Analyse und Verifikation

LVA 185.276, VU 2.0, ECTS 3.0
SS 2019

(Stand: 26.06.2019)

Jens Knoop

Technische Universität Wien
Information Systems Engineering
Compilers and Languages

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis (1)

Teil I: Motivation

Inhaltsverzeichnis (2)

Inhaltsverzeichnis (3)

Teil II: Verifikation

Inhaltsverzeichnis (4)

Inhaltsverzeichnis (5)

Teil III: Analyse

Inhaltsverzeichnis (6)

Inhaltsverzeichnis (7)

Inhaltsverzeichnis (8)

Inhaltsverzeichnis (9)

Inhaltsverzeichnis (10)

Inhaltsverzeichnis (11)

Inhaltsverzeichnis (12)

Inhaltsverzeichnis (13)

Inhaltsverzeichnis (14)

Teil V: Abstrakte Interpretation und Modellprüfung

Inhaltsverzeichnis (15)

Inhaltsverzeichnis (16)

Inhaltsverzeichnis (17)

Inhaltsverzeichnis (18)

Inhaltsverzeichnis (19)

Teil I

Motivation

This software comes "without warranty of any kind, expressed or implied, including but not limited to, the implied warranties of merchantability and fitness for a particular purpose."

Kapitel 1

Grundlagen

Kapitel 1.1

Motivation

Programmiersprachen

...festgelegt durch Angabe von Syntax und Semantik.

- Syntax: Regelwerk zur präzisen Beschreibung wohlgeformter Programme.
- Semantik: Regelwerk zur präzisen Beschreibung der Bedeutung oder des Verhaltens wohlgeformter Programme oder Programmteile (aber auch von Hardware).

Vorteilhaft: Festlegung von Syntax und Semantik durch

- formale Regelwerke.

Vorteile formaler Regelwerke

...zur Festlegung von Syntax und Semantik von Programmiersprachen: Rigorisität!

Die (mathematische) Rigorosität formaler Regelwerke für Syntax und Semantik von Programmiersprachen

- erlaubt Mehrdeutigkeiten, Über- und Unterspezifikationen natürlichsprachlicher Beschreibungen in Syntax und Semantik aufzudecken und aufzulösen.
- schafft die Grundlage für vertrauenswürdige Implementierungen der Programmiersprache, für die Analyse, Verifikation und Transformation von Programmen.

Programmiersprache WHILE

...als Modellsprache anhand derer wir die Angabe formaler Regelwerke zur Festlegung von Syntax und Semantik einer Programmiersprache beispielhaft illustrieren und demonstrieren.

Besondere Wichtigkeit kommt dabei der Semantik zu, die sich wie die Syntax einer Programmiersprache auf verschiedene Weise festlegen lässt. Wir sprechen von unterschiedlichen Definitionsstilen. Sie gewähren eine unterschiedliche Sicht auf die Bedeutung der Sprache und richten sich daher implizit an andere Adressaten.

Besonders grundlegend und wichtig sind der

- operationelle
- denotationelle

und mit abweichendem Fokus

- axiomatische

Semantikdefinitionsstil.

Semantikdefinitionsstile

- **Operationelle Semantik**

  Die Bedeutung eines (programmiersprachlichen) Konstrukts ist durch die Berechnung beschrieben, die es bei seiner Ausführung auf der Maschine induziert. Wichtig ist insbesondere, wie der Effekt der Berechnung erzeugt wird.

- **Denotationelle Semantik**

  Die Bedeutung eines Konstrukts wird durch mathematische Objekte modelliert, die den Effekt der Ausführung der Konstrukte repräsentieren. Wichtig ist einzig der Effekt, nicht wie er bewirkt wird.

- **Axiomatische Semantik**

  Bestimmte Eigenschaften des Effekts der Ausführung eines Konstrukts werden in Form von Zusicherungen ausgedrückt. Nicht relevante andere Aspekte der Ausführung werden dabei i.a. ignoriert.

Adressaten/besondere Eignung

...von Semantikdefinitionsstilen.

Sprachimplementierersicht/Sprachimplementierung:

- Operationelle Semantik
  - Natürliche Semantik (Großschrittsemantik)
  - Strukturell operationelle Semantik (Kleinschrittsemantik)

Sprachentwicklersicht/Sprachdesign:

- Denotationelle Semantik

Verifizierersicht/Anwendungsprogrammierung

- Axiomatische Semantik
  - Beweiskalküle für partielle und totale Korrektheit
  - Korrektheit, Vollständigkeit

Literaturhinweise (1)

...als Textbücher für Kapitel 1 bis 5:

- Hanne R. Nielson, Flemming Nielson. Semantics with Applications: An Appetizer. Springer-V., 2007.
- Hanne R. Nielson, Flemming Nielson. Semantics with Applications: A Formal Introduction. Wiley Professional Computing, Wiley, 1992.

  Bem.: Eine (überarbeitete) Version ist frei erhältlich auf:
  www.daimi.au.dk/~bra8130/Wiley_book/wiley.html

Literaturhinweise (2)

...ergänzend, weiterführend, vertiefend:

- Krzysztof R. Apt, Frank S. de Boer, Ernst-Rüdiger Olderog. Verification of Sequential and Concurrent Programs. 3. Auflage, Springer-V., 2009.
- Krzysztof R. Apt, Ernst-Rüdiger Olderog. Programmverifikation – Sequentielle, parallele und verteilte Programme. Springer-V., 1994.
- Ernst-Rüdiger Olderog, Bernhard Steffen. Formale Semantik und Programmverifikation. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 145-166, 2006.

Literaturhinweise (3)

- Jacques Loeckx, Kurt Sieber. The Foundations of Program Verification. Wiley, 1984.
- Krzysztof R. Apt. Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part 1. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 3(4):431-483, 1981.
- Krzysztof R. Apt. Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part II: Nondeterminism. Theoretical Computer Science 28(1-2):83-109, 1984.

Kapitel 1.2

Modellsprache WHILE

Modellsprache While

While, der sog. "while"-Kern imperativer Programmiersprachen, besitzt:

- Zuweisungen (einschließlich der leeren Anweisung)
- Fallunterscheidungen
- while-Schleifen (namensgebend für die Sprache)
- Sequentielle Komposition

Beachte: While ist "schlank", doch Turing-mächtig!

Syntax von WHILE

Die Menge wohlgeformter WHILE-Programme ist beschrieben durch folgende Backus-Naur-Regel (BNF):

$$
\begin{array}{lll}
\pi & ::= & x := a \qquad \text{(Zuweisung)} \\
& | & \mathit{skip} \qquad \text{(Leere Anweisung)} \\
& | & \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \qquad \text{(Fallunterscheidung)} \\
& | & \text{while } b \text{ do } \pi_1 \text{ od} \qquad \text{(while-Schleife)} \\
& | & \pi_1 ; \pi_2 \qquad \text{(Sequentielle Komposition)}
\end{array}
$$

wobei

- a für arithmetische Ausdrücke über Numeralen
- b für Wahrheitswertausdrücke

stehen.

Syntax von Numeralen und Ausdrücken

...beschrieben durch folgende BNF-Regeln.

