G,H (odd(z));   (G) u = 5;   (G) v = 7;   (G) w = z mod 2;     (H) u = 7;   (H) v = 5;   (H) w = x;   (p0) s = x+u;   (p0) t = y+v;   (p0) z = s+t end.</pre> |
|---|--|

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Prädikierte SSA-Form (PSSA-Form)

...von Carter, Simon, Calder, Ferrante (PACT'99):

```
begin (p0)      A = OR(TRUE);           | [*] (HFBA)   w2 = x1;
(A)      (a1,b1) = (random(),random()); | [*] (HFDCA) w2 = x2;
(A)      z1 = 3;                          | (HFECA)   w2 = x3;
(A)      cmp.unc BA,CA (a1>0);            | (H)       u2 = 7;
(p0)      B = OR(BA);                     | (H)       v2 = 5;
(p0)      C = OR(CA);                     | (GFBA)    JGFBA = OR(TRUE);
(B)      x1 = 2;                          | (GFDCA)   JGFDCA = OR(TRUE);
(B)      y1 = 3;                          | [*] (GFECA) JGFECA = OR(TRUE);
(C)      cmp.unc DCA,ECA (b1>0);          | [*] (HFBA) JHFBA = OR(TRUE);
(p0)      D = OR(DCA);                    | [*] (HFDCA) JHFDCA = OR(TRUE);
(p0)      E = OR(ECA);                    | (HFECA)   JHFECA = OR(TRUE);
(D)      x2 = 3;                          | [-] (p0)   J = OR(JGFBA,JGFDCA,
(D)      y2 = 2;                          |           JGFECA,JHFBA,
(E)      z2 = 2;                          |           JHFDCA,JHFECA);
(E)      x3 = 4;                          | (JGFBA)   s1 = x1+u1;
(E)      y3 = 1;                          | (JGFBA)   t1 = y1+v1;
(BA)      FBA = OR(TRUE);                 | [*] (JGFDCA) s1 = x2+u1;
(DCA)      FDCA = OR(TRUE);               | [*] (JGFDCA) t1 = y2+v1;
(ECA)      FECA = OR(TRUE);               | (JGFECA)   s1 = x3+u1;
(p0)      F = OR(FBA,FDCA,FECA);          | (JGFECA)   t1 = y3+v1;
(FBA)      cmp.unc GFBA,HFBA (odd(z1));    | [*] (JHFBA) s1 = x1+u2;
(FDCA)      cmp.unc GFDCA,HFDCA (odd(z1)); | [*] (JHFBA) t1 = y1+v2;
(FECA)      cmp.unc GFECA,HFECA (odd(z2)); | [*] (JHFDCA) s1 = x2+u2;
[-] (p0)      G = OR(GFBA,GFDCA,GFECA);    | [*] (JHFDCA) t1 = y2+v2;
[-] (p0)      H = OR(HFBA,HFDCA,HFECA);    | (JHFECA)   s1 = x3+u2;
(GFBA)      w1 = z1 mod 2;                 | (JHFECA)   t1 = y3+v2;
(GFDCA)      w1 = z1 mod 2;                 | (J)        z3 = s1+t1;
[*] (GFECA)   w1 = z2 mod 2;               | end.
(G)          u1 = 5;
(G)          v1 = 7;
```

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 14.3.3

## PVG-Basiskonstantenanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

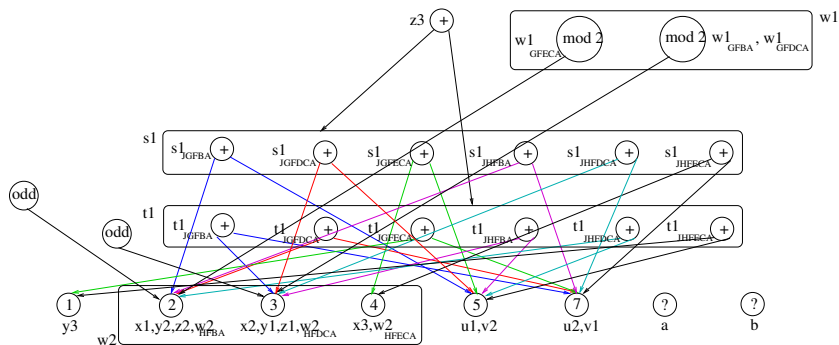
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

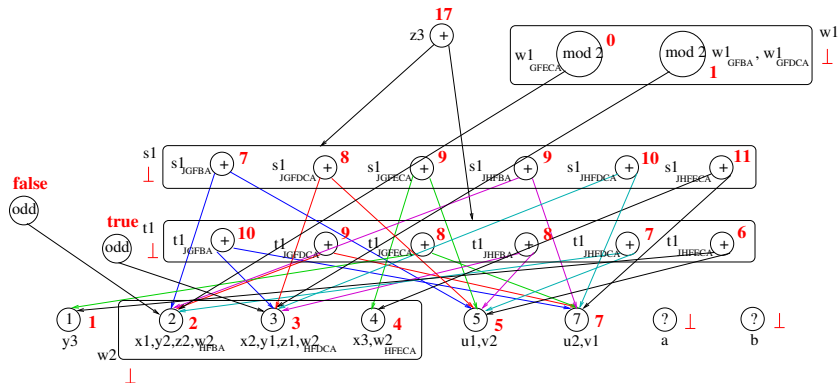
## Die PVG-Basiskonstantenanalyse

... auf PSSA-basiertem PVG ohne Wächterprädikatausnutzung  
(engl. *guarding predicates*):





# Resultat der PVG-Basiskonstantenanalyse



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

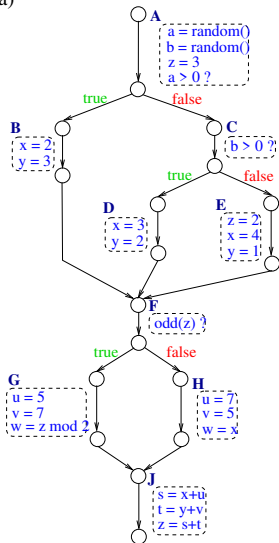
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

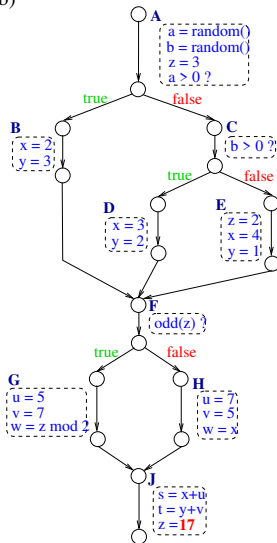
# PVG-Basiskonstantenanalysetransformation

a)



Der Ausgangs-Hyperblock

b)



Nach nichtdeterministischer  
pfadpraziser Grundoptimierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 14.3.4

## Volle PVG-Konstantenanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

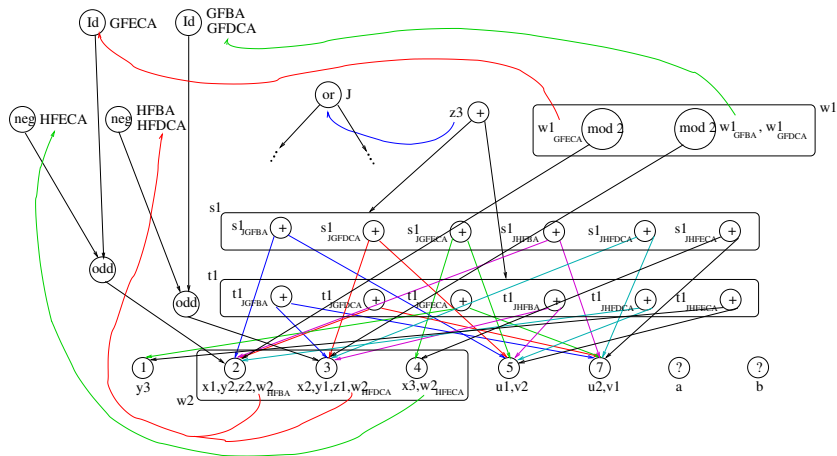
Kap. 12

Kap. 13

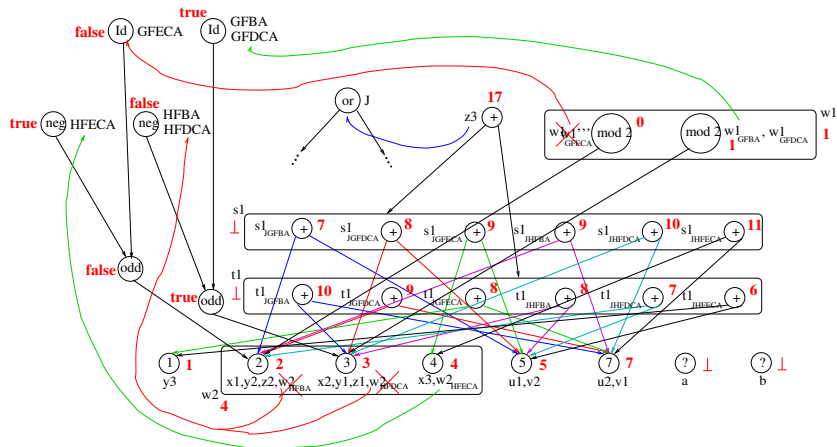
Kap. 14

## Der prädikatierte Wertegraph

...unter Ausnutzung der Wächterprädikate (engl. guarding predicates):



# Resultat der vollen PVG-Konstantenanalyse



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

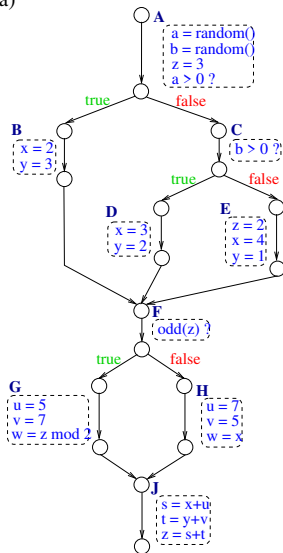
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

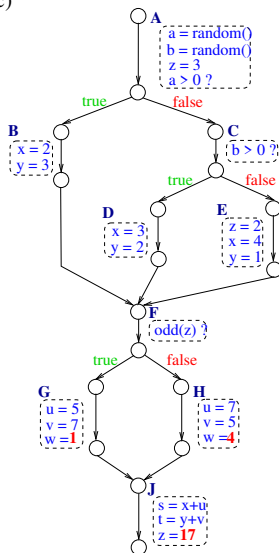
# Volle PVG-Konstantenanalysetransformation

a)



Der Ausgangs-Hyperblock

c)



Nach deterministischer  
pfadpraeziser voller Optimierung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Der transformierte Hyperblock in PSSA-Form

```

begin (p0)      A = OR(TRUE);      |
(A)            a1 = random();      | [-] (p0)      G = OR(GFBA,GFDCA);
(A)            b1 = random();      | [-] (p0)      H = OR(HFECA);
(A)            z1 = 3;              | (G)          w1 = 1;
(A)            cmp.unc BA,CA (a1>0); | (G)          u1 = 5;
(p0)           B = OR(BA);          | (G)          v1 = 7;
(p0)           C = OR(CA);          | (HFECA)      w2 = 4;
(B)            x1 = 2;              | (H)          u2 = 7;
(B)            y1 = 3;              | (H)          v2 = 5;
(C)            cmp.unc DCA,ECA (b1>0); | (GFBA)      JGFBA = OR(TRUE);
(p0)           D = OR(DCA);          | (GFDCA)      JGFDCA = OR(TRUE);
(p0)           E = OR(ECA);          | (HFECA)      JHFECA = OR(TRUE);
(D)            x2 = 3;              | [-] (p0)      J = OR(JGFBA,JGFECA,
(D)            y2 = 2;              |              JHFECA);
(E)            z2 = 2;              | (JGFBA)      s1 = 7;
(E)            x3 = 4;              | (JGFBA)      t1 = 10;
(E)            y3 = 1;              | (JGFECA)      s1 = 9;
(BA)           FBA = OR(TRUE);      | (JGFECA)      t1 = 8;
(DCA)          FDCA = OR(TRUE);      | (JHFECA)      s1 = 11;
(ECA)          FECA = OR(TRUE);      | (JHFECA)      t1 = 6;
(p0)           F = OR(FBA,FDCA,FECA); | (J)          z3 = 17;
(FBA)          cmp.unc GFBA,HFBA (TRUE)); | end.
(FDCA)         cmp.unc GFDCA,HFDCA (TRUE); |
(FECA)         cmp.unc GFECA,HFECA (FALSE); |

```

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Hauptresultate

## Lemma 14.3.4.1 (Korrektheit)

Die PVG-Basis- und die volle PVG-Konstantenanalyse sind korrekt.

## Lemma 14.3.4.2 (Vollständigkeit/Optimalität)

- Die PVG-Basiskonstantenanalyse ist pfad-präzise für nicht-deterministische Interpretation von Verzweigungsbedingungen.
- Die volle PVG-Konstantenanalyse ist prädikatsensitiv pfad-präzise.



# Kapitel 14.3.5

## Variationen zur Performanzverbesserung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

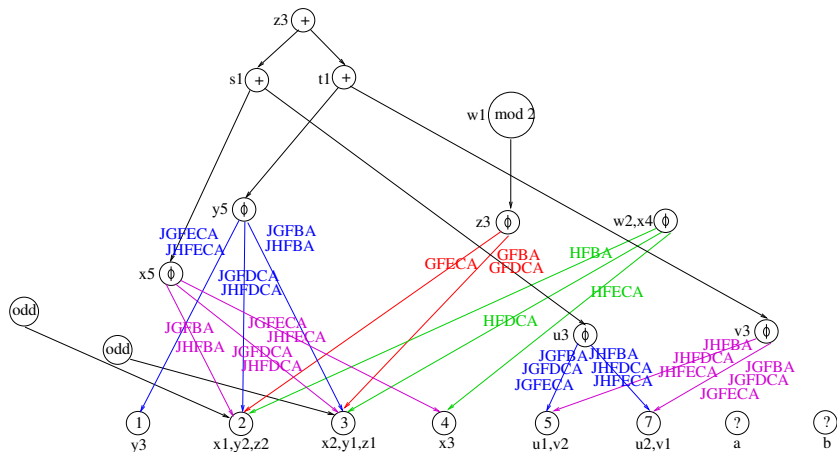
Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Performanzverbesserung der PVG-Basisanalyse



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## 1179/16





## 1181/16



# Kapitel 14.4

## Zusammenfassung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Zusammenfassung

Konstantenanalyse und SSA/PSSA-basierter (prädikatierter) Wertegraph sind

- ▶ **perfekt** aufeinander **abgestimmt**: SSA/PSSA-Programmdarstellungen zeigen sich als
  - wirklich von Hilfe für **Konstantenanalyse**.
  - Grundlage und Schlüssel für **Wertegraph** und **prädikatierten Wertegraph**.
- ▶ **offen** für Erweiterungen, z.B.:
  - **Bedingte Konstanten** (engl. **conditional constants**) auf dem (**prädikatierten**) **Wertegraph**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

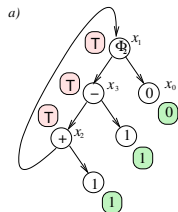
Kap. 12

Kap. 13

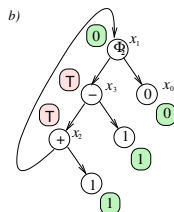
Kap. 14

# Konstantenanalyse auf dem Wertegraph

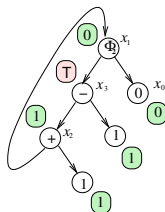
...erzielt **Triple E** Rating: **E**xpressive, **E**fficient, **E**asy!



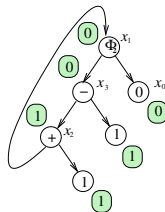
Nach der Initialisierung



Nach der 1. Iteration



Nach der 2. Iteration



Nach der 3. Iteration: Stabil!

und ist von daher **Vorzeigeanwendung**, **Vorteile** von

- (P)SSA als Programmdarstellung für **Analyse** und **Transformation**, insbesondere **Optimierung**

aufzuzeigen.



...zur **VG-Konstantenanalyse**:

- Jens Knoop, Oliver Rüthing. **Constant Propagation on the Value Graph: Simple Constants and Beyond**. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 94-109, 2000.

...zur **PVG-Konstantenanalyse**:

- Jens Knoop, Oliver Rüthing. **Constant Propagation on Predicated Code**. Journal of Universal Computer Science 9(8):829-850, 2003. (Sonderausgabe zur SBLP'03).

# Kapitel 14.5

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (1)



Bowen Alpern, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Detecting Equality of Variables in Programs*. In Conference Record of the 15th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'88), 1-11, 1988.



Ron Cytron, Jeanne Ferrante, Barry K. Rosen, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *An Efficient Method of Computing Static Single Assignment Form*. In Conference Record of the 16th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'89), 25-35, 1989.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (2)

-  Ron Cytron, Jeanne Ferrante, Barry K. Rosen, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Efficiently Computing Static Single Assignment Form and the Control Dependence Graph*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 13(4):451-490, 1991.
-  John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Monotone Data Flow Analysis Frameworks*. Acta Informatica 7:305-317, 1977.
-  Gary A. Kildall. *A Unified Approach to Global Program Optimization*. In Conference Record of the 1st ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'73), 194-206, 1973.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (3)



Jens Knoop, Oliver Rüthing. *Constant Propagation on the Value Graph: Simple Constants and Beyond*. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 94-109, 2000.






Jens Knoop, Oliver Rüthing. *Constant Propagation on Predicated Code*. Journal of Universal Computer Science 9(8):829-850, 2003. (Sonderausgabe zur SBLP'03).



Markus Müller-Olm, Helmut Seidl. *Polynomial Constants are Decidable*. In Proceedings of the 9th Static Analysis Symposium (SAS 2002), Springer-V., LNCS 2477, 4-19, 2002.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (4)

-  John H. Reif, Harry R. Lewis. *Symbolic Evaluation and the Global Value Graph*. In Conference Record of the 4th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77), 104-118, 1977.
-  Oliver Rüthing, Jens Knoop, Bernhard Steffen. *Detecting Equalities of Variables: Combining Efficiency with Precision*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 232-247, 1999.
-  Oliver Rüthing, Markus Müller-Olm. *On the Complexity of Constant Propagation*. In Proceedings of the 10th European Symposium on Programming (ESOP 2001), Springer-V., LNCS 2028, 190-205, 2001.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (5)



Bernhard Steffen, Jens Knoop. *Finite Constants: Characterizations of a New Decidable Set of Constants*. Theoretical Computer Science 80(2):303-318, 1991.



Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Effective Partial Redundancy Elimination based on Extended Value Graph*. Information Processing Society of Japan 38(11):2237-2250, 1990.



Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Partial Dead Code Elimination Using Extended Value Graph*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 179-193, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (6)



Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Constant Propagation with Conditional Branches*. In Conference Record of the 12th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'85), 291-299, 1985.



Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Constant Propagation with Conditional Branches*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 13(2):181-201, 1991.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Teil V

## Abstrakte Interpretation und Modellprüfung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 15

## Abstrakte Interpretation und Datenflussanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 15.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Motivation

...abstrakte Interpretation – ein ‘mondäner’ Programmanalyse-ansatz (cf. Nielson, Nielson, Hankin, 2005).

Intuitiv, der

- ▶ DFA-Ansatz beinhaltet die Spezifikation einer Programmanalyse, deren Korrektheit separat und unabhängig *a posteriori*
- ▶ abstrakte Interpretationsansatz beinhaltet den Korrektheitsnachweis von Anfang an als integralen Bestandteil der Spezifikation einer Programmanalyse, wodurch Korrektheit *a priori*

bewiesen wird.

# Kapitel 15.2

## Theorie abstrakter Interpretation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

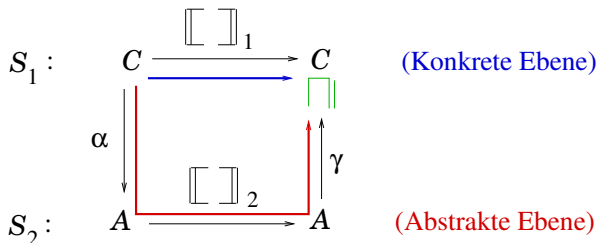
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Theorie abstrakter Interpretation

...ein Ansatz mit **zwei** (oder **mehr**) Beobachtungsniveaus:



zusammengehalten durch **Wohlzusammenhangsforderungen**:

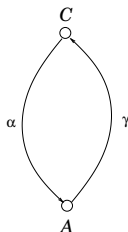
1.  $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  als sog. **Abstraktions-** und **Konkretisierungsfunktionen** bilden eine **Galois-Verbindung**.
2. das **Diagramm** (**schwach**) **kommutativ** ist.

# Im folgenden

...bezeichnen:

- $\mathcal{C} = (C, \sqcup_C, \sqsubseteq_C, \perp_C, \top_C)$ ,  $\mathcal{A} = (A, \sqcup_A, \sqsubseteq_A, \perp_A, \top_A)$ :  
Vollständige (Vereinigungs-) Halbverbände.
- $\alpha : C \rightarrow A$ : sog. **Abstraktionsfunktion**.
- $\gamma : A \rightarrow C$ : sog. **Konkretisierungsfunktion**.

...womit das Tupel  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  folgende **Situation** beschreibt:



**Generalvereinbarung:**

- Verbandmäßig kleiner heißt **bessere, genauere Information!**
- $Id_C : C \rightarrow C$ ,  $Id_A : A \rightarrow A$ : Identitäten auf  $C$  und  $A$ ,  
d.h.:  $Id_C = \lambda c. c$  und  $Id_A(a) = \lambda a. a$ .

# Beachte

...in der **Theorie abstrakter Interpretationen** ist die Generalvereinbarung **verbandmäßig kleiner** bedeutet

- ▶ **bessere, genauere Information**

genauer andersherum getroffen als in der **Theorie der Datenflussanalyse**, wo **verbandmäßig kleiner**

- ▶ **schlechtere, ungenauere Information**

bedeutet (vgl. **Kapitel 7.3**).



# Kapitel 15.2.1

## Galois-Verbindungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

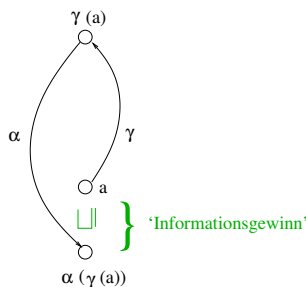
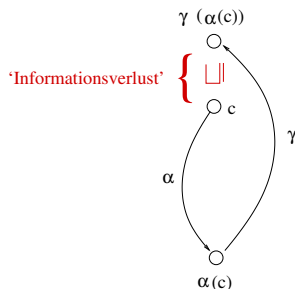
Kap. 14

# Galois-Verbindungen

## Definition 15.2.1.1 (Galois-Verbindung)

Ein Quadrupel  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  heißt **Galois-Verbindung** (engl. Galois connection) gdw:

1.  $\alpha$  und  $\gamma$  sind **monoton**
2.  $\gamma \circ \alpha \supseteq_{\mathcal{C}} Id_{\mathcal{C}}$  ( $\sqsupseteq_{\mathcal{C}}$ : linksseitig 'Informationsverlust')
3.  $\alpha \circ \gamma \sqsubseteq_{\mathcal{A}} Id_{\mathcal{A}}$  ( $\sqsubseteq_{\mathcal{A}}$ : linksseitig 'Informationsgewinn')



# Informell

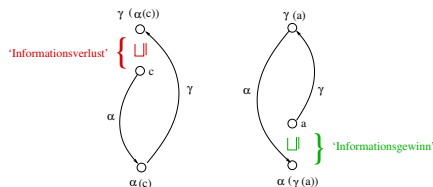
## Abstraktion

- **kann schaden**: Ist die Inklusion  $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq_c Id_C$  in Definition 15.2.1.1(1) echt, so bedeutet das eine Schlechterstellung, einen **Informationsverlust** auf der konkreten Ebene.

## Konkretisierung

- **darf nicht schaden**: Ist die Inklusion  $\alpha \circ \gamma \sqsubseteq_A Id_A$  in Definition 15.2.1.1(2) echt, so bedeutet das (sogar) eine Besserstellung, einen **Informationsgewinn** auf der abstrakten Ebene.

...entsprechend der Generalvereinbarung: 'kleiner' ist 'besser'.



# Maximaler Informationsverlust, -gewinn

## Proposition 15.2.1.2 (Triviale, nutzlose Galois-Verb.)

$Q_{triv} = (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  mit  $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  definiert durch:

- $\alpha = \lambda c. \perp_{\mathcal{A}}$
- $\gamma = \lambda a. \top_{\mathcal{C}}$

ist eine Galois-Verbindung.

Beachte:  $Q_{triv}$  erfüllt die Anforderungen an eine Galois-Verb.

- trivialerweise.
- maximiert die Informations-
  - Schlechterstellung durch Abstraktions-/Konkretisierungsabfolge:  $\gamma \circ \alpha = \lambda c. \top_{\mathcal{C}} \sqsupseteq_{\mathcal{C}} Id_{\mathcal{C}}$
  - Besserstellung durch Konkretisierungs-/Abstraktionsabfolge:  $\alpha \circ \gamma = \lambda a. \perp_{\mathcal{A}} \sqsubseteq_{\mathcal{A}} Id_{\mathcal{A}}$
- ist nutzlos für praktische Anwendungen.

# Beispiel: Galois-Verbindung (1)

Bezeichne

- $IV =_{df} \{[m, n] \mid m, n \in \mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}, m \leq n\} \dot{\cup} \{[\ ]\}$  die Menge der Intervalle über der Menge ganzer Zahlen

$$\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty} =_{df} \mathbb{Z} \dot{\cup} \{-\infty, \infty\}$$

wobei Intervalle Teilmengen von  $\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}$  bezeichnen:

$$[\ ] =_{df} \emptyset$$

$$\forall m \leq n \in \mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}. [m, n] =_{df} \{z \mid -\infty \leq m \leq z \leq n \leq \infty\}$$

- $\widehat{\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}} =_{df} (\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}, \leq, \sqcap_{\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}}, \sqcup_{\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}}, -\infty, \infty)$  den durch die (in natürlicher Weise auf  $\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}$  erweiterte) kleiner/gleich-Relation geordneten vollständigen Verband  $\widehat{\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}}$ .

# Beispiel: Galois-Verbindung (2)

Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{A}$  die vollständigen (Vereinigungs-) Verbände:

- ▶  $\mathcal{C} =_{df} (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cup, \subseteq, \emptyset, \mathbb{Z})$  der Potenzmengenverband ganzer Zahlen.
- ▶  $\mathcal{A} =_{df} (IV, \sqcup, \sqsubseteq, [], [-\infty, \infty])$  der Intervallverband ganzer Zahlen mit:

$$\forall [m, n], [p, q] \in IV.$$

$$[] \sqsubseteq []$$

$$[] \sqsubseteq [p, q]$$

$$[m, n] \sqsubseteq [-\infty, \infty]$$

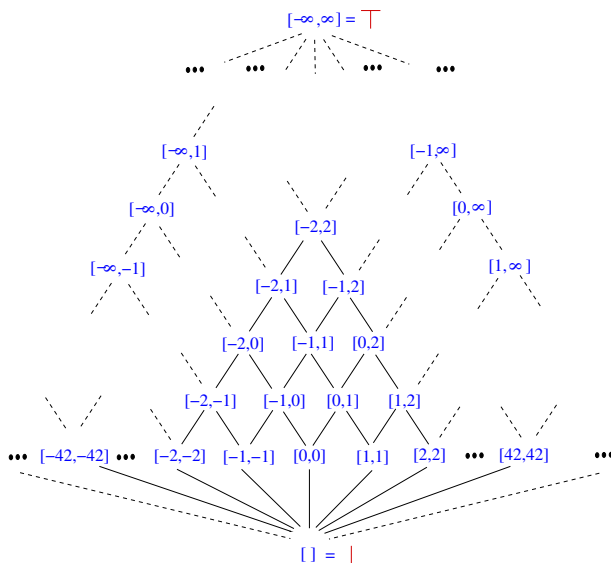
$$[m, n] \sqsubseteq [p, q] \iff_{df} [m, n] \subseteq [p, q]$$

$$\iff p \leq m \leq n \leq q$$

$$[m, n] \sqcup [p, q] =_{df} \left[ \bigcap_{\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}} ([m, n] \cup [p, q]), \right. \\ \left. \bigcup_{\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}} ([m, n] \cup [p, q]) \right]$$

# Beispiel: Galois-Verbindung (3)

Der Intervallverband  $\mathcal{A}$ :



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Beispiel: Galois-Verbindung (4)

## Proposition 15.2.1.3

Das Quadrupel  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  mit  $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  und  $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  definiert durch:

$$\forall Z \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}). \alpha(Z) =_{df} \begin{cases} [] & \text{falls } Z = \emptyset \\ [\widehat{\bigcap_{\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}} Z}, \widehat{\bigcup_{\mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty}} Z}] & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\forall iv \in IV. \gamma(iv) =_{df} \begin{cases} \emptyset & \text{falls } iv = [] \\ \{z \in \mathbb{Z}_{-\infty}^{\infty} \mid m \leq z \leq n\} & \text{falls } iv = [m, n] \end{cases}$$

ist eine Galois-Verbindung.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Eigenschaften von Galois-Verbindungen (1)

...keine weiteren Informationsverluste oder -gewinne durch fortgesetzte Abstraktionen und Konkretisierungen, Neutralität.

## Lemma 15.2.1.4 (Neutralität)

Sei  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  eine Galois-Verbindung. Dann gilt:

1.  $\alpha \circ \gamma \circ \alpha = \alpha$
2.  $\gamma \circ \alpha \circ \gamma = \gamma$

# Eigenschaften von Galois-Verbindungen (2)

...Abstraktions- und Konkretisierungsfunktionen bestimmen einander **eindeutig** in Galois-Verbindungen.

## Lemma 15.2.1.5 (Eindeutigkeit von $\alpha$ und $\gamma$ )

Sei  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  eine Galois-Verbindung. Dann gilt:

1.  $\gamma$  ist durch  $\alpha$  **eindeutig** bestimmt und es gilt:

$$\forall a \in A. \gamma(a) = \bigsqcup_C \{c \in C \mid \alpha(c) \sqsubseteq_A a\}.$$

2.  $\alpha$  ist durch  $\gamma$  **eindeutig** bestimmt und es gilt:

$$\forall c \in C. \alpha(c) = \bigwedge_A \{a \in A \mid c \sqsubseteq_C \gamma(a)\}.$$

3.  $\alpha$  ist **additiv** und  $\gamma$  **distributiv**.

Insbesondere gilt:  $\alpha(\perp_C) = \perp_A$  und  $\gamma(\top_A) = \top_C$ .

...vergleiche die Charakterisierungen von  $\gamma$  und  $\alpha$  in Lemma 15.2.1.5(1)/(2) mit der Festlegung **reverser lokaler Semantik-funktionen** in Definition 8.2.1.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Eigenschaften von Galois-Verbindungen (3)

...Additivität bzw. Distributivität von **Abstraktions-** und **Konkretisierungsfunktion** garantieren einander wechselseitige **Existenz** und **eindeutige Bestimmtheit**.

## Lemma 15.2.1.6 (Existenz, eindeutige Vervollst.)

1. Ist  $\alpha : C \rightarrow A$  additiv, dann gibt es ein  $\gamma : A \rightarrow C$ , so dass  $(C, \alpha, \gamma, A)$  eine Galois-Verbindung ist.
2. Ist  $\gamma : A \rightarrow C$  distributiv, dann gibt es ein  $\alpha : C \rightarrow A$ , so dass  $(C, \alpha, \gamma, A)$  eine Galois-Verbindung ist.

## Beweis

- Für 1): Setze  $\forall a \in A. \gamma(a) = \bigsqcup_C \{c \in C \mid \alpha(c) \sqsubseteq_A a\}$ .
- Für 2): Setze  $\forall c \in C. \alpha(c) = \bigsqcap_A \{a \in A \mid c \sqsubseteq_C \gamma(a)\}$ .

# Eigenschaften von Galois-Verbindungen (4)

## Proposition 15.2.1.7

Sei  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  eine Galois-Verbindung und

$$A_\alpha =_{df} \{\alpha(c) \mid c \in \mathcal{C}\} \subseteq A$$

Dann ist

$$\mathcal{A}_\alpha =_{df} (A_\alpha, \sqcup_{\mathcal{A}|_{\mathcal{A}_\alpha}}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}|_{\mathcal{A}_\alpha}}, \perp_A, \top_A)$$

ein vollständiger (Vereinigungs-) Halbverband, wobei  $\sqcup_{\mathcal{A}|_{\mathcal{A}_\alpha}}$  und  $\sqsubseteq_{\mathcal{A}|_{\mathcal{A}_\alpha}}$  die Einschränkungen von  $\sqcup_{\mathcal{A}}$  und  $\sqsubseteq_{\mathcal{A}}$  von  $A$  auf  $A_\alpha$  bezeichnen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Eigenschaften von Galois-Verbindungen (5)

## Proposition 15.2.1.8

Sei  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  eine Galois-Verbindung und  $\rho : A \rightarrow A$  der wie folgt definierte Reduktionsoperator:

$$\forall a \in A. \rho(a) =_{df} \bigcap_{\mathcal{A}} \{a' \in A \mid \gamma(a) = \gamma(a')\}$$

und  $R_\rho =_{df} \{\rho(a) \mid a \in A\}$   $R_\rho =_{df} \{\rho(a) \mid a \in A\}$ .

Dann gilt:

1.  $\mathcal{R}_\rho =_{df} (R_\rho, \sqcup_{\mathcal{A}|_{\mathcal{R}_\rho}}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}|_{\mathcal{R}_\rho}}, \perp_{\mathcal{A}}, \top_{\mathcal{A}})$  ist ein vollständiger Verband.
2.  $\forall a \in A. \rho(a) = \alpha(\gamma(a))$
3.  $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{R}_\rho$

...siehe auch Lemma 15.2.2.4.

# Adjunktionscharakterisierung v. Galois-Verbind.

...mit der Adjunktionscharakterisierung von Galois-Verbindungen (Lemma 15.2.1.10) ist oft einfacher zu arbeiten als mit ihrer unmittelbaren Definition (Definition 15.2.1.1); siehe dazu auch Übungsaufgabe 15.3.2.7.

## Definition 15.2.1.9 (Adjunktion)

Ein Quadrupel  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  heißt **Adjunktion** (engl. *adjunction*) gdw:

1.  $\alpha$  und  $\gamma$  sind total
2.  $\forall c \in \mathcal{C} \forall a \in \mathcal{A}. \alpha(c) \sqsubseteq_{\mathcal{A}} a \iff c \sqsubseteq_{\mathcal{C}} \gamma(a)$

## Lemma 15.2.1.10 (Charakterisierung v. Galois-Verb.)

$(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  ist eine Adjunktion gdw  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  ist eine Galois-Verbindung.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/16

# Kapitel 15.2.2

## Galois-Passungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

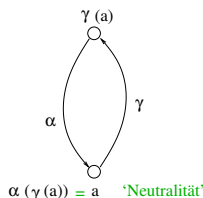
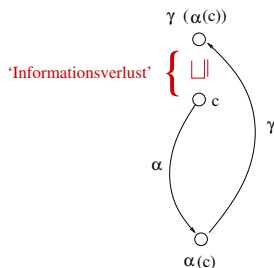
Kap. 14

# Galois-Passungen

## Definition 15.2.2.1 (Galois-Passung)

Ein Quadrupel  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  heißt **Galois-Passung** (engl. Galois insertion) gdw:

1.  $\alpha$  und  $\gamma$  sind **monoton**
2.  $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq_{\mathcal{C}} Id_{\mathcal{C}}$  ( $\sqsupseteq_{\mathcal{C}}$ : linksseitig 'Informationsverlust')
3.  $\alpha \circ \gamma =_{\mathcal{A}} Id_{\mathcal{A}}$  ( $=_{\mathcal{A}}$ : linksseitig 'Neutralität')





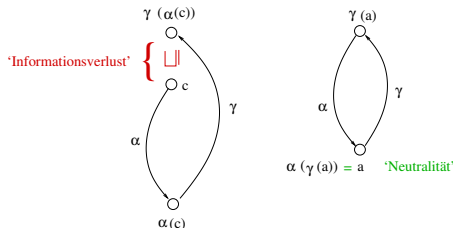
# Informell

...wie für Galois-Verbindungen:

- **Abstraktion kann schaden**: Ist die Inklusion  $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq_C Id_C$  in Definition 15.2.2.1(1) echt, so bedeutet das eine Schlechterstellung, einen **Informationsverlust** auf der konkreten Ebene.

Anders als für Galois-Verbindungen:

- **Konkretisierung darf nicht schaden**, aber auch nicht zu einer Besserstellung, einem **Informationsgewinn** auf der abstrakten Ebene führen:  $\alpha \circ \gamma =_A Id_A$ .

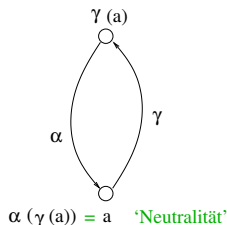


# Galois-Passungen: Spezielle Galois-Verbind.

## Proposition 15.2.2.2

Eine Galois-Verbindung  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  ist eine Galois-Passung gdw:

$$\alpha \circ \gamma =_{\mathcal{A}} Id_{\mathcal{A}}$$



**Bem.:** Die triviale, nutzlose Galois-Verbindung aus Proposition 15.2.1.2 ist keine Galois-Passung.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Charakterisierung von Galois-Passungen

## Lemma 15.2.2.3 (Äquivalenzaussagen)

Sei  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  eine Galois-Verbindung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  ist eine Galois-Passung.
2.  $\alpha$  ist surjektiv, d.h.:  $\forall a \in A \exists c \in C. \alpha(c) = a$ .
3.  $\gamma$  ist injektiv, d.h.:  
 $\forall a_1, a_2 \in A. \gamma(a_1) = \gamma(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ .
4.  $\gamma$  ist ordnungsähnlich, d.h.:  
 $\forall a_1, a_2 \in A. \gamma(a_1) \sqsubseteq_C \gamma(a_2) \Leftrightarrow a_1 \sqsubseteq_A a_2$ .

**Beachte:** Die Rückrichtungsimplication in 4)

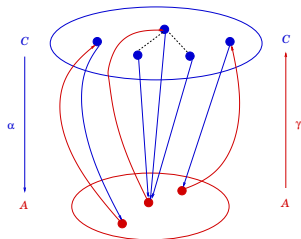
$$\forall a_1, a_2 \in A. \gamma(a_1) \sqsubseteq_C \gamma(a_2) \Leftarrow a_1 \sqsubseteq_A a_2$$

folgt bereits aus der Galois-Verbindungseigenschaft v.  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ .

# Informell

- In einer **Galois-Verbindung** können mehrere Elemente aus  $\mathcal{A}$  dasselbe Element aus  $\mathcal{C}$  beschreiben; in einer **Galois-Passung** nicht.
- Aus diesem Grund ist in einer **Galois-Verbindung** die Konkretisierungsfunktion  $\gamma$  i.a. **nicht injektiv**, die Abstraktionsfunktion  $\alpha$  i.a. **nicht surjektiv**; in einer **Galois-Passung** schon:  $\gamma$  ist stets **injektiv**,  $\alpha$  stets **surjektiv**.
- In einer **Galois-Passung** kann  $\mathcal{A}$  deshalb keine Elemente enthalten, die keine Elemente aus  $\mathcal{C}$  beschreiben, d.h.  $\mathcal{A}$  enthält in diesem Sinn keine überflüssigen Elemente.

**Galois-Passung:**  $\alpha$  surjektiv,  $\gamma$  injektiv.



# Konstruktion von Galois-Passungen

## Lemma 15.2.2.4 (Galois-Passungskonstruktion)

Sei  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  eine Galois-Verbindung,  $\rho : A \rightarrow A$  der wie folgt definierte Reduktionsoperator:

$$\forall a \in A. \rho(a) =_{df} \bigsqcap_A \{a' \in A \mid \gamma(a) = \gamma(a')\}$$

und  $R_\rho =_{df} \{\rho(a) \mid a \in A\}$ .

Dann gilt:

1.  $\mathcal{R}_\rho =_{df} (R_\rho, \sqcup_{\mathcal{A}|\mathcal{R}_\rho}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}|\mathcal{R}_\rho}, \perp_{\mathcal{A}}, \top_{\mathcal{A}})$  ist ein vollständiger Verband.
2. Das Quadrupel  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{R}_\rho)$  ist eine Galois-Passung.

Beweis mit Proposition 15.2.1.6 und 15.2.1.7 und Lemma 15.2.1.9 und 15.2.2.3.

# Übungsaufgabe 15.2.2.5

Ist die Galois-Verbindung  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  aus Proposition 15.2.1.2 zur Intervallanalyse eine Galois-Passung? Beweis oder Gegenbeispiel.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 15.3

## Systematische Konstruktion von Galois-Verbindungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Übersicht

...wir betrachten **acht Methoden**, aufgeteilt in **zwei Gruppen**:

- ▶ **Aus dem 'Nichts' erschaffende Methoden**

...zur Konstruktion neuer Galois-Verbindungen ohne bereits gegebene Galois-Verbindungen.

- ▶ **Kombinationsmethoden**

...zur Konstruktion neuer Galois-Verbindungen aus gegebenen Galois-Verbindungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Im einzelnen

## Erschaffende Methoden

1. Extraktionsmethode
2. Spezialfall der Extraktionsmethode

## Kombinierende Methoden

1. Unabhängige Attributemethode
2. Relationale Methode
3. Totale Funktionenraummethode
4. Monotone Funktionenraummethode
5. Direkte Produktmethode
6. Direkte Tensorproduktmethode

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 15.3.1

## Erschaffende Methoden

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# 1) Extraktionsmethode

## Lemma 15.3.1.1 (Extraktionsmethode)

Sei  $\beta : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{C}$  eine Abbildung von der Menge der Variablen  $\mathbf{V}$  in einen Verband  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \sqcup_{\mathcal{C}}, \sqsubseteq_{\mathcal{C}}, \perp_{\mathcal{C}}, \top_{\mathcal{C}})$ .

