Technische Universität Wien
Programmiersprachen und Übersetzer
Prof. Dr. J. Knoop

A-1040 Wien
Argentinierstr. 8
Tel.: 01-58801-18510

“Analyse und Verifikation (185.276, VU 2.0, ECTS 3.0)” SS 2020

Übungsblatt 3

16.03.2020

Die ersten drei Aufgaben beziehen sich auf *Kapitel 3* der Vorlesung, die beiden letzten Aufgaben auf *Kapitel 4*.

Aufgabe 1 : (2+2 Punkte)

Betrachte das Zustandstransformationsfunktional:

$$F : (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

definiert durch:

$$F =_{\mathrm{df}} \lambda\, g. \begin{cases} g_1 & \text{falls } g = g_2 \\ g_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige:

1. Für $g_1 = g_2$ hat F Fixpunkte. Welche?
2. Für $g_1 \neq g_2$ hat F keinen Fixpunkt, d.h. $\forall\, h \in [\Sigma \hookrightarrow \Sigma].\ F\ h \neq h$.

Betrachte für *Aufgabe 2* und *Aufgabe 3* die While-Programme:

$$\pi_1 \;\equiv\; \textbf{while } x \neq 0 \textbf{ do } \mathit{skip} \textbf{ od}$$

$$\pi_2 \;\equiv\; \textbf{while } x \neq 0 \textbf{ do } x := x - 1 \textbf{ od}$$

und die zu π_1 und π_2 gehörigen Zustandstransformationsfunktionale:

$$F_{\pi_1} : (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

definiert durch:

$$F_{\pi_1} =_{\mathrm{df}} \lambda\, g.\ \mathit{cond}\,(\llbracket\, x \neq 0 \,\rrbracket_B, g \circ \llbracket\, \mathit{skip} \,\rrbracket_{ds}, \lambda\, \sigma.\ \sigma)$$

und

$$F_{\pi_2} : (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

definiert durch:

$$F_{\pi_2} =_{\mathrm{df}} \lambda\, g.\ \mathit{cond}\,(\llbracket\, x \neq 0 \,\rrbracket_B, g \circ \llbracket\, x := x - 1 \,\rrbracket_{ds}, \lambda\, \sigma.\ \sigma)$$

Aufgabe 2 : (2+2+2 Punkte)

1. Gib das Funktional F_{π_1} direkt an, d.h. in der Form $F_{\pi_1}\ g\ \sigma \;=\; \begin{cases} \sigma[\ldots/\ldots] & \text{falls } \ldots \\ \ldots \end{cases}$

2. Zeige: Die Zustandstransformation

$$h \ =_{\text{df}} \ \lambda\sigma. \begin{cases} \sigma & \text{falls } \sigma(x) = 0 \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

   ist ein Fixpunkt von F_{π_1}, d.h.: $F_{\pi_1}\ h \ = \ h$.

3. Zeige: Die Zustandstransformation

$$h' \ =_{\text{df}} \ \lambda\sigma.\ \mathit{undef}$$

   ist kein Fixpunkt von F_{π_1}.

Aufgabe 3 : (2+5*2+2 Punkte)

1. Gib das Funktional F_{π_2} direkt an, d.h. in der Form $F_{\pi_2}\ g\ \sigma \ = \ \begin{cases} \sigma[\ldots/\ldots] & \text{falls } \ldots \\ \ldots & \end{cases}$

2. Welche der folgenden Zustandstransformationen sind Fixpunkte von F_{π_2}?

   (a) $h_1 \ =_{\text{df}} \ \lambda\sigma.\ \mathit{undef}$

   (b) $h_2 \ =_{\text{df}} \ \lambda\sigma. \begin{cases} \sigma[\mathbf{0}/x] & \text{falls } \sigma(x) \geq \mathbf{0} \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$

   (c) $h_3 \ =_{\text{df}} \ \lambda\sigma. \begin{cases} \sigma[\mathbf{0}/x] & \text{falls } \sigma(x) \geq \mathbf{0} \\ \sigma & \text{sonst} \end{cases}$

   (d) $h_4 \ =_{\text{df}} \ \lambda\sigma.\ \sigma[\mathbf{0}/x]$

   (e) $h_5 \ =_{\text{df}} \ \lambda\sigma.\ \sigma$

3. Welche der Funktionen $h_1, \ldots, h_5$ sind bezüglich der Relation $\sqsubseteq_{\mathcal{Z}}$ (s. Definition 3.2.3, Lemma 3.2.4, Lemma 3.2.13) miteinander vergleichbar? Sind alle Funktionen aus $\{h_1, \ldots, h_5\}$, die Fixpunkte von F_{π_2} sind, bezüglich $\sqsubseteq_{\mathcal{Z}}$ vergleichbar? Gib zur Antwort das Hasse-Diagramm (s. Anhang A.2.2) von $\{h_1, \ldots, h_5\}$ bezüglich $\sqsubseteq_{\mathcal{Z}}$ an.

Aufgabe 4 : (4+4 Punkte)

Gib ein (möglichst einfaches) While-Programm π an, für das die Hoaresche Zusicherung

$$\{\mathit{true}\} \ \ \pi \ \{\mathit{false}\}$$

partiell korrekt ist, und beweise die Behauptung mittels

1. eines baumartigen Beweises

2. einer linearen Beweisskizze

Aufgabe 5 : (2 Punkte)

Zeige, dass die scheinbar naheliegende quantorfreie naive Realisierung der Vorwärtszuweisungsregel nicht korrekt ist:

$$[\text{ass}_{\mathit{vw\text{-}naive}}] \qquad \frac{\overline{}}{\{p\}\ x{:=}t\ \{p[t/x]\}}$$

Abgabe: Zu Beginn der nächsten Lehrveranstaltung nach Wiederaufnahme der Präsenzlehre. Nach gegenwärtigem Stand wird dies Mittwoch, der 22.04.2020, sein (bei Bedarf wird der Abgabetermin über den Wiederaufnahmetermin hinaus verschoben).