Numerale (Zahlwörter)

$$
\begin{array}{lcll}
z & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \mid 9 & \text{(Ziffer)} \\
n & ::= & z \mid n\,z & \text{(Numeral)}
\end{array}
$$

Arithmetische Ausdrücke

$$
\begin{array}{lcll}
a & ::= & n & \text{(Numeral)} \\
 & & \mid x & \text{(Variable)} \\
 & & \mid a_1 + a_2 \mid a_1 * a_2 \mid a_1 - a_2 \mid a_1/a_2 \mid \ldots &
\end{array}
$$

Wahrheitswertausdrücke (Boolesche Ausdrücke)

$$
\begin{array}{lcll}
b & ::= & \mathit{true} & \text{(Konstantensymbol)} \\
 & & \mid \mathit{false} & \text{(Konstantensymbol)} \\
 & & \mid a_1 = a_2 \mid a_1 \neq a_2 & \\
 & & \mid a_1 < a_2 \mid a_1 \leq a_2 \mid \ldots & \\
 & & \mid b_1 \wedge b_2 \mid b_1 \vee b_2 \mid \neg b_1 &
\end{array}
$$

Bezeichnungen

...wir bezeichnen mit:

- **Var**, Menge der Variablen, $x \in$ **Var**
- **Num**, Menge der Zahlwörter, $n \in$ **Num**
- **Aexpr**, Menge arithmetischer Ausdrücke, $a \in$ **Aexpr**
- **Bexpr**, Menge Boolescher Ausdrücke, $b \in$ **Bexpr**
- **Prg**, Menge aller WHILE-Programme, $\pi \in$ **Prg**

Ausblick: Semantik von WHILE (1)

Die Bedeutung eines WHILE-Programms π ist gegeben durch (partielle) Zustandstransformationen

$$[\![\pi]\!] : \Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

wobei

$$\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{Var} \to \mathsf{ID}\}$$

die Menge aller Zustände über der Variablenmenge **Var** und einem geeigneten Datenbereich ID bezeichnet (in der Folge werden wir für ID meist die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ betrachten).

Notationelle Konventionen: Der Pfeil $\to$ bezeichnet totale Funktionen, der Pfeil $\hookrightarrow$ partielle Funktionen; das Zeichen $=_{df}$ steht für 'definitionsgemäß gleich'.

Ausblick: Semantik von While (2)

Im einzelnen legen wir auf drei Arten für While eine Semantik fest:

- Operationelle Semantik
  - Natürliche Semantik:
    $[\![\ ]\!]_{ns} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$
  - Strukturell operationelle Semantik:
    $[\![\ ]\!]_{sos} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$
- Denotationelle Semantik: $[\![\ ]\!]_{ds} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$

...und deren Beziehungen zueinander untersuchen, d.h. die Beziehungen zwischen $[\![\ ]\!]_{ns}$, $[\![\ ]\!]_{sos}$ und $[\![\ ]\!]_{ds}$.

Anschließend betrachten wir die

- Axiomatische Semantik

die einen abweichenden Fokus auf Programmverifikation hat.

Ausblick: Semantik von WHILE (3)

Dabei stützen sich die Semantikfestlegungen für WHILE auf eine Semantik für

- Zahlwörter
- arithmetische Ausdrücke
- Wahrheitswertausdrücke

und den Begriff der

- Speicherzustände

ab. Mit deren Festlegung werden wir daher beginnen.

Kapitel 1.3

Semantik von Numeralen

Semantik von Numeralen (oder Zahlwörtern)

...gegeben durch eine induktiv definierte totale Abbildung

$$[\![\, . \,]\!]_N : \mathbf{Num} \to \mathbb{Z}$$

definiert durch:

$$\begin{array}{lll} [\![\, 0 \,]\!]_N & =_{df} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [\![\, 9 \,]\!]_N & =_{df} & \mathbf{9} \\ [\![\, n\, i \,]\!]_N & =_{df} & \mathit{plus}\,(\mathit{mal}\,(\mathbf{10}, [\![\, n \,]\!]_N), [\![\, i \,]\!]_N), i \in \{0, \ldots, 9\} \\ [\![\, -n \,]\!]_N & =_{df} & \mathit{minus}\,(\mathbf{0}, [\![\, n \,]\!]_N) \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{lcll} \mathit{plus} & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & \text{(Addition auf } \mathbb{Z}) \\ \mathit{mal} & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & \text{(Multiplikation auf } \mathbb{Z}) \\ \mathit{minus} & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & \text{(Subtraktion auf } \mathbb{Z}) \end{array}$$

Bemerkungen

Syntaktische Entitäten

- 0, 1, 2, ... bezeichnen syntaktische Entitäten, Darstellungen von Zahlen.
- $-$ bezeichnet eine syntaktische Entität, die Darstellung eines (syntaktischen) Operators (dem als Semantik der 'Vorzeichenwechsel' zugeordnet wird).

Semantische Entitäten

- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ... bezeichnen semantische Entitäten, hier ganze Zahlen: $\mathbb{Z} =_{df} \{\ldots, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots\}$.
- $\mathit{plus}, \mathit{mal} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\mathit{minus} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bezeichnen (semantische) Operationen, hier die übliche Addition, Multiplikation und Subtraktion auf $\mathbb{Z}$.

Beachte: Die Semantik von Numeralen ist zustandsunabhängig.

Kapitel 1.4

Semantik arithmetischer Ausdrücke

Semantik arithmetischer Ausdrücke (1)

...gegeben durch eine induktiv definierte totale Abbildung

$$[\![\, . \,]\!]_A : \textbf{Aexpr} \rightarrow (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{Z})$$

mit

- $\mathbb{Z} =_{df} \{\ldots, \textbf{-2}, \textbf{-1}, \textbf{0}, \textbf{1}, \textbf{2}, \ldots\}$ Menge ganzer Zahlen
- $\Sigma =_{df} \{ \sigma \mid \sigma : \textbf{Var} \rightarrow \mathbb{Z} \}$ Menge der Zustände (oder Speicherzustände) über $\mathbb{Z}$

Semantik arithmetischer Ausdrücke (2)

...wobei $[\![\, . \,]\!]_A : \mathbf{Aexpr} \to (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{Z})$ definiert ist durch:

$$
\begin{array}{lll}
[\![n]\!]_A(\sigma) & =_{df} & [\![n]\!]_N \\
[\![x]\!]_A(\sigma) & =_{df} & \sigma(x) \qquad \text{(Wert von } x \text{ zustandsabhängig!)} \\
[\![a_1 + a_2]\!]_A(\sigma) & =_{df} & \mathit{plus}\,([\![a_1]\!]_A(\sigma), [\![a_2]\!]_A(\sigma)) \\
[\![a_1 * a_2]\!]_A(\sigma) & =_{df} & \mathit{mal}\,([\![a_1]\!]_A(\sigma), [\![a_2]\!]_A(\sigma)) \\
[\![a_1 - a_2]\!]_A(\sigma) & =_{df} & \mathit{minus}\,([\![a_1]\!]_A(\sigma), [\![a_2]\!]_A(\sigma))
\end{array}
$$

...weitere Operatoren (*div*, *mod*, ^, ...) analog.

Beachte auch hier den Unterschied zwischen syntaktischen und semantischen Entitäten:

- $+$, $*$, $-$ bezeichnen syntaktische Entitäten (kurz: Operatoren).
- *plus*, *mal*, *minus* bezeichnen semantische Entitäten (kurz: Operationen, hier auf $\mathbb{Z}$).