Dann ist das Quadrupel  $(\mathcal{P}(\mathbf{V}), \alpha, \gamma, \mathcal{C})$  mit

$$\begin{aligned}\forall V \in \mathcal{P}(\mathbf{V}). \alpha(V) &=_{df} \bigsqcup_{\mathcal{C}} \{\beta(v) \mid v \in V\} \\ \forall c \in \mathcal{C}. \gamma(c) &=_{df} \{v \in \mathbf{V} \mid \beta(v) \sqsubseteq_{\mathcal{C}} c\}\end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

## 2) Spezialfall der Extraktionsmethode

### Lemma 15.3.1.2 (Spezialfall d. Extraktionsmethode)

Sei  $D$  eine Menge,  $\mathcal{C} = (\mathcal{P}(D), \cup, \subseteq, \emptyset, D)$  der Potenzmengenverband von  $D$ ,  $\eta : \mathbf{V} \rightarrow D$  eine Extraktionsfunktion von der Menge der Variablen  $\mathbf{V}$  in  $D$  und  $\beta_\eta : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{C}$  eine Abbildung mit

$$\forall v \in \mathbf{V}. \beta_\eta(v) =_{df} \{\eta(v)\}$$

Dann ist das Quadrupel  $(\mathcal{P}(\mathbf{V}), \alpha_\eta, \gamma_\eta, \mathcal{C})$  mit

$$\begin{aligned} \forall V \in \mathcal{P}(\mathbf{V}). \alpha_\eta(V) &=_{df} \bigcup \{\beta_\eta(v) \mid v \in V\} \\ &= \{\eta(c) \mid v \in V\} \\ \forall D' \in \mathcal{P}(D). \gamma_\eta(D') &=_{df} \{v \in \mathbf{V} \mid \beta_\eta(v) \in D'\} \\ &= \{v \mid \eta(v) \in D'\} \end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

# Übungsaufgabe 15.3.1.3

Beweise:

1. Lemma 15.3.1.1
2. Lemma 15.3.1.2

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 15.3.2

## Kombinierende Methoden

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# 1) Unabhängige Attributemethode

## Lemma 15.3.2.1 (Unabhängige Attributemethode)

Seien  $(\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$  und  $(\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$  zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch  $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \alpha, \gamma, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$  mit

$$\forall (c_1, c_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2. \alpha(c_1, c_2) \stackrel{\text{df}}{=} (\alpha_1(c_1), \alpha_2(c_2))$$

$$\forall (a_1, a_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2. \gamma(a_1, a_2) \stackrel{\text{df}}{=} (\gamma_1(a_1), \gamma_2(a_2))$$

eine Galois-Verbindung.

## 2) Relationale Methode

...bezeichne  $\mathcal{P}$  den Potenzmengenoperator.

### Lemma 15.3.2.2 (Relationale Methode)

Seien  $(\mathcal{P}(C_1), \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{P}(A_1))$  und  $(\mathcal{P}(C_2), \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{P}(A_2))$  zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch  $(\mathcal{P}(C_1 \times C_2), \alpha, \gamma, \mathcal{P}(A_1 \times A_2))$  mit

$$\alpha(CC) =_{df} \bigcup \{ \alpha_1(\{c_1\}) \times \alpha_2(\{c_2\}) \mid (c_1, c_2) \in CC \}$$

$$\gamma(AA) =_{df} \{ (c_1, c_2) \mid \alpha_1(\{c_1\}) \times \alpha_2(\{c_2\}) \subseteq AA \}$$

für  $CC \subseteq C_1 \times C_2$  und  $AA \subseteq A_1 \times A_2$  eine Galois-Verbindung.



### 3) Totale Funktionenraummethode

...bezeichne  $[P \xrightarrow{\text{tot}} Q]$ ,  $P$ ,  $Q$  Mengen, die Menge der **total definierten** Funktionen von  $P$  nach  $Q$ .

#### Lemma 15.3.2.3 (Totale Funktionenraummethode)

Sei  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$  eine Galois-Verbindung und  $M$  eine Menge.

Dann ist auch  $([M \xrightarrow{\text{tot}} \mathcal{C}], \alpha', \gamma', [M \xrightarrow{\text{tot}} \mathcal{A}])$  mit

$$\forall f \in [M \xrightarrow{\text{tot}} \mathcal{C}]. \alpha'(f) =_{df} \alpha \circ f$$

$$\forall g \in [M \xrightarrow{\text{tot}} \mathcal{A}]. \gamma'(g) =_{df} \gamma \circ g$$

eine Galois-Verbindung.

## 4) Monotone Funktionenraummethode

...bezeichne  $[P \xrightarrow{\text{mon}} Q]$ ,  $P$ ,  $Q$  Mengen, die Menge der **monotonen** Funktionen von  $P$  nach  $Q$ .

### Lemma 15.3.2.4 (Monotone Funktionenraummeth.)

Seien  $(\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$  und  $(\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$  zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch  $([C_1 \xrightarrow{\text{mon}} C_2], \alpha, \gamma, [A_1 \xrightarrow{\text{mon}} A_2])$  mit

$$\forall f \in [C_1 \xrightarrow{\text{mon}} C_2]. \alpha(f) =_{df} \alpha_2 \circ f \circ \gamma_1$$

$$\forall g \in [A_1 \xrightarrow{\text{mon}} A_2]. \gamma(g) =_{df} \gamma_2 \circ g \circ \alpha_1$$

eine Galois-Verbindung.

## 5) Direkte Produktmethode

### Lemma 15.3.2.5 (Direkte Produktmethode)

Seien  $(\mathcal{C}, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$  und  $(\mathcal{C}, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$  zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$  mit

$$\begin{aligned}\forall c \in \mathcal{C}. \alpha(c) &=_{df} (\alpha_1(c), \alpha_2(c)) \\ \forall (a_1, a_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2. \gamma(a_1, a_2) &=_{df} \gamma_1(a_1) \sqcap \gamma_2(a_2)\end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

(Beachte die Abstützung von  $\gamma$  auf  $\sqcap$ , nicht  $\sqcup$ ; s.a. Übungsaufgabe 15.3.2.7).

## 6) Direkte Tensorproduktmethode

...bezeichne  $\mathcal{P}$  den Potenzmengenoperator.

### Lemma 15.3.2.6 (Direkte Tensorproduktmethode)

Seien  $(\mathcal{P}(C), \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{P}(A_1))$  und  $(\mathcal{P}(C), \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{P}(A_2))$  zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch  $(\mathcal{P}(C), \alpha, \gamma, \mathcal{P}(A_1 \times A_2))$  mit

$$\begin{aligned}\forall C' \in \mathcal{P}(C). \alpha(C') &=_{df} \bigcup \{ \alpha_1(\{c\}) \times \alpha_2(\{c\}) \mid c \in C' \} \\ \forall AA \in \mathcal{P}(A_1 \times A_2). \gamma(AA) &=_{df} \{ c \mid \alpha_1(\{c\}) \times \alpha_2(\{c\}) \subseteq AA \}\end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

# Übungsaufgabe 15.3.2.7

Beweise Lemma 15.3.2.5, d.h. sind  $(\mathcal{C}, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$  und  $(\mathcal{C}, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$  Galois-Verbindungen, dann ist auch  $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$  mit  $\alpha$  und  $\gamma$  definiert durch:

$$\begin{aligned}\forall c \in \mathcal{C}. \alpha(c) &=_{df} (\alpha_1(c), \alpha_2(c)) \\ \forall (a_1, a_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2. \gamma(a_1, a_2) &=_{df} \gamma_1(a_1) \sqcap \gamma_2(a_2)\end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

Zeige dazu:

$$\alpha(c) \sqsubseteq (a_1, a_2) \iff c \sqsubseteq \gamma(a_1, a_2)$$

woraus mithilfe von Lemma 15.2.1.10 (Adjunktionscharakterisierung von Galois-Verbindungen) die Behauptung folgt.

# Übungsaufgabe 15.3.2.8

Beweise die übrigen Lemmata aus [Kapitel 15.3.2](#), d.h. beweise:

1. Lemma 15.3.2.1
2. Lemma 15.3.2.2
3. Lemma 15.3.2.3
4. Lemma 15.3.2.4
5. Lemma 15.3.2.6

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 15.4

## Galois-Systeme

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

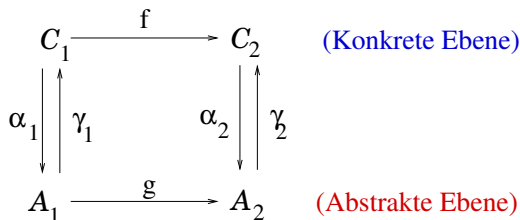
Kap. 13

Kap. 14

## Definition 15.4.1 (Galois-System)

Seien  $(\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$  und  $(\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$  zwei Galois-Verbindungen und seien  $f : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  und  $g : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  zwei monotone Abbildungen.

Dann heißt das Tupel  $(f, g, (\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1), (\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2))$  ein **Galois-System**, das folgende Situation beschreibt:





# Charakterisierung von Galois-Systemen

## Lemma 15.4.2 (Charakterisierung)

Sei  $(f, g, (\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1), (\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2))$  ein Galois-System.  
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f \sqsubseteq_{\mathcal{C}_2} \gamma_2 \circ g \circ \alpha_1$
2.  $\alpha_2 \circ f \sqsubseteq_{\mathcal{A}_2} g \circ \alpha_1$
3.  $\alpha_2 \circ f \circ \gamma_1 \sqsubseteq_{\mathcal{A}_2} g$
4.  $f \circ \gamma_1 \sqsubseteq_{\mathcal{C}_2} \gamma_2 \circ g$

## Lemma 15.4.3 (Charakterisierung)

Lemma 15.4.2 gilt analog, wenn überall  $\sqsubseteq$  durch  $=$  ersetzt wird.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

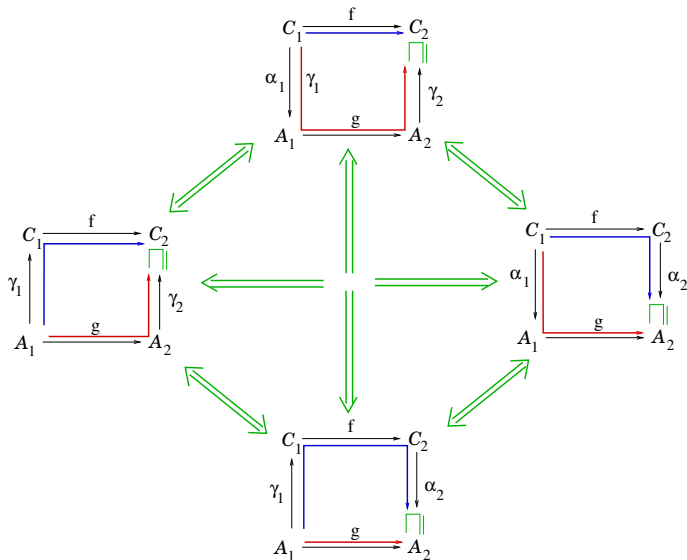
Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

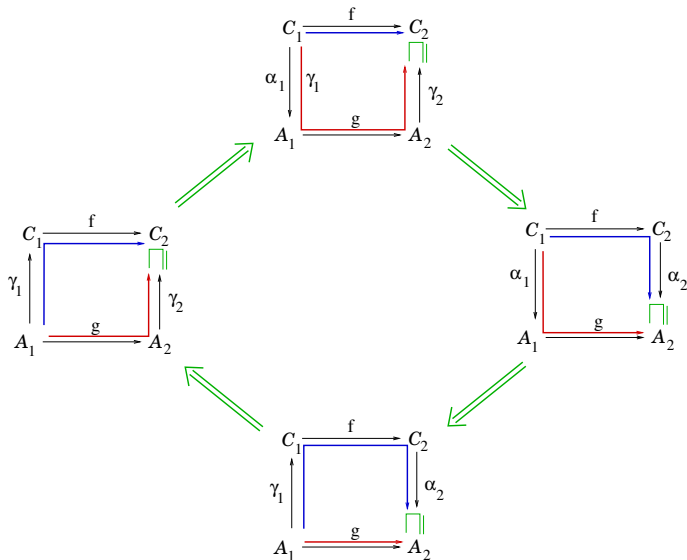
Kap. 14

# Illustration der Aussage von Lemma 15.4.2



# Übungsaufgabe 15.4.4

Beweise [Lemma 15.4.2](#) und [15.4.3](#) unter Ausnutzung folgender Idee:



# Kapitel 15.5

## Systeme abstrakter Interpretationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Idee

...ersetzen wir in einem Galois-System

$$(f, g, (\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1), (\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2))$$

die Abbildungen  $f$  und  $g$  durch abstrakte lokale Semantiken  $\llbracket \cdot \rrbracket_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  und  $\llbracket \cdot \rrbracket_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , so erhalten wir ein System abstrakter Interpretationen

$$(\llbracket \cdot \rrbracket_1, \llbracket \cdot \rrbracket_2, (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}))$$

das folgende (einfachere) Situation beschreibt:

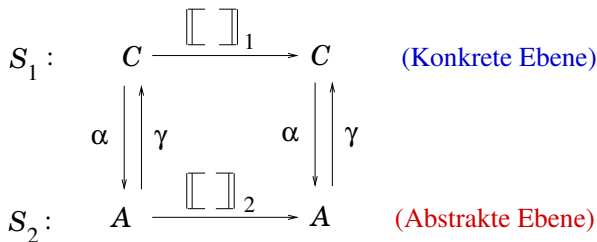
$$\begin{array}{ccc} S_1 : & \mathcal{C} & \xrightarrow{\llbracket \cdot \rrbracket_1} \mathcal{C} & \text{(Konkrete Ebene)} \\ & \alpha \downarrow \uparrow \gamma & & \alpha \downarrow \uparrow \gamma \\ S_2 : & \mathcal{A} & \xrightarrow{\llbracket \cdot \rrbracket_2} \mathcal{A} & \text{(Abstrakte Ebene)} \end{array}$$

# Systeme abstrakter Interpretationen

## Definition 15.5.1 (System abstr. Interpretationen)

Sei  $(\mathcal{C}, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A})$  eine Galois-Verbindung und  $\llbracket \cdot \rrbracket_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  und  $\llbracket \cdot \rrbracket_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  zwei abstrakte lokale Semantiken.

Dann heißt das Tupel  $(\llbracket \cdot \rrbracket_1, \llbracket \cdot \rrbracket_2, (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}))$  ein **System abstrakter Interpretationen**, das folgende Situation beschreibt:



# Datenflussanalyse und abstrakte Interpretation

...ist  $(\llbracket \cdot \rrbracket_1, \llbracket \cdot \rrbracket_2, (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}))$  ein System abstrakter Interpretationen, so spezifizieren  $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket \cdot \rrbracket_1)$  und  $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, \llbracket \cdot \rrbracket_2)$  abstrakte Programmsemantiken, z.B. im Sinn der

- Vereinigung/Schnitt-über-alle-Pfade-Semantik

die (unter geeigneten Voraussetzungen) approximativ oder akkurat als

- minimale/maximale Fixpunktsemantik

effektiv berechnet werden können (s. Kapitel 7).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Datenflussanalyse und abstrakte Interpretation

...dabei ist die **abstrakte Semantik** eines Programms  $G$  durch die **globale abstrakte Semantik** am Endknoten von  $G$  bestimmt:

$$\llbracket G \rrbracket_S^{VUP/SUP} =_{df} \llbracket e \rrbracket_S^{VUP/SUP} \sqsubseteq_{MinFP}^{VUP} / \sqsupseteq_{MaxFP}^{SUP} \llbracket e \rrbracket_S^{MinFP/MaxFP}$$

wobei (unter geeigneten Voraussetzungen, s. **Kapitel 7**) gilt:

$$\llbracket G \rrbracket_S^{VUP/SUP} = \llbracket e \rrbracket_S^{MinFP/MaxFP}$$

Diese Beobachtung verknüpft die **Theorie** (und **Praxis**) der **Datenflussanalyse** (s. **Kapitel 7**) mit der **Theorie** (und **Praxis**) der **abstrakten Interpretationen** (s. **Kapitel 15**).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Entwicklung von Programmanalysen (1)

...im Rahmen von Systemen abstrakter Interpretationen erfolgt typischerweise **iterativ**.

## Initial-Iteration:

- Wähle eine Analysespezifikation  $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \llbracket \cdot \rrbracket)$  mit  $\mathcal{C}$  vollständiger Verband und  $\llbracket \cdot \rrbracket : E \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$  lokale abstrakte Semantik, die noch eng mit der tatsächlichen Programmsemantik verbunden sind, z.B. die (nicht-deterministische) **Aufsammlungsemantik**:

$$\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \llbracket \cdot \rrbracket) =_{df} (\mathcal{P}(\Sigma_{\perp}^T), \llbracket \cdot \rrbracket_{\text{WHILE}})$$

Die Analysespezifikation

$$\mathcal{S} \stackrel{df}{=} \mathcal{S}_0 = (\mathcal{A}_0, \llbracket \cdot \rrbracket_0)$$

legt die sog. **konkrete Ebene**, die **Referenzebene** aller weiteren Analysen fest.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Entwicklung von Programmanalysen (2)

Folge-Iterationen:

- Ausgehend von  $\mathcal{S}_i = (\mathcal{A}_i, \llbracket \cdot \rrbracket_i)$ , führe einen stärker approximativen Verband zusammen mit einer darauf abgestimmten lokalen abstrakten Semantik

$$\mathcal{S}_{i+1} = (\mathcal{A}_{i+1}, \llbracket \cdot \rrbracket_{i+1})$$

und einem Paar aus Abstraktions- und Konkretisierungsfunktion

$$\alpha_{i+1} : A_i \rightarrow A_{i+1}, \quad \gamma_{i+1} : A_{i+1} \rightarrow A_i$$

ein, so dass

$$(\mathcal{A}_i, \alpha_{i+1}, \gamma_{i+1}, \mathcal{A}_{i+1})$$

eine Galois-Verbindung oder Galois-Passung bilden.

...bis ein für Analysefrage und -berechnung angemessenes und zweckmäßiges Abstraktionsniveau erreicht ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Turm von Galois-Verbindungen/-Passungen (1)

...durch wiederholte Anwendung des Iterationsschritts entsteht ein

- Turm (oder Hierarchie) von Systemen abstrakter Interpretationen

dessen Ebenen durch

- Galois-Verbindungen oder (sogar) Galois-Passungen

verknüpft sind, so dass abstrakte Interpretationen niedrigerer Ebenen

- korrekt und (idealerweise) vollständig und optimal

bezüglich abstrakter Interpretationen höherer Ebenen sind (s. Kapitel 15.6 und 15.7).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

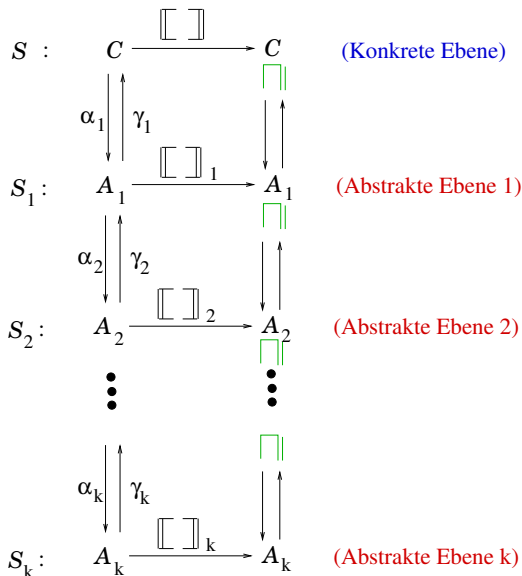
Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Turm von Galois-Verbindungen/-Passungen (2)



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Grundlage für Galois-Verb./-Passungstürme

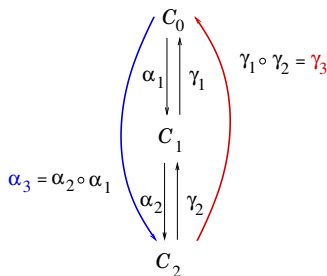
...ist die induktive Ausdehnung von:

## Lemma 15.5.2 (Komposition v. Galois-Verb./Pass.)

Seien  $(\mathcal{C}_0, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{C}_1)$  und  $(\mathcal{C}_1, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{C}_2)$  zwei Galois-Verbindungen (Galois-Passungen). Dann ist auch

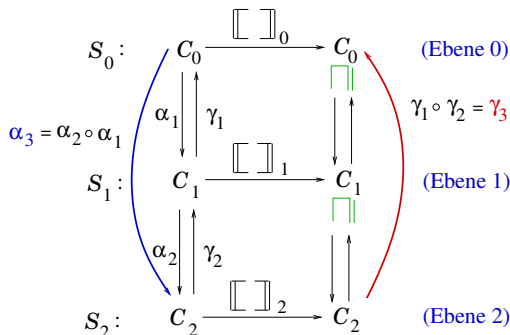
$$(\mathcal{C}_0, \alpha_2 \circ \alpha_1, \gamma_1 \circ \gamma_2, \mathcal{C}_2)$$

eine Galois-Verbindung (Galois-Passung).



# Anwendung

...von Lemma 15.5.2 auf Systeme abstrakter Interpretationen:



# Kapitel 15.6

## Korrektheit und Vollständigkeit abstrakter Interpretationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

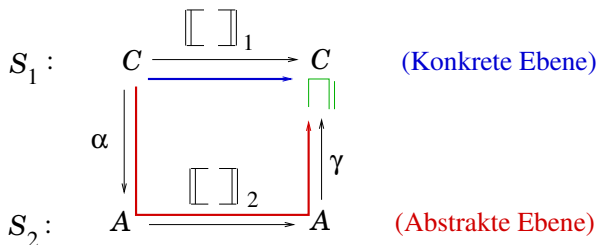
# Korrektheits- und Vollständigkeitsbegriff

...in der Theorie abstrakter Interpretationen setzen an der Einbettung abstrakter Interpretationen in

- Systeme abstrakter Interpretationen an.

Informell bedeuten Korrektheit und Vollständigkeit in Systemen abstrakter Interpretationen, speziellen Galois-Systemen

- Korrektheit und Vollständigkeit einer abstrakten Interpretation einer niedrigeren Ebene relativ zu einer abstrakten Interpretation einer höheren Ebene.





# Korrektheit und Vollständigkeit

...einer abstrakten Interpretation in einem Galois-System.

## Definition 15.6.1 (Korrektheit, Vollständigkeit)

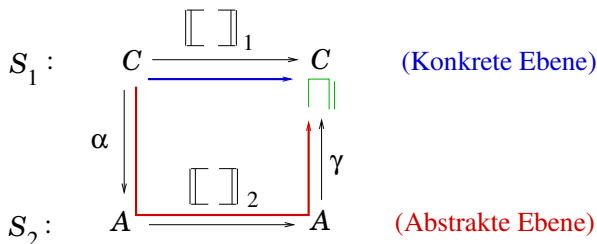
Sei  $(\llbracket \cdot \rrbracket_1, \llbracket \cdot \rrbracket_2, (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}))$  ein System abstrakter Interpretationen, wobei  $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket \cdot \rrbracket_1)$  und  $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, \llbracket \cdot \rrbracket_2)$  zwei abstrakte Semantiken auf den vollständigen (Vereinigungs-) Halbverbänden  $\mathcal{C}$  bzw.  $\mathcal{A}$  sind.

Dann heißt  $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, \llbracket \cdot \rrbracket_2)$

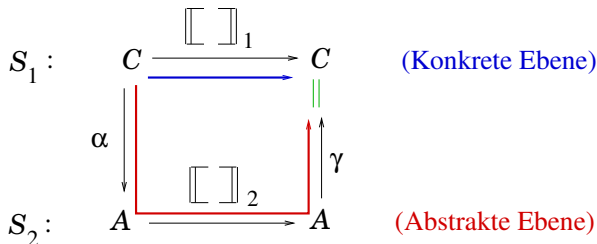
1. **korrekt** bzgl.  $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket \cdot \rrbracket_1)$ , wenn das nachstehende Diagramm **schwach kommutativ** ist, d.h., für (mindestens) einige Elemente aus  $\mathcal{C}$  die Inklusion echt ist.
2. **vollständig** bzgl.  $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket \cdot \rrbracket_1)$ , wenn das nachstehende Diagramm (**stark**) **kommutativ** ist, d.h. die Inklusion für alle Elemente aus  $\mathcal{C}$  unecht ist (also **Gleichheit** gilt).

# Diagramme zu Definition 15.4.1

Korrektheit von  $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, \llbracket \cdot \rrbracket_2)$  bzgl.  $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket \cdot \rrbracket_1)$ :



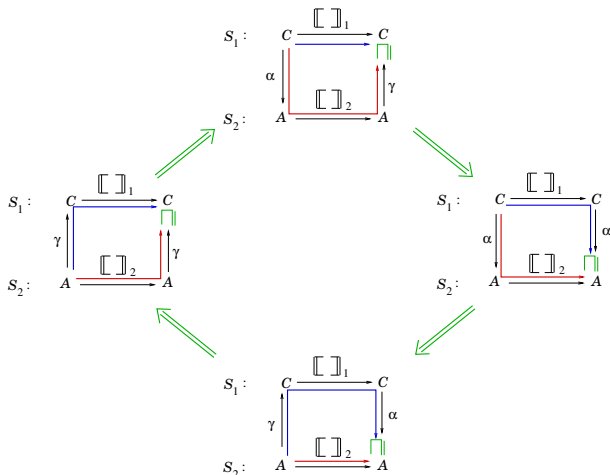
Vollständigkeit von  $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, \llbracket \cdot \rrbracket_2)$  bzgl.  $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket \cdot \rrbracket_1)$ :



# Als unmittelbare Folgerung (1)

...aus Lemma 15.4.2 f. allgemeine Galois-Systeme erhalten wir:

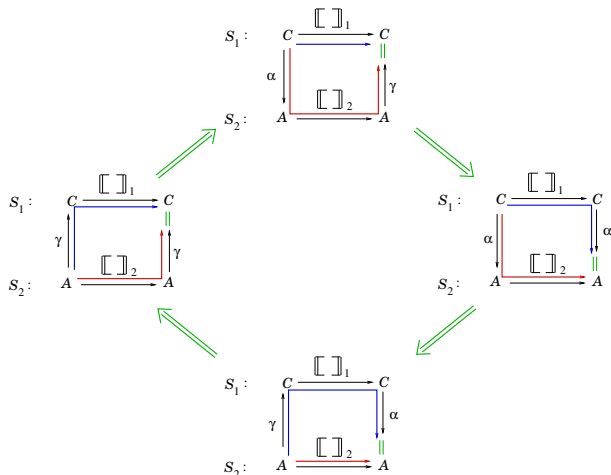
## Korollar 15.6.2 (Korrektheit)



# Als unmittelbare Folgerung (2)

...aus Lemma 15.4.3 f. allgemeine Galois-Systeme erhalten wir:

## Korollar 15.6.3 (Vollständigkeit)



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

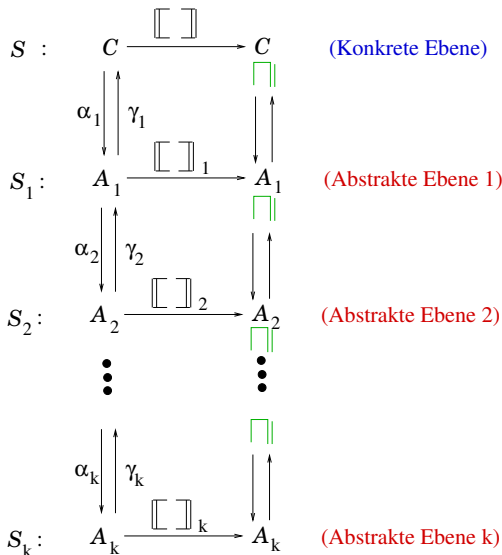
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Verallg. von Korrektheit und Vollständigkeit

...auf Türme von Systemen abstrakter Interpretationen:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 15.7

## Optimalität abstrakter Interpretationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Optimalität

...fragt intuitiv nach der

- ▶ 'einfachsten', 'abstraktesten', 'niedrigstebenenigen' abstrakten Semantik

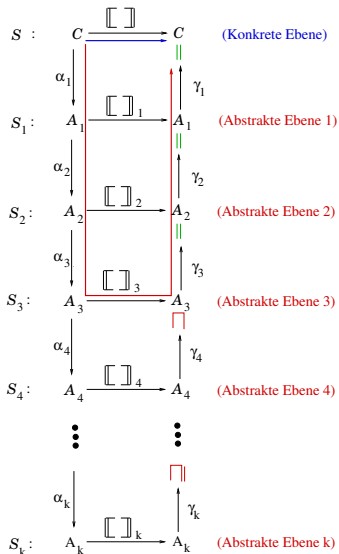
die eine Klasse  $\mathcal{K}$  von Analysefrage zu beantworten erlaubt.

Dabei können intuitiv zwei Sichten unterschieden werden:

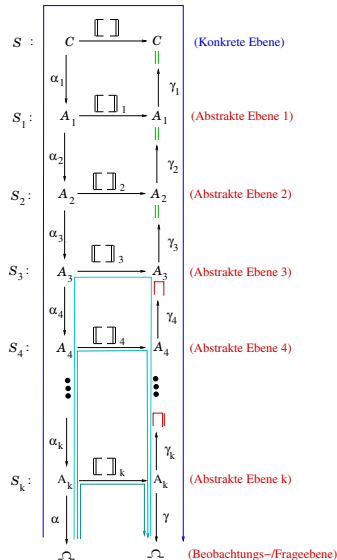
- ▶ Von oben nach unten: Wie weit kann abgestiegen werden, ohne Ausdruckskraft für  $\mathcal{K}$  zu verlieren?
- ▶ Von unten nach oben: Wie weit muss aufgestiegen werden, um eine genügend ausdrucksstarke Analyse zu erreichen, um Analysefragen aus  $\mathcal{K}$  zu beantworten?

# Illustration

Von oben nach unten:



Von unten nach oben:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

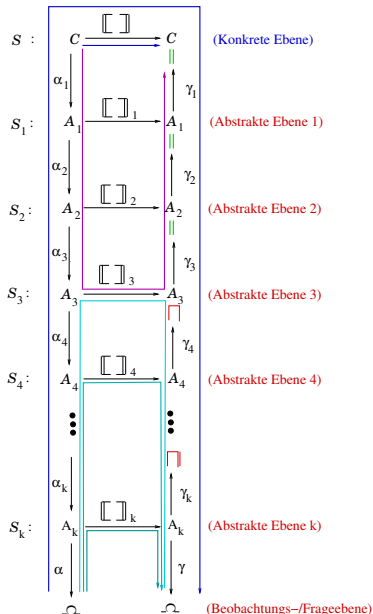
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Beide Sichten vereint in einem Diagramm



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Optimalität in der ‘oben-nach-unten’-Sicht

...informell ist eine abstrakte Interpretation **optimal** für eine Klasse von Analysefragen, wenn es keine echte Abstraktion von ihr gibt, die diese Fragen in gleicher Weise zu beantworten erlaubt.

## Definition 15.7.1 (onu-Optimalität)

Sei  $\mathcal{K}$  eine Klasse von Analysefragen und  $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket \cdot \rrbracket_1)$  ausdruckskräftig für  $\mathcal{K}$ .

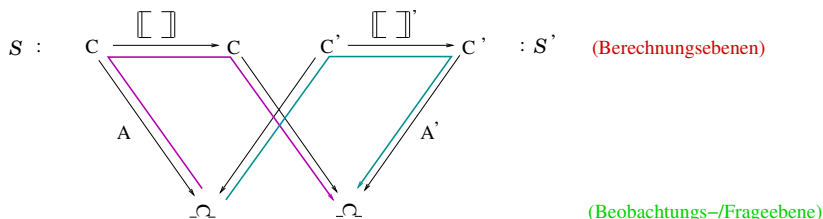
Dann ist  $\mathcal{S}_1$  **onu-optimal** für  $\mathcal{K}$ , wenn alle für ‘ $\mathcal{K}$  ausdruckskräftigen Abstraktionen von  $\mathcal{S}_1$  zu  $\mathcal{S}_1$  isomorph’ sind.

# Optimalität in der 'unten-nach-oben'-Sicht

...um den **Optimalitätsbegriff** in der 'unten-nach-oben'-Sicht zu fassen, gehen wir von der streng hierarchischen zu einer allgemeineren sich auf einen Begriff von

– **Beobachtungsäquivalenz** relativ zu einem Niveau  $\Omega$

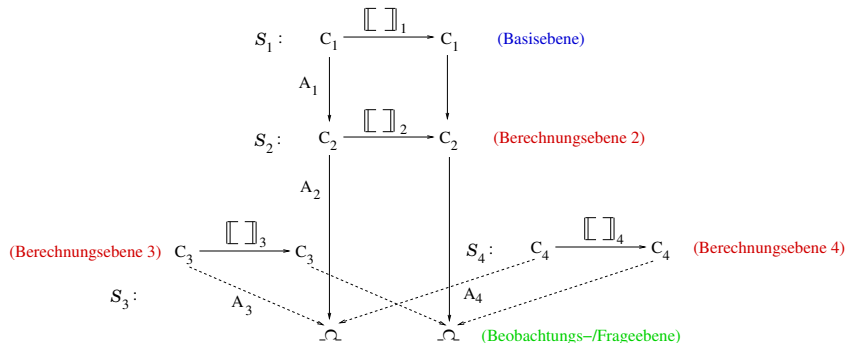
stützenden Sicht über, die auf **Bernhard Steffen** (MFCS'89, TAPSOFT'87) zurückgeht und auch die 'oben-nach-unten'-Sicht in generellerer Weise beleuchtet.



... $S$  und  $S'$  induzieren beide ein **Berechnungsverfahren** für  $\Omega$ .

# Illustration

...der Idee von Beobachtungsäquivalenz durch induzierte Berechnungsebenen für eine gegebene Anfrage- (oder Beobachtungs-) Ebene.



...es ist nicht *per se* klar, dass ein 'einfachstes ausreichendes' Berechnungsniveau innerhalb eines Turms liegen muss.

# In der Folge

...bezeichnen:

- **N** eine Menge von Knoten, die für die Menge der Vorkommen elementarer Anweisungen steht.
- $G =_{df} (N, E, s, e)$  einen Flussgraphen mit Knotenmenge  $N \subseteq \mathbf{N}$ , Kantenmenge  $E \subseteq N \times N$ , Startknoten  $s \in N$  und Endknoten  $e \in N$ , wobei **s** keine Vorgänger, **e** keine Nachfolger hat;  $\mathbf{P}(G)$  die Menge aller Pfade von **s** nach **e** in  $G$ .
- **FG** die Menge aller Flussgraphen über **N** und **LFG** die Menge aller linearen Flussgraphen über **N**, d.h. die Menge aller Flussgraphen mit genau einem Pfad von **s** und **e**.
- $\mathcal{C} =_{df} (C, \sqcup, \sqsubseteq, \perp, \top)$  einen vollständigen Halbverband mit kleinstem Element  $\perp$  und größtem Element  $\top$ .

## Definition 15.7.2 (Lokale abstrakte Semantik)

Sei  $\llbracket \_ \rrbracket_l : N \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$  eine Funktion, die jedem Knoten  $n \in N$  eine **additive** Funktion auf  $\mathcal{C}$  zuordnet, d.h.

$$\forall n \in N \ \forall C' \subseteq \mathcal{C}. \llbracket n \rrbracket_l(\bigsqcup C') = \bigsqcup \{ \llbracket n \rrbracket_l(c) \mid c \in C' \}.$$

Dann heißt das Paar  $(\llbracket \_ \rrbracket_l, \mathcal{C})$  eine **lokale abstrakte Semantik** (oder **lokale abstrakte Interpretation**).

# Globale abstrakte Semantik

## Definition 15.7.3 (Globale abstrakte Semantik)

Sei  $(\llbracket \cdot \rrbracket_I, \mathcal{C})$  abstrakte Interpretation und  $\llbracket \cdot \rrbracket : \mathbf{FG} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$  die Globalisierung von  $\llbracket \cdot \rrbracket_I$ , d.h.  $\forall G \in \mathbf{FG} \forall c \in \mathcal{C}$  gilt:

$$\llbracket G \rrbracket(c) =_{df}$$

$$\begin{cases} \llbracket n_k \rrbracket_I \circ \dots \circ \llbracket n_1 \rrbracket_I(c) & \text{falls } G = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{LFG} \\ \sqcup \{ \llbracket P \rrbracket(c) \mid P \in \mathbf{P}(G) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann heißt das Paar  $(\llbracket \cdot \rrbracket, \mathcal{C})$  die von  $(\llbracket \cdot \rrbracket_I, \mathcal{C})$  induzierte (globale) abstrakte Semantik.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Abstraktion und Konkretisierung

## Definition 15.7.4 (Abstraktion und Konkretisierung)

Seien  $\mathcal{S}_1 = (\llbracket \cdot \rrbracket_1, \mathcal{C}_1)$  und  $\mathcal{S}_2 = (\llbracket \cdot \rrbracket_2, \mathcal{C}_2)$  zwei abstrakte Semantiken.

1. Eine Funktion  $A : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  heißt **Abstraktionsfunktion**, in Zeichen  $\mathcal{S}_2 \leq_A \mathcal{S}_1$ , falls  $A$  additiv und surjektiv ist und die (lokale) Korrektheitsbedingung

$$\forall n \in \mathbf{N}. A \circ \llbracket n \rrbracket_1 \sqsubseteq \llbracket n \rrbracket_2 \circ A$$

erfüllt.

2. Die Funktion  $A^a : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$  definiert durch

$$\forall c \in \mathcal{C}_2. A^a(c) =_{df} \bigsqcup \{c' \mid A(c') = c\}$$

heißt **adjungierte** (oder **Konkretisierungs-**) **funktion** zu  $A$ .



# Anmerkungen zu Abstraktion/Konkretisierung

- **Additivität** ist eine wesentliche Anforderung an eine abstrakte Interpretation. Die meisten der folgenden Ergebnisse gelten nur unter dieser Voraussetzung.
- **Surjektivität** ist keine wesentliche Voraussetzung, erleichtert aber die formale Argumentation.
- Paare aus **Abstraktions- und Konkretisierungsfunktion**  $(A, A^a)$  sind **Paare adjungierter Funktionen** im Sinne von Cousot und Cousot (POPL'77) (ebenso in Kapitel 8 die Paare aus Datenfluss- und reversen Datenflussanalysefunktionen).
- Die Konkretisierungsfunktion  $A^a$  ist monoton, i.a. aber nicht additiv.
- Mit den Bezeichnungen aus Kap. 15.2 entsprechen sich  $\alpha$  und  $A$  und  $\gamma$  und  $A^a$ .

# Isomorphie abstrakter Semantiken

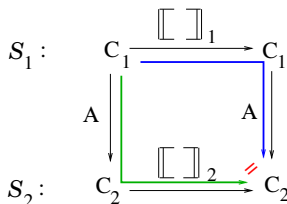
## Definition 15.7.5 (Isomorphie)

Seien  $\mathcal{S}_1 = (\llbracket \_ \rrbracket_1, \mathcal{C}_1)$  und  $\mathcal{S}_2 = (\llbracket \_ \rrbracket_2, \mathcal{C}_2)$  zwei abstrakte Semantiken.

$\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_2$  heißen **isomorph**, in Zeichen  $\mathcal{S}_1 \approx_A \mathcal{S}_2$  oder  $\mathcal{S}_1 \approx \mathcal{S}_2$ , wenn es eine additive und bijektive Abstraktionsfunktion  $A : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  gibt, so dass für alle  $G \in \mathbf{FG}$  gilt:

$$A \circ \llbracket G \rrbracket_1 = \llbracket G \rrbracket_2 \circ A$$

Veranschaulichung:



# Beobachtungsniveau und Beobachtung

## Definition 15.7.6 (Beobachtungsniveau)

Sei  $\mathcal{S}$  eine abstrakte Semantik,  $\Omega$  (' $\Omega$ ' für Beobachtung) ein vollständiger Halbverband und  $A : \mathcal{C} \rightarrow \Omega$  eine additive und surjektive Funktion.

Dann induziert  $\mathcal{S}$  ein **Semantikfunktional** oder **Verhalten**  $\llbracket \cdot \rrbracket_A : \mathbf{FG} \rightarrow (\Omega \rightarrow \Omega)$  auf  $\Omega$  durch

$$\forall G \in \mathbf{FG}. \llbracket G \rrbracket_A =_{df} A \circ \llbracket G \rrbracket \circ A^a$$

Wir bezeichnen diese Situation mit  $\mathcal{S} \rightarrow_A \Omega$  und nennen  $\Omega$  ein **Beobachtungsniveau**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## Definition 15.7.7 (Modell)

Sei  $\Omega$  ein Beobachtungsniveau und  $\mathcal{S}$  eine abstrakte Semantik mit  $\mathcal{S} \rightarrow_A \Omega$ .

Dann heißt das Paar  $(\mathcal{S}, A)$  ein **Modell** von  $\Omega$ .

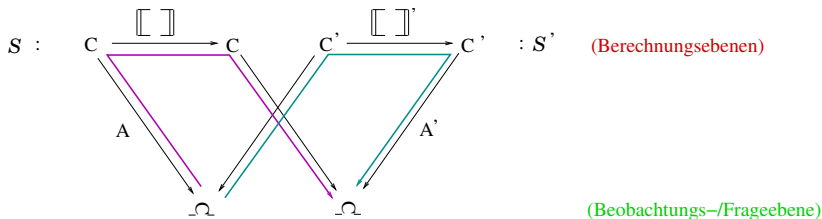
# Beobachtungsäquivalenz

## Definition 15.7.8 (Beobachtungsäquivalenz)

Seien  $(S, A)$  und  $(S', A')$  zwei Modelle von  $\Omega$ .

Dann heißen  $(S, A)$  und  $(S', A')$   $\Omega$ -äquivalent (oder **beobachtungsäquivalent** für  $\Omega$ ), in Zeichen  $(S, A) \approx_\Omega (S', A')$  gdw sie dasselbe Verhalten auf  $\Omega$  induzieren, d.h. gdw  $\llbracket \cdot \rrbracket_A = \llbracket \cdot \rrbracket_{A'}$ .

Veranschaulichung:



# Eigenschaften der Relation $\approx_\Omega$

## Lemma 15.7.9 (Äquivalenzrelation)

Die Relation  $\approx_\Omega$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Modelle von  $\Omega$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## Definition 15.7.10 (Verbandshüllen)

Sei  $\mathcal{S}_2 \leq_{A_1} \mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_2 \rightarrow_{A_2} \Omega$ . Dann definieren wir:

1.  $RI(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega) =_{df} \{c \in \mathcal{C}_2 \mid \exists G \in \mathbf{FG} \exists c' \in \Omega. c = A_1 \circ \llbracket G \rrbracket_1 \circ A_1^a \circ A_2^a\}(c')\}$
2.  $RL(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega)$  bezeichnet die vollständige Halbverbandshülle von  $RI(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega)$  in  $\mathcal{C}_2$ .
3.  $RS(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega) =_{df} (\llbracket \cdot \rrbracket, RL(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega))$ , wobei  $\llbracket \cdot \rrbracket$  folgendermaßen definiert ist:

$$\forall G \in \mathbf{FG}. \llbracket G \rrbracket =_{df}$$

$$\begin{cases} \llbracket G \rrbracket_2 \mid_{RL(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega)} & \text{falls } RL(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega) \\ \perp & \text{abgeschlossen ist unter } \llbracket \cdot \rrbracket_2 \\ & \text{sonst} \end{cases}$$

## Definition 15.7.11 (Lokale Optimalität)

Sei  $\mathcal{S}_2 \leq_{A_1} \mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{S}_2 \rightarrow_{A_2} \Omega$ . Dann heißt  $\mathcal{S}_2$  **lokal optimal** für  $\mathcal{S}_1$  und  $A$  gdw für alle  $n \in \mathbf{N}$  gilt:

$$A_1 \circ \llbracket n \rrbracket_1 \circ A_1^a = \llbracket n \rrbracket_2$$



# Voll abstrakte Modelle

## Definition 15.7.12 (Voll abstrakte Modelle)

Seien  $\mathcal{S}_1$ ,  $\Omega$  und  $A$  mit  $\mathcal{S}_1 \rightarrow_A \Omega$ .