Kapitel 1.5

Semantik Boolescher Ausdrücke

Semantik Boolescher Ausdrücke (1)

...gegeben durch eine induktiv definierte totale Abbildung

$$[\![\, . \,]\!]_B : \mathbf{Bexpr} \to (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{B})$$

mit

- $\mathbb{B} =_{df} \{\mathbf{wahr}, \mathbf{falsch}\}$ Menge der Wahrheitswerte
- $\mathbb{Z} =_{df} \{\ldots, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots\}$ Menge ganzer Zahlen
- $\Sigma =_{df} \{\, \sigma \mid \sigma : \mathbf{Var} \to \mathbb{Z} \,\}$ Menge der Zustände (oder Speicherzustände) über $\mathbb{Z}$

Semantik Boolescher Ausdrücke (2)

...wobei $[\![\, . \,]\!]_B : \mathbf{Bexpr} \to (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{B})$ definiert ist durch:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![\mathit{true}]\!]_B(\sigma) & =_{df} & \mathbf{wahr} \\
[\![\mathit{false}]\!]_B(\sigma) & =_{df} & \mathbf{falsch} \\
[\![a_1 = a_2]\!]_B(\sigma) & =_{df} & \begin{cases} \mathbf{wahr} & \text{falls } \mathit{gleich}\,([\![a_1]\!]_A(\sigma), [\![a_2]\!]_A(\sigma)) \\ \mathbf{falsch} & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![a_1 > a_2]\!]_B(\sigma) & =_{df} & \begin{cases} \mathbf{wahr} & \text{falls } \mathit{größer}\,([\![a_1]\!]_A(\sigma), [\![a_2]\!]_A(\sigma)) \\ \mathbf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}
\end{array}
$$

...weitere Relatoren $(\geq, \; <, \leq, \neq, \ldots)$ analog.

$$
\begin{array}{lcl}
[\![b_1 \wedge b_2]\!]_B(\sigma) & =_{df} & \mathit{und}\,([\![b_1]\!]_B(\sigma), [\![b_2]\!]_B(\sigma)) \\
[\![b_1 \vee b_2]\!]_B(\sigma) & =_{df} & \mathit{oder}\,([\![b_1]\!]_B(\sigma), [\![b_2]\!]_B(\sigma)) \\
[\![\neg b]\!]_B(\sigma) & =_{df} & \mathit{neg}\,([\![b]\!]_B(\sigma))
\end{array}
$$

Semantik Boolescher Ausdrücke (3)

Dabei bezeichnen:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathit{und} & : & \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B} & \text{(Logische Konjunktion)} \\
\mathit{oder} & : & \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B} & \text{(Logische Disjunktion)} \\
\mathit{neg} & : & \mathbb{B} \to \mathbb{B} & \text{(Logische Negation)} \\
\mathit{gleich} & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{B} & \text{(Gleichheitsrelation auf } \mathbb{Z}\text{)}
\end{array}
$$

Beachte: Wir werden später das Symbol $=$ überladen und statt *gleich* kürzer auch $=$ schreiben; aus dem Kontext geht jeweils hervor, ob das Symbol $=$ als

- Operatorsymbol wie in $[\![a_1 = a_2]\!]_B(\sigma)$
- Operationssymbol wie in $[\![a_1]\!]_A(\sigma) = [\![a_2]\!]_A(\sigma)$

verwendet wird.

Semantik Boolescher Ausdrücke (3)

Beachte auch hier wieder den Unterschied zwischen syntaktischen und semantischen Entitäten:

Syntaktische Entitäten:

- *true* und *false* bezeichnen syntaktische Entitäten.
- $=$, $>$, $<$ bezeichnen syntaktische Entitäten (kurz: Relatoren).
- $\neg$, $\wedge$, $\vee$ bezeichnen syntaktische Entitäten (kurz: Operatoren).

Semantische Entitäten:

- **wahr** und **falsch** bezeichnen semantische Entitäten.
- *gleich*, *größer*, *kleiner* bezeichnen semantische Entitäten (kurz: Relationen (auf $\mathbb{Z}$)).
- *neg*, *und*, *oder* bezeichnen semantische Entitäten (kurz: Operationen (auf $\mathbb{B}$)).

Kapitel 1.6

Eigenschaften von $[\![\ ]\!]_N$, $[\![\ ]\!]_A$ und $[\![\ ]\!]_B$

Freie Variablen

...arithmetischer Ausdrücke:

$$\begin{aligned} FV(n) &= \emptyset \\ FV(x) &= \{x\} \\ FV(a_1 + a_2) &= FV(a_1) \cup FV(a_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

...Boolescher Ausdrücke:

$$\begin{aligned} FV(true) &= \emptyset \\ FV(false) &= \emptyset \\ FV(a_1 = a_2) &= FV(a_1) \cup FV(a_2) \\ &\dots \\ FV(b_1 \wedge b_2) &= FV(b_1) \cup FV(b_2) \\ FV(b_1 \vee b_2) &= FV(b_1) \cup FV(b_2) \\ FV(\neg b_1) &= FV(b_1) \end{aligned}$$

Eigenschaften von $[\![\ ]\!]_N$, $[\![\ ]\!]_A$ und $[\![\ ]\!]_B$

Lemma 1.6.1

Sei $n \in \mathbf{Num}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$. Dann gilt:
$[\![n]\!]_A(\sigma) = [\![n]\!]_N = [\![n]\!]_A(\sigma')$.

Lemma 1.6.2

Sei $a \in \mathbf{Aexpr}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma(x) = \sigma'(x)$ für alle $x \in FV(a)$. Dann gilt: $[\![a]\!]_A(\sigma) = [\![a]\!]_A(\sigma')$.

Lemma 1.6.3

Sei $b \in \mathbf{Bexpr}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma(x) = \sigma'(x)$ für alle $x \in FV(b)$. Dann gilt: $[\![b]\!]_B(\sigma) = [\![b]\!]_B(\sigma')$.

Beachte: Das Symbol $=$ ist hier bereits überladen verwendet zur Bezeichnung der semantischen Gleichheitsrelation auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{B}$.

Kapitel 1.7

Syntaktische und semantische Substitution

Substitution

...ein Begriff von zentraler Bedeutung, der in zwei Varianten auftritt:

- Syntaktische Substitution
- Semantische Substitution

Der Zusammenhang zwischen syntaktischer und semantischer Substitution wird beschrieben durch:

- Substitutionslemma 1.7.3

Syntaktische Substitution

...für arithmetische Audrücke.

Definition 1.7.1 (Syntaktische Substitution)

Die syntaktische Substitution für arithmetische Ausdrücke ist eine dreistellige Abbildung

$$\cdot[\cdot/\cdot] : \mathbf{Aexpr} \times \mathbf{Aexpr} \times \mathbf{Var} \to \mathbf{Aexpr}$$

die induktiv definiert ist durch:

$\forall\, a, a' \in \mathbf{Aexpr}.\ \forall\, x \in \mathbf{Var}.$

$$\begin{array}{lcll} n[a'/x] & =_{df} & n & \text{falls } a \equiv n \in \mathbf{Num} \\ y[a'/x] & =_{df} & \begin{cases} a' & \text{falls } y = x \\ y & \text{sonst} \end{cases} & \text{falls } a \equiv y \in \mathbf{Var} \\ (a_1\ op\ a_2)[a'/x] & =_{df} & (a_1[a'/x]\ op\ a_2[a'/x]) & \text{falls } a \equiv (a_1\, op\, a_2), \\ & & & op \in \{+, *, -, \ldots\} \end{array}$$

Semantische Substitution

...für arithmetische Ausdrücke.

Definition 1.7.2 (Semantische Substitution)

Die semantische Substitution für arithmetische Ausdrücke ist eine dreistellige Abbildung

$$\cdot[\cdot/\cdot] : \Sigma \times \mathbb{Z} \times \mathbf{Var} \to \Sigma$$

die definiert ist durch:

$$\forall\, \sigma \in \Sigma.\, \forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}.\, \forall\, x \in \mathbf{Var}.\, \sigma[\mathbf{z}/x](y) =_{df} \begin{cases} \mathbf{z} & \text{falls } y \equiv x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Substitutionslemma für arithmet. Ausdrücke

...Zusammenhang syntaktischer und semantischer Substitution für arithmetische Ausdrücke:

Lemma 1.7.3 (Substitutionslemma für $[\![\ ]\!]_A$)

$$\forall\, a, a' \in \mathbf{Aexpr}.\ \forall\, \sigma \in \Sigma.\ \underbrace{[\![\ a[a'/x]\ ]\!]_A(\sigma)}_{\text{Substituierter Ausdruck}} = [\![\ a\ ]\!]_A(\underbrace{\sigma[[\![\ a'\ ]\!]_A(\sigma)/x]}_{\text{Substituierter Zustand}})$$

wobei

- $[a'/x]$ die syntaktische Substitution und
- $[[\![\ a'\ ]\!]_A(\sigma)/x]$ die semantische Substitution

bezeichnen.

Substitutionslemma für Boolesche Ausdrücke

...die Begriffe syntaktischer und semantischer Substitution lassen sich analog für Boolesche Ausdrücke definieren.

...für den Zusammenhang syntaktischer und semantischer Substitution für Boolesche Ausdrücke erhalten wir:

Lemma 1.7.4 (Substitutionslemma für $[\![\ ]\!]_B$)

$$\forall\, b \in \mathbf{Bexpr}.\ \forall\, a' \in \mathbf{Aexpr}.\ \forall\, \sigma \in \Sigma.$$

$$\underbrace{[\![\ b[a'/x]\ ]\!]_B}_{\substack{\text{Substituierter}\\ \text{Ausdruck}}}(\sigma) = [\![\ b\ ]\!]_B(\underbrace{\sigma[[\![\ a'\ ]\!]_A(\sigma)/x]}_{\substack{\text{Substituierter}\\ \text{Zustand}}})$$

Kapitel 1.8

Induktive Beweisprinzipien

Grundlegende induktive Beweisprinzipien

...für den Beweis von Eigenschaften und Aussagen wie in Kapitel 1.6 und 1.7:

- Vollständige Induktion
- Verallgemeinerte Induktion
- Strukturelle Induktion

Chapter 1.8.1

Vollständige Induktion

Das Prinzip vollständiger Induktion

Sei IN die Menge natürlicher Zahlen und E eine Eigenschaft natürlicher Zahlen.

Das Prinzip vollständiger Induktion:

$$\underbrace{E(1)}_{\text{Induktionsanfang}} \wedge \overbrace{[\forall n \in \mathbb{N}.\ \underbrace{E(n)}_{\text{Induktionshypothese}} \Rightarrow \underbrace{E(n+1)}_{\text{Induktionsschritt}}]}^{\text{Induktiver Fall}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\forall\, n \in \mathbb{N}.\ E(n)}_{\text{Folgerung}}$$

Beispiel: Illustration vollständiger Induktion

Lemma 1.8.1.1

$$\forall\, n \in \mathbb{N}.\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Beweis durch vollständige Induktion.

Beweis von Lemma 1.8.1.1 (1)

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. In diesem Fall erhalten wir die Gleichheit von linker und rechter Seite der Aussage des Lemmas wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{1}(2k-1) \\
&= 2*1-1 \\
&= 2-1 \\
&= 1 \\
&= 1^2 \\
&= n^2
\end{aligned}$$

Beweis von Lemma 1.8.1.1 (2)

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Induktionshypothese (IH) können wir die Gleichheit $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ annehmen. Damit können wir den Beweis wie folgt vervollständigen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= 2(n+1) - 1 + \sum_{k=1}^{n}(2k-1) \\
\overset{(IH)}{} &= 2(n+1) - 1 + n^2 \\
&= 2n + 2 - 1 + n^2 \\
&= 2n + 1 + n^2 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= n^2 + n + n + 1 \\
&= (n+1)(n+1) \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

□

Übungsaufgabe

Beweise durch vollständige Induktion:

Lemma 1.8.1.2

1. $$\forall\, n \in \mathbb{N}.\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $$\forall\, n \in \mathbb{N}.\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. $$\forall\, n \in \mathbb{N}.\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Chapter 1.8.2

Verallgemeinerte Induktion

Das Prinzip verallgemeinerter Induktion

Sei IN die Menge natürlicher Zahlen und E eine Eigenschaft natürlicher Zahlen.

Das Prinzip verallgemeinerter Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ [\overbrace{(\forall m < n.\ E(m))}^{\text{Induktions-hypothese}} \Rightarrow \overbrace{E(n)}^{\text{Induktions-schritt}}] \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\forall\, n \in \mathbb{N}.\ E(n)}_{\text{Folgerung}}$$

(Induktiver) Fall

Beachte: Für die kleinste natürliche Zahl $\hat{n}$ ($\mathbb{N}_0$ vs. $\mathbb{N}_1$) reduziert sich die Induktionshypothese auf 'wahr', d.h. $E(\hat{n})$ muss ohne Rückgriff auf besondere Voraussetzungen bewiesen werden.

Bsp: Illustration verallgemeinerter Induktion

Die Fibonacci-Funktion ist definiert durch:

$$fib : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$

$$fib(n) =_{df} \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$

Lemma 1.8.2.1

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\ fib(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Beweis durch verallgemeinerte Induktion.

Schlüssel zum Beweis von Lemma 1.8.2.1

...für $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$, ist die Ausnutzung der Gleichheit

$$fib(m) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m}{\sqrt{5}}$$

die aufgrund der Induktionshypothese (IH) für $m = n - 1$ und $m = n - 2$ angenommen werden kann.

(Beachte: Wir könnten im Fall von $n \geq 2$ diese Gleichheit aufgrund der Induktionshypothese für alle $m < n$ ausnutzen (statt nur für $m = n - 1$ und $m = n - 2$), was aber nicht erforderlich ist, um den Beweis erfolgreich abzuschließen.)

Beweis von Lemma 1.8.2.1 (1)

Fall 1: Sei $n = 0$. Wir erhalten wie gewünscht:

$$fib(0) = 0 = \frac{0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}}$$

(Beachte: Für den Beweis von Fall 1 liefert uns die Induktionshypothese nichts über die Gültigkeit der Aussage des Lemmas; glücklicherweise wird auch nichts benötigt.)

Fall 2: Sei $n = 1$. Wir erhalten:

$$fib(1) = 1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}}$$

(Beachte: Für den Beweis von Fall 2 hätten wir aufgrund der Induktionshypothese die Aussage des Lemmas für $n = 0$ ausnutzen können; das ist aber nicht erforderlich.)