Ein Paar  $(\mathcal{S}_2, A_2)$  mit  $\mathcal{S}_2 \rightarrow_A \Omega$  heißt **voll abstraktes Modell** für  $\mathcal{S}_1$  bezüglich  $\Omega$  gdw eine Abstraktionsfunktion  $A_1$  mit  $\mathcal{S}_2 \leq_{A_1} \mathcal{S}_1$  existiert, die folgende 4 Eigenschaften erfüllt:

1.  $A = A_2 \circ A_1$
2.  $\mathcal{S}_2 = RS(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega)$
3.  $\mathcal{S}_2$  ist lokal optimal für  $\mathcal{S}_1$  und  $A_1$
4.  $\forall c, c' \in RI(\mathcal{S}_1, ID, \mathcal{S}_1, A, \Omega). A_1(c) = A_1(c') \iff \forall G \in \mathbf{LFG}. A \circ \llbracket G \rrbracket_1(c) = A \circ \llbracket G \rrbracket_1(c')$ , wobei  $ID$  die Identität auf dem semantischen Bereich von  $\mathcal{S}_1$  ist.

Wir bezeichnen die Menge aller voll abstrakten Modelle für  $\mathcal{S}_1$ ,  $\Omega$  und  $A$ , die in Beziehung  $\mathcal{S}_1 \rightarrow_A \Omega$  stehen, mit  $\Phi(\mathcal{S}_1, A, \Omega)$ .

# Existenz und Eindeutigkeit

## Theorem 15.7.13 (Existenz und Eindeutigkeit)

Seien  $\mathcal{S}_1$ ,  $\Omega$  und  $A$  mit  $\mathcal{S}_1 \rightarrow_A \Omega$ .

Dann gibt es ein voll abstraktes Modell  $(\mathcal{S}_2, A_2)$  für  $\mathcal{S}_1$  bezüglich  $\Omega$  mit folgender Eindeutigkeitseigenschaft:

$$\Phi(\mathcal{S}_1, A, \Omega) = \{(\mathcal{S}'_2, A'_2) \mid \exists A'. \mathcal{S}_2 \approx_{A'} \mathcal{S}'_2 \wedge A_2 = A'_2 \circ A'\}$$

# Voll abstrakt ist 'gut genug'

## Theorem 15.7.14 (Abschneidetheorem)

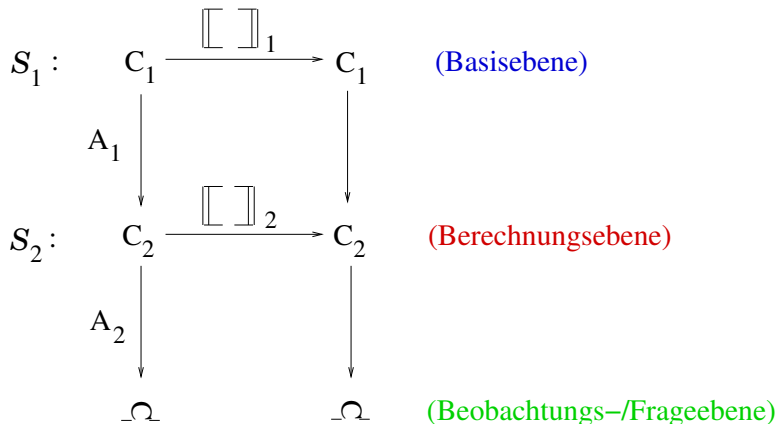
Sei  $(\mathcal{S}_2, A_2) \in \Phi(\mathcal{S}_1, A_2 \circ A_1, \Omega)$  mit  $\mathcal{S}_2 \leq_{A_1} \mathcal{S}_1$ . Dann gilt:

$$\forall G \in \mathbf{FG}. A_1 \circ \llbracket G \rrbracket_1 \circ A_1^a = \llbracket G \rrbracket_2$$

Insbesondere gilt weiters:

$$(\mathcal{S}_1, A_2 \circ A_1) \approx_{\Omega} (\mathcal{S}_2, A_2)$$

# Veranschaulichung



# Äquivalenz

## Theorem 15.7.15 (Äquivalenz)

Seien  $(\mathcal{S}, A)$  und  $(\mathcal{S}', A')$  zwei Modelle von  $\Omega$ . Dann gilt:

$$(\mathcal{S}, A) \approx_{\Omega} (\mathcal{S}', A') \iff \Phi(\mathcal{S}, A, \Omega) = \Phi(\mathcal{S}', A', \Omega)$$

**Intuitiv:** Zusammen mit dem Existenz- und Eindeigkeitstheorem 15.5.12 und dem Abschneidetheorem 15.5.13 liefert das Äquivalenztheorem 15.5.14, dass voll abstrakte Modelle (bis auf Isomorphie) die 'abstraktesten' Repräsentanten ihrer Beobachtungsäquivalenzklasse sind.

# Interpretation und Folgerung (1)

Zu vorgegebenem Beobachtungsniveau  $\Omega$  und Modell  $(\mathcal{S}, A)$  von  $\Omega$  gibt es ein

- ▶ beobachtungsäquivalentes 'abstraktestes' Berechnungsniveau.

Dieses 'abstrakteste' Berechnungsniveau ist das bis auf Isomorphie

- ▶ eindeutig bestimmte voll abstrakte Modell.

Das voll abstrakte Modell ist das gesuchte

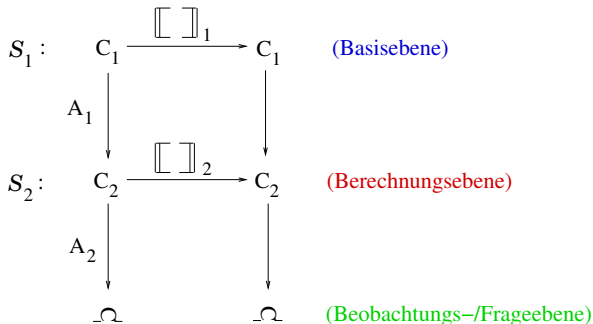
- ▶ korrekte, vollständige und optimale Modell.

# Interpretation und Folgerung (2)

Das voll abstrakte Modell liegt hierarchisch eingebettet innerhalb des

– 3-stufigen Modells.

In diesem Sinn ist das 3-stufige Modell hinreichend allgemein für den nicht auf Hierarchien abstrakter Interpretationen beschränkten Begriff der Beobachtungsäquivalenz.



# Kapitel 15.8

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11





Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (1)

-  Samson Abramsky, Chris Hankin. *An Introduction to Abstract Interpretation*. In Abstract Interpretation of Declarative Languages, Samson Abramsky, Chris Hankin (Hrsg.), Prentice Hall, 63-102, 1987.
-  Patrick Cousot. *Methods and Logics for Proving Programs*. In Handbook of Theoretical Computer Science, Jan van Leeuwen (Hrsg.), Elsevier Science Publishers B. V., Chapter 15, 841-993, 1990.
-  Patrick Cousot. *Abstract Interpretation*. ACM Computing Surveys 28(2):324-328, 1996.
-  Patrick Cousot. *Refining Model-Checking by Abstract Interpretation*. Automated Software Engineering 6(1):69-95, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (2)



Patrick Cousot. *Design of Syntactic Program Transformations by Abstract Interpretation of Semantic Transformations*. In Proceedings of the 17th International Conference on Logic Programming (ICLP 2001), Springer-V., LNCS 2237, 4-5, 2001.



Patrick Cousot. *The Verification Grand Challenge and Abstract Interpretation*. In Proceedings of Verified Software: Theories, Tools, Experiments (VSTTE 2005), Springer-V., LNCS 4171, 189-201, 2005.



Patrick Cousot. *Verification by Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 4th International Conference on Verification, Model-Checking, Abstract Interpretation (VMCAI 2003), Springer-V., LNCS 2575, 20-24, 2003.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (3)



Patrick Cousot. *Verification by Abstract Interpretation*. In *Verification: Theory and Practice, Essays dedicated to Zohar Manna on the Occasion of His 64th Birthday*. Springer-V., LNCS 2772, 243-268, 2003.



Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Abstract Interpretation: A Unified Lattice Model for Static Analysis of Programs by Construction or Approximation of Fixpoints*. In *Conference Record of the 4th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77)*, 238-252, 1977.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (4)

-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Analysis Frameworks*. In Conference Record of the 6th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'79), 269-282, 1979.
-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Abstract Interpretation Frameworks*. Journal of Logic and Computation 2(4):511-547, 1992.
-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Transformation Frameworks by Abstract Interpretation*. In Conference Record of the 29th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2002), 178-190, 2002.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (5)



Patrick Cousot, Radhia Cousot. *A Gentle Introduction to Formal Verification of Computer Systems by Abstract Interpretation*. In Logics and Languages for Reliability and Security. NATO Science for Peace and Security - D; Information and Communication Security, Vol. 25, IOS Press, 2010. ISBN 978-1-60750-099-5.



Patrick Cousot, Radhia Cousot, Laurent Mauborgne. *Theories, Solvers and Static Analysis by Abstract Interpretation*. Journal of the ACM 59(6), Article 31, 56 Seiten, 2012.



Patrick Cousot, Michael Monerau. *Probabilistic Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 21st Symposium on Programming (ESOP 2012), Springer-V., LNCS 7211, 169-193, 2012.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (6)

-  Nevin Heintze, Joxan Jaffar, Răzvan Voicu. *A Framework for Combining Analysis and Verification*. In Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000), 26-39, 2000.
-  Neil D. Jones, Flemming Nielson. *Abstract Interpretation: A Semantics-based Tool for Program Analysis*. In Handbook of Logic in Computer Science, Volume 4, Oxford University Press, 1995.
-  Kim Marriot. *Frameworks for Abstract Interpretation*. Acta Informatica 30:103-129, 1993.
-  Flemming Nielson. *A Bibliography on Abstract Interpretations*. ACM SIGPLAN Notices 21:31-38, 1986.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (7)

-  Flemming Nielson. *A Bibliography on Abstract Interpretation*. EATCS Bulletin 28:42-52, 1986.
-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson, Chris Hankin. *Principles of Program Analysis*. 2nd edition, Springer-V., 2005. (Chapter 1.5, Abstract Interpretation; Chapter 4, Abstract Interpretation)
-  Bernhard Steffen. *Optimal Run Time Optimization – Proved by a New Look at Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 2nd Joint International Conference on the Theory and Practice of Software Development (TAPSOFT'87), Springer-V., LNCS 249, 52-68, 1987.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (8)



Bernhard Steffen. *Optimal Data Flow Analysis via Observational Equivalence*. In Proceedings of the 14th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'89), Springer-V., LNCS 379, 492-502, 1989.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Kapitel 16

## Modellprüfung und Datenflussanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 16.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Motivation

...das Grundproblem der Modellprüfung (engl. model-checking).

Gegeben:

- Ein Modell  $\mathcal{M}$
- Eine Eigenschaft  $\mathcal{E}$  in Form einer Formel  $\phi$

Modellprüfungsfrage:

- Ist  $\mathcal{M}$  ein Modell für Eigenschaft  $\mathcal{E}$ , erfüllt  $\mathcal{M}$  Eigenschaft  $\phi$ ?

$$\mathcal{M} \models \phi$$

# Kapitel 16.2

## Modellprüfer, Modellprüfung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Modellprüfer und Modellprüfung

**Modellprüfer:** Eine Methode, ein Werkzeug zur Beantwortung von Modellprüfungsfragen.

**Modellprüfung:** Ansetzen eines Modellprüfers MP auf ein Paar  $\mathcal{M}, \phi$  aus Modell  $\mathcal{M}$  und Formel  $\phi$ :

- $\mathcal{M} \models_{MP} \phi$  wird **nachgewiesen**:  $\mathcal{M}$  ist bezüglich  $\phi$  **verifiziert** (oder  $\phi$  ist für  $\mathcal{M}$  **verifiziert**).
- $\mathcal{M} \models_{MP} \phi$  wird **widerlegt**:  $\mathcal{M}$  ist bezüglich  $\phi$  **falsifiziert** (oder  $\phi$  ist für  $\mathcal{M}$  **falsifiziert**).

**Wünschenswert:** Ausgabe eines (minimalen) Gegenbeispiels, das die Verletzung der Formel zeigt (**CEGAR** ('counter-example-guided abstraction/refinement'-Ansatz)).

- $\mathcal{M} \models_{MP} \phi$  wird **weder noch nachgewiesen oder widerlegt**: Modellprüfer ist **unvollständig** für Modell- und Formelsprache.

# Kapitel 16.3

## Modell- und Formelsprachen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

...typischerweise:

- Transitionssysteme (kantenbenannt)
- Kripke-Strukturen (knotenbenannt)

Spezielle Ausprägungen:

- Automaten
- Flussgraphen (kanntenbenannt: Transitionssystem;  
knotenbenannt: Kripke-Struktur)
- Zustandsgraphen (z.B. Programmzustandsgraphen)
- ...

...können sein:

- endlich: Endliche Modellprüfung
- unendlich: Unendliche Modellprüfung

Herausforderung für Modellprüferbau und Modellprüfung:

...die Meisterung der Explosion des Zustandsraums, eines notorischen (auch im Fall endlicher Modellprüfung schwierig zu handhabenden) Problems, kurz:

- Zustandsraumexplosion



# Formelsprachen

...sind **typischerweise**:

- Temporale, modale Logiken (Linearzeitlogik (engl. linear time logics), Verzweigungszeitlogik (engl. branching time logics))
  - LTL, CTL, CTL\*
  - $\mu$ -Kalkül
  - ...

**Herausforderung:**

...**Ausdruckskraft** und **Entscheidbarkeit**, vor allem **effiziente Entscheidbarkeit** der Formelsprache

- **ausgewogen** auszubalancieren.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Beispiel: Modaler $\mu$ -Kalkül: Syntax

...hier erweitert um sog. **Rückwärtsmodalitäten** erweitert, wobei  $\mathcal{S}$  die Knotenmenge eines Modells bezeichnet,  $\lambda$  eine Abbildung, die jedem Knoten aus  $\mathcal{S}$  eine Menge von Benennungen (aus der von  $\beta$  erzeugten Sprache) zuordnet, die von  $X$  und  $\alpha$  erzeugten Sprachen eine Variablenmenge bzw. eine Menge von Transitionsbenennungen (d.h. Kantenbenennungen) sind.

Syntax:

$$\Phi ::= tt \mid X \mid \Phi \wedge \Phi \mid \neg \Phi \mid \beta \mid [\alpha] \Phi \mid \overline{[\alpha]} \Phi \mid \nu X. \Phi$$

# Modaler $\mu$ -Kalkül: Semantik

## Semantik:

$$\llbracket tt \rrbracket e = \mathcal{S}$$

$$\llbracket X \rrbracket e = e(X)$$

$$\llbracket \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rrbracket e = \llbracket \Phi_1 \rrbracket e \wedge \llbracket \Phi_2 \rrbracket e$$

$$\llbracket \neg \Phi \rrbracket e = \mathcal{S} \setminus \llbracket \Phi \rrbracket e$$

$$\llbracket \beta \rrbracket e = \{p \in \mathcal{S} \mid \beta \in \lambda(p)\}$$

$$\llbracket [\alpha] \Phi \rrbracket e = \{p \in \mathcal{S} \mid \forall q \in Succ_\alpha. q \in \llbracket \Phi \rrbracket e\}$$

$$\llbracket [\bar{\alpha}] \Phi \rrbracket e = \{p \in \mathcal{S} \mid \forall p \in Pred_\alpha. p \in \llbracket \Phi \rrbracket e\}$$

$$\llbracket \nu X. \Phi \rrbracket e = \bigcup \{S' \subseteq \mathcal{S} \mid S' \subseteq \llbracket \Phi \rrbracket e[S'/X]\}$$

wobei  $e$  für eine **Umgebung** (oder Variablenbelegung) (engl. **environment**) steht: ' $e : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S})$ '

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Modaler $\mu$ -Kalkül: Informelle Interpretation

...der (allquantifizierten) **modalen** Operatoren:

- $\llbracket [\alpha] \Phi \rrbracket e$ : Die Menge aller Knoten  $n$ , für die gilt: Ausgewertet in Umgebung  $e$  gilt für alle  $\alpha$ -Nachfolger von  $n$  Eigenschaft  $\phi$ .
- $\llbracket [\overline{\alpha}] \Phi \rrbracket e$ : Die Menge aller Knoten  $n$ , für die gilt: Ausgewertet in Umgebung  $e$  gilt für alle  $\alpha$ -Vorgänger von  $n$  Eigenschaft  $\phi$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Modaler $\mu$ -Kalkül: Abgeleitete Operatoren (1)

## Abgeleitete Operatoren:

$$ff = \neg tt$$

$$\Phi_1 \vee \Phi_2 = \neg(\neg\Phi_1 \wedge \neg\Phi_2)$$

$$\langle\alpha\rangle\Phi = \neg[\alpha](\neg\Phi)$$

$$\overline{\langle\alpha\rangle}\Phi = \neg[\overline{\alpha}](\neg\Phi)$$

$$\mu X. \Phi = \nu X. \neg(\Phi[\neg X/X])$$

$$\Phi \succ \Psi = \neg\Phi \vee \Psi$$

...informelle Interpretation der (existentiell quantifizierten) **modalen** Operatoren:

- $\llbracket \langle\alpha\rangle \Phi \rrbracket e$  ( $\llbracket \overline{\langle\alpha\rangle} \Phi \rrbracket e$ ): Die Menge aller Knoten  $n$ , für die gilt: Ausgewertet in Umgebung  $e$  **gibt es einen  $\alpha$ -Nachfolger** ( **$\alpha$ -Vorgänger**) von  $n$ , für den Eigenschaft  $\phi$  gilt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Modaler $\mu$ -Kalkül: Abgeleitete Operatoren (2)

Höher-abstrakte abgeleitete Operatoren:

$$\mathbf{AG} \Phi = \nu X. (\Phi \wedge [.]X)$$

$$\Phi \mathbf{U} \Psi = \nu X. (\Psi \vee (\Phi \wedge [.]X))$$

$$\overline{\mathbf{AG}} \Phi = \nu X. (\Phi \wedge \overline{[.]X})$$

$$\Phi \overline{\mathbf{U}} \Psi = \nu X. (\Psi \vee (\Phi \wedge \overline{[.]X}))$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Modaler $\mu$ -Kalkül: Informelle Interpretation

...der höher-abstrakten ableiteten modalen Operatoren:

- **AG**  $\phi$ : Eigenschaft  $\phi$  gilt in der Zukunft immer und überall (engl. *always generally (forward)*), d.h. jeder von einem Knoten (einschließlich des Knotens selbst) vorwärts erreichbare Knoten erfüllt  $\phi$ .
- **$\overline{\text{AG}}$**   $\phi$ : Eigenschaft  $\phi$  hat in der Vergangenheit immer und überall gegolten (engl. *always generally (backward)*), d.h. jeder von einem Knoten (einschließlich des Knotens selbst) rückwärts erreichbare Knoten erfüllt  $\phi$ .
- $\phi$  **U**  $\psi$ :  $\phi$  gilt vorwärts bis  $\psi$  eintritt (engl. *until (forward)*).
- $\phi$   **$\overline{\text{U}}$**   $\psi$ :  $\phi$  gilt rückwärts bis  $\psi$  eintritt (engl. *until (backward)*).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Modaler $\mu$ -Kalkül: Zwei Ausprägungen

...des **bis**-Operators als sog.:

- **starkes bis** (engl. **strong until**):  $\Phi$  gilt bis schließlich (engl. **eventually**) (d.h. in jedem Fall)  $\Psi$  eintritt.
- **schwaches bis** (engl. **weak until**):  $\Phi$  gilt bis  $\Psi$  eintritt (möglicherweise nie; in diesem Fall gilt  $\Phi$  für alle Zeit).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Übungsaufgabe

1. Sind die Operatoren  $\mathbf{U}$  und  $\overline{\mathbf{U}}$  vorstehend im Sinne eines **starken** oder **schwachen bis** definiert?
2. Wie müssen die Semantikdefinitionen von  $\mathbf{U}$  und  $\overline{\mathbf{U}}$  geändert werden, um **bis**-Operatoren im jeweils anderen Sinn zu erhalten?

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 16.4

## Modellprüfung und DFA: Eine Analogie

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Analogie Modellprüfung – Datenflussanalyse

Datenflussanalyse (als Abbildung verstanden):

DFA-Algorithmus für Eigenschaft  $\phi$  :

Programm  $\rightarrow$  Menge der  $\phi$  erfüllenden Programmpunkte

Modellprüfung (als Abbildung verstanden):

Modellprüfer :

Formel  $\times$  Modell  $\rightarrow$  Menge der die Formel erfüllenden Zustände

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Informell

...und holzschnittartig:

Ein DFA-Algorithmus für  $\phi$  ist ein

- bezüglich  $\phi$  partiell ausgewerteter (oder bezüglich  $\phi$  spezialisierter) Modellprüfer!

Umgekehrt:

Ein Modellprüfer ist ein

- in einer Menge von Programmeigenschaften (d.h. ausdrückbar in der Formelsprache) parametrisierter (generischer) DFA-Algorithmus.

# Anwendung: PREE für einen Term $t$

Sicherheit (Notwendigkeit der Berechnung):

$$NOTW =_{df} (\neg(Mod \vee end)) \text{ U } Used$$

Frühestheit (Wert kann nicht früher bereitgestellt werden):

$$FRUEH =_{df} start \vee \neg([\cdot])(\neg(Mod \vee start)) \text{ U } (NOTW \wedge \neg Mod)$$

Berechnungspunkte:

$$BP =_{df} NOTW \wedge FRUEH$$

PREE-Optimierungstransformation  $OT_{PREE}$ :

1. Deklariere eine frische Hilfsvariable  $h_t$  für  $t$ .
2. Initialisiere  $h_t$  an allen Punkten in  $BP$  mit  $h_t := t$ .
3. Ersetze alle Vorkommen von  $t$  im Programm durch  $h_t$ .

# Korrektheit und Optimalität

## Theorem 16.4.1 (Korrektheit und Optimalität)

$OT_{PREE}$  ist **korrekt** (d.h. semantikerhaltend) und **optimal** (d.h. mindestens so gut wie jede andere korrekte Platzierung der Berechnungen von  $t$ ).

Beachte:  $OT_{PREE}$  entspricht der *busy code motion*-Transformation für die **Elimination** partiell redundanter Berechnungen (s. LVA 185.A04 Optimierende Compiler, Kapitel 7; auch zur formalen Definition von 'korrekt' und 'optimal').

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

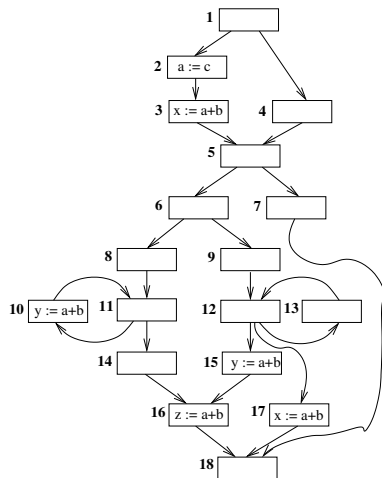
Kap. 12

Kap. 13

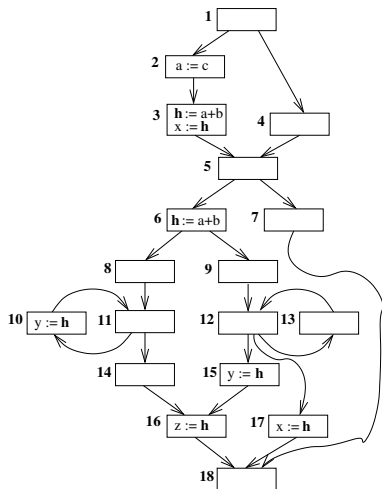
Kap. 14

# Beispiel: Anwendung von $OT_{PREE}$

Ausgangsprogramm



$OT_{PREE}$ -optimiertes Programm



Bem.:  $OT_{PREE}$  nimmt kanten-, nicht knotenben. Graphen an.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 16.5

## Zusammenfassung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Zusammenfassung (1)

...die vorgestellte Charakterisierung des Zusammenhangs von DFA und Modellprüfung und die PREE-Anwendung geht zurück auf:

- Bernhard Steffen. Data Flow Analysis as Model Checking. In Proceedings of the International Conference on Theoretical Aspects of Computer Software (TACS'91), Springer-V., LNCS 526, 346-365, 1991.
- Bernhard Steffen. Generating Data Flow Analysis Algorithms from Modal Specifications. International Journal on Science of Computer Programming 21:115-139, 1993.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Zusammenfassung (2)

...ist aufgegriffen worden von:

- David A. Schmidt. **Data Flow is Model Checking of Abstract Interpretations**. In Conference Record of the 25th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'98), 38-48, 1998.

...und hat in weiterer Folge geführt zu:

- David A. Schmidt, Bernhard Steffen. **Program Analysis as Model Checking of Abstract Interpretations**. In Proceedings of the 5th Static Analysis Symposium (SAS'98), Springer-V., LNCS 1503, 351-380, 1998.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 16.6

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (1)



Christel Baier, Joost-Pieter Katoen. *Principles of Model Checking*. MIT Press, 2008.



Béatrice Bérard, Michel Bidoit, Alain Finkel, François Laroussinie, Antoine Peit, Laure Petrucci, Philippe Schnobelen with Pierre McKenzie. *Systems and Software Verification: Model-Checking Techniques and Tools*. Springer-V., 2001.



Francesco Buccafurri, Thomas Eiter, Georg Gottlob, Nicola Leone. *Enhancing Model Checking in Verification by AI Techniques*. Artificial Intelligence 112(1-2):57-104, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/16

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (2)

-  Edmund M. Clarke. *The Birth of Model Checking*. In *25 Years of Model Checking*. Orna Grumberg, Helmut Veith (Hrsg.), Springer-V., LNCS 5000, 1-26, 2008.
-  Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, Doron Peled. *Model Checking*. MIT Press, 2001.
-  Edmund M. Clarke, H. Schlingloff. *Model Checking*. In *Handbook of Automated Reasoning*, John Alan Robinson, Andrei Voronkov (Hrsg.), Vol. II, Elsevier, 1635-1790, 2000.
-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Temporal Abstract Interpretation*. In *Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000)*, 12-25, 2000.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV






Kap. 11

Kap. 12




Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (3)

-  E. Allen Emerson. *Temporal and Modal Logic*. In Handbook of Theoretical Computer Science, Jan van Leeuwen (Hrsg.), Elsevier, 995-1072, 1990.
-  Orna Grumberg, Helmut Veith (Hrsg.). *25 Years of Model Checking: History, Achievements, Perspectives*. Springer-V., LNCS 5000, 2008.
-  George E. Hughes, Max J. Cresswell. *An Introduction to Modal Logic*. Methuan, 1968.
-  George E. Hughes, Max J. Cresswell. *A Companion to Modal Logic*. Methuan, 1986.
-  George E. Hughes, Max J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (4)




-  Fred Kröger, Stephan Merz. *Temporal Logic and State Systems*. Springer-V., 2008. (Chapter 3, Extensions of Linear Time Logic; Chapter 5, First-Order Linear Time Logic; Chapter 10, Other Temporal Logics; Chapter 11, System Verification by Model Checking)
-  Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis: An Integrated, Hands-On Approach*. Springer-V., 2009.
-  Robert Lover. *Elementary Logic for Software Development*. Springer-V., 2008. (Chapter 20.2.2, Temporal, Modal, and Dynamic Logics)

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (5)



-  Markus Müller-Olm, David A. Schmidt, Bernhard Steffen. *Model-Checking: A Tutorial Introduction*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 330-354, 1999.
-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Formal Methods: An Appetizer*. Springer-V., 2019. (Chapter 6, Model Checking)
-  Doron A. Peled. *Software Reliability Methods*. Springer-V., 2001.
-  Dirk Richter. *Programmanalysen zur Verbesserung der Softwaremodellprüfung*. Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, Deutschland, 2012.



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (6)

-  David A. Schmidt. *Data Flow Analysis is Model Checking of Abstract Interpretations*. In Conference Record of the 25th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'98), 38-48, 1998.
-  David A. Schmidt, Bernhard Steffen. *Program Analysis as Model Checking of Abstract Interpretations*. In Proceedings of the 5th Static Analysis Symposium (SAS'98), Springer-V., LNCS 1503, 351-380, 1998.
-  Bernhard Steffen. *Data Flow Analysis as Model Checking*. In Proceedings of the International Conference on Theoretical Aspects of Computer Software (TACS'91), Springer-V., LNCS 526, 346-365, 1991.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (7)

-  Bernhard Steffen. *Generating Data Flow Analysis Algorithms from Modal Specifications*. International Journal on Science of Computer Programming 21:115-139, 1993.
-  Bernhard Steffen. *Property-Oriented Expansion*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 22-41, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 17

## Modellprüfung und Abstrakte Interpretation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 17.1

## Eine Symbiose

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Zustandsexplosionsproblem

...zentrale Herausforderung für Modellprüfung in praktischen Anwendungen:

- Bändigung des Zustandsexplosionsproblems.

Beachte: Die Zahl der Zustände im Zustandsraum wächst

- exponentiell in der Zahl paralleler/nebenläufiger Komponenten.
- exponentiell in der Zahl von Fallunterscheidungen schleifenfreier (!) sequentieller Programme.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vielfältige Ansätze

...zur Zählung des Zustandsexplosionsproblems:

- Reduktionstechniken basierend auf Prozessäquivalenzen, z.B. Bouajjani et al., 1990; Graf et al., 1996.
- Symbolische Modellprüfungstechniken, z.B. McMillan, 1993.
- On-the-fly Techniken, z.B. Jard et al., 1992.
- Lokale Modellprüfungstechniken, z.B. Stirling et al., 1991.
- Partielle Ordnungs-Techniken, z.B. Godefroid, 1996; Peled, 1993; Valmari, 1992.
- Kompositionelle Techniken, Clarke et al., 1989; Santone, 2002.
- Abstraktions-Techniken, Barbuti et al., 1999; Clarke et al., 1994.
- ...

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# In unserem Zusammenhang

...besonders **interessant**:

- Dirk Richter. **Programmanalysen zur Verbesserung der Softwaremodellprüfung**. Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, Deutschland, 2012.

zur **Verknüpfung** und **Verzahnung** von **Programmanalyse** und **Modellprüfung**, speziell durch **Vorschaltung**

- **DFA-basierter Optimierungen** zur **Modellverkleinerung**

und damit zur

- **Effizienzverbesserung** anschließender **Modellprüfungen**.

# Kapitel 17.2

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11




Kap. 12

Kap. 13




Kap. 14



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (1)

-  Roberto Baldoni, Emilio Coppa, Daniele Cono D'Elia, Camil Demetrescu, Irene Finocchi. *A Survey of Symbolic Execution Techniques*. ACM Computing Surveys 51(3):50:1-39, 2018.
-  Roberto Barbuti, Nicoletta De Francesco, Antonella Santone, Gigliola Vaglini. *Selective Mu-Calculus and Formula-based Equivalence of Transition Systems*. Journal of Computer and System Sciences 59(3):537-556, 1999.
-  Ahmed Bouajjani, Jean-Claude Fernandez, Nicolas Halbwachs. *Minimal Model Generation*. In Proceedings of the 2nd International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'90), Springer-V., LNCS 531, 197-203, 1990.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (2)

-  J.-H. Chow, W. L. Harrison. *State Space Reduction in Abstract Interpretation of Parallel Programs*. In Proceedings of the International Conference on Computer Languages (ICCL'94), 277-288, 1994.
-  Edmund M. Clarke, Thomas A. Henzinger, Helmut Veith, Roderick Bloem (Hrsg.). *Handbook of Model Checking*. Springer-V., 2018.
-  Edmund M. Clarke, David E. Long, Kenneth L. MacMillan. *Compositional Model Checking*. In Proceedings of the 4th Annual Symposium on Logic in Computer Science (LICS'89), IEEE Computer Society, 353-362, 1989.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (3)

-  Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, David E. Long. *Model Checking and Abstraction*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 16(5):1512-1542, 1994.
-  Edmund M. Clarke, Qinsi Wang: *2<sup>5</sup> Years of Model Checking*. Ershov Memorial Conference 2014, 26-40, 2014.
-  Patrice Godefroid. *Between Testing and Verification: Dynamic Software Model Checking*. Dependable Software Systems Engineering 2016, NATO Science for Peace and Security Series - D: Information and Communication Security 45, IOS Press, 99-116, 2016.
-  Patrice Godefroid (Hrsg). *Partial-Order Methods for the Verification of Concurrent Systems – An Approach to the State-Explosion Problem*. Springer-V., LNCS 1032, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV


Kap. 11

Kap. 12





Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (4)

-  Patrice Godefroid, Koushik Sen. *Combining Model Checking and Testing*. In *Handbook of Model Checking*, Edmund M. Clarke, Thomas A. Henzinger, Helmut Veith, Roderick Bloem (Hrsg.), 613-649, 2018.
-  Susanne Graf, Bernhard Steffen, Gerald Lüttgen. *Compositional Minimization of Finite State Systems using Interface Specifications*. *Formal Aspects of Computing* 8(5):607-616, 1996.
-  Claude Jard, Thierry Jéron. *Bounded-memory Algorithms for Verification On-the-fly*. In *Proceedings of the 3rd International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'91)*, Springer-V., LNCS 575, 192-202, 1992.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (5)

-  Kenneth L. MacMillan. *Symbolic Model Checking*. Kluwer, 1993.
-  Doron Peled. *All from One, One for All: On Model Checking Using Representatives*. In Proceedings of the 5th International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'93), Springer-V., LNCS 697, 409-423, 1993.
-  Dirk Richter. *Programmanalysen zur Verbesserung der Softwaremodellprüfung*. Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, Deutschland, 2012.
-  Antonella Santone. *Automatic Verification of Concurrent Systems Using a Formula-based Compositional Approach*. Acta Informatica 38(8):531-564, 2002.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/16

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (6)



Colin Stirling, David Walker. *Local Model Checking in the Modal Mu-Calculus*. Theoretical Computer Science 89(1):161-177, 1991.



Antti Valmari. *A Stubborn Attack on State Explosion*. Formal Methods in System Design 1(4):297-322, 1992.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Teil VI

## Abschluss und Ausblick

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel 18

## Resümee, Perspektiven

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Kapitel 18.1

## Rückschau, Vorschau

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Analyse und Verifikation (1)

...‘**geschafft**’: Ausdrucksstarke, wohlfundierte, in Werkzeuge umgesetzte, vielfach erprobte, bewährte und etablierte

- Theorie(n) für Analyse und Verifikation

mit einer Vielzahl von **Ausprägungen**, darunter:

- Axiomatische Verifikation
- Datenflussanalyse
- Abstrakte Interpretation
- Modellprüfung
- Theorembeweiser
- Symbolische Analyse
- Konkrolische Analyse
- ...

# Analyse und Verifikation (2)

...und umfangreichen und vielfältigen [Erfahrungsberichten](#), z.B.:

- Al Bessey, Ken Block, Ben Chelf, Andy Chou, Bryan Fulton, Seth Hallem, Charles Henri-Gros, Asya Kamsky, Scott McPeak, Dawson Engler. [A Few Billion Lines of Code Later: Using Static Analysis to Find Bugs in the Real World](#). Communications of the ACM 53(2):66-75, 2010.
- Cristian Cadar, Koushik Sen. [Symbolic Execution for Software Testing: Three Decades Later](#). Communications of the ACM 56(2):82-90, 2013.
- Caitlin Sadowski, Edward Aftandilian, Alex Eagle, Liam Miller-Cushon, Ciera Jaspán. [Lessons from Building Static Analysis Tools at Google](#). Communications of the ACM 61(4):58-66, 2018.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Transformationen

...wünschenswert: Vergleichbar reiche, fundierte, praktikable

- Theorie(n) für Transformationen

im Hinblick auf

- Korrektheit, Vollständigkeit, Wirksamkeit, Optimalität

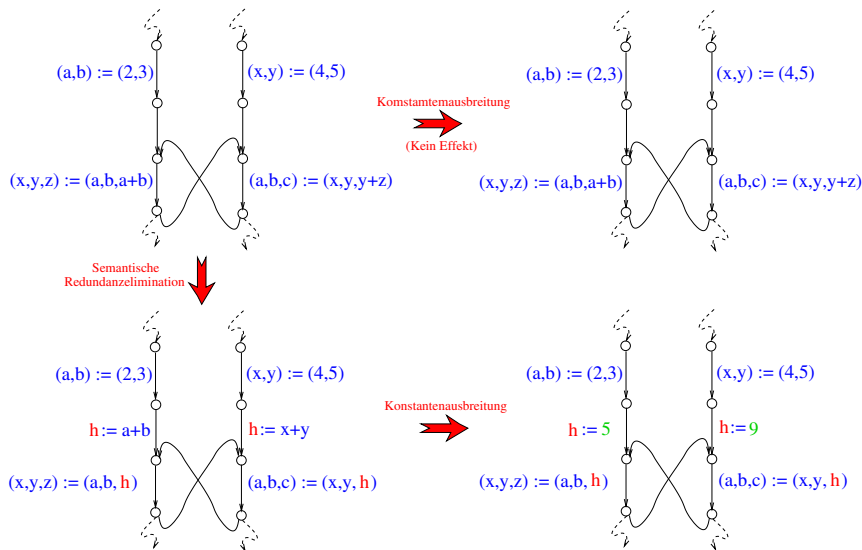
von Transformationen einschließlich Theorien und Techniken zur Evaluation mit Anwendungen insbesondere im

- Übersetzerbau (Optimierung, Parallelisierung, Portabilität, Mehrfachziele (Performanz, Speicher, Energie), Sicherheit, Schutz, Privatsphäre,...)
- Software-Technik (Modellbasierte Entwicklung und Code-Erzeugung, Refaktorisierung,...)

...und darüber hinaus.

# Illustriert anhand v. Programoptimierung (1)

...am Beispiel des Zusammenspiels von Optimierungen:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

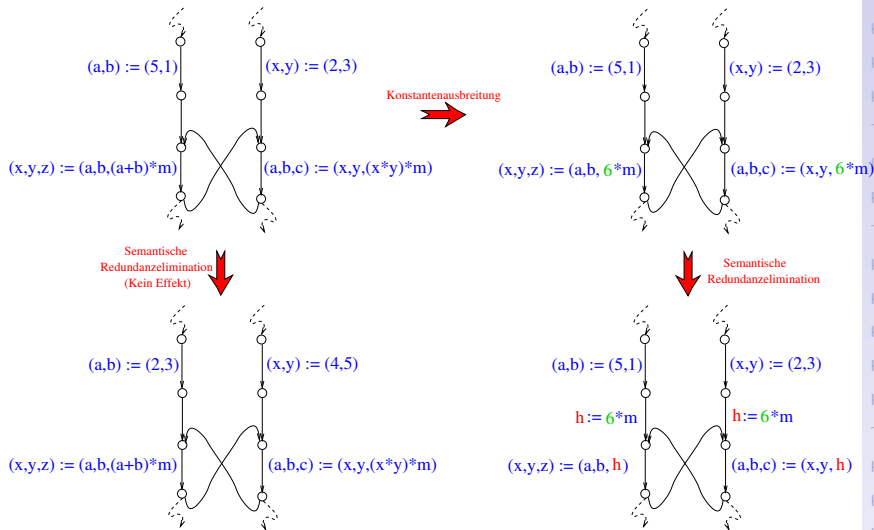
Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Illustriert anhand v. Programoptimierung (2)



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

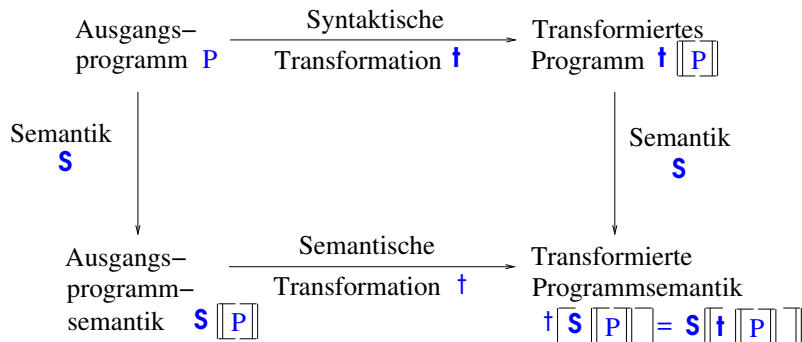
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Analyse, Verifikation und Transformation

...bewiesen (beweisbar) korrekt und vollständig/optimal in einem einheitlichen Rahmen:



Patrick und Radhia Cousot, POPL 2002

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Analyse, Verifikation, Transformation

...wichtig für Soft- und Hardware:

This software comes “without warranty of any kind, expressed or implied, including but not limited to, the implied warranties of merchantability and fitness for a particular purpose.”

Quelle: Prototypisch

“Motorola, Inc. general policy does not recommend the use of its components in life support applications where a failure or malfunction of the component may directly threaten life or injury. Per Motorola Terms and Conditions of Sale, the user of Motorola components in life support applications assumes all risk of such use and indemnifies Motorola against all damages.”

Quelle: MOTOROLA MC68020 32-BIT MICROPROCESSOR  
USER'S MANUAL

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Wichtige Anwendungsfelder (1)

...für Analyse, Verifikation, Transformation im Bereich und Umfeld von **Hard- und Software-Entwicklung**.

## Entwicklungsfelder

- Übersetzerbau
  - Optimierung (Performanz, Speicher, Energie, Parallelität, Portabilität,...)
  - Verifikation (Verifizierte, verifizierende Übersetzer)
- Software-Technik (dito Hardware-Technik)
  - Spezifikation, Generierung, Konfigurierung, Spezialisierung (Kundenanpassung), Verstehen (Refaktorisierung, Re-Entwurf, Rückentwurf, Dokumentation,...), Analyse, Validierung, Verifikation, Zertifizierung,...

...für **Prozesse und Prozesskonstrukte**

- Besonders kritisch: **System- und Infrastruktur-Software** (Betriebssysteme, Übersetzer, Laufzeitsysteme, Dateisysteme, Browser, Kommunikationsdienste,...)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Wichtige Anwendungsfelder (2)

## Anwendungsfelder

- Künstliche Intelligenz, Datenförderung und -ausbeutung, autonome Systeme, selbstorganisierende Systeme, sicherheitskritische (Echtzeit-) Systeme,...