Beweis von Lemma 1.8.2.1 (2)

Fall 3: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$. Mithilfe der IH für $n-2$ u. $n-1$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
fib(n) &= fib(n-2) + fib(n-1) \\
\text{(2x IH)} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left[1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left[1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]}{\sqrt{5}} \\
(*) &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

□

Beweis von $(*)$

Die mit $(*)$ markierte Gleichheit gilt aufgrund folgender zwei Gleichheiten, die sich unter Ausnutzung der Binomialformeln zeigen lassen:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Übungsaufgabe

Sei die Funktion f definiert durch:

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$

$$f(n) =_{df} \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} f(k) & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

Beweise durch verallgemeinerte Induktion (unter Abstützung auf Lemma 1.8.2.3):

Lemma 1.8.2.2

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}.\ n \geq 2).\ f(n) = 2^{n-2}$$

Beweise durch vollständige Induktion:

Lemma 1.8.2.3

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}.\ n \geq 3).\ \sum_{k=0}^{n-3} 2^k = 2^{n-2} - 1$$

Kapitel 1.8.3

Strukturelle Induktion

Das Prinzip struktureller Induktion

Sei M eine induktiv aus einfacheren/einfachsten Elementen aufgebaute Menge, bezeichne $sub(m) \subseteq M$, $m \in M$, die endliche Menge einfacherer Elemente aus M, aus denen m aufgebaut ist, und sei E eine Eigenschaft der Elemente von M.

Das Prinzip struktureller Induktion:

$$\forall\, m \in M.\ [\overbrace{\underbrace{(\forall\, m' \in sub(m).\ E(m'))}_{\text{Induktions-hypothese}} \Rightarrow \underbrace{E(m)}_{\text{Induktions-schritt}}}^{\text{(Induktiver) Fall}}] \ \Rightarrow\ \underbrace{\forall\, m \in M.\ E(m)}_{\text{Folgerung}}$$

Beachte: Für die 'einfachsten' Elemente (oder Atome) $\hat{m}$ aus M gilt $sub(\hat{m}) = \emptyset$. Für sie reduziert sich die Induktionshypothese auf 'wahr', d.h. $E(\hat{m})$ muss ohne Rückgriff auf besondere Voraussetzungen bewiesen werden.

Beispiel: Beweis von Lemma 1.6.2 (1)

Lemma 1.6.2 (wiederholt)

Sei $a \in$ **Aexpr** und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma(x) = \sigma'(x)$ für alle $x \in FV(a)$. Dann gilt:

$$[\![a]\!]_A(\sigma) = [\![a]\!]_A(\sigma')$$

Beweis durch strukturelle Induktion (über den induktiven Aufbau arithmetischer Ausdrücke).

Beispiel: Beweis von Lemma 1.6.2 (2)

Sei $a \in \mathbf{Aexpr}$ und seien $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma(x) = \sigma'(x)$ für alle $x \in FV(a)$.

Fall 1: Sei $a \equiv n$, $n \in \mathbf{Num}$. Mithilfe der Definitionen von $[\![\ ]\!]_A$ und $[\![\ ]\!]_N$ erhalten wir unmittelbar die Gleichheit der rechten und linken Seite der Aussage des Lemmas:

$$[\![a]\!]_A(\sigma) = [\![n]\!]_A(\sigma) = [\![n]\!]_N = [\![n]\!]_A(\sigma') = [\![a]\!]_A(\sigma')$$

Fall 2: Sei $a \equiv x$, $x \in \mathbf{Var}$. Mithilfe der Definition von $[\![\ ]\!]_A$ erhalten wir auch in diesem Fall unmittelbar die Gleichheit der rechten und linken Seite der Aussage des Lemmas:

$$[\![a]\!]_A(\sigma) = [\![x]\!]_A(\sigma) = \sigma(x) = \sigma'(x) = [\![x]\!]_A(\sigma') = [\![a]\!]_A(\sigma')$$

Beispiel: Beweis von Lemma 1.6.2 (3)

Fall 3: Sei $a \equiv a_1 + a_2$, $a_1, a_2 \in$ **Aexpr**. Aufgrund der Induktionshypothese (IH) dürfen wir die Gleichheiten $[\![a_1]\!]_A(\sigma) = [\![a_1]\!]_A(\sigma')$ und $[\![a_2]\!]_A(\sigma) = [\![a_2]\!]_A(\sigma')$ annehmen. Damit können wir den Beweis wie folgt abschließen:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & [\![a]\!]_A(\sigma) \\
\text{(Wahl von } a\text{)} & = & [\![a_1 + a_2]\!]_A(\sigma) \\
\text{(Def. von } [\![\ ]\!]_A\text{)} & = & \mathit{plus}\,([\![a_1]\!]_A(\sigma), [\![a_2]\!]_A(\sigma)) \\
\text{(IH für } a_1, a_2\text{)} & = & \mathit{plus}\,([\![a_1]\!]_A(\sigma'), [\![a_2]\!]_A(\sigma')) \\
\text{(Def. von } [\![\ ]\!]_A\text{)} & = & [\![a_1 + a_2]\!]_A(\sigma') \\
\text{(Wahl von } a\text{)} & = & [\![a]\!]_A(\sigma')
\end{array}
$$

Fälle für weitere arithmetische Operatoren: Analog. □

Übungsaufgabe (1)

Beweise durch strukturelle Induktion (über den induktiven Aufbau Boolescher Ausdrücke):

Lemma 1.6.3

Sei $b \in \mathbf{Bexpr}$ und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma(x) = \sigma'(x)$ für alle $x \in FV(b)$. Dann gilt:

$$[\![b]\!]_B(\sigma) = [\![b]\!]_B(\sigma')$$

Übungsaufgabe (2)

Beweise durch strukturelle Induktion (über den induktiven Aufbau arithmetischer Ausdrücke):

Lemma 1.7.3 (Substitutionslemma für $[\![\ ]\!]_A$)

$$\forall\, a, a' \in \mathbf{Aexpr}.\ \forall\, \sigma \in \Sigma.\ [\![\ a[a'/x]\ ]\!]_A(\sigma) = [\![\ a\ ]\!]_A(\sigma[[\![\ a'\ ]\!]_A(\sigma)/x])$$

Beweise durch strukturelle Induktion (über den induktiven Aufbau Boolescher Ausdrücke):

Lemma 1.7.4 (Substitutionslemma für $[\![\ ]\!]_B$)

$$\forall\, b \in \mathbf{Bexpr}.\ \forall\, a' \in \mathbf{Aexpr}.\ \forall\, \sigma \in \Sigma.$$
$$[\![\ b[a'/x]\ ]\!]_B(\sigma) = [\![\ b\ ]\!]_B(\sigma[[\![\ a'\ ]\!]_A(\sigma)/x])$$

Kapitel 1.8.4

Zusammenfassung

Die Prinzipien

...vollständiger Induktion:

$$E(1) \wedge [\forall n \in \mathbb{N}.\, E(n) \Rightarrow E(n+1)] \quad \Rightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.\, E(n)$$

...verallgemeinerter Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\, [(\forall m < n.\, E(m)) \Rightarrow E(n)] \quad \Rightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.\, E(n)$$

...struktureller Induktion:

$$\forall\, m \in M.\, [(\forall\, m' \in \mathit{sub}(m).\, E(m')) \Rightarrow E(m)] \Rightarrow \forall\, m \in M.\, E(m)$$

sind gleich mächtig, gleich ausdruckskräftig.

Beachte

Abhängig vom Anwendungsfall

- ist oft eines der Induktionsprinzipien unmittelbarer, einfacher und damit zweckmäßiger anzuwenden.

Zum Beweis von Aussagen oder Eigenschaften

- über induktiv definierten Datenstrukturen ist i.a. das Prinzip struktureller Induktion am zweckmäßigsten.