## Querschnittsfelder

- Sicherheit, Schutz, Privatsphäre, gesetzliche Vorgaben (DSGVO, finanz-, wirtschafts-, steuerrechtl. Vorgaben),...
- ...
- Grüne Informationstechnologie

# All dies

...auf

- Programm-Ebene im Kleinen, System-Ebene im Großen
  - Systeme von Systemen
  - Hard- und Software-Systeme von Systemen
    - Verteilt (Service-orientiert, wolkig, mehrkernig, echtzeitig,...)
    - Eingebettet
    - Cyberphysikalisch
    - ...
- Spezifikations-, Modellierungs-, Programmier-, Zwischensprach- und Binärcode-Ebene.
- Statisch und dynamisch.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Zielführend und unverzichtbar

...fundierte

- formale (aber auch pragmatische) Methoden

wirksam unterstützt durch

- vollautomatische
  - Knopfdruckanalyse, -verifikation und -transformation
- halbautomatische
  - Interaktive, benutzergeleitete, systemgestützte, -unterstützte Analyse, Verifikation und Transformation
- hochskalierende

‘Denk’-Werkzeuge auch zur

- Orchestrierung u. Ordnung von Zusammenspiel/-wirkung

über Methoden- und Aufgabengrenzen hinweg (z.B. abstrakte Interpretation, axiomatische Verifikation, Modellprüfung, Theorembeweiser, Transformatoren,...)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

...eine gute und möglichst nahtlose Verbindung verschieden-(st)er Analyse- und Verifikationstechniken unter einem gemeinsamen 'Dach':



Mario Gleirscher, Simon Foster, Jim Woodcock. *New Opportunities for Integrated Formal Methods*. ACM Computing Surveys 52(6), Article 117, 36 Seiten.



Keijiro Araki, Andy Galloway, Kenji Taguchi (Hrsg.). *Proceedings of the 1st International Conference on Integrated Formal Methods*. Springer-V., 1999.



Bernhard K Aichernig, Tom Maibaum (Hrsg.). *Formal Methods at the Crossroad. From Panacea to Foundational Support*. Springer-V., 2003.

# Wichtige Konferenzen und Zeitschriften (1)

- Annual International Conference on Verification, Model-Checking, Abstract Interpretation (VMCAI) Series, Springer-V., LNCS series, seit 2000.
- Annual International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS), Springer-V., LNCS series, seit 1995.
- Annual International Conference on Computer-Aided Verification (CAV) Series, Springer-V., LNCS series, since 1989.
- Annual International Conference on Software Testing, Verification and Validation (ICST) Series, IEEE, seit 2008.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Wichtige Konferenzen und Zeitschriften (2)

- Annual **International Symposium on Formal Methods (FM)** Series, Springer-V., LNCS series, seit 1995.
- Biennial **International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods, Verification, and Validation (ISoLA)** Series, Springer-V., LNCS series, seit 2004.
- **International Journal on Software Tools for Technology Transfer (STTT)**, Springer-V, seit 1999.

...und viele mehr.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Chapter 18.2

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (1)



Uwe Abmann. *How to Uniformly Specify Program Analysis and Transformation*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 121-135, 1996.



Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, J  r  me Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Min  , Xavier Rival. *Static Analysis and Verification of Aerospace Software by Abstract Interpretation*. In Proceedings AIAA Infotech@Aerospace (AIAA I  A 2010), AIAA-2010-3385, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1-38, April 2010.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (2)



Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, J  r  me Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Min  , Xavier Rival. *Static Analysis by Abstract Interpretation of Embedded Critical Software*. ACM Software Engineering Notes 36(1):1-8, 2011.



Al Bessey, Ken Block, Ben Chelf, Andy Chou, Bryan Fulton, Seth Hallem, Charles Henri-Gros, Asya Kamsky, Scott McPeak, Dawson Engler. *A Few Billion Lines of Code Later: Using Static Analysis to Find Bugs in the Real World*. Communications of the ACM 53(2):66-75, 2010.



Cristian Cadar, Koushik Sen. *Symbolic Execution for Software Testing: Three Decades Later*. Communications of the ACM 56(2):82-90, 2013.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (3)



Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Transformation Frameworks by Abstract Interpretation*. In Conference Record of the 29th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2002), 178-190, 2002.



Chris Cummins, Pavlos Petoumenos, Zheng Wang, Hugh Leather. *End-to-end Deep Learning of Optimization Heuristics*. In Proceedings of the 26th ACM/IEEE International Conference on Parallel Architectures and Compilation Techniques (PACT 2017), 219-232, 2017.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (4)

-  Nevin Heintze, Joxan Jaffar, Răzvan Voicu. *A Framework for Combining Analysis and Verification*. In Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000), 26-39, 2000.
-  Sameer Kulkarni, John Cavazos. *Mitigating the Compiler Optimization Phase-Ordering Problem using Machine Learning*. Proceedings of the ACM International Conference on Object-oriented Programming, Systems, Languages, and Applications (OOPSLA 2012), 147-162, 2012.
-  Flemming Nielson. *Program Transformations in a Denotational Setting*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 7:359-379, 1985.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12



Kap. 13

Kap. 14/16

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (5)

-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Formal Methods: An Appetizer*. Springer-V., 2019. (Chapter 5, Language-Based Security)
-  Caitlin Sadowski, Edward Aftandilian, Alex Eagle, Liam Miller-Cushon, Ciera Jasan. *Lessons from Building Static Analysis Tools at Google*. Communications of the ACM 61(4):58-66, 2018.
-  Ashish Tiwari, Sumit Gulwani. *Static Program Analysis Using Theorem Proving*. In Proceedings of the 21st Conference on Automated Deduction (CADE-21), LNCS 4603, Springer-V., 147-166, 2007.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (6)

-  Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008. (Kapitel 105, Software Testing; Kapitel 106, Formal Methods; Kapitel 107, Verification and Validation)
-  Daniel Weise. *Static Analysis of Mega-Programs (Invited Paper)*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 300-302, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Literaturverzeichnis

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Literaturhinweise, Leseempfehlungen

.....zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium.

- ▶ I Lehrbücher
- ▶ II Handbücher
- ▶ III Sammelbände
- ▶ IV Dissertationen
- ▶ V Artikel
- ▶ VI Web-Ressourcen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11






Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# I Lehrbücher (1)

-  Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi, Jeffrey D. Ullman. *Compilers: Principles, Techniques, & Tools*. 2. Auflage, Addison-Wesley, 2007.
-  Randy Allen, Ken Kennedy. *Optimizing Compilers for Modern Architectures*. Morgan Kaufman Publishers, 2002.
-  Krzysztof R. Apt, Ernst-Rüdiger Olderog. *Programmverifikation – Sequentielle, parallele und verteilte Programme*. Springer-V., 1994.
-  Krzysztof R. Apt, Frank S. de Boer, Ernst-Rüdiger Olderog. *Verification of Sequential and Concurrent Programs*. 3. Auflage, Springer-V., 2009.
-  André Arnold, Irène Guessarian. *Mathematics for Computer Science*. Prentice Hall, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV






Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# I Lehrbücher (2)

-  Christel Baier, Joost-Pieter Katoen. *Principles of Model Checking*. MIT Press, 2008.
-  Mordechai Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science*. 2. Auflage, Springer-V., 2001.
-  Béatrice Bérard, Michel Bidoit, Alain Finkel, François Laroussinie, Antoine Peit, Laure Petrucci, Philippe Schnoebelen with Pierre McKenzie. *Systems and Software Verification: Model-Checking Techniques and Tools*. Springer-V., 2001.
-  Rudolf Berghammer. *Ordnungen, Verbände und Relationen mit Anwendungen*. Springer-V., 2012.
-  Rudolf Berghammer. *Ordnungen und Verbände: Grundlagen, Vorgehensweisen und Anwendungen*. Springer-V., 2013.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV







Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# I Lehrbücher (3)

-  Garret Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, 3. Auflage, 1967.
-  Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, Doron Peled. *Model Checking*. MIT Press, 2001.
-  Keith D. Cooper, Linda Torczon. *Engineering a Compiler*. Morgan Kaufman Publishers, 2004.
-  Peter Crawley, Robert P. Dilworth. *Algebraic Theory of Lattices*. Prentice Hall, 1973.
-  Jaco W. De Backer. *Mathematical Theory of Program Correctness*. Prentice-Hall, 1980.
-  Brian A. Davey, Hilary A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 2. Auflage, 2002.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV







Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# I Lehrbücher (4)

-  Martin Davis. *Computability and Unsolvability*. Dover Publications, 1982.
-  Gilles Dowek. *Principles of Programming Languages*. Springer-V, 2009.
-  Marcel Ern . *Einführung in die Ordnungstheorie*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, 1982.
-  Helmuth Gericke. *Theorie der Verbände*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, 1967.
-  Michael J.C. Gordon. *The Denotational Description of Programming Languages*. Springer-V., 1979.
-  George Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkhäuser, 2nd edition, 1998.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV







Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# I Lehrbücher (5)

-  George Grätzer. *Lattice Theory: Foundation*. Birkhäuser, 2011.
-  Carl A. Gunter. *Semantics of Programming Languages: Structures and Techniques*. MIT Press, 1992.
-  Paul R. Halmos. *Naive Set Theory*. Springer-V., Wieder-  
auflage, 2001.
-  Matthew S. Hecht. *Flow Analysis of Computer Programs*. Elsevier, North-Holland, 1977.
-  Matthew Hennessey. *The Semantics of Programming Languages: An Elementary Introduction using Structural Operational Semantics*. Wiley, 1991.
-  Hans Hermes. *Einführung in die Verbandstheorie*. Springer-V., 2. Auflage, 1967.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV






Kap. 11

Kap. 12






Kap. 13

Kap. 14

# I Lehrbücher (6)

-  John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley, 1979.
-  John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. 3. Auflage, Pearson, 2013.
-  George E. Hughes, Max J. Cresswell. *An Introduction to Modal Logic*. Methuan, 1968.
-  George E. Hughes, Max J. Cresswell. *A Companion to Modal Logic*. Methuan, 1986.
-  George E. Hughes, Max J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.

# I Lehrbücher (7)

-  Richard Johnsonbaugh. *Discrete Mathematics*. Pearson, 7. Auflage, 2009.
-  Uday P. Khedker, Amitabha Sanyal, Bageshri Karkare. *Data Flow Analysis: Theory and Practice*. CRC Press, 2009.
-  Stephen C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North Holland, 1952. (Wiederauflage, North Holland, 1980)
-  Fred Kröger, Stephan Merz. *Temporal Logic and State Systems*. Springer-V., 2008.
-  Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis*. Springer-V., 2009.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV







Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# I Lehrbücher (8)

-  Seymour Lipschutz. *Set Theory and Related Topics*. McGraw Hill Schaum's Outline Series, 2. Auflage, 1998.
-  Jacques Loeckx, Kurt Sieber. *The Foundations of Program Verification*. Wiley, 1984.
-  Robert Lover. *Elementary Logic for Software Development*. Springer-V., 2008.
-  Kenneth L. MacMillan. *Symbolic Model Checking*. Kluwer, 1993.
-  David Makinson. *Sets, Logic and Maths for Computing*. Springer-V., 2008.
-  Robert Morgan. *Building an Optimizing Compiler*. Digital Press, 1998.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11







Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# I Lehrbücher (9)

-  Stephen S. Muchnick. *Advanced Compiler Design Implementation*. Morgan Kaufman Publishers, 1997.
-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Formal Methods: An Appetizer*. Springer-V., 2019.
-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson, Chris Hankin. *Principles of Program Analysis*. Springer-V., 2. Auflage, 2005.
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992.
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007.
-  Doron A. Peled. *Software Reliability Methods*. Springer-V., 2001.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# I Lehrbücher (10)

-  Steven Roman. *Lattices and Ordered Sets*. Springer-V., 2008.
-  David A. Schmidt. *Denotational Semantics: A Methodology for Language Development*. Allyn & Bacon, 1986.
-  Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik: Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014.
-  Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018.
-  Joseph E. Stoy. *Denotational Semantics: The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory*. MIT Press, 1981.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# I Lehrbücher (11)

-  Robert D. Tennent. *Semantics of Programming Languages*. Prentice Hall, 1991.
-  Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008.
-  Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. MIT Press, 1993.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## II Handbücher

-  Edmund M. Clarke, Thomas A. Henzinger, Helmut Veith, Roderick Bloem (Hrsg.). *Handbook of Model Checking*. Springer-V., 2018.
-  Jan van Leeuwen (Hrsg.). *Handbook of Theoretical Computer Science*. Elsevier Science Publishers B. V., 1990.
-  Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.). *Informatik-Handbuch*. 4. Auflage, Carl Hanser Verlag, 2006.
-  John Alan Robinson, Andrei Voronkov (Hrsg.). *Handbook of Automated Reasoning*. Vol. II, Elsevier, 2000.
-  Samson Abramsky, Dov M. Gabbay, Thomas S.E. Maibaum (Hrsg.). *Handbook of Logic in Computer Science*. Volume 4, Oxford University Press, 1995.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# III Sammelbände (1)

-  Samson Abramsky, Chris Hankin (Hrsg.). *Abstract Interpretation of Declarative Languages*. Prentice Hall, 1987.
-  Roland Backhouse, Roy Crole, Jeremy R. Gibbons (Hrsg.). *Algebraic and Coalgebraic Methods in the Mathematics of Program Construction*. International Summer School and Workshop, Oxford, UK, April 10-14, 2000, Revised Lectures, Springer-V., LNCS 2297, 2002.
-  Bernhard Beckert, Reiner Hähnle, Peter H. Schmitt (Hrsg.). *Verification of Object-Oriented Software: The KeY Approach*. LNCS 4334, Springer-V., 2007.
-  Patrice Godefroid (Hrsg.). *Partial-Order Methods for the Verification of Concurrent Systems – An Approach to the State-Explosion Problem*. Springer-V., LNCS 1032, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## III Sammelbände (2)

-  George Grätzer, Friedrich Wehrung (Hrsg.). *Lattice Theory: Special Topics and Applications, Vol. I*. Birkhäuser, 2014.
-  George Grätzer, Friedrich Wehrung (Hrsg.). *Lattice Theory: Special Topics and Applications, Vol. II*. Birkhäuser, 2016.
-  Orna Grumberg, Helmut Veith (Hrsg.). *25 Years of Model Checking: History, Achievements, Perspectives*. Springer-V., LNCS 5000, 2008.
-  Nachum Dershowitz (Hrsg.). *Verification: Theory and Practice*. Essays dedicated to Zohar Manna on the Occasion of His 64th Birthday. Springer-V., LNCS 2772, 243-268, 2003.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# IV Dissertationen

-  Evelyn Duesterwald. *A Demand-driven Approach for Efficient Interprocedural Data-Flow Analysis*. PhD thesis, University of Pittsburgh, PA, USA, 1996.
-  Hanne Riis Nielson. *Hoare Logic's for Run-time Analysis of Programs*. PhD thesis, Edinburgh University, UK, 1984.
-  Dirk Richter. *Programmanalysen zur Verbesserung der Softwaremodellprüfung*. Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, Deutschland, 2012.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# V Artikel (1)

-  Samson Abramsky, Chris Hankin. *An Introduction to Abstract Interpretation*. In 'Abstract Interpretation of Declarative Languages,' Samson Abramsky, Chris Hankin (Hrsg.). Prentice Hall, 63-102, 1987.
-  Gagan Agrawal. *Demand-driven Construction of Call Graphs*. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 125-140, 2000.
-  Frances E. Allen, John A. Cocke. *A Program Data Flow Analysis Procedure*. Communications of the ACM 19(3):137-147, 1976.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11




Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## V Artikel (2)

-  Bowen Alpern, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Detecting Equality of Variables in Programs*. In Conference Record of the 15th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'88), 1-11, 1988.
-  Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part 1*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 3(4):431-483, 1981.
-  Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part II: Nondeterminism*. Theoretical Computer Science 28(1-2):83-109, 1984.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (3)

-  Uwe Aßmann. *How to Uniformly Specify Program Analysis and Transformation*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 121-135, 1996.
-  Philip Axer, Rolf Ernst, Heiko Falk, Alain Girault, Daniel Grund, Nan Guan, Bengt Jonsson, Peter Marwedel, Jan Reineke, Christine Rochange, Maurice Sebastian, Reinhard von Hanxleden, Reinhard Wilhelm, Wang Yi. *Building Timing Predictable Embedded Systems*. ACM Transactions on Embedded Computing Systems 13(4):82, 2014.
-  Wayne A. Babich, Mehdi Jazayeri. *The Method of Attributes for Data Flow Analysis: Part I - Exhaustive Analysis*. Acta Informatica 10(3):245-264, 1978.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV



Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (4)

-  Wayne A. Babich, Mehdi Jazayeri. *The Method of Attributes for Data Flow Analysis: Part II - Demand Analysis*. Acta Informatica 10(3):265-272, 1978.
-  Roberto Baldoni, Emilio Coppa, Daniele Cono D'Elia, Camil Demetrescu, Irene Finocchi. *A Survey of Symbolic Execution Techniques*. ACM Computing Surveys 51(3):50:1-39, 2018.
-  Clément Ballabriga, Hugues Cassé, Christine Rochange, Pascal Sainrat. *OTAWA: An Open Toolbox for Adaptive WCET Analysis*. In Proceedings SEUS 2010, Springer-V., 35-46, 2010.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV



Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (5)

-  Roberto Barbuti, Nicoletta De Francesco, Antonella Santone, Gigliola Vaglini. *Selective Mu-Calculus and Formula-based Equivalence of Transition Systems*. *Journal of Computer and System Sciences* 59(3):537-556, 1999.
-  Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, J  r  me Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Min  , Xavier Rival. *Static Analysis and Verification of Aerospace Software by Abstract Interpretation*. In *Proceedings AIAA Infotech@Aerospace (AIAA I  A 2010)*, AIAA-2010-3385, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1-38, April 2010.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV



Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (6)

-  Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, J r me Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Min , Xavier Rival. *Static Analysis by Abstract Interpretation of Embedded Critical Software*. ACM Software Engineering Notes 36(1):1-8, 2011.
-  Al Bessey, Ken Block, Ben Chelf, Andy Chou, Bryan Fulton, Seth Hallem, Charles Henri-Gros, Asya Kamsky, Scott McPeak, Dawson Engler. *A Few Billion Lines of Code Later: Using Static Analysis to Find Bugs in the Real World*. Communications of the ACM 53(2):66-75, 2010.
-  Garret Birkhoff. *Applications of Lattice Algebra*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 30(2):115-122, 1934.

## V Artikel (7)



Stephen M. Blackburn, Amer Diwan, Matthias Hauswirth, Peter F. Sweeny, José Nelson Amaral, Tim Brecht, Lubomír Bulej, Cliff Click, Lieven Eeckhout, Sebastian Fischmeister, Daniel Frampton, Laurie J. Hendren, Michael Hind, Antony L. Hosking, Richard E. Jones, Tomas Kalibera, Nathan Keynes, Nathaniel Nystrom, Andreas Zeller. *The Truth, The Whole Truth, and Nothing But the Truth: A Pragmatic Guide to Assessing Empirical Evaluations*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 38(4), Article 15:1-20, 2016.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (8)

-  Ras Bodik, Rajiv Gupta. *Partial Dead Code Elimination using Slicing Transformations*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'97 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'97), ACM SIGPLAN Notices 32(6):159-170, 1997.
-  Ras Bodík, Rajiv Gupta, Vivek Sarkar. *ABCD: Eliminating Array Bounds Check on Demand*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'00), ACM SIGPLAN Notices 35(5):321-333, 2000.
-  Armelle Bonenfant, Hugues Cassé, Marianne De Michiel, Jens Knoop, Laura Kovács, Jakob Zwirchmayr. *FFX: A Portable WCET Annotation Language*. In Proceedings of the 20th International Conference on Real-Time and Network Systems (RTNS 2012), ACM, 91-100, 2012.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# V Artikel (9)

-  Ahmed Bouajjani, Jean-Claude Fernandez, Nicolas Halbwachs. *Minimal Model Generation*. In Proceedings of the 2nd International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'90), Springer-V., LNCS 531, 197-203, 1990.
-  Nicolas Bourbaki. *Sur la théorème de Zorn*. Archiv der Mathematik 2:434-437, 1949/50.
-  Francesco Buccafurri, Thomas Eiter, Georg Gottlob, Nicola Leone. *Enhancing Model Checking in Verification by AI Techniques*. Artificial Intelligence 112(1-2):57-104, 1999.
-  Cristian Cadar, Koushik Sen. *Symbolic Execution for Software Testing: Three Decades Later*. Communications of the ACM 56(2):82-90, 2013.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11




Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## V Artikel (10)

-  Larry Carter, Jeanne Ferrante, Clark Thomborson. *Folklore Confirmed: Reducible Flow Graphs are Exponentially Larger*. In Conference Record of the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 106-114, 2003.
-  Jyh-Herng Chow, William L. Harrison. *Compile Time Analysis of Parallel Programs that share Memory*. In Conference Record of the 19th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 130-141, 1992.
-  Jyh-Herng Chow, William L. Harrison. *State Space Reduction in Abstract Interpretation of Parallel Programs*. In Proceedings of the International Conference on Computer Languages (ICCL'94), 277-288, 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (11)

-  Edmund M. Clarke. *Programming Language Constructs for which it is Impossible to Obtain Good Hoare Axiom Systems*. Journal of the ACM 26(1):129-147, 1979.
-  Edmund M. Clarke. *The Birth of Model Checking*. In *25 Years of Model Checking*. Orna Grumberg, Helmut Veith (Hrsg.), Springer-V., LNCS 5000, 1-26, 2008.
-  Edmund M. Clarke, Stephen M. German, Joseph Y. Halpern. *Effective Axiomatizations of Hoare Logics*. Journal of the ACM 30(1):612-636, 1983.
-  Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, David E. Long. *Model Checking and Abstraction*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 16(5):1512-1542, 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/16

## V Artikel (12)

-  Edmund M. Clarke, David E. Long, Kenneth L. MacMillan. *Compositional Model Checking*. In Proceedings of the 4th Annual Symposium on Logic in Computer Science (LICS'89), IEEE Computer Society, 353-362, 1989.
-  Edmund M. Clarke, H. Schlingloff. *Model Checking*. In *Handbook of Automated Reasoning*, John Alan Robinson, Andrei Voronkov (Hrsg.), Vol. II, Elsevier, 1635-1790, 2000.
-  Edmund M. Clarke, Qinsi Wang: *2<sup>5</sup> Years of Model Checking*. Ershov Memorial Conference 2014, 26-40, 2014.
-  Dominique Céléme, Joëlle Despeyroux, Thierry Despeyroux, L. Hascoet, Gilles Kahn. *Natural Semantics on the Computer*. INRIA Research Report RR 416, INRIA, Sophia-Antipolis, June 1985.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (13)

-  Dominique Clément, Joëlle Despeyroux, Thierry Despeyroux, Gilles Kahn. *A Simple Applicative Language: Mini-ML*. In Proceedings of the International ACM Conference on Lisp and Functional Programming (LFP'86), 13-27, 1986.
-  Ernie Cohen, Dexter Kozen. *A Note on the Complexity of Propositional Hoare Logic*. *ACM Transactions on Computational Logic* 1(1):171-174, 2000.
-  Stephen A. Cook. *Soundness and Completeness of an Axiom System for Program Verification*. *SIAM Journal on Computing* 7(1):70-90, 1978.
-  Patrick Cousot. *Methods and Logics for Proving Programs*. In *Handbook of Theoretical Computer Science*, Jan van Leeuwen (Hrsg.), Elsevier Science Publishers B. V., Kapitel 15, 841-993, 1990.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10





Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

## V Artikel (14)

-  Patrick Cousot. *Abstract Interpretation*. ACM Computing Surveys 28(2):324-328, 1996.
-  Patrick Cousot. *Refining Model-Checking by Abstract Interpretation*. Automated Software Engineering 6(1):69-95, 1999.
-  Patrick Cousot. *Design of Syntactic Program Transformations by Abstract Interpretation of Semantic Transformations*. In Proceedings of the 17th International Conference on Logic Programming (ICLP 2001), Springer-V., LNCS 2237, 4-5, 2001.
-  Patrick Cousot. *The Verification Grand Challenge and Abstract Interpretation*. In Proceedings of Verified Software: Theories, Tools, Experiments (VSTTE 2005), Springer-V, LNCS 4171, 189-201, 2005.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (15)

-  Patrick Cousot. *Verification by Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 4th International Conference on Verification, Model-Checking, Abstract Interpretation (VMCAI 2003), Springer-V., LNCS 2575, 20-24, 2003.
-  Patrick Cousot. *Verification by Abstract Interpretation*. In Verification: Theory and Practice, Essays dedicated to Zohar Manna on the Occasion of His 64th Birthday. Springer-V., LNCS 2772, 243-268, 2003.
-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Abstract Interpretation: A Unified Lattice Model for Static Analysis of Programs by Construction or Approximation of Fixpoints*. In Conference Record of the 4th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77), 238-252, 1977.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (16)



Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Constructive Versions of Tarski's Fixed Point Theorems*. Pacific Journal of Mathematics 82(1):43-57, 1979.



Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Analysis Frameworks*. In Conference Record of the 6th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'79), 269-282, 1979.



Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Invariance Proof Methods and Analysis Techniques for Parallel Programs*. In Automatic Program Construction Techniques, A. W. Biermann, G. Guiho, Y. Kodratoff (Hrsg.), Macmillan Publishing Company, Kapitel 12, 243-271, 1984.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (17)

-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Abstract Interpretation Frameworks*. Journal of Logic and Computation 2(4):511-547, 1992.
-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Temporal Abstract Interpretation*. In Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000), 12-25, 2000.
-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Transformation Frameworks by Abstract Interpretation*. In Conference Record of the 29th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2002), 178-190, 2002.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## V Artikel (18)

-  Patrick Cousot, Radhia Cousot. *A Gentle Introduction to Formal Verification of Computer Systems by Abstract Interpretation*. In Logics and Languages for Reliability and Security. NATO Science for Peace and Security - D; Information and Communication Security, Vol. 25, IOS Press, 2010. ISBN 978-1-60750-099-5.
-  Patrick Cousot, Radhia Cousot, Laurent Mauborgne. *Theories, Solvers and Static Analysis by Abstract Interpretation*. Journal of the ACM 59(6), Artikel 31, 56 Seiten, 2012.
-  Patrick Cousot, Michael Monerau. *Probabilistic Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 21st Symposium on Programming (ESOP 2012), Springer-V., LNCS 7211, 169-193, 2012.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (19)



Chris Cummins, Pavlos Petoumenos, Zheng Wang, Hugh Leather. *End-to-end Deep Learning of Optimization Heuristics*. In Proceedings of the 26th ACM/IEEE International Conference on Parallel Architectures and Compilation Techniques (PACT 2017), 219-232, 2017.



Ron Cytron, Jeanne Ferrante, Barry K. Rosen, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *An Efficient Method of Computing Static Single Assignment Form*. In Conference Record of the 16th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'89), 25-35, 1989.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV



Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (20)

-  Ron Cytron, Jeanne Ferrante, Barry K. Rosen, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Efficiently Computing Static Single Assignment Form and the Control Dependence Graph*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 13(4):451-490, 1991.
-  Marvin Damschen, Lars Bauer, Jörg Henkel. *Timing Analysis of Tasks on Runtime Reconfigurable Processors*. In IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems 25(1):294-307, 2017.
-  Anne C. Davis. *A Characterization of Complete Lattices*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):311-319, 1955.
-  Martin Davis. *Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable*. American Mathematical Monthly 80:33-269, 1973.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (21)

-  Martin Davis, Yuri Matijasevič, Julia Robinson. *Hilbert's Tenth Problem. Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution*. In Proceedings of the Symposium on the Hilbert Problems (De Kalb, Illinois), May 1974, American Mathematical Society, Providence, R.I., 323-378, 1976.
-  Joëlle Despeyroux. *Proof of Translation in Natural Semantics*. In Proceedings of the 2nd International IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'86), 193-205, 1986.
-  Thierry Despeyroux. *Typol: A Formalism to Implement Natural Semantics*. INRIA Research Report 94, Roquencourt, France, 1988.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/16

## V Artikel (22)

-  Dhananjay M. Dhamdhere. *Register Assignment using Code Placement Techniques*. *Journal of Computer Languages* 13(2):75-93, 1988.
-  Dhananjay M. Dhamdhere. *A usually linear Algorithm for Register Assignment using Edge Placement of Load and Store Instructions*. *Journal of Computer Languages* 15(2):83-94, 1990.
-  Dhananjay M. Dhamdhere. *Practical Adaptation of the Global Optimization Algorithm of Morel and Renvoise*. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems* 13(2):291-294, 1991. Technical Correspondence.

## V Artikel (23)

-  Dhananjay M. Dhamdhere, Barry K. Rosen, F. Kenneth Zadeck. *How to Analyze Large Programs Efficiently and Informatively*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'92 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'92), ACM SIGPLAN Notices 27(7):212-223, 1992.
-  Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *Demand-driven Computation of Interprocedural Data Flow*. In Conference Record of the 22nd ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'95), 37-48, 1995.
-  Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *A Demand-driven Analyzer for Data Flow Testing at the Integration Level*. In Proceedings of the IEEE Conference on Software Engineering (CoSE'96), 575-586, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (24)

-  Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *A Practical Framework for Demand-driven Interprocedural Data Flow Analysis*. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems* 19(6):992-1030, 1997.
-  Matthew B. Dwyer, Lori A. Clarke. *Data Flow Analysis for Verifying Properties of Concurrent Programs*. In *Proceedings of the 2nd ACM SIGSOFT Symposium on Foundations of Software Engineering (SFSE'94)*, Software Engineering Notes 19(5):62-75, 1994.
-  Matthew B. Dwyer, Lori A. Clarke, Jamieson M. Cobleigh, Gleb Naumovich. *Flow Analysis for Verifying Properties of Concurrent Software Systems*. *ACM Transactions on Software Engineering Methodology* 13(4):359-430, 2004.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13




Kap. 14

## V Artikel (25)

-  Stephen A. Edwards, Edward A. Lee. *The Case for the Precision-timed (PRET) Machine*. In *Proceedings of the 44th Design Automation Conference (DAC 2007)*, 264-265, 2007.
-  E. Allen Emerson. *Temporal and Modal Logic*. In *Handbook of Theoretical Computer Science*, Jan van Leeuwen (Hrsg.), Elsevier, 995-1072, 1990.
-  Leandro Faccinetti, Zachary Palmer, Scott Smith. *Higher-order Demand-driven Program Analysis*. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS)* 41(3):14:Computing Surveys 51(3):14:1-53, 2019.



## V Artikel (26)

-  Christian Fecht, Helmut Seidl. *An Even Faster Solver for General Systems of Equations*. In *Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96)*, Springer-V., LNCS 1145, 189-204, 1996.
-  Christian Fecht, Helmut Seidl. *Propagating Differences: An Efficient New Fixpoint Algorithm for Distributive Constraint Systems*. In *Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98)*, Springer-V., LNCS 1381, 90-104, 1998.
-  Christian Fecht, Helmut Seidl. *A Faster Solver for General Systems of Equations*. *Science of Computer Programming* 35(2):137-161, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (27)

-  L. Feigen, D. Klappholz, R. Casazza, X. Xue. *The Revival Transformation*. In Conference Record of the 21st ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'94), 1994.
-  Jeanne Ferrante, Dirk Grunwald, Harini Srinivasan. *Compile-time Analysis and Optimization of Explicitly Parallel Programs*. Parallel Algorithms and Applications 12(1-3):21-56, 1997.
-  Robert W. Floyd. *Assigning Meaning to Programs*. In Proceedings of Symposium on Applied Mathematics, Mathematical Aspects of Computer Science, American Mathematical Society, New York, 19:19-32, 1967.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (28)

-  Emily P. Friedman. *Relationships between Monadic Recursion Schemes and Deterministic Context-free Languages*. In Conference Record of the 15th Annual IEEE Symposium on Switching and Automata Theory (SWAT'74), 43-51, 1974.
-  Emily P. Friedman. *Equivalence Problems for Deterministic Context-free Languages and Monadic Recursion Schemes*. *Journal of Computer and System Sciences* 14(3):344-359, 1977.
-  Stephen J. Garland, David C. Luckham. *Program Schemes, Recursion Schemes, and Formal Languages*. *Journal of Computer and System Sciences* 7(2):119-160, 1973.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (29)



Alfons Geser, Jens Knoop, Gerald Lüttgen, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Non-monotone Fixpoint Iterations to Resolve Second Order Effects*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 106-120, 1996.



Seymour Ginsburg, Sheila Greibach. *Deterministic Context Free Languages*. Information and Control 9(6):620-648, 1966.



Patrice Godefroid. *Between Testing and Verification: Dynamic Software Model Checking*. Dependable Software Systems Engineering 2016, NATO Science for Peace and Security Series - D: Information and Communication Security 45, IOS Press, 99-116, 2016.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV



Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (30)

-  Patrice Godefroid, Koushik Sen. *Combining Model Checking and Testing*. In *Handbook of Model Checking*, Edmund M. Clarke, Thomas A. Henzinger, Helmut Veith, Roderick Bloem (Hrsg.), 613-649.
-  Susanne Graf, Bernhard Steffen, Gerald Lüttgen. *Compositional Minimization of Finite State Systems using Interface Specifications*. *Formal Aspects of Computing* 8(5):607-616, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12





Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (31)

-  Dirk Grunwald, Harini Srinivasan. *Data Flow Equations for Explicitly Parallel Programs*. In Proceedings of the 4th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPoPP'93), ACM SIGPLAN Notices 28(7):159-168, 1993.
-  Jan Gustafsson. *Usability Aspects of WCET Analysis*. In Proceedings of the 11th IEEE International Symposium on Object and Component-Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC 2008), 346-352, 2008.
-  Jan Gustafsson, Adam Betts, Andreas Ermedahl, Björn Lisper. *The Mälardalen WCET Benchmarks: Past, Present, and Future*. In Proceedings of the 10th International Workshop on Worst-Case Execution Time Analysis (WCET 2010), 136-146, 2010.

## V Artikel (32)

-  Nevin Heintze, Joxan Jaffar, Răzvan Voicu. *A Framework for Combining Analysis and Verification*. In Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000), 26-39, 2000.
-  Charles A.R. Hoare. *An Axiomatic Basis for Computer Programming*. Communications of the ACM 12(10):576-580, 583, 1969.
-  Charles A.R. Hoare. *The Emperor's Old Clothes*. Communications of the ACM 24(2):75-83, 1981.  
DOI: 10.1145/358549.358561
-  Charles A.R. Hoare. *The Ideal of Program Correctness*. The Computer Journal 50(3):254-260, 2007.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (33)

-  Charles A.R. Hoare. *Retrospective: An Axiomatic Basis for Computer Programming*. Communications of the ACM 52(10):30-32, 2009. DOI: 10.1145/1562764.1562779
-  Susan Horwitz, Alan J. Demers, Tim Teitelbaum. *An Efficient General Iterative Algorithm for Dataflow Analysis*. Acta Informatica 24(6):679-694, 1987.
-  Susan Horwitz, Thomas Reps, Mooly Sagiv. *Demand Interprocedural Data Flow Analysis*. In Proceedings of the 3rd ACM SIGSOFT Symposium on the Foundations of Software Engineering (FSE-3), 104-115, 1995.
-  John Hughes, John Launchbury. *Reversing Abstract Interpretations*. In Proceedings of the 4th European Symposium on Programming (ESOP'92), Springer-V., LNCS 582, 269-286, 1992.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11




Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## V Artikel (34)

-  John Hughes, John Launchbury. *Reversing Abstract Interpretations*. Science of Computer Programming 22:307-326, 1994.
-  Claude Jard, Thierry Jéron. *Bounded-memory Algorithms for Verification On-the-fly*. In Proceedings of the 3rd International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'91), Springer-V., LNCS 575, 192-202, 1992.
-  Tudor Jebelean, Laura Kovács, Nikolaj Popov. *Experimental Program Verification in the Theorema System*. In Proceedings of the International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods (ISoLA 2004), 92-99, 2004. [www.risc.jku.at/publications/download/risc\\_2243/KoPoJeb.pdf](http://www.risc.jku.at/publications/download/risc_2243/KoPoJeb.pdf)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (35)

-  Neil D. Jones, Flemming Nielson. *Abstract Interpretation: A Semantics-based Tool for Program Analysis*. In *Handbook of Logic in Computer Science, Volume 4*, Oxford University Press, 1995.
-  Gilles Kahn. *Natural Semantics*. In *Proceedings of the 4th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'87)*, Springer-V., LNCS 247, 22-39, 1987.
-  John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Global Data Flow Analysis and Iterative Algorithms*. *Journal of the ACM* 23:158-171, 1976.
-  John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Monotone Data Flow Analysis Frameworks*. *Acta Informatica* 7:305-317, 1977.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (36)

-  Gary A. Kildall. *A Unified Approach to Global Program Optimization*. In Conference Record of the 1st ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'73), 194-206, 1973.
-  Raimund Kirner, Jens Knoop, Adrian Prantl, Markus Schordan, Albrecht Kadlec. *Beyond Loop Bounds: Comparing Annotation Languages for Worst-Case Execution Time Analysis*. Journal of Software and Systems Modeling 10(3):411-437, Springer-V., 2011.
-  Marion Klein, Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *DFA&OPT-METAFrame: A Toolkit for Program Analysis and Optimization*. In Proceedings of the 2nd International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'96), Springer-V., LNCS 1055, 422-426, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# V Artikel (37)

-  Jens Knoop. *Parallel Constant Propagation*. In Proceedings of the 4th European Conference on Parallel Processing (Europar'98), Springer-V., LNCS 1470, 445-455, 1998.
-  Jens Knoop. *From DFA-frameworks to DFA-generators: A Unifying Multiparadigm Approach*. In Proceedings of the 5th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99), Springer-V., LNCS 1579, 360-374, 1999.
-  Jens Knoop. *Demand-driven Analysis of Explicitly Parallel Programs: An Approach based on Reverse Data-Flow Analysis*. In Proceedings of the 9th International Workshop on Compilers for Parallel Computers (CPC 2001), 151-162, 2001.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (38)

-  Jens Knoop. *Data-Flow Analysis for Hot-Spot Program Optimization*. In Proceedings of the 14th Biennial Workshop on 'Programmiersprachen und Grundlagen der Programmierung' (KPS 2007). Bericht A-07-07 der Institute für Mathematik und Informatik, Universität Lübeck, Deutschland, 124-131, 2007.
-  Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *Basic-block Graphs: Living Dinosaurs?* In Proceedings of the 7th International Conference on Compiler Construction (CC'98), Springer-V., LNCS 1383, 65-79, 1998.
-  Jens Knoop, Eduard Mehofer. *Distribution Assignment Placement: Effective Optimization of Redistribution Costs*. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 13(6):628-647, 2002.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (39)



Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Lazy Code Motion*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'92 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'92), ACM SIGPLAN Notices 27(7):224-234, 1992.



Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Partial Dead Code Elimination*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'94 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'94), ACM SIGPLAN Notices 29(6):147-158, 1994.



Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Optimal Code Motion: Theory and Practice*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 16(4):1117-1155, 1994.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (40)

-  Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *The Power of Assignment Motion*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'95 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'95), ACM SIGPLAN Notices 30(6):233-245, 1995.
-  Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Code Motion and Code Placement: Just Synonyms?* In Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98), Springer-V., LNCS 1381, 154-169, 1998.
-  Jens Knoop, Oliver Rüthing. *Constant Propagation on the Value Graph: Simple Constants and Beyond*. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 94-109, 2000.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (41)

-  Jens Knoop, Oliver Rüthing. *Constant Propagation on Predicated Code*. Journal of Universal Computer Science 9(8):829-850, 2003. (special issue devoted to SBLP'03).
-  Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Retro-spective: Lazy Code Motion*. In '20 Years of the ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (1979 - 1999): A Selection,' ACM SIGPLAN Notices 39(4):460-461&462-472, 2004.
-  Jens Knoop, Bernhard Steffen. *The Interprocedural Coincidence Theorem*. In Proceedings of the 4th International Conference on Compiler Construction (CC'92), Springer-V., LNCS 641, 125-140, 1992.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## V Artikel (42)



Jens Knoop, Bernhard Steffen. *Code Motion for Explicitly Parallel Programs*. In Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPoPP'99), ACM SIGPLAN Notices 34(8):13-24, 1999.



Jens Knoop, Bernhard Steffen, Jürgen Vollmer. *Parallelism for Free: Bitvector Analyses  $\rightarrow$  No State Explosion!* In Proceedings of the 1st International Workshop on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'95), LNCS 1019, Springer-V., 264-289, 1995.