Kapitel 1.9

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 1 (1)

Mordechai Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science*. 2. Auflage, Springer-V., 2001. (Chapter 9.2, Semantics of Programming Languages)

Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, Jèrôme Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Minè, Xavier Rival. *Static Analysis and Verification of Aerospace Software by Abstract Interpretation*. In Proceedings AIAA Infotech@Aerospace (AIAA I@A 2010), AIAA-2010-3385, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1-38, April 2010.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 1 (2)

Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, Jèrôme Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Minè, Xavier Rival. *Static Analysis by Abstract Interpretation of Embedded Critical Software*. ACM Software Engineering Notes 36(1):1-8, 2011.

Al Bessey, Ken Block, Ben Chelf, Andy Chou, Bryan Fulton, Seth Hallem, Charles Henri-Gros, Asya Kamsky, Scott McPeak, Dawson Engler. *A Few Billion Lines of Code Later: Using Static Analysis to Find Bugs in the Real World*. Communications of the ACM 53(2):66-75, 2010.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 1 (3)


Gilles Dowek. *Principles of Programming Languages*. Springer-V, 2009. (Chapter 1, Imperative Core; Chapter 1.1, Five Constructs)


Gerhard Goos, Wolf Zimmermann. *Programmiersprachen*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 515-562, 2006. (Kapitel 2.2, Elemente von Programmiersprachen: Syntax, Semantik und Pragmatik, Syntaktische Eigenschaften, Semantische Eigenschaften)


Steve P. Miller, Michael W. Whalen, Darren D. Cofer. *Software Model Checking Takes Off*. Communications of the ACM 53(2):58-64, 2010.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 1 (4)


Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Chapter 1, Introduction)


Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 1, Introduction)


Caitlin Sadowski, Edward Aftandilian, Alex Eagle, Liam Miller-Cushon, Ciera Jaspan. *Lessons from Building Static Analysis Tools at Google*. Communications of the ACM 61(4):58-66, 2018.


Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. MIT Press, 1993.

Kapitel 2

Operationelle Semantik von WHILE

Operationelle Semantik von WHILE

...die Bedeutung eines programmiersprachlichen Konstrukts ist durch die Berechnung beschrieben, die es bei seiner Ausführung auf der Maschine induziert. Wichtig ist, **wie** *der Effekt der Berechnung erzeugt wird.*

Kapitel 2.1

Strukturell operationelle Semantik

Strukturell operationelle Semantik

...beschreibt den Ablauf der einzelnen Berechnungsschritte, die stattfinden; daher auch die Bezeichnung Kleinschritt-Semantik.

Grundlegende Arbeiten

...zur strukturell operationellen Semantik:

- Gordon D. Plotkin. A Structural Approach to Operational Semantics. Journal of Logic and Algebraic Programming 60-61:17-139, 2004.
- Gordon D. Plotkin. An Operational Semantics for CSP. In Proceedings of the TC-2 Working Conference on Formal Description of Programming Concepts II, Dines Bjørner (Hrsg.), North-Holland, Amsterdam, 1982.
- Gordon D. Plotkin. A Structural Approach to Operational Semantics. Lecture notes, DAIMI FN-19, Aarhus University, Dänemark, 1981, Nachdruck von 1991.

Strukturell operationelle Semantik von WHILE

...die strukturell operationelle Semantik (oder SO-Semantik) von WHILE (im Sinne von Gordon D. Plotkin) ordnet jedem Programm π als Bedeutung eine partiell definierte Zustandstransformation zu:

$$\Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

Die SO-Semantik von WHILE ist demnach durch ein Zustandstransformationsfunktional $[\![\, . \,]\!]_{sos}$

$$[\![\, . \,]\!]_{sos} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

gegeben, das wir in der Folge definieren.

Speicherzustandsübergänge, Konfigurationen

...die SO-Semantik von WHILE beschreibt den Berechnungsvorgang von Programmen $\pi \in \mathbf{Prg}$ als Folge elementarer

- Speicherzustandsübergänge.

Zentral: Der Begriff der

- Konfiguration

als Paar von (Rest-) Programm und Zustand bzw. Endzustand.

Konfigurationen

Definition 2.1.1 (Konfigurationen)

- Eine Konfiguration ist ein Element der Form $\langle \pi, \sigma \rangle$ oder σ, wobei $\pi \in \mathbf{Prg}$ ein WHILE-Programm und $\sigma \in \Sigma$ ein Zustand ist.
- $\Gamma =_{df} (\mathbf{Prg} \times \Sigma) \cup \Sigma$ bezeichnet die Menge aller Konfigurationen, γ eine einzelne Konfiguration.
- Eine Konfiguration der Form
  - $\langle \pi, \sigma \rangle$ heißt nichtterminal (oder Zwischenkonfiguration):

    ...das (Rest-) Programm π ist auf den (Zwischen-) Zustand σ anzuwenden.
  - σ heißt terminal (oder final):

    ...der Zustand σ ist der Resultatzustand nach Ende einer (regulären) Berechnung.

SOS-Regelwerk von WHILE: Axiome (1)

$$[\text{skip}_{sos}] \quad \frac{}{\langle \mathit{skip}, \sigma \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\gg \sigma}$$

$$[\text{ass}_{sos}] \quad \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\gg \sigma[[\![t]\!]_A(\sigma)/x]}$$

$$[\text{if}^{tt}_{sos}] \quad \frac{}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\gg \langle \pi_1, \sigma \rangle} \qquad [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr}$$

$$[\text{if}^{ff}_{sos}] \quad \frac{}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\gg \langle \pi_2, \sigma \rangle} \qquad [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{falsch}$$

$$[\text{while}_{sos}] \quad \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\gg \langle \text{if } b \text{ then } \pi; \text{ while } b \text{ do } \pi \text{ od else } \mathit{skip} \text{ fi}, \sigma \rangle}$$

SOS-Regelwerk von WHILE: Regeln (2)

$$[\text{comp}^1_{sos}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \Longrightarrow \langle \pi_1', \sigma' \rangle}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Longrightarrow \langle \pi_1'; \pi_2, \sigma' \rangle}$$

$$[\text{comp}^2_{sos}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \Longrightarrow \sigma'}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \Longrightarrow \langle \pi_2, \sigma' \rangle}$$

Regelwerke: Axiome und Regeln

..wir unterscheiden in Regelwerken:

- Prämissenlose Regeln, sog. Axiome, der Form

$$[\textit{Axiomsname}] \quad \frac{}{\text{Konklusion}} \quad [\textit{Randbedingung}(\textit{en})]$$

- Prämissenbehaftete Regeln, sog. (echte) Regeln, der Form

$$[\textit{Regelname}] \quad \frac{\text{Prämisse(n)}}{\text{Konklusion}} \quad [\textit{Randbedingung}(\textit{en})]$$

jeweils mit optionalen Randbedingungen (oder Seitenbedingungen) wie z.B. im Axiom $[\text{if}^{ff}_{sos}]$ in Form von $[\![\, b \,]\!]_B(\sigma) = \textbf{falsch}$.

Das Regelwerk der SO-Semantik von WHILE

...besteht aus:

- 5 Axiomen
  ...für die leere Anweisung (1), Zuweisung (1), Fallunterscheidung (2) und while-Schleife (1).
- 2 Regeln
  ...für die sequentielle Komposition (2).

Berechnungsschritt, Berechnungsfolge

Definition 2.1.2 (Berechnungsschritt)

Ein (SOS-) Berechnungsschritt ist von der Form

- $\langle \pi, \sigma \rangle \ggg \gamma \quad$ mit $\quad \gamma \in \Gamma =_{df} (\mathbf{Prg} \times \Sigma) \cup \Sigma$

Mit $\ggg^*$ bezeichnen wir die reflexiv-transitive Hülle von $\ggg$.