Jens Knoop, Bernhard Steffen, Jürgen Vollmer. *Parallelism for Free: Efficient and Optimal Bitvector Analyses for Parallel Programs*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 18(3):268-299, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (43)

-  Laura Kovács, Tudor Jebelean. *Practical Aspects of Imperative Program Verification using Theorema*. In *Proceedings of the 5th International Workshop on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2003)*, 317-320, 2003. [www.risc.jku.at/publications/download/risc\\_464/synasc03.pdf](http://www.risc.jku.at/publications/download/risc_464/synasc03.pdf)
-  Laura Kovács, Tudor Jebelean. *Generation of Invariants in Theorema*. In *Proceedings of the 10th International Symposium of Mathematics and its Applications*, 407-415, 2003. [www.risc.jku.at/publications/download/risc\\_2053/2003-11-06-A.pdf](http://www.risc.jku.at/publications/download/risc_2053/2003-11-06-A.pdf)
-  Dexter Kozen, Jerzy Tiuryn. *On the Completeness of Propositional Hoare Logic*. *Information Sciences* 139(3-4):187-195, 2001.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (44)

-  Sameer Kulkarni, John Cavazos. *Mitigating the Compiler Optimization Phase-Ordering Problem using Machine Learning*. Proceedings of the ACM International Conference on Object-oriented Programming, Systems, Languages, and Applications (OOPSLA 2012), 147-162, 2012.
-  William Landi. *Undecidability of Static Analysis*. ACM Letters on Programming Languages and Systems 1(4):323-337, 1992.
-  Jean-Louis Lassez, V.L. Nguyen, Elizabeth A. Sonenberg. *Fixed Point Theorems and Semantics: A Folk Tale*. Information Processing Letters 14(3):112-116, 1982.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (45)

-  Thomas Leveque, Etienne Borde, Amine Marref, Jan Carlson. *Hierarchical Composition of Parametric WCET in a Component Based Approach*. In *Proceedings of the 14th IEEE International Symposium on Object/Component/Service-Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC 2011)*, 261-268, 2011.
-  Yau-Tsun Steven Li, Sharad Malik. *Performance Analysis of Embedded Software using Implicit Path Enumeration*. *ACM SIGPLAN Notices* 30(11):88-98, 1995.
-  Yuan Lin, David A. Padua. *Demand-driven Interprocedural Array Property Analysis*. In *Proceedings of the 12th International Conference on Languages and Compilers for Parallel Computing (LCPC'99)*, Springer-V., LNCS 1863, 303-317, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (46)

-  Björn Lisper, Andreas Ermedahl, Dietmar Schreiner, Jens Knoop, Peter Gliwa. *Practical Experiences of Applying Source-level WCET Flow Analysis to Industrial Code*. Journal of Software Tools for Technology Transfer (STTT) 15(1):53-63, Springer-V., 2013.
-  Konstantinos Mamouras. *On the Hoare Theory of Monadic Recursion Schemes*. In Proceedings of the Joint Meeting of the 23rd EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL) and the 29th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS) (CSL-LICS'14), Article 69, 69.1-69.10, 2014.
-  Konstantinos Mamouras. *The Hoare Logic of Deterministic and Nondeterministic Monadic Recursion Schemes*. ACM Transactions on Computational Logic 17(2):13.1-13.30, 2016.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV



Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (47)

-  George Markowsky. *Chain-complete Posets and Directed Sets with Applications*. *Algebra Universalis* 6(1):53-68, 1976.
-  Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Properties of Data Flow Frameworks*. *Acta Informatica* 20:121-163, 1990.
-  Kim Marriot. *Frameworks for Abstract Interpretation*. *Acta Informatica* 30:103-129, 1993.
-  Florian Martin. *PAG - An Efficient Program Analyzer Generator*. *Journal of Software Tools for Technology Transfer* 2(1):46-67, 1998.
-  Stephen P. Masticola, Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Lattice Frameworks for Multisource and Bidirectional Data Flow Problems*. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS)* 17(5):777-803, 1995.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# V Artikel (48)

-  Yuri V. Matijasevič. *Enumerable Sets are Diophantine* (auf Russisch). Doklady Akademii Nauk SSSR 191:279-282, 1970 (englische Übersetzung: Soviet Mathematics Doklady 11:354-357, 1970).
-  Yuri V. Matijasevič. *On Recursive Unsolvability of Hilbert's Tenth Problem*. In Proceedings of the 4th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science (Bucharest 1971), North-Holland, Amsterdam, 89-110, 1973.
-  Yuri V. Matijasevič. *What Should We Do Having Proved a Decision Problem to be Unsolvable?* In Proceedings of Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science, Springer-V., LNCS 122, 441-448, 1979.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# V Artikel (49)

-  Yuri V. Matijasevič. *Hilbert's Tenth Problem*. MIT Press, 1993.
-  Samuel P. Midkiff, José E. Moreira, Marc Snir. *A Constant Propagation Algorithm for Explicitly Parallel Programs*. International Journal of Computer Science 26(5):563-589, 1998.
-  Samuel P. Midkiff, David A. Padua. *Issues in the Optimization of Parallel Programs*. In Proceedings of the 18th International Conference on Parallel Processing (ICPP'90), Vol. II., 105-113, 1990.
-  Steve P. Miller, Michael W. Whalen, Darren D. Cofer. *Software Model Checking Takes Off*. Communications of the ACM 53(2):58-64, 2010.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11




Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## V Artikel (50)

-  Ronald J. Mintz, Gerald A. Fisher, Micha Sharir. *The Design of a Global Optimizer*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'79 Symposium on Compiler Construction (SoCC'79), ACM SIGPLAN Notices 14(8):226-234, 1979.
-  Markus Müller-Olm, David A. Schmidt, Bernhard Steffen. *Model-Checking: A Tutorial Introduction*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 330-354, 1999.
-  Markus Müller-Olm, Helmut Seidl. *Polynomial Constants are Decidable*. In Proceedings of the 9th Static Analysis Symposium (SAS 2002), Springer-V., LNCS 2477, 4-19, 2002.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (51)

-  Flemming Nielson. *Program Transformations in a Denotational Setting*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 7(3):359-379, 1985.
-  Flemming Nielson. *A Bibliography on Abstract Interpretation*. ACM SIGPLAN Notices 21:31-38, 1986.
-  Flemming Nielson. *A Bibliography on Abstract Interpretation*. EATCS Bulletin 28:42-52, 1986.
-  Flemming Nielson. *Semantics-directed Program Analysis: A Tool-maker's Perspective*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 2-21, 1996.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (52)

-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Finiteness Conditions for Fixed Point Iteration*. In Proceedings of the 7th ACM Conference on LISP and Functional Programming (LFP'92), 96-108, 1992.
-  Hanne Riis Nielson. *A Hoare-like Proof System for Run-Time Analysis of Programs*. Science of Computer Programming 9(2):107-136, 1987.
-  David von Oheimb. *Hoare Logic for Java in Isabelle/HOL*. Concurrency and Computation: Practice and Experience 13(13):1173-1214, 2001.
-  Ernst-Rüdiger Olderog. *Correctness of Programs with Pascal-like Procedures without Global Variables*. Theoretical Computer Science 30(1):49-90, 1984.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (53)

-  Ernst-Rüdiger Olderog, Bernhard Steffen. *Formale Semantik und Programmverifikation*. In *Informatik-Handbuch*, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 145-166, 2006.
-  Ernst-Rüdiger Olderog, Reinhard Wilhelm. *Turing und die Verifikation*. *Informatik Spektrum* 35(4):271-279, 2012.
-  Greger Ottosson, Mikael Sjödin. *Worst-Case Execution Time Analysis for Modern Hardware Architectures*. In *Proceedings of the ACM SIGPLAN Workshop on Languages, Compilers, and Tools for Real-Time Systems (LCT-RTS'97)*, 1997.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (54)

-  Doron Peled. *All from One, One for All: On Model Checking Using Representatives*. In Proceedings of the 5th International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'93), Springer-V., LNCS 697, 409-423, 1993.
-  Gordon D. Plotkin. *A Structural Approach to Operational Semantics*. Lecture notes, DAIMI FN-19, Aarhus University, Dänemark, 1981 (als Nachdruck von 1991).
-  Gordon D. Plotkin. *An Operational Semantics for CSP*. In Proceedings of the TC-2 Working Conference on Formal Description of Programming Concepts II, Dines Bjørner (Hrsg.), North-Holland, Amsterdam, 199-226, 1982.
-  Gordon D. Plotkin. *The Origins of Structural Operational Semantics*. Journal of Logic and Algebraic Programming 60-61:3-15, 2004.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (55)

-  Gordon D. Plotkin. *A Structural Approach to Operational Semantics*. Journal of Logic and Algebraic Programming 60-61:17-139, 2004.
-  Vaughan R. Pratt. *Semantical Considerations of Floyd-Hoare Logic*. In Proceedings of the 17th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'76), 109-121, 1976.
-  Peter Puschner, Raimund Kirner, Robert G. Pettit. *Towards Composable Timing for Real-Time Programs*. Software Technologies for Future Dependable Distributed Systems, 1-5, 2009.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (56)

-  Peter Puschner, Daniel Prokesch, Benedikt Huber, Jens Knoop, Stefan Hepp, Gernot Gebhard. *The T-CREST Approach of Compiler and WCET-Analysis Integration*. In Proceedings of the 9th International Workshop on Software Technologies for Future Embedded and Ubiquitous Systems (SEUS 2013), 1-8, 2013.
-  John H. Reif, Harry R. Lewis. *Symbolic Evaluation and the Global Value Graph*. In Conference Record of the 4th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77), 104-118, 1977.
-  Jan Reineke, Björn Wachter, Stephan Thesing, Reinhard Wilhelm, Ilia Polian, Jochen Eisinger, Bernd Becker. *A Definition and Classification of Timing Anomalies*. In Proceedings of the 6th International Workshop on Worst-Case Execution Time Analysis (WCET 2006), 2006.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (57)

-  Thomas Reps. *Solving Demand Versions of Interprocedural Analysis Problems*. In *Proceedings of the 5th International Conference on Compiler Construction (CC'95)*, Springer-V., LNCS 786, 389-403, 1994.
-  Thomas Reps. *Demand Interprocedural Program Analysis using Logic Databases*. In *Applications of Logic Databases*, R. Ramakrishnan (Hrsg.), Kluwer Academic Publishers, 1994.
-  F. Robert. *Convergence locale d'itérations chaotiques non linéaires*. Technical Report 58, Laboratoire d'Informatique, U.S.M.G., Grenoble, Frankreich, Dez. 1976.
-  Oliver Rüthing, Jens Knoop, Bernhard Steffen. *Detecting Equalities of Variables: Combining Efficiency with Precision*. In *Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99)*, Springer-V., LNCS 1694, 232-247, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11




Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## V Artikel (58)

-  Oliver Rüthing, Markus Müller-Olm. *On the Complexity of Constant Propagation*. In *Proceedings of the 10th European Symposium on Programming (ESOP 2001)*, Springer-V., LNCS 2028, 190-205, 2001.
-  Caitlin Sadowski, Edward Aftandilian, Alex Eagle, Liam Miller-Cushon, Ciera Jaspán. *Lessons from Building Static Analysis Tools at Google*. *Communications of the ACM* 61(4):58-66, 2018.
-  Antonella Santone. *Automatic Verification of Concurrent Systems Using a Formula-based Compositional Approach*. *Acta Informatica* 38(8):531-564, 2002.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (59)

-  David A. Schmidt. *Data Flow Analysis is Model Checking of Abstract Interpretations*. In Conference Record of the 25th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'98), 38-48, 1998.
-  David A. Schmidt, Bernhard Steffen. *Program Analysis as Model Checking of Abstract Interpretations*. In Proceedings of the 5th Static Analysis Symposium (SAS'98), Springer-V., LNCS 1503, 351-380, 1998.
-  Mary Lou Soffa. *Tutorial: Techniques to improve the Scalability and Precision of Data Flow Analysis*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 355-356, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (60)

-  Harini Srinivasan, Michael Wolfe. *Analyzing Programs with Explicit Parallelism*. In Proceedings of the 4th International Conference on Languages and Compilers for Parallel Computing (LCPC'91), Springer-V., LNCS 589, 405-419, 1991.
-  Bernhard Steffen. *Optimal Run Time Optimization – Proved by a New Look at Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 2nd Joint International Conference on the Theory and Practice of Software Development (TAPSOFT'87), Springer-V., LNCS 249, 52-68, 1987.
-  Bernhard Steffen. *Optimal Data Flow Analysis via Observational Equivalence*. In Proceedings of the 14th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'89), Springer-V., LNCS 379, 492-502, 1989.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (61)

-  Bernhard Steffen. *Data Flow Analysis as Model Checking*. In Proceedings of the International Conference on Theoretical Aspects of Computer Software (TACS'91), Springer-V., LNCS 526, 346-365, 1991.
-  Bernhard Steffen. *Generating Data Flow Analysis Algorithms from Modal Specifications*. International Journal on Science of Computer Programming 21:115-139, 1993.
-  Bernhard Steffen. *Property-Oriented Expansion*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 22-41, 1996.
-  Bernhard Steffen, Andreas Claßen, Marion Klein, Jens Knoop, Tiziana Margaria. *The Fixpoint Analysis Machine*. In Proceedings of the 6th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR'95), Springer-V., LNCS 962, 72-87, 1995.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (62)

-  Bernhard Steffen, Jens Knoop. *Finite Constants: Characterizations of a New Decidable Set of Constants*. Theoretical Computer Science 80(2):303-318, 1991.
-  Colin Stirling, David Walker. *Local Model Checking in the Modal Mu-Calculus*. Theoretical Computer Science 89(1):161-177, 1991.
-  Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Effective Partial Redundancy Elimination based on Extended Value Graph*. Information Processing Society of Japan 38(11):2237-2250, 1990.
-  Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Partial Dead Code Elimination Using Extended Value Graph*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 179-193, 1999.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (63)

-  Alfred Tarski. *A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its Applications*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):285-309, 1955.
-  Henrik Theiling. *ILP-based Interprocedural Path Analysis*. In Proceedings of the International Workshop on Embedded Software (EMSOFT 2002), Springer-V., LNCS 2491, 349-363, 2002.
-  Lothar Thiele, Reinhard Wilhelm. *Design for Timing Predictability*. Real-Time Syst. 28(2-3):157-177, 2004.
-  Ashish Tiwari, Sumit Gulwani. *Static Program Analysis Using Theorem Proving*. In Proceedings of the 21st Conference on Automated Deduction (CADE-21), LNCS 4603, Springer-V., 147-166, 2007.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (64)

-  Peng Tu, David A. Padua. *Gated SSA-based Demand-driven Symbolic Analysis for Parallelizing Computers*. In Proceedings of the International Conference on Supercomputing (SC'95), 414-423, 1995.
-  Antti Valmari. *A Stubborn Attack on State Explosion*. Formal Methods in System Design 1(4):297-322, 1992.
-  Jürgen Vollmer. *Data Flow Analysis of Parallel Programs*. In Proceedings of the IFIP WG 10.3 Working Conference on Parallel Architectures and Compilation Techniques (PACT'95), 168-177, 1995.
-  Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Constant Propagation with Conditional Branches*. In Conference Record of the 12th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'85), 291-299, 1985.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (65)

-  Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Constant Propagation With Conditional Branches*. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems* 13(2):181-201, 1991.
-  Daniel Weise. *Static Analysis of Mega-Programs (Invited Paper)*. In *Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99)*, Springer-V., LNCS 1694, 300-302, 1999.
-  Reinhard Wilhelm. *Real Time spent on Real Time*. *Communications of the ACM* 63(10):54-60, 2020.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## V Artikel (66)



Reinhard Wilhelm, Jakob Engblom, Andreas Ermedahl, Niklas Holsti, Stephan Thesing, David Whalley, Guillem Bernat, Christian Ferdinand, Reinhold Heckmann, Tulika Mitra, Frank Mueller, Isabelle Puaut, Peter Puschner, Jan Staschulat, Per Stenström. *The Worst-case Execution Time Problem – Overview of Methods and Survey of Tools*. ACM Transactions on Embedded Computing Systems 7(3):36.1-53, 2008.



Reinhard Wilhelm, Daniel Grund. *Computation takes Time, but How Much?* Communications of the ACM 57(2):94-103, 2014.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## V Artikel (67)

-  Michael Wolfe, Harini Srinivasan. *Data Structures for Optimizing Programs with Explicit Parallelism*. In *Proceedings of the 1st International Conference of the Austrian Center for Parallel Computation*, Springer-V., LNCS 591, 139-156, 1991.
-  Xin Yuan, Rajiv Gupta, Rami Melhem. *Demand-driven Data Flow Analysis for Communication Optimization*. *Parallel Processing Letters* 7(4):359-370, 1997.
-  Xin Zheng, Radu Rugina. *Demand-driven Alias Analysis for C*. In *Proceedings of the 35th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2008)*, 197-208, 2008.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## VI Web-Ressourcen



*aiT Worst-Case Execution Time Analyzers*. Website:  
<http://www.absint.com/ait>, 2016. [Online; accessed  
1-August-2016]



Reiner Hähnle, Richard Bubel. *A Hoare-Style Calculus  
with Explicit State Updates*. Handout in the course 'Pro-  
gram Verification' at the Department of Computer Science  
at the Chalmers University of Technology, 19 Seiten.  
[www.iti.uni-karlsruhe.de/~key/  
download/hoare/students.pdf](http://www.iti.uni-karlsruhe.de/~key/download/hoare/students.pdf)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Anhänge

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Anhang A

## Mathematische Grundlagen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# A.1

## Relationen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Relationen

Seien  $M_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , Mengen.

## Definition A.1.1 ( $k$ -stellige Relation)

Eine ( $k$ -stellige) Relation ist eine Menge  $R$  geordneter Tupel von Elementen aus  $M_1, \dots, M_k$ , d.h.  $R \subseteq M_1 \times \dots \times M_k$  ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts der Mengen  $M_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

## Beispiele

- $\emptyset$  ist die kleinste Relation auf  $M_1 \times \dots \times M_k$ .
- $M_1 \times \dots \times M_k$  ist die größte Relation auf  $M_1 \times \dots \times M_k$ .

# Binäre Relationen

Seien  $M$ ,  $N$  Mengen.

## Definition A.1.2 (Binäre Relation)

Eine (binäre) Relation auf  $M$  und  $N$  ist eine Menge  $R$  geordneter Paare von Elementen aus  $M$  und  $N$ , d.h.  $R$  ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von  $M$  und  $N$ ,  $R \subseteq M \times N$ .

## Beispiele

- $\emptyset$  ist die kleinste Relation auf  $M$  und  $N$ .
- $M \times N$  ist die größte Relation auf  $M$  und  $N$ .

## Bemerkung

- Ist  $R$  eine Relation auf  $M$  und  $N$ , ist es üblich  $m R n$ ,  $R(m, n)$  oder  $R m n$  zu schreiben anstelle von  $(m, n) \in R$ .



# Zwischen, auf

## Definition A.1.3 (Zwischen, auf)

Eine Relation  $R$  auf  $M$  und  $N$  heißt **Relation zwischen  $M$  und  $N$**  (oder: **Relation auf  $M \times N$** ).

Gilt  $M$  gleich  $N$ , heißt  $R$  **Relation auf  $M$** , in Zeichen:  $(M, R)$ .

# Argument- u. Wertebereich binärer Relationen

## Definition A.1.4 (Argument- und Wertebereich)

Sei  $R$  eine Relation auf  $M$  und  $N$ .

Die Mengen

- $\text{dom}(R) =_{df} \{m \mid \exists n \in N. (m, n) \in R\}$
- $\text{ran}(R) =_{df} \{n \mid \exists m \in M. (m, n) \in R\}$

heißen **Argumentbereich** (engl. **domain**) bzw. **Wertebereich** (engl. **range**) von  $R$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Eigensch. von Relationen auf einer Menge $M$

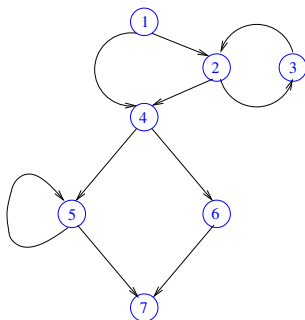
## Definition A.1.5 (Eigensch. von Relationen auf $M$ )

Eine Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  heißt

1. **reflexiv** gdw  $\forall m \in M. m R m$
2. **irreflexiv** gdw  $\forall m \in M. \neg m R m$
3. **transitiv** gdw  $\forall m, n, p \in M. m R n \wedge n R p \Rightarrow m R p$
4. **intransitiv** gdw  $\forall m, n, p \in M. m R n \wedge n R p \Rightarrow \neg m R p$
5. **symmetrisch** gdw  $\forall m, n \in M. m R n \iff n R m$
6. **antisymmetrisch** gdw  $\forall m, n \in M. m R n \wedge n R m \Rightarrow m = n$
7. **asymmetrisch** gdw  $\forall m, n \in M. m R n \Rightarrow \neg n R m$
8. **linear** gdw  $\forall m, n \in M. m R n \vee n R m \vee m = n$
9. **total** gdw  $\forall m, n \in M. m R n \vee n R m$

# (Anti-) Beispiel

Sei  $G = (N, E, s \equiv 1, e \equiv 7)$  der nachstehende (Fluss-) Graph und  $R$  die Relation 'Knoten  $\cdot$  ist über eine (gerichtete) Kante aus  $E$  von  $G$  verbunden mit Knoten  $\cdot$ ' (z.B. ist Knoten 4 verbunden mit Knoten 6, aber nicht umgekehrt).



Die Relation  $R$  ist nicht reflexiv, nicht irreflexiv, nicht transitiv, nicht intransitiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, nicht linear und nicht total.

# Äquivalenzrelation

Sei  $R$  eine Relation auf  $M$ .

## Definition A.1.6 (Äquivalenzrelation)

$R$  heißt **Äquivalenzrelation** (oder **Äquivalenz**) gdw  $R$  ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Übungsaufgabe A.1.7

Bezeichne  $|$  die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$ , d.h. die Relation 'teilt' (ohne Rest), z.B.  $5 | 35$ .

Beweise oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels:

Die Teilbarkeitsrelation  $|$  auf  $\mathbb{N}_0$  ist

1. reflexiv
2. irreflexiv
3. transitiv
4. intransitiv
5. symmetrisch
6. antisymmetrisch
7. asymmetrisch
8. linear
9. total
10. Äquivalenz(relation)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# A.2

## Geordnete Mengen, Ordnungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## A.2.1

# Halbordnungen, partielle Ordnungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Geordnete Mengen

Sei  $R$  eine Relation auf  $M$ .

## Definition A.2.1.1 (Halbordnung)

$R$  ist eine **Halbordnung** (oder: **Quasiordnung**) (engl. **pre-order** (oder: **quasi-order**)) gdw  $R$  ist reflexiv und transitiv.

## Definition A.2.1.2 (Partielle Ordnung)

$R$  ist eine **partielle Ordnung** (engl. **partial order** (oder: **poset** oder: **order**)) gdw  $R$  ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

## Definition A.2.1.3 (Strikte partielle Ordnung)

$R$  ist eine **strikte partielle Ordnung** (engl. **strict partial order**) gdw  $R$  ist asymmetrisch und transitiv.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Beispiele geordneter Mengen

## Halbordnung (reflexiv, transitiv)

- Die Relation  $\Rightarrow$  auf logischen Formeln.

## Partielle Ordnung (reflexiv, transitiv, antisymmetrisch)

- Die Relationen  $=$ ,  $\leq$  und  $\geq$  auf  $\mathbb{N}$ .
- Die Relation  $m \mid n$  ( $m$  ist Teiler von  $n$ ) auf  $\mathbb{N}$ .

## Strikte partielle Ordnungen (asymmetrisch, transitiv)

- Die Relationen  $<$  und  $>$  auf  $\mathbb{N}$ .
- Die Relationen  $\subset$  und  $\supset$  auf Mengen.

## Äquivalenzrelation (reflexiv, transitiv, symmetrisch)

- Die Relation  $\Longleftrightarrow$  auf logischen Formeln.
- Die Relation 'haben die selben Primzahl faktoren' auf  $\mathbb{N}$ .
- Die Relation 'sind Bürger desselben Landes' auf Leuten.

# Beachte

- Eine antisymmetrische Halbordnung ist eine partielle Ordnung; eine symmetrische Halbordnung ist eine Äquivalenzrelation.
- Der Einfachheit halber wird auch das Paar  $(M, R)$  eine Halbordnung, partielle Ordnung bzw. strikte partielle Ordnung genannt.
- Präziser können wir vom Paar  $(M, R)$  als einer durch  $R$  halbgeordneten, partiell geordneten bzw. strikt partiell geordneten Menge sprechen.
- Synonym sprechen wir von  $M$  auch als von einer halbgeordneten, partiell geordneten bzw. strikt partiell geordneten Menge, oder als einer Menge mit einer Halbordnung, partiellen Ordnung bzw. strikten partiellen Ordnung.
- Unabhängig von der Grundmenge ist die Gleichheitsrelation = stets eine partielle Ordnung, die sog. diskrete (partielle) Ordnung.

# Der strikte Teil einer Ordnung

Sei  $\sqsubseteq$  eine Halbordnung (reflexiv, transitiv) auf  $P$ .

## Definition A.2.1.4 (Strikter Teil von $\sqsubseteq$ )

Die Relation  $\sqsubset$  auf  $P$  definiert durch

$$\forall p, q \in P. p \sqsubset q \iff_{df} p \sqsubseteq q \wedge p \neq q$$

heißt **strikt Teil** von  $\sqsubseteq$ .

## Korollar A.2.1.5 (Strikte partielle Ordnung)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung und  $\sqsubset$  der strikte Teil von  $\sqsubseteq$ .

Dann gilt:  $(P, \sqsubset)$  ist eine **strikte partielle Ordnung**.

# Nützliche Resultate

Sei  $\sqsubset$  eine strikte partielle Ordnung (asymmetrisch, transitiv) auf  $P$ .

## Lemma A.2.1.6

Die Relation  $\sqsubseteq$  ist irreflexiv.

## Lemma A.2.1.7

Das Paar  $(P, \sqsubseteq)$ , wobei  $\sqsubseteq$  definiert ist durch

$$\forall p, q \in P. p \sqsubseteq q \iff_{df} p \sqsubset q \vee p = q$$

ist eine **partielle Ordnung**.

# Induzierte (oder: ererbte) partielle Ordnung

## Definition A.2.1.8 (Induzierte partielle Ordnung)

Sei  $(P, \sqsubseteq_P)$  eine partiell geordnete Menge,  $Q \subseteq P$  eine Teilmenge von  $P$  und  $\sqsubseteq_Q$  eine Relation auf  $Q$  definiert durch

$$\forall q, r \in Q. q \sqsubseteq_Q r \iff_{df} q \sqsubseteq_P r$$

Dann heißt  $\sqsubseteq_Q$  die **induzierte partielle Ordnung** auf  $Q$  (oder: **ererbte Ordnung** von  $P$  auf  $Q$ ).

# Übungsaufgabe A.2.1.9

Bezeichne  $|$  die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$ , d.h. die Relation '· teilt ·' (ohne Rest), z.B.  $5 | 35$ .

Beweise oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels:

Die Teilbarkeitsrelation  $|$  auf  $\mathbb{N}_0$  ist eine

1. Halbordnung
2. partielle Ordnung
3. strikte partielle Ordnung
4. Äquivalenz(relation)

# A.2.2

## Hasse-Diagramme

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

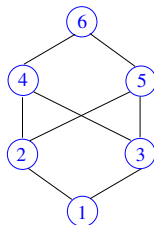
Kap. 13

Kap. 14



# Hasse-Diagramme

...sind kompakte graphische Darstellungen partieller Ordnungen.



Die Kanten eines **Hasse-Diagramms**

- werden von **unten** nach **oben** gelesen (**tiefer** bedeutet dabei **kleiner** bzgl. der Ordnung, **höher** bedeutet **größer**).
- stellen die Relation  $R$  '· ist ein unmittelbarer Vorgänger von ·' einer **partiellen Ordnung**  $(P, \sqsubseteq)$  definiert durch
$$p R q \iff_{df} p \sqsubseteq q \wedge \nexists r \in P. p \sqsubseteq r \sqsubseteq q$$
dar, wobei  $\sqsubseteq$  die strikte partielle Ordnung von  $\sqsubseteq$  ist.

# Lesen von Hasse-Diagrammen

Die Hasse-Diagramm-Darstellung einer **partiellen Ordnung**

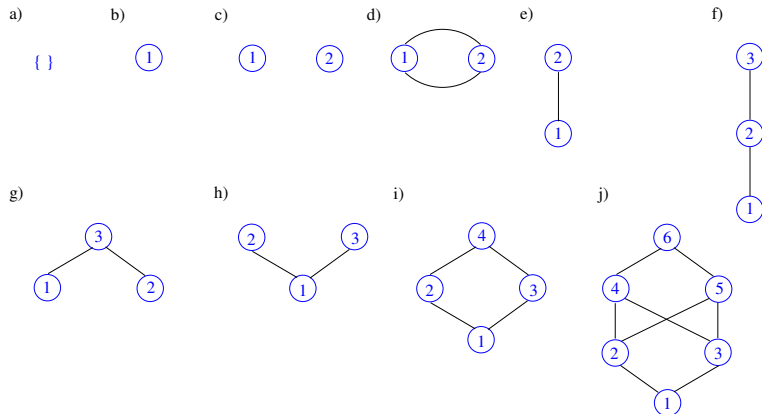
- verzichtet auf Kanten zur Darstellung von Reflexivität und Transitivität der Relation.
- konzentriert sich auf die Darstellung der Relation 'unmittelbarer Vorgänger'.

Die Hasse-Diagramm-Darstellung einer **partiellen Ordnung**

- ist kompakt und (gemessen an der Zahl der Kanten) ökonomisch.
- erhält alle relevanten Informationen über die dargestellte partielle Ordnung:
  - $p \sqsubseteq q \wedge p = q$  (**Reflexivität**): trivialerweise dargestellt (implizit, also ohne explizite Kante).
  - $p \sqsubseteq q \wedge p \neq q$  (**Transitivität**): dargestellt durch aufsteigende Pfade (mit mindestens einer Kante) von  $p$  nach  $q$ .

# Übungsaufgabe A.2.2.1

Welche der folgenden Diagramme sind Hasse-Diagrammdarstellungen einer partiellen Ordnung?



# Übungsaufgabe A.2.2.2

Bezeichne  $|$  die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$ , d.h. die Relation ' $\cdot$  teilt  $\cdot$ ' (ohne Rest), z.B.  $5 | 35$ .

Gib einen aussagekräftigen Ausschnitt des Hasse-Diagramms der Teilbarkeitsrelation  $|$  auf  $\mathbb{N}_0$  an.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## A.2.3

# Schranken und extreme Elemente

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Schranken in Halbordnungen

## Definition A.2.3.1 (Schranken in Halbordnungen)

Sei  $(Q, \sqsubseteq)$  eine Halbordnung,  $q \in Q$  und  $Q' \subseteq Q$ .

$q$  heißt

1. **untere Schranke** von  $Q'$ , in Zeichen:  $q \sqsubseteq Q'$ , wenn  
 $\forall q' \in Q'. q \sqsubseteq q'$
2. **obere Schranke** von  $Q'$ , in Zeichen:  $Q' \sqsubseteq q$ , wenn  
 $\forall q' \in Q'. q' \sqsubseteq q$
3. **größte untere Schranke (gus)** (oder **Infimum**) von  $Q'$ , in  
Zeichen:  $\sqcap Q'$ , wenn  $q$  eine untere Schranke von  $Q'$  ist  
und für jede andere untere Schranke  $\hat{q}$  von  $Q'$  gilt:  $\hat{q} \sqsubseteq q$ .
4. **kleinste obere Schranke (kos)** (oder **Supremum**) von  $Q'$ ,  
in Zeichen:  $\sqcup Q'$ , wenn  $q$  eine obere Schranke von  $Q'$  ist  
und für jede andere obere Schranke  $\hat{q}$  von  $Q'$  gilt:  $q \sqsubseteq \hat{q}$ .

# Extreme Elemente in Halbordnungen

## Definition A.2.3.2 (Extreme Elemente in Halbordn.)

Sei  $(Q, \sqsubseteq)$  eine Halbordnung,  $\sqsubset$  der strikte Teil von  $\sqsubseteq$  sowie  $Q' \subseteq Q$  und  $q \in Q'$ .

$q$  heißt

1. **minimales Element** von  $Q'$ , wenn es kein  $q' \in Q'$  gibt mit  $q' \sqsubset q$ .
2. **maximales Element** von  $Q'$ , wenn es kein  $q' \in Q'$  gibt mit  $q \sqsubset q'$ .
3. **kleinstes** (oder **Minimum-**) **Element** von  $Q'$ , wenn  $q \sqsubseteq Q'$ .
4. **größtes** (oder **Maximum-**) **Element** von  $Q'$ , wenn  $Q' \sqsubseteq q$ .

**Bemerkung:** Kleinste und größte Elemente von  $Q$  selbst werden gewöhnlich mit  $\perp$  bzw.  $\top$  (**Tief, Hoch** (engl. **bottom, top**)) bezeichnet, wenn sie existieren. **Kleinste** (**größte**) Elemente von  $Q$  sind stets auch **minimale** (**maximale**) Elemente von  $Q$ .

# Existenz und Eindeutigkeit

...von Schranken und extremen Elementen in partiell geordneten Mengen.

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung und  $Q \subseteq P$  eine Teilmenge von  $P$ .

**Lemma A.2.3.3 (kos/gus: Eindeutig, wenn existent)**

Kleinste obere Schranken, größte untere Schranken, kleinste Elemente und größte Elemente in  $Q$  sind **eindeutig**, wenn sie existieren.

**Lemma A.2.3.4 (Min./Max. Elemente: Nicht eind.)**

Minimale u. maximale Elemente in  $Q$  sind i.a. **nicht eindeutig**.

**Beachte:** Lemma A.2.3.3 legt nahe,  $\sqcup$  und  $\sqcap$  als partielle Abbildungen  $\sqcup, \sqcap : \mathcal{P}(P) \rightarrow P$  von der Potenzmenge  $\mathcal{P}(P)$  von  $P$  nach  $P$  zu betrachten. Lemma A.2.3.3 gilt nicht für Halbordnungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Charakterisierung kleinster, größter Elemente

...in Form von **Infima** und **Suprema** von Mengen.

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung.

## Lemma A.2.3.5 (Charakterisierung von $\perp$ und $\top$ )

Das **kleinste Element**  $\perp$  und das **größte Element**  $\top$  von  $P$  sind durch das **Supremum** bzw. das **Infimum** der **leeren Menge** und das **Infimum** bzw. das **Supremum** von  $P$  gegeben, d.h.:

$$\perp = \bigsqcup \emptyset = \bigsqcap P \quad \text{und} \quad \top = \bigsqcap \emptyset = \bigsqcup P$$

wenn sie existieren.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Untere und obere Schranken von Mengen

Betrachtet man  $\sqsubseteq$  und  $\sqsupseteq$  als partielle Funktionen  $\sqsubseteq, \sqsupseteq : \mathcal{P}(P) \rightarrow P$  auf der Potenzmenge einer partiellen Ordnung  $(P, \sqsubseteq)$ , legt das nahe, zwei weitere Abbildungen  $US, OS : \mathcal{P}(P) \rightarrow \mathcal{P}(P)$  auf  $\mathcal{P}(P)$  einzuführen:

## Definition A.2.3.6 (Untere, obere Schranken v. M.)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung. Dann bezeichnen  $US, OS : \mathcal{P}(P) \rightarrow \mathcal{P}(P)$  zwei Abbildungen, die eine Teilmenge  $Q \subseteq P$  auf die Menge ihrer **unteren Schranken** bzw. **oberen Schranken** abbilden:

1.  $\forall Q \subseteq P. US(Q) =_{df} \{us \in P \mid us \sqsubseteq Q\}$
2.  $\forall Q \subseteq P. OS(Q) =_{df} \{os \in P \mid Q \sqsubseteq os\}$

# Eigensch. unterer, oberer Schranken v. Mengen

## Lemma A.2.3.7

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung und  $Q \subseteq P$ . Dann gilt:

$$\bigsqcup Q = \bigsqcap OS(Q) \quad \text{und} \quad \bigsqcap Q = \bigsqcup US(Q)$$

wenn das Supremum und das Infimum von  $Q$  existieren.

## Lemma A.2.3.8

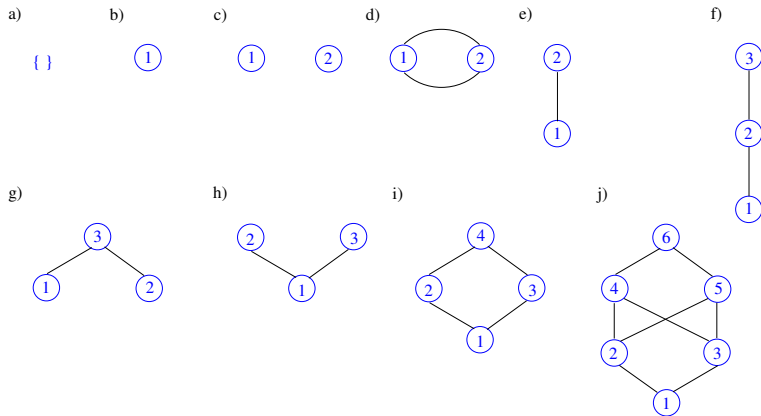
Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung,  $Q, Q_1, Q_2 \subseteq P$ . Dann gilt:

1.  $Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow US(Q_1) \supseteq US(Q_2) \wedge OS(Q_1) \supseteq OS(Q_2)$
2.  $OS(US(OS(Q))) = OS(Q)$
3.  $US(OS(US(Q))) = US(Q)$

Beachte: Lemma A.2.3.8(1) sagt, dass  $US$  und  $OS$  antitotische Abbildungen sind (s. Kapitel A.2.7).

# Übungsaufgabe A.2.3.9

Welche Elemente der folgenden Diagramme sind minimal, maximal, kleinst, größt?



# Übungsaufgabe A.2.3.10

Bezeichne  $|$  die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$ , d.h. die Relation '· teilt ·' (ohne Rest), z.B.  $5 | 35$ .

Gib die Menge derjenigen Elemente aus  $\mathbb{N}_0$  an, die

1. minimal
2. maximal
3. kleinst
4. größt

bzgl. der Teilbarkeitsrelation  $|$  auf  $\mathbb{N}_0$  sind.

## A.2.4

# Noethersche und Artinsche Ordnungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Noethersche und Artinsche Ordnungen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung.

## Definition A.2.4.1 (Noethersche Ordnung)

$(P, \sqsubseteq)$  heißt **Noethersche Ordnung** (engl. **Noetherian order**), wenn jede nichtleere Teilmenge  $\emptyset \neq Q \subseteq P$  ein minimales Element enthält.

## Definition A.2.4.2 (Artinsche Ordnung)

$(P, \sqsubseteq)$  heißt **Artinsche Ordnung** (engl. **Artinian order**), wenn die duale Ordnung  $(P, \supseteq)$  von  $(P, \sqsubseteq)$  eine Noethersche Ordnung ist.

## Lemma A.2.4.3

$(P, \sqsubseteq)$  ist eine **Artinsche Ordnung** gdw jede nichtleere Teilmenge  $\emptyset \neq Q \subseteq P$  enthält ein maximales Element.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Wohlfundierte Ordnungen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung.

## Definition A.2.4.4 (Wohlfundierte Ordnung)

$(P, \sqsubseteq)$  heißt **wohlfundierte Ordnung** (engl. *well-founded order*), wenn  $(P, \sqsubseteq)$  eine total geordnete Noethersche Ordnung ist.

## Lemma A.2.4.5

$(P, \sqsubseteq)$  ist eine **wohlfundierte Ordnung** gdw jede nichtleere Teilmenge  $\emptyset \neq Q \subseteq P$  enthält ein kleinstes Element.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Noethersche Induktion

## Theorem A.2.4.6 (Noethersche Induktion)

Sei  $(N, \sqsubseteq)$  eine Noethersche Ordnung,  $N_{min} \subseteq N$  die Menge der minimalen Elemente von  $N$  und  $\phi : N \rightarrow \mathbb{B}$  ein Prädikat auf  $N$ . Dann:

Wenn

1.  $\forall n \in N_{min}. \phi(n)$  (Induktionsanfang)
2.  $\forall n \in N \setminus N_{min}. (\forall m \sqsubset n. \phi(m)) \Rightarrow \phi(n)$  (Induk.-Schritt)

dann gilt:

$$\forall n \in N. \phi(n)$$

# A.2.5

## Ketten

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Ketten, Antiketten

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung.

## Definition A.2.5.1 (Kette)

Eine Menge  $K \subseteq P$  heißt **Kette** (engl. **chain**), wenn die Elemente von  $K$  total geordnet sind, d.h. wenn gilt:

$$\forall k_1, k_2 \in K. k_1 \sqsubseteq k_2 \vee k_2 \sqsubseteq k_1.$$

## Definition A.2.5.2 (Antikette)

Eine Menge  $K \subseteq P$  heißt **Antikette** (engl. **antichain**), wenn gilt:  $\forall k_1, k_2 \in K. k_1 \sqsubseteq k_2 \Rightarrow k_1 = k_2$ .

## Definition A.2.5.3 (Endliche, unendl. (Anti-) Kette)

Sei  $K \subseteq P$  eine Kette oder Antikette.  $K$  heißt **endlich**, wenn die Zahl der Elemente endlich ist;  $K$  heißt **unendlich** sonst.

**Beachte:** Jede Menge  $P$  wird durch Überstülpen der diskreten Ordnung  $(P, =)$  zu einer Antikette.

# Aufsteigende, absteigende Ketten

## Definition A.2.5.4 (Aufsteigende, absteigende Kette)

Sei  $K \subseteq P$  eine Kette.  $K$  dargestellt in der Form

- $K = \{k_0 \sqsubseteq k_1 \sqsubseteq k_2 \sqsubseteq \dots\}$
- $K = \{k_0 \sqsupseteq k_1 \sqsupseteq k_2 \sqsupseteq \dots\}$

heißt **aufsteigende Kette** bzw. **absteigende Kette**.

# Beispiele für Ketten

## Die Menge

- $M =_{df} \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$  ist eine Kette in  $\mathbb{N}$ .
- $M =_{df} \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ungerade}\}$  ist eine Kette in  $\mathbb{Z}$ .
- $M =_{df} \{\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist eine Kette in der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  von  $\mathbb{N}$ .

**Beachte:** Eine Kette kann stets als aufsteigende und absteigende Kette aufgefasst werden.

- $\{0 \leq 2 \leq 4 \leq 6 \leq \dots\}$ :  $\mathbb{N}$  als aufsteigende Kette.
- $\{\dots \geq 6 \geq 4 \geq 2 \geq 0\}$ :  $\mathbb{N}$  als absteigende Kette.
- $\{\dots \leq -3 \leq -1 \leq 1 \leq 3 \leq \dots\}$ :  $\mathbb{Z}$  als aufsteig. Kette.
- $\{\dots \geq 3 \geq 1 \geq -1 \geq -3 \geq \dots\}$ :  $\mathbb{Z}$  als absteig. Kette.
- ...

# Schließlich stationäre Folgen

## Definition A.2.5.5 (Schließlich stationäre Folge)

1. Eine aufsteigende Folge der Form

$$p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \dots$$

heißt **schließlich stationär**, wenn

$$\exists n \in \mathbb{N}. \forall j \in \mathbb{N}. p_{n+j} = p_n$$

2. Eine absteigende Folge der Form

$$p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \dots$$

heißt **schließlich stationär**, wenn

$$\exists n \in \mathbb{N}. \forall j \in \mathbb{N}. p_{n+j} = p_n$$

# Ketten und Folgen

## Lemma A.2.5.6

Eine aufsteigende oder absteigende Folge der Form

$$p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \dots \quad \text{oder} \quad p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \dots$$

1. ist eine endliche Kette gdw sie ist schließlich stationär.
2. ist eine unendliche Kette gdw sie ist nicht schließlich stationär.

Beachte den feinen Unterschied zwischen der Sichtweise einer Kette als Menge

$$\{p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \dots\} \quad \text{or} \quad \{p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \dots\}$$

und als Folge

$$p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \dots \quad \text{or} \quad p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \dots$$

Anders als Mengen können Folgen Duplikate enthalten, was einer Definition von Ketten als Multimengen entspräche.

# Aufsteigende, absteigende Kettenbedingung

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung.

## Definition A.2.5.7 (Aufst./abst. Kettenbedingung)

$(P, \sqsubseteq)$  erfüllt die

1. **aufsteigende Kettenbedingung** (engl. *ascending chain condition*), wenn jede aufsteigende Kette schließlich stationär ist, d.h. für jede Kette  $p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq p_n \sqsubseteq \dots$  gibt es einen Index  $m \geq 1$  mit  $p_m = p_{m+j}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .
2. **absteigende Kettenbedingung** (engl. *descending chain condition*), wenn jede absteigende Kette schließlich stationär ist, d.h. für jede Kette  $p_1 \supseteq p_2 \supseteq \dots \supseteq p_n \supseteq \dots$  gibt es einen Index  $m \geq 1$  mit  $p_m = p_{m+j}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .



# Ketten und Noethersche Ordnungen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung.

## Lemma A.2.5.8 (Noethersche Ordnung)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine Noethersche Ordnung.
2.  $(P, \sqsubseteq)$  erfüllt die absteigende Kettenbedingung.
3. Jede Kette der Form

$$p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \dots$$

ist schließlich stationär, d.h.:  $\exists n \in \mathbb{N}. \forall j \in \mathbb{N}. p_{n+j} = p_n$ .

4. Jede Kette der Form

$$p_0 \sqsubset p_1 \sqsubset p_2 \sqsubset \dots$$

ist endlich.

# Ketten und Artinsche Ordnungen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung.

## Lemma A.2.5.9 (Artinsche Ordnung)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine Artinsche Ordnung.
2.  $(P, \sqsubseteq)$  erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.
3. Jede Kette der Form

$$p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \dots$$

ist schließlich stationär, d.h.:  $\exists n \in \mathbb{N}. \forall j \in \mathbb{N}. p_{n+j} = p_n$ .

4. Jede Kette der Form

$$p_0 \sqsubset p_1 \sqsubset p_2 \sqsubset \dots$$

ist endlich.

# Ketten und Noethersche, Artinsche Ordnungen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung.

## Lemma A.2.5.10 (Noethersche, Artinsche Ordnung)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine Noethersche und eine Artinsche Ordnung.
2.  $(P, \sqsubseteq)$  erfüllt die absteigende und die aufsteigende Kettenbedingung.
3. Jede Kette  $K \subseteq P$  ist endlich.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# A.2.6

## Gerichtete Mengen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Gerichtete Mengen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung und  $\emptyset \neq G \subseteq P$ .

## Definition A.2.6.1 (Gerichtete Menge)

$G (\neq \emptyset)$  heißt **gerichtete Menge** (engl. directed set), wenn

$$\forall g, h \in G. \exists k \in G. k \in OS(\{g, h\})$$

d.h. für je zwei Elemente  $g$  und  $h$  gibt es eine gemeinsame obere Schranke von  $g$  und  $h$  in  $G$ , d.h.  $OS(\{g, h\}) \cap G \neq \emptyset$ .

# Eigenschaften gerichteter Mengen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung und  $G \subseteq P$ .

## Lemma A.2.6.2

$G$  ist eine **gerichtete Menge** gdw jede endliche Teilmenge  $G' \subseteq G$  hat eine obere Schranke in  $G$ , d.h.  
 $\exists g \in G. g \in OS(G'),$  d.h.  $OS(G') \cap G \neq \emptyset$ .

## Lemma A.2.6.3

Hat  $G$  ein größtes Element, so ist  $G$  eine gerichtete Menge.

# Eigenschaften endlicher gerichteter Mengen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung und  $G \subseteq P$ .

## Korollar A.2.6.4

Sei  $G$  eine **endliche gerichtete Menge**. Dann gilt:  
 $\bigsqcup G$  *existiert*  $\in G$  und ist das größte Element von  $G$ .

**Beweis.** Weil  $G$  eine gerichtete Menge ist, gilt:

$$\exists g \in G. g \in OS(G), \text{ d.h. } OS(G) \cap G \neq \emptyset.$$

Das bedeutet  $G \sqsubseteq g$ . Die Antisymmetrie von  $\sqsubseteq$  liefert, dass das Element mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt ist. Folglich ist  $g$  das (eindeutig bestimmte) größte Element von  $G$  gegeben durch  $\bigsqcup G$ , d.h.  $g = \bigsqcup G$ .

**Beachte:** Ist  $G$  unendlich, gilt die Aussage von **Korollar A.2.6.4** i.a. nicht.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Stark gerichtete Mengen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung mit kleinstem Element  $\perp$  und  $G \subseteq P$ .

## Definition A.2.6.5 (Stark gerichtete Menge)

$G \neq \emptyset$  heißt **stark gerichtete Menge** (engl. **strongly directed set**), wenn

1.  $\perp \in G$
2.  $\forall g, h \in G. \exists k \in G. k = \bigsqcup\{g, h\}$ , d.h. für je zwei Elemente  $g$  und  $h$  existiert das Supremum  $\bigsqcup\{g, h\}$  von  $g$  und  $h$  in  $G$ .



# Eigenschaften stark gerichteter Mengen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung mit kleinstem Element  $\perp$  und  $G \subseteq P$ .

## Lemma A.2.6.6

$G$  ist eine stark gerichtete Menge gdw jede **endliche** Teilmenge  $G' \subseteq G$  hat ein Supremum in  $G$ , d.h.  $\exists g \in G. d = \bigsqcup G'$ .

## Lemma A.2.6.7

Sei  $G$  eine **endliche stark gerichtete Menge**. Dann gilt:  
 $\bigsqcup G$  *existiert*  $\in G$  und ist das größte Element von  $G$ .

**Beachte:** Die Aussage von **Lemma A.2.6.7** gilt i.a. nicht, wenn  $G$  unendlich ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Gerichtete Mengen, stark ger. Mengen, Ketten

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung mit kleinstem Element  $\perp$ .

## Lemma A.2.6.8

Sei  $\emptyset \neq G \subseteq P$  eine nichtleere Teilmenge von  $P$ . Dann gilt:

1.  $G$  ist eine gerichtete Menge, wenn  $G$  eine stark gerichtete Menge ist.
2.  $G$  ist eine stark gerichtete Menge, wenn  $\perp \in G$  und  $G$  eine Kette ist.

## Korollar A.2.6.9

Sei  $\emptyset \neq G \subseteq P$  eine nichtleere Teilmenge von  $P$ . Dann gilt:

$\perp \in G \wedge G$  Kette  $\Rightarrow G$  stark gerichtete Menge  $\Rightarrow G$  gerichtete Menge

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

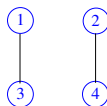
Kap. 13

Kap. 14

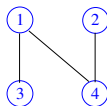
# Übungsaufgabe A.2.6.10

Welche der folgenden **partiellen Ordnungen** sind **(stark) gerichtete Mengen**? Welche ihrer **Teilmengen** sind **(stark) gerichtete Mengen**?

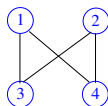
a)



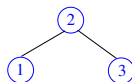
b)



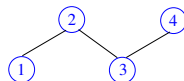
c)



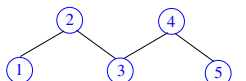
d)



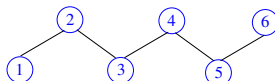
e)



f)



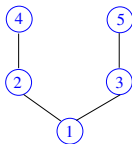
g)



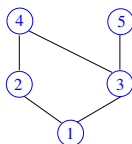
# Übungsaufgabe A.2.6.11

Welche der folgenden **partiellen Ordnungen** sind (**stark**) **gerichtete Mengen**? Welche ihrer **Teilmengen** sind (**stark**) **gerichtete Mengen**?

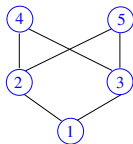
a)



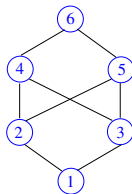
b)



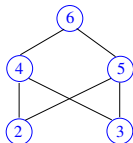
c)



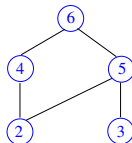
d)



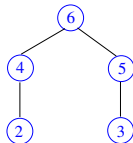
e)



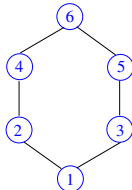
f)



g)



h)



# Übungsaufgabe A.2.6.12

Betrachte die partielle Ordnung  $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$  mit  $\sqsubseteq =_{df} |$ , wobei  $|$  die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$  bezeichne, d.h. die Relation ' $\cdot$  teilt  $\cdot$ ' (ohne Rest), z.B.  $5 | 35$ .

Ist die Menge  $\mathbb{N}_0$

1. gerichtet?
2. stark gerichtet?

Welche Teilmengen von  $\mathbb{N}_0$  sind

1. gerichtet?
2. stark gerichtet?

Beweis oder Gegenbeispiel.

## A.2.7

# Abbildungen auf partiellen Ordnungen

# Monotone und antitone Abbildungen auf POs

Seien  $(C, \sqsubseteq_C)$ ,  $(D, \sqsubseteq_D)$  partielle Ordnungen und  $f \in [C \rightarrow D]$  eine Abbildung von  $C$  nach  $D$ .

## Definition A.2.7.1 (Monotone Abbildungen auf POs)

$f$  heißt **monoton** (oder: **ordnungserhaltend**) gdw

$$\forall c, c' \in C. c \sqsubseteq_C c' \Rightarrow f(c) \sqsubseteq_D f(c') \\ (\text{Erhalt der Ordnung von Elementen})$$

## Definition A.2.7.2 (Antitone Abbildungen auf POs)

$f$  heißt **antiton** (oder: **ordnungsumkehrend**) gdw

$$\forall c, c' \in C. c \sqsubseteq_C c' \Rightarrow f(c') \sqsupseteq_D f(c) \\ (\text{Umkehrung der Ordnung von Elementen})$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/16

# Expandierende u. kontrahierende Abb. auf POs

Sei  $(C, \sqsubseteq_C)$  eine partielle Ordnung,  $f \in [C \rightarrow C]$  eine Abbildung auf  $C$  und  $\hat{c} \in C$  ein Element von  $C$ .

## Definition A.2.7.3 (Expandierende Abb. auf POs)

$f$  heißt

1. **expandierend** (oder: **inflationär**) für  $\hat{c}$  gdw  $\hat{c} \sqsubseteq f(\hat{c})$
2. **expandierend** (oder: **inflationär**) gdw  $\forall c \in C. c \sqsubseteq f(c)$

## Definition A.2.7.4 (Kontrahierende Abb. auf POs)

$f$  heißt

1. **kontrahierend** (oder: **deflationär**) für  $\hat{c}$  gdw  $f(\hat{c}) \sqsubseteq \hat{c}$
2. **kontrahierend** (oder: **deflationär**) gdw  $\forall c \in C. f(c) \sqsubseteq c$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## A.2.8

# Ordnungshomomorphismen und -isomorphismen

# Ordnungshomomorphismen, -isomorphismen

Seien  $(P, \sqsubseteq_P)$ ,  $(R, \sqsubseteq_R)$  partielle Ordnungen und  $f \in [P \rightarrow R]$  eine Abbildung von  $P$  nach  $R$ .

## Definition A.2.8.1 (Ord.-Hom. & -Isomorphismus)

$f$  heißt

1. **Ordnungshomomorphismus** zwischen  $P$  und  $R$ , wenn  $f$  monoton (oder ordnungserhaltend) ist, d.h.:

$$\forall p, q \in P. p \sqsubseteq_P q \Rightarrow f(p) \sqsubseteq_R f(q)$$

2. **Ordnungsisomorphismus** zwischen  $P$  und  $R$ , wenn  $f$  ein bijektiver Ordnungshomomorphismus zwischen  $P$  und  $R$  und die inverse Abbildung  $f^{-1}$  von  $f$  ein Ordnungshomomorphismus zwischen  $R$  und  $P$  ist.

## Definition A.2.8.2 (Ordnungsisomorph)

$(P, \sqsubseteq_P)$  und  $(R, \sqsubseteq_R)$  heißen **ordnungsisomorph**, wenn es einen Ordnungsisomorphismus zwischen  $P$  und  $R$  gibt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/16

# Ordnungseinbettungen

Seien  $(P, \sqsubseteq_P)$ ,  $(R, \sqsubseteq_R)$  partielle Ordnungen und  $f \in [P \rightarrow R]$  eine Abbildung von  $P$  nach  $R$ .

## Definition A.2.8.3 (Ordnungseinbettung)

$f$  heißt **Ordnungseinbettung** von  $P$  in  $R$  gdw

$$\forall p, q \in P. p \sqsubseteq_P q \iff f(p) \sqsubseteq_R f(q)$$

## Lemma A.2.8.4 (Ord.-Einbett. und -Isomorphismen)

$f$  ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen  $P$  und  $R$  gdw  $f$  ist eine Ordnungseinbettung von  $P$  in  $R$  und  $f$  ist surjektiv.

**Intuitiv:** Ordnungsisomorphe partielle Ordnungen sind ‘im wesentlichen gleich’.

# A.3

## Vollständige partielle Ordnungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## A.3.1

# Kettenvollständige, gerichtete vollständige partielle Ordnungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vollständige partielle Ordnungen

...oder vollständige partiell geordnete Mengen:

- ▶ ein etwas schwächerer Ordnungsbegriff als der eines Verbands (s. Anhang A.4), der aber in der Informatik oft ausreichend und in diesem Sinn angemessener zur Modellierung von Problemen ist, wenn (wie oft) die vollen Verbandseigenschaften nicht benötigt werden.
- ▶ gibt es in zwei Sichtweisen als sogenannte
  - kettenvollständige partielle Ordnungen (KVPOs)
  - gerichtete vollständige partielle Ordnungen (GVPOs)die sich konzeptuell auf Ketten bzw. gerichtete Mengen abstützen, dabei aber äquivalent sind (s. Theorem 3.1.7).

# Vollständige partielle Ordnungen: KVPO-Sicht

## Definition A.3.1.1 (Kettenvollständige part. Ordn.)

Eine partielle Ordnung  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine

1. **kettenprävollständige partielle Ordnung (prä-KVPO)**  
(engl. **chain complete partial order (pre-CCPO)**), wenn jede nichtleere (aufsteigende) Kette  $\emptyset \neq K \subseteq P$  eine kleinste obere Schranke  $\bigsqcup K$  in  $P$  hat, d.h.  $\bigsqcup K$  *existiert*  $\in P$ .
2. **(geerdete) kettenvollständige partielle Ordnung (KVPO)**  
(engl. **pointed chain complete partial order (CCPO)**), wenn jede (aufsteigende) Kette  $K \subseteq P$  eine kleinste obere Schranke  $\bigsqcup K$  in  $P$  hat, d.h.  $\bigsqcup K$  *existiert*  $\in P$ .

# Vollständige partielle Ordnungen: GVPO-Sicht

## Definition A.3.1.2 (Gerichtete vollst. part. Ordnung)

Eine partielle Ordnung  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine

1. gerichtete prävollständige partielle Ordnung (prä-GVPO) (engl. *directedly complete partial order* (pre-DCPO)), wenn jede gerichtete Teilmenge  $G \subseteq P$  eine kleinste obere Schranke  $\bigsqcup G$  in  $P$  hat, d.h.  $\bigsqcup G$  *existiert*  $\in P$ .
2. (geerdete) gerichtete vollständige partielle Ordnung (GVPO) (engl. *pointed directedly complete partial order* (DCPO)), wenn sie eine prä-GVPO ist und ein kleinstes Element  $\perp$  hat.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Anmerkungen zur KVPOs und GVPOs

Zu KVPOs:

- Eine KVPO wird oft als Bereich (engl. domain) bezeichnet.
- ‘Aufsteigende Kette’ and ‘Kette’ können in Definition A.3.1.1 gleichbedeutend verwendet werden, da Ketten stets aufsteigend angeordnet angegeben werden können. Der genauere Gebrauch ‘aufsteigende Kette’ macht die Forderung allerdings augenfälliger.

Zu GVPOs:

- In gerichteten Mengen  $M$  hat definitionsgemäß jede endliche Teilmenge eine obere Schranke in  $M$ . Ist  $M$  endlich, so gilt dies auch für  $M$  selbst, d.h.  $M$  hat ein Supremum in  $M$ ; für unendliche  $M$  gilt das nicht. Die GVPO-Eigenschaft folgt deshalb nicht trivial aus der Eigenschaft gerichtet von Mengen (s. Korollar A.2.6.4).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Existenz kleinster Elemente in VPOs

## Lemma A.3.1.3 (Ex. kleinster Elemente in VPOs)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine VPO, d.h. eine KVPO oder GVPO. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element in  $P$ , bezeichnet mit  $\perp$ , das durch das Supremum der leeren Kette bzw. Menge gegeben ist, d.h.:  $\perp = \bigsqcup \emptyset$ .

## Korollar A.3.1.4 (Nichtleerheit von VPOs)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine VPO, d.h. eine KVPO oder GVPO. Dann gilt:  $P \neq \emptyset$ .

Beachte: Lemma A.3.1.3 gilt nicht für prä-VPOs, d.h.  $(P, \sqsubseteq)$  eine prä-VPOs besitzt nicht notwendig ein kleinstes Element.

# Beziehungen endlicher POs, KVPOs, GVPOs

Sei  $P$  eine endliche Menge und  $\sqsubseteq$  eine Relation auf  $P$ .

## Lemma A.3.1.5 (Endliche POs, prä-VPOs)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine partielle Ordnung.
2.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine prä-KVPO.
3.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine prä-GVPO.

## Lemma A.3.1.6 (Endliche POs, KVPOs, GVPOs)

Sei  $p \in P$  mit  $p \sqsubseteq P$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine partielle Ordnung.
2.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine KVPO.
3.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine GVPO.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Äquivalenz von KVPOs und GVPOs

## Theorem A.3.1.7 (Äquivalenz)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine KVPO.
2.  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine GVPO.

**Beachte:** Spielt die ketten- oder gerichtete-Mengen-Sicht einer vollständigen partiellen Ordnung keine Rolle, so sprechen wir einfacher von einer **VPO** anstatt genauer von einer **KVPO** oder **GVPO**; analog gilt dies für **prä-VPOs**.

# Beispiele für prä-VPOs und VPOs (1)

- ▶  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$  ist eine **VPO** (d.h. eine **KVPO** und **GVPO**).

- Kleinstes Element:  $\emptyset$
- Kleinste obere Schranke  $\bigsqcup K$  von  $K$  *Kette*  $\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ :

$$\bigcup_{K' \in K} K'$$

- ▶ Die Menge endlicher und unendlicher **Zeichenreihen**  $Z$ ,  
partiell geordnet durch die **Präfixrelation**  $\sqsubseteq_{\text{pfx}}$  mit:

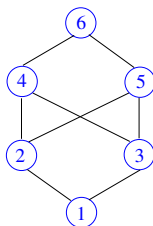
$$\forall z, z'' \in Z. z \sqsubseteq_{\text{pfx}} z'' \iff_{df} z = z'' \vee (z \text{ endlich} \wedge \exists z' \in Z. z ++ z' = z'')$$

ist eine **VPO** (d.h. eine **KVPO** und **GVPO**).

- ▶  $(\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}, \leq)$  ist eine **prä-VPO** (d.h. eine **prä-KVPO** und **prä-GVPO**), aber keine **VPO** (d.h. keine **KVPO** und **GVPO**).

# Beispiele für prä-VPOs und VPOs (2)

- ▶  $(\emptyset, \emptyset)$  ist eine prä-VPO (d.h. eine prä-KVPO und prä-GVPO), aber keine VPO (d.h. keine KVPO und GVPO). (Die prä-KVPO- (da keine nichtleeren Ketten in  $\emptyset$ ) und prä-GVPO- (da  $\emptyset$  einzige Teilmenge von  $\emptyset$  ist und diese definitionsgemäss nicht gerichtet ist) Eigenschaften gelten beide in trivialer Weise. Beachte dabei auch, dass aus  $P = \emptyset$  auch die Gleichheit  $\sqsubseteq = \emptyset \subseteq P \times P$  folgt.)
- ▶ Die durch folgendes Hasse-Diagramm gegebene partielle Ordnung  $(P, \sqsubseteq)$  ist eine VPO (d.h. eine KVPO u. GVPO).



# Beispiele für prä-VPOs und VPOs (3)

- Die Menge endlicher und nichtendlicher Zeichenreihen  $Z$ , partiell geordnet durch die folgendermaßen definierte lexikographische Ordnung  $\sqsubseteq_{lex}$ :

$$\forall s, t \in Z. s \sqsubseteq_{lex} t \iff_{df}$$

$$s = t \vee (\exists p \text{ endlich}, s', t' \in Z. s = p ++ s' \wedge t = p ++ t' \wedge (s' = \varepsilon \vee s'_1 < t'_1))$$

wobei  $\varepsilon$  die leere Zeichenreihe bezeichnet,  $w \downarrow_1$  das erste Zeichen einer Zeichenreihe  $w$  und  $<$  die lexikographische Ordnung auf Zeichen, ist eine VPO (d.h. eine KVPO und GVPO).

# (Anti-) Beispiele für VPOs

- ▶  $(\mathbb{N}, \leq)$  ist keine VPO (d.h. keine KVPO und GVPO).
- ▶ Die Menge endlicher Zeichenreihen  $Z_{endl}$ , partiell geordnet durch die

- Präfixrelation  $\sqsubseteq_{\text{pfx}}$  definiert durch:

$$\forall s, s' \in Z_{endl}. s \sqsubseteq_{\text{pfx}} s' \iff \exists s'' \in Z_{endl}. s ++ s'' = s'$$

ist keine VPO.

- lexikographische Ordnung  $\sqsubseteq_{\text{lex}}$  definiert durch:

$$\forall s, t \in Z_{endl}. s \sqsubseteq_{\text{lex}} t \iff$$

$$\begin{aligned} \exists p, s', t' \in Z_{endl}. s = p ++ s' \wedge t = p ++ t' \wedge \\ (s' = \varepsilon \vee s' \downarrow_1 < t' \downarrow_1) \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon$  die leere Zeichenreihe bezeichnet,  $w \downarrow_1$  das erste Zeichen einer Zeichenreihe  $w$  und  $<$  die lexikographische Ordnung auf Zeichen ist keine VPO.

- ▶  $(\mathcal{P}_{endl}(\mathbb{N}), \subseteq)$  ist keine VPO.



# Übungsaufgabe A.3.1.8

Welche der durch folgende Hasse-Diagramme gegebenen partiellen Ordnungen sind (prä-) KVPOs? Welche (prä-) GVPOs?

a)

{ }

b)



c)



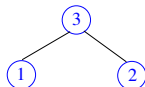
d)



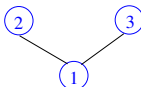
e)



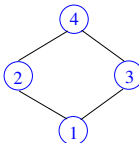
f)



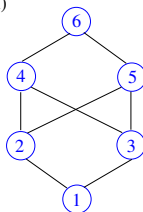
g)



h)



i)



# Stark gerichtete VPOs: Eine GVPO-Variante

Zu GVPOs auf Grundlage stark gerichteter Mengen

- Ersetzt man in Definition A.3.1.2 gerichtete durch stark gerichtete Mengen, so erhält man SGVPOs.
- Eingedenk, dass eine stark gerichtete Menge nie leer ist (s. Definition A.2.6.5), gibt es auf Grundlage stark gerichteter Mengen kein Analogon zu prä-GVPOs.
- Eine stark gerichtete Menge  $M$ , in der definitionsgemäß jede endliche Teilmenge ein Supremum in  $M$  hat, muss selbst kein Supremum in  $M$  haben, wenn  $M$  unendlich ist. Die SGVPO-Eigenschaft folgt deshalb nicht in trivialer Weise aus der Eigenschaft stark gerichtet von Mengen (s. Korollar A.2.6.4).

# Übungsaufgabe A.3.1.9

Betrachte die partielle Ordnung  $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$  mit  $\sqsubseteq =_{df} |$ , wobei  $|$  die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$  bezeichne, d.h. die Relation ' $\cdot$  teilt  $\cdot$ ' (ohne Rest), z.B.  $5 | 35$ .

Beweise oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels:

Das Paar  $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$  ist eine

1. prä-KVPO
2. KVPO
3. prä-GVPO
4. GVPO
5. SGVPO

## A.3.2

# Abbildungen auf vollständigen partiellen Ordnungen

# Stetige Abbildungen auf KVPOs

Seien  $(K, \sqsubseteq_K)$  und  $(L, \sqsubseteq_L)$  KVPOs und sei  $f \in [K \rightarrow L]$  eine Abbildung von  $K$  nach  $L$ .

## Definition A.3.2.1 (Stetige Abbildungen auf KVPOs)

$f$  heißt **stetig** gdw  $f$  ist monoton und

$$\forall K' \neq \emptyset \text{ Kette} \subseteq K. f(\bigsqcup_K K') =_L \bigsqcup_L f(K')$$

(Erhalt kleinster oberer Schranken)

**Beachte:**  $\forall T \subseteq K. f(T) =_{df} \{f(t) \mid t \in T\}$

# Stetige Abbildungen auf GVPOs

Seien  $(G, \sqsubseteq_G)$  und  $(H, \sqsubseteq_H)$  GVPOs und sei  $f \in [G \rightarrow H]$  eine Abbildung von  $G$  nach  $H$ .

## Definition A.3.2.2 (Stetige Abbildungen a. GVPOs)

$f$  heißt **stetig** gdw

$$\forall G' \neq \emptyset \text{ gerichtet} \subseteq G. f(G') \text{ gerichtet} \subseteq H \wedge \\ f(\bigsqcup_G G') =_H \bigsqcup_H f(G') \\ \text{(Erhalt kleinster oberer Schranken)}$$

**Beachte:**  $\forall T \subseteq G. f(T) =_{df} \{f(t) \mid t \in T\}$

# Monotoniecharakterisierung

Seien  $(K, \sqsubseteq_K), (L, \sqsubseteq_L)$  KVPOs und  $(G, \sqsubseteq_G), (H, \sqsubseteq_H)$  GVPOs.

## Lemma A.3.2.3 (Monotoniecharakterisierung)

1.  $f : K \rightarrow L$  ist monoton

gdw  $\forall K' \neq \emptyset \text{ Kette} \subseteq K.$

$$f(K') \text{ Kette} \subseteq L \wedge f(\bigsqcup_K K') \sqsupseteq_L \bigsqcup_L f(K')$$

2.  $g : G \rightarrow H$  ist monoton

gdw  $\forall G' \neq \emptyset \text{ gerichtet} \subseteq G.$

$$g(G') \text{ gerichtet} \subseteq H \wedge g(\bigsqcup_G G') \sqsupseteq_H \bigsqcup_H g(G')$$

# Strikte Funktionen auf KVPOs und GVPOs

Seien  $(K, \sqsubseteq_K), (L, \sqsubseteq_L)$  KVPOs mit kleinsten Elementen  $\perp_K$  bzw.  $\perp_L$ , seien  $(G, \sqsubseteq_G), (H, \sqsubseteq_H)$  GVPOs mit kleinsten Elementen  $\perp_G$  bzw.  $\perp_H$  und seien  $f \in [K \xrightarrow{\text{stet}} L], g \in [G \xrightarrow{\text{stet}} H]$  stetige Funktionen.

## Definition A.3.2.4 (Strikte Funktionen auf VPOs)

$f$  und  $g$  heißen **strikt**, wenn die Gleichheiten

$$- f(\bigsqcup_K K') =_L \bigsqcup_L f(K'), g(\bigsqcup_G G') =_H \bigsqcup_H g(G')$$

auch für  $K' = \emptyset$  und  $G' = \emptyset$  gelten, d.h., wenn die Gleichheiten

$$- f(\bigsqcup_K \emptyset) =_K f(\perp_K) =_L \perp_L =_L \bigsqcup \emptyset$$

$$- f(\bigsqcup_G \emptyset) =_G g(\perp_G) =_H \perp_H =_H \bigsqcup \emptyset$$

erfüllt sind.



## A.3.3

# Konstruktionsmechanismen für vollständige partielle Ordnungen

# Typische KVPO- und GVPO-Konstruktionen

Die im folgenden angegebenen Konstruktionsprinzipien gelten für

- KVPOs
- GVPOs

in gleicher Weise; deshalb schreiben wir einfacher stets VPO  
(statt genauer KVPO und GVPO).

# Typische VPO-Konstrukt.: Flache prä-VPOs

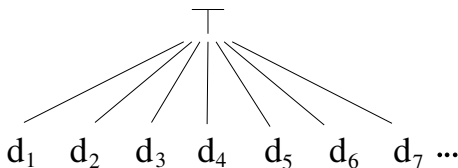
## Lemma A.3.3.1 (Flache prä-VPO-Konstruktion)

Sei  $D$  eine Menge. Dann gilt:

$(D \dot{\cup} \{\top\}, \sqsubseteq_{\text{flach}})$  mit  $\sqsubseteq_{\text{flach}}$  definiert durch

$$\forall d, e \in D \dot{\cup} \{\top\}. d \sqsubseteq_{\text{flat}} e \iff_{df} e = \top \vee d = e$$

ist eine prä-VPO, eine sog. flache prä-VPO (engl. flat pre-CPO).



# Typische VPO-Konstruktionen: Flache VPOs

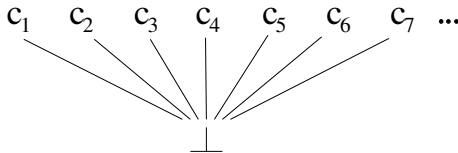
## Lemma A.3.3.2 (Flache VPO-Konstruktion)

Sei  $C$  eine Menge. Dann gilt:

$(C \dot{\cup} \{\perp\}, \sqsubseteq_{\text{flach}})$  mit  $\sqsubseteq_{\text{flach}}$  definiert durch

$$\forall c, d \in C \dot{\cup} \{\perp\}. c \sqsubseteq_{\text{flach}} d \iff_{df} c = \perp \vee c = d$$

ist eine **VPO**, eine sog. **flache VPO** (engl. **flat CPO**).



# Typische VPO-Konstruktionen: Produkte (1)

## Lemma A.3.3.3 (Nichtstrikte Produktkonstruktion)

Seien  $(P_1, \sqsubseteq_1), (P_2, \sqsubseteq_2), \dots, (P_n, \sqsubseteq_n)$  VPOs. Dann gilt:

Das **nichtstrikte Produkt** (engl. **non-strict product**)

$(\times P_i, \sqsubseteq_\times)$ , wobei

- $\times P_i =_{df} P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$  das kartesische Produkt aller  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ist

- $\sqsubseteq_\times$  punktweise definiert ist durch

$$\forall (p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n) \in \times P_i.$$

$$(p_1, \dots, p_n) \sqsubseteq_\times (q_1, \dots, q_n) \iff_{df}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}. p_i \sqsubseteq_i q_i$$

ist eine **VPO**.

# Typische VPO-Konstruktionen: Produkte (2)

## Lemma A.3.3.4 (Strikte Produktkonstruktion)

Seien  $(P_1, \sqsubseteq_1), (P_2, \sqsubseteq_2), \dots, (P_n, \sqsubseteq_n)$  VPOs. Dann gilt:

Das **strikte Produkt** (engl. **strict** (or: **smash**) product)

$(\bigotimes P_i, \sqsubseteq_{\bigotimes})$ , wobei

- $\bigotimes P_i =_{df} \times P_i$  das kartesische Produkt aller  $P_i$  ist
- $\sqsubseteq_{\bigotimes} =_{df} \sqsubseteq_{\times}$  punktweise definiert ist mit folgender zusätzlicher (identifizierender) Setzung:

$$(p_1, \dots, p_n) = \perp \iff_{df} \exists i \in \{1, \dots, n\}. p_i = \perp_i$$

ist eine VPO.

# Typische VPO-Konstruktionen: Summen (1)

## Lemma A.3.3.5 (Direkte Summenkonstruktion)

Seien  $(P_1, \sqsubseteq_1), (P_2, \sqsubseteq_2), \dots, (P_n, \sqsubseteq_n)$  VPOs. Dann gilt:

Die **direkte Summe** (engl. *separated (or: direct) sum*)

$(\bigoplus_{\perp} P_i, \sqsubseteq_{\bigoplus_{\perp}})$ , wobei

–  $\bigoplus_{\perp} P_i =_{df} P_1 \dot{\cup} P_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} P_n \dot{\cup} \{\perp\}$  die disjunkte Vereinigung aller  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , und  $\perp$  ein frisches in keinem  $P_i$  enthaltenem Element ist

–  $\sqsubseteq_{\bigoplus_{\perp}}$  definiert ist durch

$$\forall p, q \in \bigoplus_{\perp} P_i. p \sqsubseteq_{\bigoplus_{\perp}} q \iff_{df}$$

$$p = \perp \vee (\exists i \in \{1, \dots, n\}. p, q \in P_i \wedge p \sqsubseteq_i q)$$

ist eine **VPO**.

# Typische VPO-Konstruktionen: Summen (2)

## Lemma A.3.3.6 (Vereinigungssummenkonstruktion)

Seien  $(P_1, \sqsubseteq_1), (P_2, \sqsubseteq_2), \dots, (P_n, \sqsubseteq_n)$  VPOs. Dann gilt:

Die **Vereinigungssumme** (engl. *coalesced sum*)  $(\bigoplus_v P_i, \sqsubseteq_{\bigoplus_v})$ , wobei

- $\bigoplus_v P_i =_{df} P_1 \setminus \{\perp_1\} \dot{\cup} P_2 \setminus \{\perp_2\} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} P_n \setminus \{\perp_n\} \dot{\cup} \{\perp\}$   
die disjunkte Vereinigung aller  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , und  $\perp$  ein frisches in keinem  $P_i$  enthaltenem kleinsten Element ist, das mit jedem der ursprünglichen kleinsten Elemente  $\perp_i$  der Mengen  $P_i$  identifiziert wird und diese ersetzt, d.h.,  
 $\perp =_{df} \perp_i, i \in \{1, \dots, n\}$
- $\sqsubseteq_{\bigoplus_v}$  ist definiert durch
$$\forall p, q \in \bigoplus_v P_i. p \sqsubseteq_{\bigoplus_v} q \iff_{df} p = \perp \vee (\exists i \in \{1, \dots, n\}. p, q \in P_i \wedge p \sqsubseteq_i q)$$

ist eine **VPO**.



# Typ. VPO-Konstruktionen: Funktionenraum

## Lemma A.3.3.7 (Stetige Funktionenraumkonstrukt.)

Seien  $(P, \sqsubseteq_P)$  und  $(Q, \sqsubseteq_Q)$  pVPOs. Dann gilt:

Der **Raum stetiger Funktionen** (oder: **stetige Funktionenraum**) (engl. **continuous function space**)  $([P \xrightarrow{\text{stet}} Q], \sqsubseteq_{\text{sfr}})$ , wobei

- $[P \xrightarrow{\text{stet}} Q]$  die Menge stetiger Abbildungen von  $P$  auf  $Q$  ist
- $\sqsubseteq_{\text{sfr}}$  punktweise definiert ist durch

$$\forall f, g \in [P \xrightarrow{\text{stet}} Q]. f \sqsubseteq_{\text{sfr}} g \iff_{\text{df}} \forall p \in P. f(p) \sqsubseteq_Q g(p)$$

ist eine **prä-VPO**. Der stetige Funktionenraum ist eine **VPO**, wenn  $(Q, \sqsubseteq_Q)$  eine **VPO** ist.

**Beachte:** Die Definition von  $\sqsubseteq_{\text{sfr}}$  nutzt nicht aus, dass  $P$  eine prä-VPO ist. Diese Forderung ist nur gestellt, um die Definition auf stetige Funktionen zuschneiden zu können.

# A.4

## Verbände

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## A.4.1

### Verbände, vollständige Verbände

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Verbände und vollständige Verbände

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung,  $P \neq \emptyset$ .

## Definition A.4.1.1 (Verband)

$(P, \sqsubseteq)$  ist ein **Verband** (engl. **lattice**), wenn jede **nichtleere endliche** Teilmenge  $P'$  von  $P$  eine kleinste obere und größte untere Schranke in  $P$  besitzt.

## Definition A.4.1.2 (Vollständiger Verband)

$(P, \sqsubseteq)$  ist ein **vollständiger Verband** (engl. **complete lattice**), wenn **jede** Teilmenge  $P'$  von  $P$  eine kleinste obere und größte untere Schranke in  $P$  besitzt.

**Beachte:** Verbände und vollständige Verbände sind spezielle partielle Ordnungen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14  
1548/16

# Eigenschaften vollständiger Verbände

## Lemma A.4.1.3 (Existenz extremer Elemente)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband. Dann gibt es ein

1. kleinstes Element in  $P$ , bezeichnet mit  $\perp$ , für das gilt:  
 $\perp = \bigsqcup \emptyset = \bigsqcap P$ .
2. größtes Element in  $P$ , bezeichnet mit  $\top$ , für das gilt:  
 $\top = \bigsqcap \emptyset = \bigsqcup P$ .

## Lemma A.4.1.4 (Charakterisierungslemma)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $(P, \sqsubseteq)$  ist ein vollständiger Verband.
2. Jede Teilmenge von  $P$  hat eine kleinste obere Schranke.
3. Jede Teilmenge von  $P$  hat eine größte untere Schranke.

# Eigenschaften endlicher Verbände

## Lemma A.4.1.5 (Endlich impliziert vollständig)

Jeder endliche Verband  $(P, \sqsubseteq)$  ist vollständig.

## Korollar A.4.1.6 (Endlich impl. Ex. kl./gr. Elem.)

Jeder endliche Verband besitzt ein kleinstes und ein größtes Element.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vollständige Halbverbände

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung,  $P \neq \emptyset$ .

## Definition A.4.1.7 (Vollständiger Halbverband)

$(P, \sqsubseteq)$  ist ein **vollständiger**

1. **Vereinigungshalbverband** (engl. *join semi-lattice*) gdw  
 $\forall \emptyset \neq Q \subseteq P. \bigsqcup Q \text{ existiert} \in P.$
2. **Schnitthalbverband** (engl. *meet semi-lattice*) gdw  
 $\forall \emptyset \neq Q \subseteq P. \bigsqcap Q \text{ existiert} \in P.$

# Eigenschaften vollständiger Halbverbände (1)

## Proposition A.4.1.8 (Extr. Schrank. in vollst. Halbv.)

Ist  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger

1. Vereinigungshalbverband, so gilt:  $\bigsqcup P \text{ existiert} \in P$   
(wohingegen  $\bigsqcup \emptyset (\hat{=}\perp)$  i.a. nicht in  $P$  existiert).
2. Schnitthalbverband, so gilt:  $\bigsqcap P \text{ existiert} \in P$   
(wohingegen  $\bigsqcap \emptyset (\hat{=}\top)$  i.a. nicht in  $P$  existiert).

**Informell:** In einem vollständigen Vereinigungshalbverband muss nicht notwendig ein kleinstes Element existieren, in einem vollständigen Schnitthalbverband nicht notwendig ein größtes Element.



# Eigenschaften vollständiger Halbverbände (2)

## Lemma A.4.1.9 (Ex. gr. Elem. in vollst. Verein.halbv.)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Vereinigungshalbverband. Dann gilt:

$\bigsqcup P$  existiert  $\in P$  und ist das (eindeutig bestimmte i.a. mit  $\top$  bezeichnete) größte Element in  $P$ , d.h.:  $\top = \bigsqcup P$ .

## Lemma A.4.1.10 (Ex. kl. El. in vollst. Schnitthalbv.)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Schnitthalbverband. Dann gilt:

$\bigsqcap P$  existiert  $\in P$  und ist das (eindeutig bestimmte i.a. mit  $\perp$  bezeichnete) kleinste Element in  $P$ , d.h.:  $\perp = \bigsqcap P$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Charakterisier. oberer u. unterer Schranken (1)

...in vollständigen Halbverbänden.

## Lemma A.4.1.11 (Ch. o./u. Schrank. in vollst. Halbv.)

1. Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Vereinigungshalbverband und  $Q \subseteq P$  eine Teilmenge von  $P$ .

Hat  $Q$  untere Schranken in  $P$ , d.h. ist

$\{p \in P \mid p \sqsubseteq Q\} \neq \emptyset$ , so gilt:  $\bigcap Q$  existiert  $\in P$  und

$$\bigcap Q = \bigsqcup \{p \in P \mid p \sqsubseteq Q\}$$

2. Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Schnitthalbverband und  $Q \subseteq P$  eine Teilmenge von  $P$ .

Hat  $Q$  obere Schranken in  $P$ , d.h. ist

$\{p \in P \mid Q \sqsubseteq p\} \neq \emptyset$ , so gilt:  $\bigsqcup Q$  existiert  $\in P$  und

$$\bigsqcup Q = \bigcap \{p \in P \mid Q \sqsubseteq p\}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/16

# Charakterisier. oberer u. unterer Schranken (2)

## Lemma A.4.1.12 (Kl./gr. Elem. in vollst. Halbverb.)

Ist  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger

1. Vereinigungshalbverband und  $\bigsqcup \emptyset$  *existiert*  $\in P$ , dann ist  $\bigsqcup \emptyset$  das (eindeutig bestimmte mit  $\perp$  bezeichnete) kleinste Element in  $P$ , d.h.:  $\perp = \bigsqcup \emptyset$ .
2. Schnitthalbverband und  $\bigcap \emptyset$  *existiert*  $\in P$ , dann ist  $\bigcap \emptyset$  das (eindeutig bestimmte mit  $\top$  bezeichnete) größte Element in  $P$ , d.h.:  $\top = \bigcap \emptyset$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Bezieh. zw. vollst. Halbverb. und Verbänden

## Lemma A.4.1.13 (Vollst. Halbverbände u. Verbände)

Ist  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger

1. Vereinigungshalbverband und  $\bigsqcup \emptyset \text{ existiert} \in P$
2. Schnitthalbverband und  $\bigsqcap \emptyset \text{ existiert} \in P$

so ist  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Übungsaufgabe A.4.1.14

Zeige oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels:

Ist  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband, so ist

1.  $(P \setminus \{\perp\}, \sqsubseteq_{\setminus \perp})$  ein vollständiger Vereinigungshalbverband.
2.  $(P \setminus \{\top\}, \sqsubseteq_{\setminus \top})$  ein vollständiger Schnitthalbverband.

wobei  $\sqsubseteq_{\setminus \perp}$  und  $\sqsubseteq_{\setminus \top}$  die Einschränkungen von  $\sqsubseteq$  von  $P$  auf  $P \setminus \{\perp\}$  bzw.  $P \setminus \{\top\}$  bezeichnen.

# Bezieh. zw. Verbänden und vollst. part. Ordn.

## Lemma A.4.1.15 (Vollständige Verbände und VPOs)

Ist  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband, so ist  $(P, \sqsubseteq)$  eine VPO (d.h. eine KVPO und GVPO).

## Korollar A.4.1.16 (Endliche Verbände und VPOs)

Ist  $(P, \sqsubseteq)$  ein endlicher Verband, so ist  $(P, \sqsubseteq)$  eine VPO (d.h. eine KVPO und GVPO).

Beachte: Lemma A.4.1.15 gilt nicht für Verbände.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

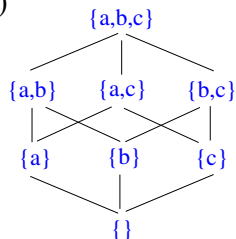
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Beispiele vollständiger Verbände

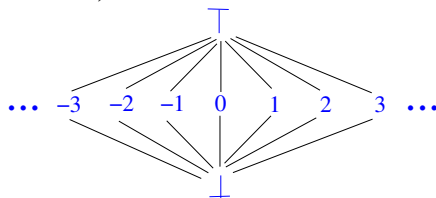
a)



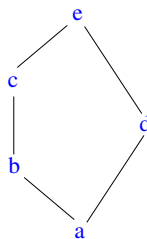
b)



c)

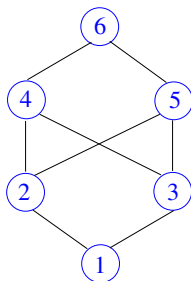


d)



# (Anti-) Beispiele

- Die durch folgendes Hasse-Diagramm gegebene **partielle Ordnung**  $(P, \sqsubseteq)$  ist **kein Verband** (wohl aber eine **VPO**).



- $(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}), \subseteq)$  ist **kein vollständiger Verband** (und auch keine VPO).



# Übungsaufgabe A.4.1.17

Welche der durch die folgenden **Hasse-Diagramme** gegebenen **partiellen Ordnungen** sind **Verbände**? Welche sind **vollständige Verbände**?

a)

{ }

b)



c)



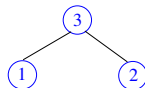
d)



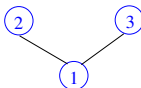
e)



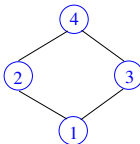
f)



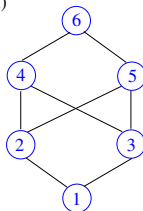
g)



h)



i)



# Übungsaufgabe A.4.1.18

Betrachte die partielle Ordnung  $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$  mit  $\sqsubseteq =_{df} |$ , wobei  $|$  die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$  bezeichne, d.h. die Relation '· teilt ·' (ohne Rest), z.B.  $5 | 35$ .

Beweise oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$  ist ein

1. Verband
2. vollständiger Verband
3. vollständiger Vereinigungshalbverband
4. vollständiger Schnitthalbverband

# Zusammenfassung, Überblick

## Korollar A.4.1.19

Sei  $P \neq \emptyset$  nichtleere Menge und  $\sqsubseteq$  Relation auf  $P$ . Dann gilt:

$(P, \sqsubseteq)$  endlicher Verband (L. A.4.1.5)  $\vee$

$(P, \sqsubseteq)$  vollständiger Vereinigungshalbverband und

$\bigsqcup \emptyset \text{ existiert } \in P$  (L. A.4.1.13(1))  $\vee$

$(P, \sqsubseteq)$  vollständiger Schnitthalbverband und

$\bigsqcap \emptyset \text{ existiert } \in P$  (L. A.4.1.13(2))

$\Rightarrow (P, \sqsubseteq)$  vollständiger Verband

(D. A.4.1.2 &

L. A.4.1.14)  $\Rightarrow (P, \sqsubseteq)$  Verband & vollständige partielle Ordnung

(D. A.4.1.1 &

D. A.3.1.1/2)  $\Rightarrow (P, \sqsubseteq)$  partielle Ordnung

(D. A.2.1.2)  $\Rightarrow (P, \sqsubseteq)$  Halbordnung

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Übungsaufgabe A.4.1.20

Bezeichne mit

$\mathcal{HO}, \mathcal{PO}, \mathcal{V}, \mathcal{VPO}, \mathcal{VV}, \mathcal{EV}, \mathcal{VVHV}, \mathcal{VVHV}_\perp, \mathcal{VSHV}, \mathcal{VSHV}^\top$

die Mengen aller Halbordnungen  $\mathcal{HO}$ , partiellen Ordnungen  $\mathcal{PO}$ , Verbände  $\mathcal{V}$ , vollständigen partiellen Ordnungen  $\mathcal{VPO}$ , vollständigen Verbände  $\mathcal{VV}$ , endlichen Verbände  $\mathcal{EV}$ , vollständigen Vereinigungshalbverbände ohne/mit kleinstem Element  $\mathcal{VVHV}/\mathcal{VVHV}_\perp$  und Schnitthalbverbände ohne/mit größtem Element  $\mathcal{VSHV}/\mathcal{VSHV}^\top$ .

1. Welche weiteren Implikationen oder Äquivalenzen gelten über die in [Korollar A.4.1.19](#) genannten hinaus? (Beweis oder Gegenbeispiel)
2. Welche Inklusionen oder (Mengen-) Gleichheiten gelten zwischen  $\mathcal{HO}, \mathcal{PO}, \mathcal{V}$ , usw.? (Beweis oder Gegenbeispiel)

## A.4.2

# Distributive, additive Abbildungen auf Verbänden

# Distributive, additive Abb. auf Verbänden

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $f \in [P \rightarrow P]$  eine Abbildung auf  $P$ .

## Definition A.4.2.1 (Distributive, additive Abbildung)

$f$  heißt

1. **distributiv** (oder:  $\sqcap$ -stetig) (engl. **distributive**,  $\sqcap$ -continuous) gdw

$$\forall \emptyset \neq P' \subseteq P. f(\sqcap P') = \sqcap f(P')$$

(Erhalt größter unterer Schranken)

2. **additiv** (oder:  $\sqcup$ -stetig) (engl. **additive**,  $\sqcup$ -continuous) gdw

$$\forall \emptyset \neq P' \subseteq P. f(\sqcup P') = \sqcup f(P')$$

(Erhalt kleinster oberer Schranken)

**Beachte:**  $\forall T \subseteq P. f(T) =_{df} \{f(t) \mid t \in T\}$

# Monotoniecharakterisierung

...über den Erhalt größter unterer und kleinster oberer Schranken:

## Lemma A.4.2.2 (Monotoniecharakterisierung)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $f \in [P \rightarrow P]$  eine Abbildung auf  $P$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist monoton} &\iff \forall P' \subseteq P. \quad f(\bigsqcap P') \sqsubseteq \bigsqcap f(P') \\ &\iff \forall P' \subseteq P. \quad f(\bigsqcup P') \sqsupseteq \bigsqcup f(P') \end{aligned}$$

Beachte:  $\forall T \subseteq P. f(T) =_{df} \{f(t) \mid t \in T\}$

# Nützl. Resultate über Mon., Distr., Additivität

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $f \in [P \rightarrow P]$  eine Abbildung auf  $P$ .

## Lemma A.4.2.3

$f$  ist monoton, wenn  $f$  distributiv oder additiv ist.

(d.h., Distributivität/Additivität implizieren Monotonie)

**Beachte:** Distributivität und Additivität sind unabhängig voneinander; keine Eigenschaft impliziert die andere.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## A.4.3

# Verbandshomomorphismen und -isomorphismen

# Verbandshomomorphismen u. -isomorphismen

Seien  $(P, \sqsubseteq_P)$ ,  $(R, \sqsubseteq_R)$  zwei Verbände und  $f \in [P \rightarrow R]$  eine Abbildung von  $P$  nach  $R$ .

## Definition A.4.3.1 (Verbandshomomorphismus)

$f$  heißt **Verbandshomomorphismus**, wenn gilt:

$$\begin{aligned}\forall p, q \in P. \quad & f(p \sqcup_P q) = f(p) \sqcup_Q f(q) \wedge \\ & f(p \sqcap_P q) = f(p) \sqcap_Q f(q)\end{aligned}$$

## Definition A.4.3.2 (Verbandsisomorphismus)

1.  $f$  heißt **Verbandsisomorphismus**, wenn  $f$  ein Verbandshomomorphismus und bijektiv ist.
2.  $(P, \sqsubseteq_P)$  und  $(R, \sqsubseteq_R)$  heißen **isomorph**, wenn es einen Verbandsisomorphismus zwischen  $P$  und  $R$  gibt.

# Nützliche Resultate (1)

Seien  $(P, \sqsubseteq_P)$ ,  $(R, \sqsubseteq_R)$  zwei Verbände und  $f \in [P \rightarrow R]$  eine Abbildung von  $P$  nach  $R$ .

## Lemma A.4.3.3

$$f \in [P \xrightarrow{hom} R] \Rightarrow f \in [P \xrightarrow{mon} R]$$

Die Rückrichtung der Implikation aus Lemma A.4.3.3 gilt nicht, aber folgende schwächere Beziehung ist gültig:

## Lemma A.4.3.4

$$\begin{aligned} f \in [P \xrightarrow{mon} R] \Rightarrow \\ \forall p, q \in P. f(p \sqcup_P q) \sqsupseteq_Q f(p) \sqcup_Q f(q) \wedge \\ f(p \sqcap_P q) \sqsubseteq_Q f(p) \sqcap_Q f(q) \end{aligned}$$

# Nützliche Resultate (2)

Seien  $(P, \sqsubseteq_P)$ ,  $(R, \sqsubseteq_R)$  zwei Verbände und  $f \in [P \rightarrow R]$  eine Abbildung von  $P$  nach  $R$ .

## Lemma A.4.3.5

$$f \in [P \xrightarrow{iso} R] \Rightarrow f^{-1} \in [R \xrightarrow{iso} P]$$

## Lemma A.4.3.6

$$f \in [P \xrightarrow{iso} R] \iff f \in [P \xrightarrow{po-hom} R] \text{ wrt } \sqsubseteq_P \text{ and } \sqsubseteq_Q$$

## A.4.4

# Modulare, distributive und Boolesche Verbände

# Modulare Verbände

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein Verband mit Schnittoperation  $\sqcap$  und Vereinigungsoperation  $\sqcup$ .

## Lemma A.4.4.1

$$\forall p, q, r \in P. p \sqsubseteq r \Rightarrow p \sqcup (q \sqcap r) \sqsubseteq (p \sqcup q) \sqcap r$$

## Definition A.4.4.2 (Modularer Verband)

$(P, \sqsubseteq)$  heißt **modular**, wenn gilt:

$$\forall p, q, r \in P. p \sqsubseteq r \Rightarrow p \sqcup (q \sqcap r) = (p \sqcup q) \sqcap r$$

# Charakterisierung modularer Verbände

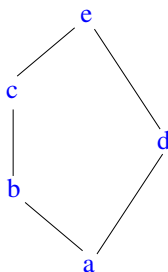
## Theorem A.4.4.3 (Charakt. modularer Verbände)

Ein Verband  $(P, \sqsubseteq)$  ist

1. **modular** gdw

$$\forall p, q, r \in P. p \sqsubseteq q, p \sqcap r = q \sqcap r, p \sqcup r = q \sqcup r \Rightarrow p = q$$

2. **nicht modular** gdw  $(P, \sqsubseteq)$  enthält einen Unterverband, der isomorph ist zum Verband:



# Distributive Verbände

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein Verband mit Schnittoperation  $\sqcap$  und Vereinigungsoperation  $\sqcup$ .

## Lemma A.4.4.4

1.  $\forall p, q, r \in P. p \sqcup (q \sqcap r) \sqsubseteq (p \sqcup q) \sqcap (p \sqcup r)$
2.  $\forall p, q, r \in P. p \sqcap (q \sqcup r) \sqsupseteq (p \sqcap q) \sqcup (p \sqcap r)$

## Definition A.4.4.5 (Distributiver Verband)

$(P, \sqsubseteq)$  heißt **distributiv**, wenn gilt:

1.  $\forall p, q, r \in P. p \sqcup (q \sqcap r) = (p \sqcup q) \sqcap (p \sqcup r)$
2.  $\forall p, q, r \in P. p \sqcap (q \sqcup r) = (p \sqcap q) \sqcup (p \sqcap r)$



# Hin zur Charakt. distributiver Verbände

## Lemma A.4.4.6

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $\forall p, q, r \in P. p \sqcup (q \sqcap r) = (p \sqcup q) \sqcap (p \sqcup r)$
2.  $\forall p, q, r \in P. p \sqcap (q \sqcup r) = (p \sqcap q) \sqcup (p \sqcap r)$

Somit reicht es aus, in [Definition A.4.4.5](#) die Gültigkeit von [Eigenschaft \(1\)](#) oder von [Eigenschaft \(2\)](#) zu fordern.

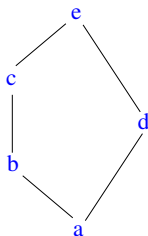
# Charakterisierung distributiver Verbände

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein Verband.

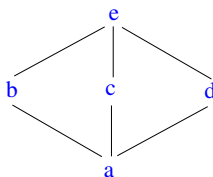
## Theorem A.4.4.7 (Charakt. distributiver Verbände)

$(P, \sqsubseteq)$  ist nicht distributiv gdw  $(P, \sqsubseteq)$  enthält einen Unterverband, der isomorph ist zu einem der folgenden zwei Verbände:

a)



b)



## Korollar A.4.4.8

Ist  $(P, \sqsubseteq)$  distributiv, so ist  $(P, \sqsubseteq)$  auch modular.

# Boolesche Verbände

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein Verband mit Schnittoperation  $\sqcap$ , Vereinigungsoperation  $\sqcup$ , kleinstem Element  $\perp$  und größtem Element  $\top$ .

## Definition A.4.4.9 (Komplement)

Seien  $p, q \in P$ . Dann gilt:

1.  $q$  heißt ein **Komplement** von  $p$ , wenn gilt:  $p \sqcup q = \top$  und  $p \sqcap q = \perp$ .
2.  $P$  heißt **komplementär**, wenn alle Elemente in  $P$  ein Komplement besitzen.

## Definition A.4.4.10 (Boolescher Verband)

$(P, \sqsubseteq)$  heißt **Boolesch**, wenn  $(P, \sqsubseteq)$  komplementär und distributiv ist und  $\perp \neq \top$  gilt.

**Beachte:** Ist  $(P, \sqsubseteq)$  Boolesch, so hat jedes Element  $p \in P$  ein eindeutig bestimmtes Komplement in  $P$ , bezeichnet mit  $\bar{p}$ .

# Nützliche Resultate

## Lemma A.4.4.11

Seien  $(P, \sqsubseteq)$  ein Boolescher Verband und  $p, q, r \in P$ . Dann gilt:

1.  $\bar{\bar{p}} = p$  (Involutionsgesetz)
2.  $\overline{p \sqcup q} = \bar{p} \sqcap \bar{q}$ ,  $\overline{p \sqcap q} = \bar{p} \sqcup \bar{q}$  (De Morgansche Gesetze)
3.  $p \sqsubseteq q \iff \bar{p} \sqcup q = \top \iff p \sqcap \bar{q} = \perp$
4.  $p \sqsubseteq q \sqcup r \iff p \sqcap \bar{q} \sqsubseteq r \iff \bar{q} \sqsubseteq \bar{p} \sqcup r$

# Boolescher Verbandshomo-, -isomorphismus

Seien  $(P, \sqsubseteq_P)$ ,  $(Q, \sqsubseteq_Q)$  zwei Boolesche Verbände und  $f \in [P \rightarrow Q]$  eine Funktion von  $P$  nach  $Q$ .

## Definition A.4.4.12 (Boolescher V.-Homomorphismus)

$f$  heißt **Boolescher Verbandshomomorphismus**, wenn  $f$  ein Verbandshomomorphismus ist und es gilt:

$$\forall p \in P. f(\bar{p}) = \overline{f(p)}$$

## Definition A.4.4.13 (Boolescher V.-Isomorphismus)

$f$  heißt **Boolescher Verbandsisomorphismus**, wenn  $f$  ein Boolescher Verbandshomomorphismus und bijektiv ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Nützliche Resultate

Seien  $(P, \sqsubseteq_P)$ ,  $(Q, \sqsubseteq_Q)$  zwei Boolesche Verbände und  $f \in [P \xrightarrow{bhom} Q]$  ein Boolescher Verbandshomomorphismus von  $P$  nach  $Q$ .

## Lemma A.4.4.14

$$f(\perp) = \perp \wedge f(\top) = \top$$

## Lemma A.4.4.15

$f$  ist ein Boolescher Verbandsisomorphismus gdw

$$f(\perp) = \perp \wedge f(\top) = \top$$

# Zusammenfassung, Überblick

## Korollar A.4.4.16

Sei  $P \neq \emptyset$  nichtleere Menge und  $\sqsubseteq$  Relation auf  $P$ . Dann gilt:

- $(P, \sqsubseteq)$  Boolescher Verband
- (Def. A.4.4.10)  $\Rightarrow (P, \sqsubseteq)$  Distributiver Verband
- (Kor. A.4.4.8)  $\Rightarrow (P, \sqsubseteq)$  Modularer Verband
- (Def. A.4.4.2)  $\Rightarrow (P, \sqsubseteq)$  Verband
- (Def. A.4.1.1)  $\Rightarrow (P, \sqsubseteq)$  partielle Ordnung
- (Def. A.2.1.2)  $\Rightarrow (P, \sqsubseteq)$  Halbordnung

## Korollar A.4.4.17

$$\mathcal{HO} \supset \mathcal{PO} \supset \mathcal{V} \supset \mathcal{MV} \supset \mathcal{DV} \supset \mathcal{BV}$$

wobei alle Inklusionen echt sind und  $\mathcal{HO}$ ,  $\mathcal{PO}$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{MV}$ ,  $\mathcal{DV}$  und  $\mathcal{BV}$  die Mengen aller Halbordnungen, partiellen Ordnungen, Verbände, modularen, distributiven und Booleschen Verbände bezeichnen.

# Übungsaufgabe A.4.4.18

Betrachte die partielle Ordnung  $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$  mit  $\sqsubseteq =_{df} |$ , wobei  $|$  die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$  bezeichne, d.h. die Relation ‘ $\cdot$  teilt  $\cdot$ ’ (ohne Rest), z.B.  $5 | 35$ .

Beweise oder widerlege durch Angabe eines Gegenbeispiels:

$(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$  ist ein

1. modularer Verband
2. distributiver Verband
3. Boolescher Verband



## A.4.5

# Konstruktionsmechanismen für Verbände

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Typ. Verbandskonstrukt.: Flache Verbände

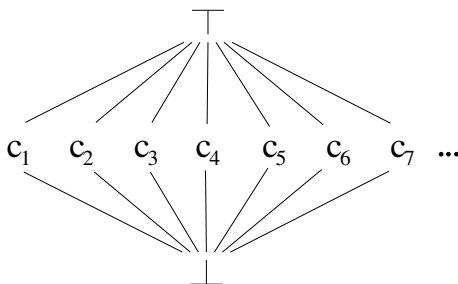
## Lemma A.4.5.1 (Flache Verbandskonstruktion)

Sei  $C$  eine Menge. Dann gilt:

$(C \dot{\cup} \{\perp, \top\}, \sqsubseteq_{\text{flach}})$  mit  $\sqsubseteq_{\text{flach}}$  definiert durch

$$\forall c, d \in C \dot{\cup} \{\perp, \top\}. c \sqsubseteq_{\text{flach}} d \iff_{df} c = \perp \vee c = d \vee d = \top$$

ist ein **vollständiger Verband**, ein sog. **flacher Verband** (engl. flat lattice or diamond lattice).



# Typ. Verbandskonstrukt.: Produkte, Summen,...

Analog zum Konstruktionsmechanismus für flache VPOs übertragen sich auch die Konstruktionsmechanismen für

- nichtstrikte Produkte
  - strikte Produkte
  - direkte Summen
  - Vereinigungssummen
  - stetige (genauer: additive, distributive) Funktionenräume
- von VPOs auf (vollständige) Verbände (s. Anhang A.3.3).

## A.4.6

# Ordnungstheoretische und algebraische Verbandssicht

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Motivation

Definition A.4.1.1 führt **Verbände** als spezielle

- geordnete Mengen  $(P, \sqsubseteq)$

ein, was einer

- **ordnungstheoretischen** Verbandssicht entspricht.

Alternativ können **Verbände** als spezielle

- **algebraische Strukturen**  $(P, \sqcap, \sqcup)$

eingeführt werden, was einer

- **algebraischen** Verbandssicht entspricht.

In der Folge zeigen wir, dass beide Sichten gleichwertig sind:

- **Ordnungstheoretisch** eingeführte Verbände können **algebraisch** aufgefasst werden und umgekehrt.

# Verbände als algebraische Strukturen

## Definition A.4.6.1 (Algebraischer Verband)

Ein **algebraischer Verband** ist eine algebraische Struktur  $(P, \sqcap, \sqcup)$ , wobei

- $P \neq \emptyset$  eine nichtleere Menge ist.
- $\sqcap, \sqcup : P \times P \rightarrow P$  zwei Verknüpfungen sind, so dass für alle Elemente  $p, q, r \in P$  folgende Rechengesetze gelten (Infix-Notation):
  - **Kommutativgesetze:**  $p \sqcap q = q \sqcap p$   
 $p \sqcup q = q \sqcup p$
  - **Assoziativgesetze:**  $(p \sqcap q) \sqcap r = p \sqcap (q \sqcap r)$   
 $(p \sqcup q) \sqcup r = p \sqcup (q \sqcup r)$
  - **Absorptionsgesetze:**  $(p \sqcap q) \sqcup p = p$   
 $(p \sqcup q) \sqcap p = p$

# Eigenschaften algebraischer Verbände

Sei  $(P, \sqcap, \sqcup)$  ein algebraischer Verband.

## Lemma A.4.6.2 (Idempotenzgesetze)

Für alle  $p \in P$  erfüllen die Verknüpfungen  $\sqcap, \sqcup : P \times P \rightarrow P$  folgende Gesetze:

- Idempotenzgesetze:  $p \sqcap p = p$   
 $p \sqcup p = p$

## Lemma A.4.6.3

Für alle  $p, q \in P$  erfüllen die Verknüpfungen  $\sqcap, \sqcup : P \times P \rightarrow P$  folgende Äquivalenzen:

1.  $p \sqcap q = p \iff p \sqcup q = q$
2.  $p \sqcap q = p \sqcup q \iff p = q$

# Induzierte (partielle) Ordnung

Sei  $(P, \sqcap, \sqcup)$  ein algebraischer Verband.

## Lemma A.4.6.4

Die Relation  $\sqsubseteq \subseteq P \times P$  auf  $P$  definiert durch

$$\forall p, q \in P. p \sqsubseteq q \iff_{df} p \sqcap q = p$$

ist eine partielle Ordnung auf  $P$ , d.h.,  $\sqsubseteq$  ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

## Definition A.4.6.5 (Induzierte partielle Ordnung)

Die Relation  $\sqsubseteq$  aus Lemma A.4.6.4 heißt **induzierte (partielle) Ordnung** auf  $(P, \sqcap, \sqcup)$ .



# Eigenschaften induzierter partieller Ordnungen

Sei  $(P, \sqcap, \sqcup)$  ein algebraischer Verband und  $\sqsubseteq$  die induzierte partielle Ordnung auf  $(P, \sqcap, \sqcup)$ .

## Lemma A.4.6.6

Für alle  $p, q \in P$  existieren Infimum ( $\hat{=}$  größte untere Schranke) und Supremum ( $\hat{=}$  kleinste obere Schranke) der Menge  $\{p, q\}$  und sind durch die Bilder der Verknüpfungen  $\sqcap$  bzw.  $\sqcup$  angewendet auf  $p$  und  $q$  gegeben, d.h.:

$$\forall p, q \in P. \sqcap \{p, q\} = p \sqcap q \wedge \sqcup \{p, q\} = p \sqcup q$$

Lemma A.4.6.6 kann induktiv ausgedehnt werden:

## Lemma A.4.6.7

Sei  $\emptyset \neq Q \subseteq P$  eine nichtleere endliche Teilmenge von  $P$ .  
Dann gilt:

$$\exists gus, kos \in P. gus = \sqcap Q \wedge kos = \sqcup Q$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Algebraische Verbände ordnungstheoretisch

Korollar A.4.6.8 (Von  $(P, \sqcap, \sqcup)$  zu  $(P, \sqsubseteq)$ )

Sei  $(P, \sqcap, \sqcup)$  ein algebraischer Verband. Dann gilt:

$(P, \sqsubseteq)$ , wobei  $\sqsubseteq$  die induzierte partielle Ordnung auf  $(P, \sqcap, \sqcup)$  ist, ist ein ordnungstheoretischer Verband im Sinn von Definition A.4.1.1.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Induzierte algebraische Verknüpfungen

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein ordnungstheoretischer Verband.

## Definition A.4.6.9 (Induzierte algebraische Verkn.)

Die partielle Ordnung  $\sqsubseteq$  von  $(P, \sqsubseteq)$  induziert zwei Verknüpfungen  $\sqcap$  und  $\sqcup$  auf  $P \times P$  und  $P$  definiert durch:

1.  $\forall p, q \in P. p \sqcap q =_{df} \sqcap \{p, q\}$
2.  $\forall p, q \in P. p \sqcup q =_{df} \sqcup \{p, q\}$

# Eigensch. der induz. algebraischen Verkn. (1)

Seien  $(P, \sqsubseteq)$  ein ordnungstheoretischer Verband und  $\sqcap$  und  $\sqcup$  die von  $(P, \sqsubseteq)$  induzierten algebraischen Verknüpfungen.

## Lemma A.4.6.10

Seien  $p, q \in P$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $p \sqsubseteq q$
2.  $p \sqcap q = p$
3.  $p \sqcup q = q$

# Eigensch. der induz. algebraischen Verkn. (2)

Seien  $(P, \sqsubseteq)$  ein ordnungstheoretischer Verband und  $\sqcap$  und  $\sqcup$  die von  $(P, \sqsubseteq)$  induzierten algebraischen Verknüpfungen.

## Lemma A.4.6.11

Für alle  $p, q, r \in P$  erfüllen die induzierten Verknüpfungen  $\sqcap$  und  $\sqcup$  folgende Gesetze:

1. Kommutativgesetze:  $p \sqcap q = q \sqcap p$   
 $p \sqcup q = q \sqcup p$
2. Assoziativgesetze:  $(p \sqcap q) \sqcap r = p \sqcap (q \sqcap r)$   
 $(p \sqcup q) \sqcup r = p \sqcup (q \sqcup r)$
3. Absorptionsgesetze:  $(p \sqcap q) \sqcup p = p$   
 $(p \sqcup q) \sqcap p = p$
4. Idempotenzgesetze:  $p \sqcap p = p$   
 $p \sqcup p = p$

# Ordnungstheoretische Verbände algebraisch

## Korollar A.4.6.12 (Von $(P, \sqsubseteq)$ zu $(P, \sqcap, \sqcup)$ )

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein ordnungstheoretischer Verband. Dann gilt:

$(P, \sqcap, \sqcup)$ , wobei  $\sqcap$  und  $\sqcup$  die von  $(P, \sqsubseteq)$  induzierten Verknüpfungen sind, ist ein algebraischer Verband im Sinn von [Definition A.4.6.1](#).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Äquivalenz (1)

...der ordnungstheoretischen und algebraischen Sicht von Verbänden.

Von ordnungstheoretischen zu algebraischen Verbänden:

- Ein ordnungstheoretischer Verband  $(P, \sqsubseteq)$  kann durch den Übergang von  $(P, \sqsubseteq)$  zu  $(P, \sqcap, \sqcup)$ , wobei  $\sqcap$  und  $\sqcup$  die induzierten Verknüpfungen von  $(P, \sqsubseteq)$  sind, als algebraischer Verband aufgefasst werden

Von algebraischen zu ordnungstheoretischen Verbänden:

- Ein algebraischer Verband  $(P, \sqcap, \sqcup)$  kann durch den Übergang von  $(P, \sqcap, \sqcup)$  zu  $(P, \sqsubseteq)$ , wobei  $\sqsubseteq$  die von  $(P, \sqcap, \sqcup)$  induzierte partielle Ordnung ist, als ordnungstheoretischer Verband aufgefasst werden.

# Äquivalenz (2)

Zusammen erlaubt uns das, einfach(er) von einem Verband  $P$  zu sprechen und lediglich präziser von  $P$  als

- ordnungstheoretischem Verband  $(P, \sqsubseteq)$
- algebraischem Verband  $(P, \sqcap, \sqcup)$

um herauszustreichen, dass wir  $P$  abhängig vom Kontext als spezielle **geordnete Menge** oder **algebraische Struktur** sehen.



# Tief und Hoch vs. Null und Eins (1)

Sei  $P$  ein Verband mit kleinstem und größtem Element.

Betrachten wir  $P$

- **ordnungstheoretisch** in der Form  $(P, \sqsubseteq)$ , ist es zweckmässig von seinem kleinsten und größten Element konzeptuell als **Tief**  $\perp$  und **Hoch**  $\top$  bzgl.  $\sqsubseteq$  zu denken mit:
  - Tief  $\perp \in P$ :  $\perp = \bigsqcup \emptyset$
  - Hoch  $\top \in P$ :  $\top = \bigsqcap \emptyset$
- **algebraisch** in der Form  $(P, \sqcap, \sqcup)$ , ist es zweckmäßig von seinem kleinsten und größten Element konzeptuell als **Null**  $\mathbf{0}$  und **Eins**  $\mathbf{1}$  bzgl.  $\sqcap$  und  $\sqcup$  zu denken, wobei  $(P, \sqcap, \sqcup)$  (bei Existenz eindeutig bestimmte) Null- und Einselemente hat, für die gilt:
  - Null-Element  $\mathbf{0} \in P$ :  $\forall p \in P. p \sqcup \mathbf{0} = p$
  - Eins-Element  $\mathbf{1} \in P$ :  $\forall p \in P. p \sqcap \mathbf{1} = p$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Tief und Hoch vs. Null und Eins (2)

## Lemma A.4.6.13

Sei  $P$  ein Verband. Dann gilt:

1.  $(P, \sqsubseteq)$  besitzt ein Tief-Element  $\perp$  gdw  $(P, \sqcap, \sqcup)$  besitzt ein Null-Element  $\mathbf{0}$ ; existieren  $\perp$  und  $\mathbf{0}$  gilt:

$$(\bigsqcup \emptyset =) \perp = \mathbf{0}$$

2.  $(P, \sqsubseteq)$  besitzt ein Hoch-Element  $\top$  gdw  $(P, \sqcap, \sqcup)$  besitzt ein Eins-Element  $\mathbf{1}$ ; existieren  $\top$  und  $\mathbf{1}$  gilt:

$$(\bigsqcap \emptyset =) \top = \mathbf{1}$$

# Zur Angemessenheit d. beiden Verbandssichten

In der **Mathematik** ist häufig die

- **algebraische Verbandssicht** geeigneter als sie konform zu anderen algebraischen Strukturen ist ('**eine Menge mit bestimmten Gesetzen genügenden Verknüpfungsvorschriften**') wie z.B. **Gruppen**, **Ringen**, **Körpern**, **Vektorräumen**, **Kategorien**, usw., die in der Mathematik untersucht und behandelt werden.

In der **Informatik** ist häufig die

- **ordnungstheoretische Verbandssicht** geeigneter, da sich die Ordnungsrelation häufig als ' **$\cdot$  trägt mehr/weniger Information als  $\cdot$** ', ' **$\cdot$  ist mehr/weniger definiert als  $\cdot$** ', ' **$\cdot$  ist stärker/schwächer als  $\cdot$** ', usw. interpretieren und verstehen lässt, was oft sehr natürlich zu Problemen passt, die in der Informatik untersucht und behandelt werden.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Übungsaufgabe A.4.6.14

Betrachte den Verband  $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$  mit  $\sqsubseteq =_{df} |$ , wobei  $|$  die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$  bezeichne, d.h. die Relation ' $\cdot$  teilt  $\cdot$ ' (ohne Rest), z.B.  $5 | 35$ .

Definiere  $(\mathbb{N}_0, \wedge, \vee)$ , d.h. gib das algebraisch definierte Gegenstück zu  $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$  an. Definiere dazu die Schnitt- und Vereinigungsoperation auf  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ :

1.  $\wedge : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$
2.  $\vee : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$

Welches ist das

1. Null-Element **0**
2. Eins-Element **1**

von  $(\mathbb{N}_0, \wedge, \vee)$ ?

# A.5

## Fixpunkttheoreme

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# A.5.1

## Fixpunkte, Türme

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Fixpunkte von Funktionen

## Definition A.5.1.1 (Fixpunkt)

Sei  $M$  eine Menge,  $f \in [M \rightarrow M]$  eine Funktion auf  $M$  und  $m \in M$  ein Element von  $M$ . Wir legen fest:

$m$  heißt **Fixpunkt** von  $f$  gdw  $f(m) = m$ .

# Kleinste, größte Fixpunkte in part. Ordnungen

## Definition A.5.1.2 (Kleinst-, größter Fixpunkt)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung,  $f \in [P \rightarrow P]$  eine Funktion auf  $P$  und  $p$  ein Fixpunkt von  $f$ , d.h.  $f(p) = p$ . Wir legen fest:

$p$  heißt

1. **kleinster Fixpunkt** von  $f$ , bezeichnet mit  $\mu f$ ,  
gdw  $\forall q \in P. f(q) = q \Rightarrow p \sqsubseteq q$
2. **größter Fixpunkt** von  $f$ , bezeichnet mit  $\nu f$ ,  
gdw  $\forall q \in P. f(q) = q \Rightarrow q \sqsubseteq p$



# Türme in kettenvollständigen part. Ordnungen

## Definition A.5.1.3 ( $f$ -Turm in $C$ )

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  eine KVPO,  $f \in [C \rightarrow C]$  eine Funktion auf  $C$  und  $T \subseteq C$  eine Teilmenge von  $C$ . Wir legen fest:

$T$  heißt  $f$ -Turm in  $C$  gdw

1.  $\perp \in T$ .
2. Wenn  $t \in T$ , dann auch  $f(t) \in T$ .
3. Wenn  $T' \subseteq T$  Kette in  $C$ , dann  $\bigsqcup T' \in T$ .

# Kleinste Türme in kettenv. part. Ordnungen

## Lemma A.5.1.4 (Kleinster $f$ -Turm in $C$ )

Der Schnitt

$$S =_{df} \bigcap \{T \mid T \text{ } f\text{-tower in } C\}$$

aller  $f$ -Türme in  $C$  ist der kleinste  $f$ -Turm in  $C$ , d.h.

1.  $S$  ist ein  $f$ -Turm in  $C$ .
2.  $\forall T$   $f$ -Turm in  $C$ .  $S \subseteq T$ .

## Lemma A.5.1.5 (Kleinster $f$ -Türme und Ketten)

Der kleinste  $f$ -Turm in  $C$  ist eine Kette in  $C$ , wenn  $f$  expandierend ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## A.5.2

### Fixpunkttheoreme für vollständige partielle Ordnungen

# Fixpunkte expandierender/monotoner Funkt.

## Fixpunktttheorem A.5.2.1 (Expandierende Funkt.)

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  eine KVPO und  $f \in [C \xrightarrow{\text{exp}} C]$  eine expandierende Funktion auf  $C$ . Dann gilt:

Das Supremum des kleinsten  $f$ -Turms in  $C$  ist ein Fixpunkt von  $f$ .

## Fixpunktttheorem A.5.2.2 (Monotone Funktionen)

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  eine KVPO und  $f \in [C \xrightarrow{\text{mon}} C]$  eine monotone Funktion auf  $C$ . Dann gilt:

$f$  hat einen eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkt  $\mu f$ , der durch das Supremum des kleinsten  $f$ -Turms in  $C$  gegeben ist.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Beachte

- Theorem A.5.2.1 und Theorem A.5.2.2 sichern für expandierende Funktionen die Existenz eines Fixpunkts und für monotone Funktionen die Existenz eines eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkts zu, sie liefern jedoch kein konstruktives Verfahren zur Berechnung oder zur näherungsweisen Berechnung dieser Fixpunkte.
- Das ist anders für Theorem A.5.2.3, das für stetige Funktionen ein (Näherungs-) Verfahren zur Berechnung des eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkts liefert. Daraus erklärt sich die größere Bedeutung stetiger gegenüber expandierender und monotoner Funktionen in der Praxis, und dass man, wo immer möglich, stetige Funktionen wählt.

# Kleinste Fixpunkte stetiger Funktionen

## Fixpunktttheorem A.5.2.3 (Knaster, Tarski, Kleene)

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  eine KVPO und  $f \in [C \xrightarrow{\text{stet}} C]$  eine stetige Funktion auf  $C$ . Dann gilt:

$f$  hat einen eindeutig bestimmten **kleinsten Fixpunkt**  $\mu f \in C$ , der durch das **Supremum** der (sog.) **Kleene-Kette**  $\{\perp, f(\perp), f^2(\perp), f^3(\perp), \dots\}$  gegeben ist, d.h.:

$$\mu f = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) = \bigsqcup \{\perp, f(\perp), f^2(\perp), \dots\}$$

**Erinnerung:**  $f^0 =_{df} Id_C$ ;  $f^i =_{df} f \circ f^{i-1}$ ,  $i > 0$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/15

# Beweis von Fixpunkttheorem A.5.2.3 (1)

Wir müssen zeigen:

$$\mu f = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) = \bigsqcup \{f^i(\perp) \mid i \geq 0\}$$

1. existiert,
2. ist ein Fixpunkt von  $f$ ,
3. ist der kleinste Fixpunkt von  $f$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Beweis von Fixpunkttheorem A.5.2.3 (2)

## 1. Existenz

- Nach Definition von  $\perp$  als kleinstem Element von  $C$  und von  $f^0$  als Identität auf  $C$  erhalten wir:  
 $\perp = f^0(\perp) \sqsubseteq f^1(\perp) = f(\perp).$
- Da  $f$  stetig und daher auch monoton ist, erhalten wir mit mithilfe vollständiger Induktion:  
 $\forall i, j \in \mathbb{N}_0. i < j \Rightarrow f^i(\perp) \sqsubseteq f^{i+1}(\perp) \sqsubseteq f^j(\perp).$
- Somit ist die Menge  $\{f^i(\perp) \mid i \geq 0\}$  eine (möglicherweise unendliche) Kette in  $C$ .
- Da  $(C, \sqsubseteq)$  eine KVPO ist und  $\{f^i(\perp) \mid i \geq 0\}$  eine Kette in  $C$  ist, impliziert dies nach Definition einer KVPO, dass die kleinste obere Schranke der Kette  $\{f^i(\perp) \mid i \geq 0\}$

$$\bigsqcup \{f^i(\perp) \mid i \geq 0\} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) \text{ existiert.}$$



# Beweis von Fixpunkttheorem A.5.2.3 (3)

## 2. Fixpunkteigenschaft

$$\begin{aligned} & f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp)\right) \\ (f \text{ stetig}) \quad &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f(f^i(\perp)) \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_1} f^i(\perp) \end{aligned}$$

$(C' =_{df} \{f^i \perp \mid i \geq 1\})$  ist eine Kette  $\Rightarrow$

$$\bigsqcup C' \text{ existiert} = \perp \sqcup \bigsqcup C' = \perp \sqcup \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_1} f^i(\perp)$$

$$(f^0(\perp) =_{df} \perp) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp)$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Beweis von Fixpunkttheorem A.5.2.3 (4)

## 3. Kleinste Fixpunkteigenschaft

- Sei  $c$  ein beliebiger Fixpunkt von  $f$ . Dann gilt:  $\perp \sqsubseteq c$ .
- Da  $f$  stetig und daher auch monoton ist, erhalten wir mithilfe vollständiger Induktion:  
 $\forall i \in \mathbb{N}_0. f^i(\perp) \sqsubseteq f^i(c) (= c)$ .
- Da  $c$  ein Fixpunkt von  $f$  ist, impliziert das:  
 $\forall i \in \mathbb{N}_0. f^i(\perp) \sqsubseteq c (= f^i(c))$ .
- Somit ist  $c$  eine obere Schranke der Menge  $\{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ .
- Da  $\{f^i(\perp) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$  eine Kette ist und  $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp)$  nach Definition die kleinste obere Schranke dieser Kette ist, erhalten wir die gewünschte noch fehlende Inklusionsbeziehung:

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) \sqsubseteq c.$$



# Kleinste bedingte Fixpunkte

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  eine KVPO,  $f \in [C \rightarrow C]$  eine Funktion auf  $C$  und  $d, c_d \in C$  zwei Elemente von  $C$ .

## Definition A.5.2.4 (Kleinsten bedingter Fixpunkt)

$c_d$  heißt **kleinsten bedingter Fixpunkt** von  $f$  bezüglich  $d$  (engl. **least conditional fixed point**) gdw  $c_d$  ist der kleinste Fixpunkt von  $C$  mit  $d \sqsubseteq c_d$ , d.h.:

$$\forall x \in C. f(x) = x \wedge d \sqsubseteq x \Rightarrow c_d \sqsubseteq x$$

# Kleinste bedingte Fixpunkte stetiger Funkt.

## Theorem A.5.2.5 (Bedingtes Fixpunkttheorem)

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  eine KVPO,  $d \in C$  und  $f \in [C \xrightarrow{\text{stet}} C]$  eine stetige Funktion auf  $C$ , die für  $d$  expandierend ist, d.h.  $d \sqsubseteq f(d)$ .

Dann gilt:

$f$  hat einen kleinsten bedingten Fixpunkt  $\mu f_d \in C$ , der durch das Supremum der (verallgemeinerten) Kleene-Kette  $\{d, f(d), f^2(d), \dots\}$  gegeben ist, d.h.:

$$\mu f_d = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(d) = \bigsqcup \{d, f(d), f^2(d), \dots\}$$

# Endliche Fixpunkte

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  eine KVO,  $d \in C$  und  $f \in [C \xrightarrow{\text{mon}} C]$  eine monotone Funktion auf  $C$ .

## Theorem A.5.2.6 (Endliches Fixpunkttheorem)

Wenn zwei aufeinanderfolgende Elemente der Kleene-Kette von  $f$  gleich sind, d.h., gibt es ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $f^i(\perp) = f^{i+1}(\perp)$ , so gilt:  $\mu f = f^i(\perp)$ .

## Theorem A.5.2.7 (Endliches bedingtes Fixpunktth.)

Ist  $f$  expandierend für  $d$ , d.h.  $d \sqsubseteq f(d)$ , und sind zwei aufeinanderfolgende Elemente der (verallgemeinerten) Kleene-Kette von  $f$  bezüglich  $d$  gleich, d.h., gibt es ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $f^i(d) = f^{i+1}(d)$ , so gilt:  $\mu f_d = f^i(d)$ .

Beachte: Theorem A.5.2.6 und A.5.2.7 setzen keine Stetigkeit von  $f$  voraus. Monotonie (und Expansion) von  $f$  reichen.

# Hin zur Existenz endlicher Fixpunkte

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  eine partielle Ordnung und  $p, r \in P$ .

**Definition A.5.2.8 (Kettenendliche part. Ordnung)**

$(P, \sqsubseteq)$  heißt **kettenendlich** (engl. **chain-finite**) gdw  $P$  enthält keine unendlichen Ketten.

**Definition A.5.2.9 (Endliches Element)**

$p$  heißt

1. **endlich** (engl. **finite**) gdw die Menge  $Q =_{df} \{q \in P \mid q \sqsubseteq p\}$  enthält keine unendliche Kette.
2. **endlich relativ zu  $r$**  gdw die Menge  $Q =_{df} \{q \in P \mid r \sqsubseteq q \sqsubseteq p\}$  enthält keine unendliche Kette.

# Existenz endlicher Fixpunkte

...es gibt zahlreiche **hinreichende Bedingungen** für die Existenz **kleinster bedingter Fixpunkte** einer Funktion  $f$ , die in der Praxis **oft erfüllt** sind (s. Nielson/Nielson 1992), z.B.:

- der Definitions- und Wertebereich von  $f$  sind endlich oder kettenendlich,
- der kleinste Fixpunkt von  $f$  ist endlich,
- $f$  ist von der Form  $f(c) = c \sqcup g(c)$ , wobei  $g$  eine monotone Funktion auf einem kettenendlichen (Daten-) Bereich ist.

# Fixpunkttheoreme, Verbände und GVPOs

**Beachte:** Vollständige Verbände (s. [Lemma A.4.1.13](#)) und GVPOs mit einem kleinsten Element (s. [Lemma A.3.1.5](#)) sind auch KVPOs.

Daraus können wir schließen:

## Korollar A.5.2.10 (Fixpunkte, Verbände, GVPOs)

Die Fixpunkttheoreme aus [Kapitel A.5.2](#) gelten auch für Funktionen auf vollständigen Verbänden und GVPOs mit einem kleinsten Element.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## A.5.3

### Fixpunkttheoreme für Verbände

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Fixpunkte monotoner Funktionen

## Fixpunktttheorem A.5.3.1 (Knaster, Tarski)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $f \in [P \xrightarrow{\text{mon}} P]$  eine monotone Funktion auf  $P$ . Dann gilt:

1.  $f$  hat einen eindeutig bestimmten **kleinsten Fixpunkt**  
 $\mu f \in P$ , der gegeben ist durch:  
$$\mu f = \bigcap \{p \in P \mid f(p) \sqsubseteq p\}.$$
2.  $f$  hat einen eindeutig bestimmten **größten Fixpunkt**  
 $\nu f \in P$ , der gegeben ist durch  
$$\nu f = \bigcup \{p \in P \mid p \sqsubseteq f(p)\}.$$

## Charakterisierungstheorem A.5.3.2 (Davis)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein Verband. Dann gilt:

$(P, \sqsubseteq)$  ist vollständig gdw jedes  $f \in [P \xrightarrow{\text{mon}} P]$  hat einen Fixpunkt.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Der Fixpunktverband monotoner Funktionen

## Theorem A.5.3.3 (Fixpunktverband)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband,  $f \in [P \xrightarrow{\text{mon}} P]$  eine monotone Funktion auf  $P$  und  $\text{Fix}(f) =_{\text{df}} \{p \in P \mid f(p) = p\}$  die Menge aller Fixpunkte von  $f$ . Dann gilt:

Jede Teilmenge  $F \subseteq \text{Fix}(f)$  hat ein Supremum und ein Infimum in  $\text{Fix}(f)$ , d.h.  $(\text{Fix}(f), \sqsubseteq|_{\text{Fix}(f)})$  ist ein vollständiger Verband.

## Theorem A.5.3.4 (Fixpunktordnung)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $f \in [P \xrightarrow{\text{mon}} P]$  eine monotone Funktion auf  $P$ . Dann gilt:

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp) \sqsubseteq \mu f \sqsubseteq \nu f \sqsubseteq \bigsqcap_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\top)$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Fixpunkte additiver/distributiver Funktionen

Für **additive** und **distributive Funktionen** werden die linke und die rechte Ungleichheit in **Theorem A.5.3.4** zu Gleichheiten:

## Fixpunkttheorem A.5.3.5 (Knaster, Tarski, Kleene)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $f \in [P \rightarrow P]$  eine Funktion auf  $P$ . Dann gilt:  $f$  hat einen eindeutig bestimmten

1. kleinsten Fixpunkt  $\mu f \in P$  gegeben durch  $\mu f = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\perp)$ , wenn  $f$  **additiv** ist, d.h.  $f \in [P \xrightarrow{add} P]$ .
2. größten Fixpunkt  $\nu f \in P$  gegeben durch  $\nu f = \bigsqcap_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\top)$ , wenn  $f$  **distributiv** ist, d.h.  $f \in [P \xrightarrow{dis} P]$ .

Erinnerung:  $f^0 =_{df} Id_C$ ;  $f^i =_{df} f \circ f^{i-1}$ ,  $i > 0$ .

# A.6

## Fixpunktinduktion

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Zulässige Prädikate

Fixpunktinduktion erlaubt Eigenschaften über Fixpunkte stetiger Funktionen zu beweisen. Wesentlich dafür ist der Begriff zulässiger Prädikate:

## Definition A.6.1 (Zulässiges Prädikat)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $\phi : P \rightarrow \mathbb{B}$  ein Prädikat auf  $P$ :

$\phi$  heißt **zulässig** (oder  **$\sqcup$ -zulässig**) (engl. **admissible**,  **$\sqcup$ -admissible**) gdw für jede Kette  $C \subseteq P$  gilt:

$$(\forall c \in C. \phi(c)) \Rightarrow \phi(\bigsqcup C)$$

## Lemma A.6.2

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $\phi : P \rightarrow \mathbb{B}$  ein zulässiges Prädikat auf  $P$ . Dann gilt:  $\phi(\perp) = \mathbf{wahr}$ .

**Beweis.** Aus der Zulässigkeit von  $\phi$  folgt  $\phi(\bigsqcup \emptyset) = \mathbf{wahr}$ . Zuzätzlich gilt  $\perp = \bigsqcup \emptyset$ , was den Beweis vervollständigt.

# Hinreichende Bedingungen für Zulässigkeit

## Theorem A.6.3 (Zulässigkeitsbedingung 1)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $\phi : P \rightarrow \mathbb{B}$  ein Prädikat auf  $P$ . Dann gilt:

$\phi$  ist zulässig, wenn es einen vollständigen Verband  $(Q, \sqsubseteq_Q)$  und zwei additive Funktionen  $f, g \in [P \xrightarrow{\text{add}} Q]$  gibt, so dass gilt:

$$\forall p \in P. \phi(p) \iff f(p) \sqsubseteq_Q g(p)$$

## Theorem A.6.4 (Zulässigkeitsbedingung 2)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband und  $\phi, \psi : P \rightarrow \mathbb{B}$  zwei zulässige Prädikate auf  $P$ . Dann gilt:

Die Konjunktion von  $\phi$  und  $\psi$ , das Prädikat  $\phi \wedge \psi$  definiert durch

$$\forall p \in P. (\phi \wedge \psi)(p) =_{df} \phi(p) \wedge \psi(p)$$

ist zulässig.

# Fixpunktinduktion auf vollständigen Verbänden

## Theorem A.6.5 (Fixpunktinduktion auf vollst. Verb.)

Sei  $(P, \sqsubseteq)$  ein vollständiger Verband,  $f \in [P \xrightarrow{\text{add}} P]$  eine additive Funktion auf  $P$  und  $\phi : P \rightarrow \mathbb{B}$  ein zulässiges Prädikat auf  $P$ . Dann gilt:

Die Gültigkeit von

$$- \forall p \in P. \phi(p) \Rightarrow \phi(f(p)) \quad (\text{Induktionsschritt})$$

impliziert die Gültigkeit von  $\phi(\mu f)$ .

**Beachte:** Der **Induktionsanfang**, d.h. die Gültigkeit von  $\phi(\perp)$ , folgt aus der Zulässigkeit von  $\phi$  (vgl. **Lemma A.6.2**) und ist daher bereits mit dem Beweis der Zulässigkeit von  $\phi$  bewiesen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Fixpunktinduktion auf KVPOs (= CCPOs)

Der Begriff der Zulässigkeit von Prädikaten überträgt sich in natürlicher Weise von vollständigen Verbänden auf kettenvollständige partielle Ordnungen (KVPOs (= CCPOs)).

## Theorem A.6.6 (Fixpunktinduktion auf KVPOs)

Sei  $(C, \sqsubseteq)$  eine KVPO,  $f \in [C \xrightarrow{\text{mon}} C]$  eine monotone Funktion auf  $C$  und  $\phi : C \rightarrow \mathbb{B}$  ein zulässiges Prädikat auf  $C$ . Dann gilt:

Die Gültigkeit von

$$- \forall c \in C. \phi(c) \Rightarrow \phi(f(c)) \quad (\text{Induktionsschritt})$$

impliziert die Gültigkeit von  $\phi(\mu f)$ .

**Beachte:** Theorem A.6.6 gilt (natürlich auch) für einen vollständigen Verband  $(P, \sqsubseteq)$  anstelle einer KVPO  $(C, \sqsubseteq)$ .

# A.7

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV




Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (1)

-  André Arnold, Irène Guessarian. *Mathematics for Computer Science*. Prentice Hall, 1996.
-  Roland Backhouse, Roy Crole, Jeremy R. Gibbons (Hrsg.). *Algebraic and Coalgebraic Methods in the Mathematics of Program Construction*. International Summer School and Workshop, Oxford, UK, April 10-14, 2000, Revised Lectures, Springer-V., LNCS 2297, 2002. (Chapter 1, Ordered Sets and Complete Lattices by Hilary A. Priestley; Chapter 2, Algebras and Coalgebras by Peter Aczel; Chapter 4, Calculating Functional Programs by Jeremy Gibbons)
-  Rudolf Berghammer. *Ordnungen, Verbände und Relationen mit Anwendungen*. Vieweg+Teubner, 2008.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (2)



Rudolf Berghammer. *Ordnungen, Verbände und Relationen mit Anwendungen*. Springer-V., 2012. (Kapitel 1, Ordnungen und Verbände; Kapitel 2.4, Vollständige Verbände; Kapitel 3, Fixpunkttheorie mit Anwendungen; Kapitel 4, Vervollständigung und Darstellung mittels Vervollständigung; Kapitel 5, Wohlgeordnete Mengen und das Auswahlaxiom)



Rudolf Berghammer. *Ordnungen und Verbände: Grundlagen, Vorgehensweisen und Anwendungen*. Springer-V., 2013. (Kapitel 2, Verbände und Ordnungen; Kapitel 3.4, Vollständige Verbände; Kapitel 4, Fixpunkttheorie mit Anwendungen; Kapitel 5, Vervollständigung und Darstellung mittels Vervollständigung; Kapitel 6, Wohlgeordnete Mengen und das Auswahlaxiom)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (3)

-  Garret Birkhoff. *Applications of Lattice Algebra*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 30(2):115-122, 1934.
-  Garret Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, 3rd edition, 1967.
-  Peter Crawley, Robert P. Dilworth. *Algebraic Theory of Lattices*. Prentice Hall, 1973.
-  Brian A. Davey, Hilary A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 2nd edition, 2002. (Chapter 1, Ordered Sets; Chapter 2, Lattices and Complete Lattices; Chapter 8, CPOs and Fixpoint Theorems)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (4)

-  Anne C. Davis. *A Characterization of Complete Lattices*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):311-319, 1955.
-  Marcel Ern . *Einführung in die Ordnungstheorie*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, 1982.
-  Helmuth Gericke. *Theorie der Verbände*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, 1967.
-  George Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkhäuser, 2nd edition, 1998. (Chapter 1, First Concepts; Chapter 2, Distributive Lattices; Chapter 3, Congruences and Ideals; Chapter 5, Varieties of Lattices)
-  George Grätzer. *Lattice Theory: Foundation*. Birkhäuser, 2011.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV





Kap. 11

Kap. 12





Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (5)




-  George Grätzer, Friedrich Wehrung (Hrsg.). *Lattice Theory: Special Topics and Applications, Vol. I*. Birkhäuser, 2014.
-  George Grätzer, Friedrich Wehrung (Hrsg.). *Lattice Theory: Special Topics and Applications, Vol. II*. Birkhäuser, 2016.
-  Paul R. Halmos. *Naive Set Theory*. Springer-V., Reprint, 2001. (Chapter 6, Ordered Pairs; Chapter 7, Relations; Chapter 8, Functions)
-  Hans Hermes. *Einführung in die Verbandstheorie*. Springer-V., 2. Auflage, 1967.

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (6)

-  Richard Johnsonbaugh. *Discrete Mathematics*. Pearson, 7th edition, 2009. (Chapter 3, Functions, Sequences, and Relations)
-  Stephen C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North Holland, 1952. (Reprint, North Holland, 1980)
-  Seymour Lipschutz. *Set Theory and Related Topics*. McGraw Hill Schaum's Outline Series, 2nd edition, 1998. (Chapter 4, Functions; Chapter 6, Relations)
-  David Makinson. *Sets, Logic and Maths for Computing*. Springer-V., 2008. (Chapter 1, Collecting Things Together: Sets; Chapter 2, Comparing Things: Relations)



# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (7)

-  George Markowsky. *Chain-complete Posets and Directed Sets with Applications*. Algebra Universalis 6(1):53-68, 1976.
-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Finiteness Conditions for Fixed Point Iteration*. In Proceedings of the 7th ACM Conference on LISP and Functional Programming (LFP'92), 96-108, 1992.
-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992.  
(Chapter 4, Denotational Semantics)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12




Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (8)

-  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007.  
(Chapter 5, Denotational Semantics)
-  Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson, Chris Hankin. *Principles of Program Analysis*. Springer-V., 2nd edition, 2005. (Appendix A, Partially Ordered Sets)
-  Steven Roman. *Lattices and Ordered Sets*. Springer-V., 2008.
-  Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik. Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014. (Kapitel 5.1, Ordnungsrelationen; Kapitel 5.2, Ordnungen und Teilstrukturen)

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (9)

-  Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018. (Chapter 5.1, Order Relations; Chapter 5.2, Orders and Substructures)
-  Alfred Tarski. *A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its Applications*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):285-309, 1955.
-  Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008. (Chapter 5, Fixed Points; Chapter 105, Software Testing; Chapter 106, Formal Methods; Chapter 107, Verification and Validation)

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (10)



Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. MIT Press, 1993. (Chapter 1, Basic set theory; Chapter 8, Introduction to domain theory; Chapter 9, Recursion equations; Chapter 10, Recursion techniques; Chapter 10.2, Fixed-point induction)

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14/16

# Anhang B

## Pragmatik: Flussgraphvarianten

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# B.1

## Motivation

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# B.1.1

## Flussgraphvarianten

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Anweisungsrepräsentation in Flussgraphen

...werden Programme als Flussgraphen dargestellt, können Anweisungen (Zuweisungen, Tests)

- Knoten
- Kanten

zugeordnet werden als

- einzelne Anweisungen
- Basisblöcke (sequentielle Anweisungsfolgen max. Länge)



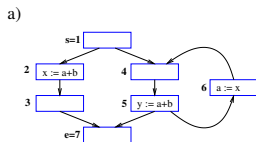
# Flussgraphvarianten

Diese Wahlmöglichkeiten führen auf vier Flussgraphvarianten:

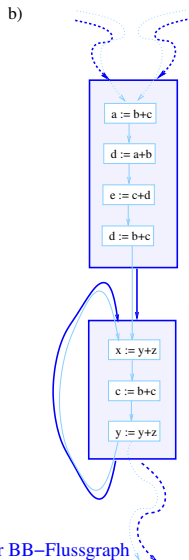
- Knotenbenannte Flussgraphen  
(im Stil von Kripke-Strukturen)
  - 1) Einzelanweisungsgraphen (EA-Graphen)
  - 2) Basisblockgraphen (BB-Graphen)
- Kantenbenannte Flussgraphen  
(im Stil von Transitionssystemen)
  - 3) Einzelanweisungsgraphen (EA-Graphen)
  - 4) Basisblockgraphen (BB-Graphen)

# Knotenbenannte Flussgraphvarianten

a) Einzelanweisungs- vs. b) Basisblockflussgraphen:



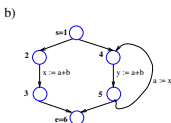
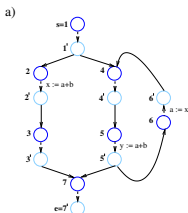
Knotenbenannter EA-Flussgraph



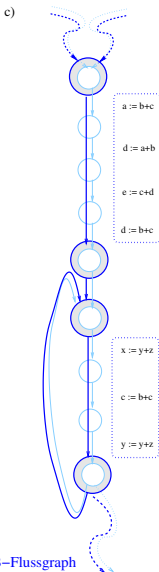
Knotenbenannter BB-Flussgraph

# Kantenbenannte Flussgraphvarianten

a), b) Einzelanweisungs- vs. c) Basisblockflussgraphen:



Kantenbenannte EA-Flussgraphen



Kantenbenannter BB-Flussgraph

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

# Welche Flussgraphvariante sollten wir wählen?

## Konzeptuell

- besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen den verschiedenen Flussgraphvarianten, was die Wahl einer bestimmten Variante zu einer Geschmacksfrage macht.

## Pragmatisch

- unterscheiden sich die Flussgraphvarianten jedoch in der Einfachheit und damit ihrer Angemessenheit zur Spezifikation und Implementierung von Programmanalysen und Optimierungen.

Das werden wir in der Folge **genauer herausarbeiten**.

## B.1.2

Flussgraphvarianten: Welche sollten wir wählen?

# Basisblock- vs. Einzelanweisungsgraphen

...wir untersuchen und vergleichen unter pragmatischen Gesichtspunkten die **Zweckmäßigkeit** verschiedener Flussgraphvarianten als Programmrepräsentation für Programmanalyse.

Dazu betrachten wir **knoten- und kantenbenannte Flussgraphen**, die mit **Basisblöcken** bzw. **Einzelanweisungen** benannt sind, und untersuchen ihre jeweiligen

- Vor- und Nachteile für die Programmanalyse

...für eine Antwort auf die Frage:

- Knoten- oder kantenbenannte Basisblock- oder Einzelanweisungsgraphen: (Nur) eine Geschmacksfrage?

*En passant* werden wir dabei weitere praktisch relevante

- DFA-Probleme und -Analysen

kennenlernen.

# Von Basisblockgraphen erhoffte Vorteile

...allgemein wird Basisblockgraphen 'folkloristisch' (engl. *folk knowledge*) vor allem folgender Anwendungsvorteil zugeschrieben :

Bessere Skalierungseigenschaften und Performanzvorteile, da

- weniger Knoten in die (potentiell) berechnungsaufwändige iterative Fixpunktberechnung involviert sind.
- größere Programme im Hauptspeicher gehalten werden können.

# Mit Basisblockgraphen verbundene Nachteile

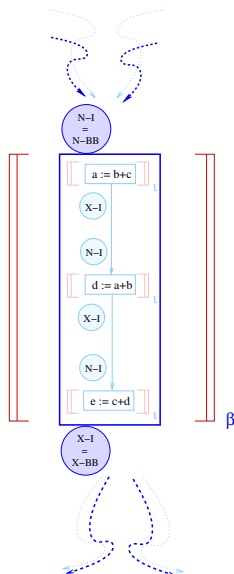
...sind definitiv auch gegeben, besonders folgende:

- **Höhere konzeptuelle Komplexität:** Basisblöcke führen zu einer unerwünschten **Hierarchisierung**, die sowohl theoretische Überlegungen wie praktische Implementierungen erschwert.
- **Notwendigkeit von Prä- und Postprozessen:** Sind i.a. erforderlich, um hierarchie-induzierte Zusatzprobleme zu behandeln (z.B. für **Elimination toter Anweisungen** (engl. **dead code elimination**), **Konstantenanalyse** (engl. **constant propagation and folding**),...); oder 'trickhafte', problemspezifische Formulierungen nötig machen, sie zu vermeiden (z.B. für **partielle Redundanzelimination** (engl. **partial redundancy elimination**)).
- **Eingeschränkte Allgemeinheit:** Bestimmte praktisch relevante Analysen und Optimierungen sind nur schwer oder gar nicht auf der Ebene von Basisblöcken auszudrücken (z.B. **Geisteranweisungsanalyse und -elimination** (engl. **faint variable elimination**)).



# Kernproblem

...Basisblöcke führen zu einer hierarchischen Graphstruktur:



Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# In der Folge

...Gegenüberstellung von Vor- und Nachteilen von

- Basisblock- und Einzelanweisungsgraphen

anhand von Beispielen von uns bereits betrachteter:

- Verfügbare Ausdrücke (engl. available expressions)
- Einfache Konstanten (engl. simple constants)

und neuer DFA-Probleme:

- Tote Anweisungen (engl. dead variables)
- Geisteranweisungen (engl. faint variables)

## B.2

### *SUP*- und *MaxFP*-Ansatz

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## B.2.1

# Kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# $SUP_{EAG}$ - und $MaxFP_{EAG}$ -Ansatz

...für kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen.

Die  $SUP$ -Lösung:

$$\forall c_s \in \mathcal{C} \forall n \in N. SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n) =_{df} \bigcap \{ \llbracket p \rrbracket_\alpha(c_s) \mid p \in \mathbf{P}_G[s, n] \}$$

Die  $MaxFP$ -Lösung:

$$\forall c_s \in \mathcal{C} \forall n \in N. MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n) =_{df} \nu\text{-inf}(n)$$

wobei  $\nu\text{-inf}$  die größte Lösung des  $MaxFP$ -Gleichungssystems für Einzelanweisungsgraphen bezeichnet ( $\alpha$  für Anweisung):

$$inf(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = s \\ \bigcap \{ \llbracket (m, n) \rrbracket_\alpha(inf(m)) \mid m \in pred_G(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## B.2.2

# Knotenbenannte Basisblockgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Bezeichnungen

...in der Folge bezeichnen:

- fett gesetzte Buchstaben **Basisblockknoten**: **m**, **n**,...
- normal gesetzte Buchstaben **Einzelanweisungsknoten**: m, n,...

Weiters bezeichnen:

- $\llbracket \rrbracket_\beta$
- $\llbracket \rrbracket_\alpha$

(lokale) **abstrakte DFA-Funktionale** für **Basisblock-** bzw. **Einzelanweisungsknoten** sowie

- *bb*, *start* und *end* drei Abbildungen, die angewendet auf einen Einzelanweisungsknoten *n* bzw. einen Basisblock **n** den Basisblock liefern, zu dem *n* gehört, bzw. den Start- und Endanweisungsknoten von **n**.

# Hierarchischer $SUP_{BBG}$ -Ansatz: Stufe I

...für knotenbenannte Basisblockgraphen.

## Stufe I: Die $SUP$ -Lösung auf Basisblockebene

$$\forall c_s \in \mathcal{C} \ \forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}. \ SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}) =_{df} \\ (E-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}), A-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}))$$

mit

$$E-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}) =_{df} \bigcap \{ \llbracket p \rrbracket_\beta(c_s) \mid p \in \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, \mathbf{n}] \}$$

$$A-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}) =_{df} \bigcap \{ \llbracket p \rrbracket_\beta(c_s) \mid p \in \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, \mathbf{n}] \}$$

...wobei  $E$  und  $A$  für Basisblock-Eingang und -Ausgang stehen.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Hierarchischer $SUP_{BBG}$ -Ansatz: Stufe II

## Stufe II: Die $SUP$ -Lösung auf Einzelanweisungsebene

...hineintreiben der DFA-Information in die Basisblöcke.

$$\forall c_s \in \mathcal{C} \quad \forall n \in N. \quad SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n) =_{df} \\ (E-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n), A-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n))$$

mit

$$E-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n) =_{df} \begin{cases} E-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(bb(n)) \\ \text{falls } n = start(bb(n)) \\ \llbracket p \rrbracket_\alpha(E-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(bb(n))) \\ \text{sonst } (p \text{ Präfixpfad von } start(bb(n)) \\ \text{bis (ausschließlich) } n) \end{cases}$$

$$A-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n) =_{df} \llbracket p \rrbracket_\alpha(E-SUP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(bb(n))) \\ (p \text{ Präfixpfad von } start(bb(n)) \text{ bis (ein-} \\ \text{-schließlich) } n)$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Hierarchischer $MaxFP_{BBG}$ -Ansatz: Stufe I

...für knotenbenannte Basisblockgraphen:

## Stufe I: Die $MaxFP$ -Lösung auf Basisblockebene

$$\forall c_s \in \mathcal{C} \forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}. MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}) =_{df} \\ (E-MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}), A-MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}))$$

mit

$$E-MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}) =_{df} \nu\text{-}E\text{-}inf(\mathbf{n})$$

$$A-MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\beta, c_s)}(\mathbf{n}) =_{df} \nu\text{-}A\text{-}inf(\mathbf{n})$$

wobei  $\nu\text{-}E\text{-}inf$  und  $\nu\text{-}A\text{-}inf$  die größten Lösungen des  $MaxFP$ -Gleichungssystems für Basisblockknoten bezeichnen:

$$E\text{-}inf(\mathbf{n}) = \begin{cases} c_s & \text{falls } \mathbf{n} = \mathbf{s} \\ \bigcap \{ A\text{-}inf(\mathbf{m}) \mid \mathbf{m} \in pred_G(\mathbf{n}) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A\text{-}inf(\mathbf{n}) = \llbracket \mathbf{n} \rrbracket_\beta(E\text{-}inf(\mathbf{n}))$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Hierarchischer $MaxFP_{BBG}$ -Ansatz: Stufe II

## Stufe II: Die $MaxFP$ -Lösung auf Einzelanweisungsebene

...hineintreiben der DFA-Information in die Basisblöcke.

$$\forall c_s \in \mathcal{C} \forall n \in N. MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n) =_{df} \\ (E-MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n), A-MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n))$$

mit

$$E-MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n) =_{df} \nu-E-inf(n)$$

$$A-MaxFP_{(\llbracket \cdot \rrbracket_\alpha, c_s)}(n) =_{df} \nu-A-inf(n)$$

...wobei  $\nu-E-inf$  und  $\nu-A-inf$  die größten Lösungen des  $MaxFP$ -Gleichungssystems für Anweisungsknoten bezeichnen:

$$E-inf(n) = \begin{cases} \nu-E-inf(bb(n)) & \text{falls } n = start(bb(n)) \\ A-inf(m) & \text{sonst (wobei } m \text{ der eindeutig} \\ & \text{bestimmte Vorgänger} \\ & \text{von } n \text{ in } bb(n) \text{ ist)} \end{cases}$$
$$A-inf(n) = \llbracket n \rrbracket_\alpha(E-inf(n))$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Kapitel B.3

## Verfügbare Ausdrücke

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## B.3.1

# Knotenbenannte Basisblockgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Verfügbare Ausdrücke: Stufe I

...für knotenbenannte Basisblockgraphen.

## Stufe I: Die Basisblockebene

Lokale Prädikate (assoziiert mit Basisblockknoten):

- $\text{BB-XComp}_\beta(t)$ :  $t$  wird von einer Anweisung  $\alpha$  in  $\beta$  berechnet und weder  $\alpha$  noch eine auf  $\alpha$  folgende Anweisung in  $\beta$  modifizieren einen Operanden von  $t$ .
- $\text{BB-Transp}_\beta(t)$ :  $t$  ist transparent für  $\beta$ , d.h. keine Anweisung in  $\beta$  modifiziert einen Operanden von  $t$ .

Das Basisblock-Gleichungssystem von Stufe I:

$$\text{BB-N-Avail}_\beta = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } \beta = \mathbf{s} \\ \prod_{\hat{\beta} \in \text{pred}(\beta)} \text{BB-X-Avail}_{\hat{\beta}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{BB-X-Avail}_\beta = \text{BB-N-Avail}_\beta \cdot \text{BB-Transp}_\beta + \text{BB-XComp}_\beta$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Verfügbare Ausdrücke: Stufe II

## Stufe II: Die Einzelanweisungsebene

Lokale Prädikate (assoziiert mit Einzelanweisungsknoten):

- $\text{Comp}_\alpha(t)$ :  $\alpha$  berechnet  $t$ .
- $\text{Transp}_\alpha(t)$ :  $\alpha$  modifiziert keinen Operanden von  $t$ .
- $\nu\text{-BB-N-Avail}$ ,  $\nu\text{-BB-X-Avail}$ : größte Lösungen des BB-Gleichungssystem von Stufe I.

Das Einzelanweisungs-Gleichungssystem von Stufe II:

$$\text{N-Avail}_\alpha = \begin{cases} \nu\text{-BB-N-Avail}_{bb(\alpha)} & \text{falls } \alpha = \text{start}(bb(\alpha)) \\ \text{X-Avail}_{pred(\alpha)} & \text{sonst (da gilt: } |pred(\alpha)| = 1) \end{cases}$$

$$\text{X-Avail}_\alpha = \begin{cases} \nu\text{-BB-X-Avail}_{bb(\alpha)} & \text{falls } \alpha = \text{end}(bb(\alpha)) \\ (\text{N-Avail}_\alpha + \text{Comp}_\alpha) \cdot \text{Transp}_\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## B.3.2

# Knotenbenannte Einzelanweisungsgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



# Verfügbare Ausdrücke

...für **knotenbenannte Einzelanweisungsgraphen** (einstufig, hierarchiefrei).

**Lokale Prädikate** (assoziiert mit **Einzelanweisungsknoten**):

- $\text{Comp}_\alpha(t)$ :  $\alpha$  berechnet  $t$ .
- $\text{Transp}_\alpha(t)$ :  $\alpha$  modifiziert keinen Operanden von  $t$ .

**Gleichungssystem f. knotenbenannte Einzelanweisungsgraphen:**

$$\text{N-Avail}_t = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } \alpha = s \\ \prod_{\hat{\alpha} \in \text{pred}(\alpha)} \text{X-Avail}_{\hat{\alpha}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{X-Avail}_\alpha = (\text{N-Avail}_\alpha + \text{Comp}_\alpha) \cdot \text{Transp}_\alpha$$

## B.3.3

# Kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Verfügbare Ausdrücke

...für kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen (einstufig, hierarchiefrei).

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionskanten):

- $\text{Comp}_\varepsilon(t)$ : Anweisung  $\alpha$  von Kante  $\varepsilon$  berechnet  $t$ .
- $\text{Transp}_\varepsilon(t)$ : Anweisung  $\alpha$  von Kante  $\varepsilon$  modifiziert keinen Operanden von  $t$ .

Gleichungssystem f. kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen:

$$\text{Avail}_n = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } n = s \\ \prod_{m \in \text{pred}(n)} (\text{Avail}_m + \text{Comp}_{(m,n)}) \cdot \text{Transp}_{(m,n)} & \text{sonst} \end{cases}$$

# B.3.4

## Zwischenfazit

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Beobachtung

...kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen sind konzeptuell und formulierungstechnisch am wenigsten aufwändig und deshalb am

- günstigsten.

...knotenbenannte Basisblockgraphen am aufwändigsten und deshalb am

- ungünstigsten.

# In der Folge

...zwei weitere Beispiele dazu und zur Veranschaulichung des Einflusses von Flussgraphvarianten auf den konzeptuellen und technischen Aufwand der Formulierung von Programmanalysen:

- Konstantenanalyse (engl. constant propagation and folding)
- Geistervariablenanalyse (engl. faint variables analysis)

Dabei betrachten wir Analyseformulierungen für:

- knotenbenannte Basisblockgraphen
- kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen

als die beiden antagonistischen Pole der Graphvarianten.

# Kapitel B.4

## Konstantenanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Konstantenanalyse

... am Beispiel **einfacher Konstanten** (engl. **simple constants**).

Wir benötigen zwei Hilfsfunktionen für **Anweisungen**:

1. Rückwärtssubstitution
2. Zustandstransformation

sowie deren **Ausdehnungen** auf **Anweisungssequenzen**, speziell **Pfadanweisungssequenzen**.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14



## B.4.1

# Kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Rückwärtssubstitution, Zustandstransformation

...für Anweisungen  $\alpha \equiv (x := t')$ .

Wir definieren für  $\alpha$ :

## 1. Rückwärtssubstitution

$$\delta_\alpha : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$$

$$\forall t \in \mathbf{T}. \delta_\alpha(t) =_{df} t[t'/x]$$

wobei  $t[t'/x]$  die simultane Ersetzung aller Vorkommen von  $x$  in  $t$  durch  $t'$  bezeichnet (**syntaktische Substitution**).

## 2. Zustandstransformation

$$\theta_\alpha : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$\theta_\alpha(\sigma)(y) =_{df} \begin{cases} \mathcal{E}(t)(\sigma) & \text{falls } y = x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $\mathcal{E} : \mathbf{T} \rightarrow \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}$  die **Evaluation** von Termen entsprechend ihrer **Semantik** leistet (z.B.  $\mathcal{E} = \llbracket \cdot \rrbracket_A$ ).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Der Zusammenhang von $\delta$ und $\theta$

...ist beschrieben durch das [Substitutionslemma B.4.1.1](#), wobei  $\mathcal{A}$  die Menge aller [Anweisungen](#) bezeichne.

## Lemma B.4.1.1 (Substitutionslemma)

$$\forall t \in \mathbf{T} \ \forall \sigma \in \Sigma \ \forall \alpha \in \mathcal{A}. \ \mathcal{E}(\delta_\alpha(t))(\sigma) = \mathcal{E}(t)(\theta_\alpha(\sigma))$$

[Beweis](#) induktiv über den Aufbau von  $t$ .

# Einfache Konstanten auf Anweisungsgraphen

Bezeichnen:

- $\text{eK}_n \in \Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}^{\top}\}$
- $\sigma_s \in \Sigma \setminus \{\sigma_{\top}\}$  Anfangszustand (oder Anfangszusicherung)

...wobei  $\text{eK}$  von 'einfache Konstanten' abgeleitet ist.

Das eK-Gleichungssystem für Einzelanweisungsgraphen:

$$\text{eK}_n = \begin{cases} \sigma_s & \text{falls } n = s \\ \lambda v. \prod \{ \mathcal{E}(\delta_{(m,n)}(v))(\text{eK}_m) \mid m \in \text{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## B.4.2

# Knotenbenannte Basisblockgraphen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Rückwärtssubstitution, Zustandstransformation

...auf **Anweisungssequenzen** von **Pfaden**, speziell damit auch auf Anweisungssequenzen von **Basisblöcken**.

Ausdehnung von  $\delta$  und  $\theta$  zur:

## 1. Rückwärtssubstitution auf Pfadanweisungssequenzen

$$\Delta_p : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$$
$$\Delta_p =_{df} \begin{cases} \delta_{n_q} & \text{falls } q = 1 \\ \Delta_{(n_1, \dots, n_{q-1})} \circ \delta_{n_q} & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

## 2. Zustandstransformation auf Pfadanweisungssequenzen

$$\Theta_p : \Sigma \rightarrow \Sigma$$
$$\Theta_p =_{df} \begin{cases} \theta_{n_1} & \text{falls } q = 1 \\ \Theta_{(n_2, \dots, n_q)} \circ \theta_{n_1} & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Der Zusammenhang von $\Delta$ und $\Theta$

...ist beschrieben durch das **Verallgemeinerte Substitutionslemma B.4.2.1**, wobei  $\mathcal{B}$  die Menge aller **Basisblöcke** bezeichne.

## Lemma B.4.2.1 (Verallg. Substitutionslemma)

$$\forall t \in \mathbf{T} \quad \forall \sigma \in \Sigma \quad \forall \beta \in \mathcal{B}. \mathcal{E}(\Delta_\beta(t))(\sigma) = \mathcal{E}(t)(\Theta_\beta(\sigma))$$

**Beweis** induktiv über die Länge von  $p$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Einfache Konstanten auf BB-Graphen: Stufe I

## Stufe I: Die Basisblockebene

Bezeichnen:

- $\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{Z}_{\perp}^{\top}\}$
- $\Delta_{\beta}(v) =_{df} \delta_{\alpha_1} \circ \dots \circ \delta_{\alpha_q}(v)$ , wobei  $\beta \equiv \alpha_1; \dots; \alpha_q$ .
- $\text{BB-N-eK}_{\beta}, \text{BB-X-eK}_{\beta}, \text{N-eK}_{\alpha}, \text{X-eK}_{\alpha} \in \Sigma$
- $\sigma_s \in \Sigma$  Anfangszustand (oder: Anfangszusicherung)

Das BB-Gleichungssystem für einf. Konstanten von Stufe I:

$$\text{BB-N-eK}_{\beta} = \begin{cases} \sigma_s & \text{falls } \beta = \mathbf{s} \\ \prod \{\text{BB-X-eK}_{\hat{\beta}} \mid \hat{\beta} \in \text{pred}(\beta)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{BB-X-eK}_{\beta} = \lambda v. \mathcal{E}(\Delta_{\beta}(v))(\text{BB-N-eK}_{\beta})$$



# Einfache Konstanten auf BB-Graphen: Stufe II

## Stufe II: Die Anweisungsebene

Vorberechnete Resultate (von Stufe I):

- $\nu$ -BB-N-eK,  $\nu$ -BB-X-eK: die größten Lösung des Gleichungssystems von Stufe I.

Das Anw.-Gleichungssystem für einf. Konstanten von Stufe II:

$$\text{N-eK}_\alpha = \begin{cases} \nu\text{-BB-N-eK}_{bb(\alpha)} & \text{falls } \alpha = \text{start}(bb(\alpha)) \\ \text{X-eK}_{pred(\alpha)} & \text{sonst (da gilt: } |pred(\alpha)| = 1) \end{cases}$$

$$\text{X-eK}_\alpha = \begin{cases} \nu\text{-BB-X-eK}_{bb(\alpha)} & \text{falls } \alpha = \text{end}(bb(\alpha)) \\ \lambda \nu. \mathcal{E}(\delta_\alpha(\nu))(\text{N-eK}_\alpha) & \text{sonst} \end{cases}$$

...wobei  $bb$ ,  $start$  und  $end$  drei Abbildungen sind, die angewendet auf eine Anweisung  $\alpha$  bzw. einen Basisblock  $\beta$  den Basisblock liefern, zu dem  $\alpha$  gehört, bzw. den Start- oder Endanweisungsknoten von  $\beta$ .

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# B.5

## Geistervariablenanalyse

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

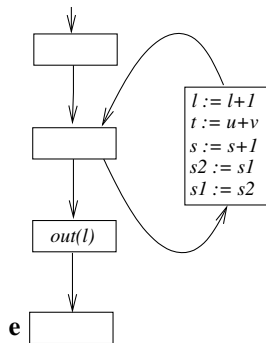
Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

## Geistervariablen

...betrachte folgendes Programm:



Es gilt: Anweisung

- $l := l + 1$  ist lebendig.
- $t := u + v$  ist tot.
- $s := s + 1$  und  $s1 := s2; s2 := s1$  sind lebendig, aber geisterhaft (engl. faint).

# Geistervariablenanalyse (1)

...für kantenbenannte Einzelanweisungsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Einzelanweisungskanten):

- $\text{LifeEnforcingUse}_\varepsilon^v$ : Variable  $v$  kommt in der Anweisung  $\alpha$  von Kante  $\varepsilon$  vor und wird von ihr 'zu leben gezwungen' (z.B. wenn  $\alpha$  eine Ausgabeanweisung, Verzweigungsbedingung oder Schleifenabbruchbedingung ist).
- $\text{Mod}_\varepsilon^v$ : Anweisung  $\alpha$  von Kante  $\varepsilon$  modifiziert Variable  $v$ .
- $\text{AssUse}_\varepsilon^v$ : Variable  $v$  kommt rechtsseitig in der Zuweisung  $\alpha$  von Kante  $\varepsilon$  vor.
- $\text{LhsVar}_\varepsilon$ : Bezeichnet die linksseitige Variable der Zuweisung  $\alpha$  an Kante  $\varepsilon$ .

# Geistervariablenanalyse (2)

Das GV-Gleichungssystem für Einzelanweisungsgraphen:

$$\text{FAINT}_n^v = \prod_{m \in \text{succ}(n)} \left( \overline{\text{LifeEnforcingUse}_{(n,m)}^v} * \right. \\ \left. (\text{FAINT}_m^v + \text{Mod}_{(n,m)}^v) * \right. \\ \left. (\text{FAINT}_m^{\text{LhsVar}_{(n,m)}} + \overline{\text{AssUse}_{(n,m)}^v}) \right)$$

**Intuitiv:** Eine Variable  $v$  ist **geisterhaft** am Knoten  $n$ , wenn  $v$

- von keiner Anweisung einer in  $n$  eingehenden Kante zu leben gezwungen wird (**1-tes Konjunktionsglied**).
- am Knoten  $n$  bereits geisterhaft ist oder durch die Anweisung an einer eingehenden Kante modifiziert und dadurch geisterhaft wird (**2-tes Konjunktionsglied**).
- von keiner Anweisung auf einer eingehenden Kante benutzt wird oder höchstens der Wertzuweisung an eine andere geisterhafte Variable dient (**3-tes Konjunktionsglied**).

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

...sind ein Beispiel für ein **DFA-Problem**, dessen Formulierung für **knoten-** und **kantenbenannte**

- **Instruktionsgraphen** offensichtlich ist.
- **Basisblockgraphen** alles andere als ersichtlich, nicht möglich ist.

## B.6

# Zusammenfassung, Schlussfolgerungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

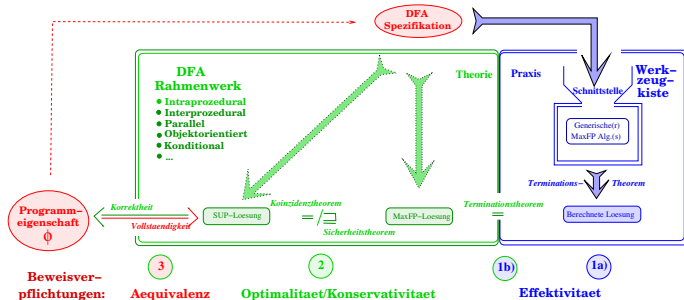
Kap. 13

Kap. 14

# Zusammenfassung, Schlussfolgerungen

Alle 4 Flussgraphrepräsentationen sind grundsätzlich **gleichwertig**.

Konzeptuell reicht deshalb eine einzige gemeinsame **Rahmen-** bzw. **Werkzeugkistensicht**:



im Wissen, dass sie je nach Aufgabe unterschiedlich zweckmässig sind und **unterschiedlich aufwändige Spezifikations-, Implementierungs- und Beweisverpflichtungen** zur Folge haben.



# Kapitel B.7

## Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14

# Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang B



Larry Carter, Jeanne Ferrante, Clark Thomborson. *Folklore Confirmed: Reducible Flow Graphs are Exponentially Larger*. In Conference Record of the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 106-114, 2003.



Jens Knoop. *From DFA-Frameworks to DFA-Generators: A Unifying Multiparadigm Approach*. In Proceedings of the 5th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99), Springer-V., LNCS 1579, 360-374, 1999.



Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *Basic-block graphs: Living dinosaurs?* In Proceedings of the 7th International Conference on Compiler Construction (CC'98), Springer-V., LNCS 1383, 65 - 79, 1998.

Inhalt

Teil I

Kap. 1

Kap. 2

Kap. 3

Teil II

Kap. 4

Kap. 5

Teil III

Kap. 6

Kap. 7

Kap. 8

Kap. 9

Kap. 10

Teil IV

Kap. 11

Kap. 12

Kap. 13

Kap. 14