Definition 2.1.3 (Berechnungsfolge)

Eine (SOS-) Berechnungsfolge eines Programms π angesetzt auf einen (Start-) Zustand $\sigma \in \Sigma$ ist eine

- endliche Folge $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$ von Konfigurationen mit $\gamma_0 = \langle \pi, \sigma \rangle$ und $\gamma_i \ggg \gamma_{i+1}$ für alle $i \in \{0, \ldots, k-1\}$

oder eine

- unendliche Folge $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots,$ von Konfigurationen mit $\gamma_0 = \langle \pi, \sigma \rangle$ und $\gamma_i \ggg \gamma_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Eigenschaften maximaler Berechnungsfolgen

...reguläre und irreguläre Terminierung, Divergenz:

Definition 2.1.4 (Terminierung und Divergenz)

Eine maximale (d.h. nicht mehr verlängerbare) Berechnungsfolge heißt

- regulär terminierend, wenn sie endlich ist und die letzte Konfiguration aus Σ ist.
- divergierend, wenn sie unendlich ist.
- irregulär terminierend sonst.

  (z.B. wegen Nichtauswertbarkeit der Bedingung einer Fallunterscheidung aufgrund einer Division durch $\mathbf{0}$:
  $\langle \text{if } a/0 = 42 \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle$ hat keine Folgekonfiguration: Weder $[if^{tt}_{sos}]$ noch $[if^{ff}_{sos}]$ ist anwendbar, da für beide Axiome die Auswertung der Randbedingung scheitert.)

Beispiel: Illustration der SO-Semantik (1)

Gegeben: Programm $\pi \in \mathbf{Prg}$ und Anfangszustand $\sigma \in \Sigma$ mit

- $\pi \equiv y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$
  (Bemerkung: $\equiv$ steht für 'syntaktisch identisch')
- $\sigma(x) = \mathbf{3}$, $\sigma(y)$ beliebig $\in \mathbb{Z}$ für $y \neq x$.

Gesucht: Die von der Anfangskonfiguration $\langle \pi, \sigma \rangle$ (lies: 'π angesetzt auf σ') induzierte Berechnungsfolge.

- $\langle y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle$

Beispiel: Illustration der SO-Semantik (2)

$$
\begin{aligned}
& \langle y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle \\
\Rrightarrow\ & \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[\mathbf{1}/y] \rangle \\
\Rrightarrow\ & \langle \text{if } x \neq 1 \\
& \quad \text{then } y := y * x;\ x := x - 1; \\
& \qquad \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od} \\
& \quad \text{else } \mathit{skip} \text{ fi}, \sigma[\mathbf{1}/y] \rangle \\
\Rrightarrow\ & \langle y := y * x;\ x := x - 1; \\
& \quad \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[\mathbf{1}/y] \rangle \\
\Rrightarrow\ & \langle x := x - 1; \\
& \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[\mathbf{1}/y])[\mathbf{3}/y] \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{(} \hat{=}\ & \langle x := x - 1; \\
& \quad \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[\mathbf{3}/y] \rangle \ \mathbf{)}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Illustration der SO-Semantik (3)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\!\!\!\!\Rightarrow\ & \langle \text{if } x \neq 1 \\
& \quad \text{then } y := y * x;\ x := x - 1; \\
& \qquad \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od} \\
& \quad \text{else } \mathit{skip} \text{ fi}, (\sigma[\mathbf{3}/y])[\mathbf{2}/x] \rangle \\
\Rightarrow\!\!\!\!\Rightarrow\ & \langle y := y * x;\ x := x - 1; \\
& \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[\mathbf{3}/y])[\mathbf{2}/x] \rangle \\
\Rightarrow\!\!\!\!\Rightarrow\ & \langle x := x - 1; \\
& \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[\mathbf{6}/y])[\mathbf{2}/x] \rangle \\
\Rightarrow\!\!\!\!\Rightarrow\ & \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[\mathbf{6}/y])[\mathbf{1}/x] \rangle
\end{aligned}
$$

Beispiel: Illustration der SO-Semantik (4)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\!\!\!\!\Rightarrow \quad & \langle \text{if } x \neq 1 \\
& \quad \text{then } y := y * x;\ x := x - 1; \\
& \qquad \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od} \\
& \quad \text{else } \mathit{skip} \text{ fi}, (\sigma[\mathbf{6}/y])[\mathbf{1}/x] \rangle \\
\Rightarrow\!\!\!\!\Rightarrow \quad & \langle \mathit{skip}, (\sigma[\mathbf{6}/y])[\mathbf{1}/x] \rangle \\
\Rightarrow\!\!\!\!\Rightarrow \quad & (\sigma[\mathbf{6}/y])[\mathbf{1}/x]
\end{aligned}
$$

Detailbetrachtung: Korrektheitsargument (1)

$$\langle y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma\rangle$$

$$([\text{ass}_{sos}], [\text{comp}^2_{sos}]) \quad \Longrightarrow\!\!\!> \quad \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[\mathbf{1}/y]\rangle$$

...steht vereinfachend und abkürzend für:

$$[\text{comp}^2_{sos}]\ \frac{[\text{ass}_{sos}]\ \dfrac{}{\langle y := 1,\ \sigma\rangle \Longrightarrow\!\!\!> \sigma\,[\mathbf{1}/y]}}{\langle y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y*x;\ x := x-1 \text{ od},\ \sigma\rangle \Longrightarrow\!\!\!> \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y*x;\ x := x-1 \text{ od},\ \sigma\,[\mathbf{1}/y]\rangle}$$

Detailbetrachtung: Korrektheitsargument (2)

$$[\text{while}_{sos}] \quad \Longrightarrow\!\!> \quad \begin{array}{l} \langle \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[\mathbf{1}/y] \rangle \\ \langle \text{if } x \neq 1 \\ \quad \text{then } y := y * x;\ x := x - 1; \\ \quad\quad \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od} \\ \quad \text{else } \mathit{skip} \text{ fi}, \sigma[\mathbf{1}/y] \rangle \end{array}$$

...steht vereinfachend und abkürzend für:

$$[\text{while}_{sos}] \ \frac{\quad}{\langle \texttt{while x} \neq \texttt{1 do y := y*x; x := x-1 od}, \quad \sigma\,[\mathbf{1}/\texttt{y}] \rangle \Longrightarrow\!\!> \langle \texttt{if x} \neq \texttt{1 then y:= y*x; x := x-1; while x <> 1 do y := y*x; x := x-1 od else skip fi}, \sigma\,[\mathbf{1}/\texttt{y}] \rangle}$$

Detailbetrachtung: Korrektheitsargument (3)

$$\langle (y := y * x;\ x := x - 1);\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma[\mathbf{1}/y] \rangle$$

$$([\text{ass}_{sos}], [\text{comp}^2_{sos}], [\text{comp}^1_{sos}]) \quad \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow \quad \langle x := x - 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, (\sigma[\mathbf{1}/y])[\mathbf{3}/y] \rangle$$

...steht vereinfachend und abkürzend für:

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle \texttt{y := y*x, } \sigma\,[\mathbf{1}/\texttt{y}] \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow (\sigma\,[\mathbf{1}/\texttt{y}])\,[\mathbf{3}/\texttt{y}]\,\rangle}[\text{ass}_{sos}]}{\langle \texttt{y := y*x; x := x-1, } \sigma\,[\mathbf{1}/\texttt{y}] \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow \langle \texttt{x := x-1, } (\sigma\,[\mathbf{1}/\texttt{y}])\,[\mathbf{3}/\texttt{y}]\,\rangle}[\text{comp}^2_{sos}]$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle \texttt{y := y*x; x := x-1; while x} \neq \texttt{1 do y := y*x; x := x-1 od, } \sigma[\mathbf{1}/\texttt{y}] \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow \langle \texttt{x := x-1; while x} \neq \texttt{1 do y := y*x; x := x-1 od, } (\sigma[\mathbf{1}/\texttt{y}])[\mathbf{3}/\texttt{y}] \rangle}[\text{ass}_{sos}]}{\langle \texttt{y := y*x; x := x-1; while x} \neq \texttt{1 do y := y*x; x := x-1 od, } \sigma[\mathbf{1}/\texttt{y}] \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow \langle \texttt{x := x-1; while x} \neq \texttt{1 do y := y*x; x := x-1 od, } (\sigma[\mathbf{1}/\texttt{y}])[\mathbf{3}/\texttt{y}] \rangle}[\text{comp}^2_{sos}]}{\langle (\texttt{y := y*x; x := x-1); while x} \neq \texttt{1 do y := y*x; x := x-1 od, } \sigma[\mathbf{1}/\texttt{y}] \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow \langle \texttt{x := x-1; while x} \neq \texttt{1 do y := y*x; x := x-1 od, } (\sigma[\mathbf{1}/\texttt{y}])[\mathbf{3}/\texttt{y}] \rangle}[\text{comp}^1_{sos}]$$

SOS-Regeln: Determiniertheit, Determinismus

Lemma 2.1.5

$\forall\, \pi \in \mathbf{Prg}.\ \forall\, \sigma \in \Sigma.\ \forall\, \gamma, \gamma' \in \Gamma.$

$$\langle \pi, \sigma \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow \gamma \ \wedge\ \langle \pi, \sigma \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow \gamma' \ \Rightarrow\ \gamma = \gamma'$$

Korollar 2.1.6

Die vom SOS-Regelwerk für eine Konfiguration induzierte Berechnungsfolge ist eindeutig bestimmt, d.h. determiniert.

Salopper: Die SO-Semantik von WHILE ist deterministisch!

Das Semantikfunktional $[\![\ ]\!]_{sos}$

...dank Korollar 2.1.6 können wir festlegen:

Definition 2.1.7 (SO-Semantik von WHILE)

Die strukturell operationelle Semantik (oder SO-Semantik) von WHILE ist gegeben durch das Funktional

$$[\![\,.\,]\!]_{sos} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

das definiert ist durch:

$$\forall\, \pi \in \mathbf{Prg}.\, \forall\, \sigma \in \Sigma.\, [\![\, \pi \,]\!]_{sos}(\sigma) =_{df} \begin{cases} \sigma' & \text{falls } \langle \pi, \sigma \rangle \Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow^{*} \sigma' \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow^{*}$ die reflexiv-transitive Hülle von $\Longrightarrow\!\!\!\!\Longrightarrow$ bezeichnet.

Induktion über Berechnungsfolgenlänge

...als Variante induktiver Beweisführung.

Induktion über die Länge von Berechnungsfolgen:

- Induktionsanfang
  - Beweise, dass Eigenschaft E für Berechnungsfolgen der Länge 0 gilt.
- Induktionsschritt
  - Beweise unter der Annahme, dass E für Berechnungsfolgen der Länge kleiner k gilt (Induktionshypothese!), dass E auch für Berechnungsfolgen der Länge k gilt.

Induktive Beweisführung

...über die Länge von Berechnungsfolgen ist typisch zum Nachweis von Aussagen oder Eigenschaften im Zusammenhang mit strukturell operationeller Semantik.

Ein typisches Beispiel hierfür ist der Beweis der Aussage von:

Lemma 2.1.8

$$\forall \pi, \pi' \in \mathbf{Prg}.\ \forall\, \sigma, \sigma'' \in \Sigma.\ \forall\, k \in \mathbb{N}.\ (\langle \pi_1; \pi_2, \sigma\rangle \Longrightarrow^{k} \sigma'') \Rightarrow$$
$$\exists\, \sigma' \in \Sigma.\ \exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{N}.\ (k_1 + k_2 = k \wedge \langle \pi_1, \sigma\rangle \Longrightarrow^{k_1} \sigma' \wedge \langle \pi_2, \sigma'\rangle \Longrightarrow^{k_2} \sigma'')$$

Kapitel 2.2

Natürliche Semantik

Natürliche Semantik

...beschreibt, wie sich das Gesamtergebnis der Programmausführung ergibt; daher auch die Bezeichnung Großschritt-Semantik.

Natürliche Semantik von WHILE

...die natürliche Semantik (oder N-Semantik) von WHILE ordnet jedem Programm π als Bedeutung eine partiell definierte Zustandstransformation zu:

$$\Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

Die N-Semantik von WHILE ist demnach durch ein Zustandstransformationsfunktional $[\![\, . \,]\!]_{ns}$

$$[\![\, . \,]\!]_{ns} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

gegeben, das wir in der Folge definieren.

Initialer/finaler Zustand, Konfigurationen

...die N-Semantik ist am Zusammenhang zwischen

- initialem (oder Anfangszustand) und
- finalem (oder Endzustand)

Speicherzustand einer Berechnung eines Programms interessiert.

Zentral auch hier: Der bereits von der SO-Semantik bekannte Begriff der

- Konfiguation (s. Definition 2.1.1).

NS-Regelwerk von WHILE: Axiome (1)

$$[\text{skip}_{ns}] \quad \frac{}{\langle \mathit{skip}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

$$[\text{ass}_{ns}] \quad \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \rightarrow \sigma[[\![t]\!]_A(\sigma)/x]}$$

$$[\text{while}^{ff}_{ns}] \quad \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma} \qquad [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{falsch}$$

NS-Regelwerk von WHILE: Regeln (2)

$$[\text{while}^{tt}_{ns}] \quad \frac{\langle \pi, \sigma \rangle \to \sigma', \langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma' \rangle \to \sigma''}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \to \sigma''} \quad [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr}$$

$$[\text{if}^{tt}_{ns}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \to \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \to \sigma'} \quad [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr}$$

$$[\text{if}^{ff}_{ns}] \quad \frac{\langle \pi_2, \sigma \rangle \to \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma \rangle \to \sigma'} \quad [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{falsch}$$

$$[\text{comp}_{ns}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma \rangle \to \sigma', \langle \pi_2, \sigma' \rangle \to \sigma''}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \to \sigma''}$$

Das Regelwerk der N-Semantik von WHILE

...besteht aus:

- 3 Axiomen
  ...für die leere Anweisung (1), Zuweisung (1), und while-Schleife (1).
- 4 Regeln
  ...für die while Schleife (1), Fallunterscheidung (2) und sequentielle Komposition (1).

Beispiel: Illustration der N-Semantik (1)

Gegeben: Programm $\pi \in \mathbf{Prg}$ und Anfangszustand $\sigma \in \Sigma$ mit

- $\pi \equiv y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$
  (Bemerkung: $\equiv$ steht für 'syntaktisch identisch')
- $\sigma(x) = \mathbf{3}$, $\sigma(y)$ beliebig $\in \mathbb{Z}$ für $y \neq x$.

Gesucht: Der von der Anfangskonfiguration $\langle \pi, \sigma \rangle$ (lies: 'π angesetzt auf σ')

- $\langle y := 1;\ \text{while } x /= 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle$

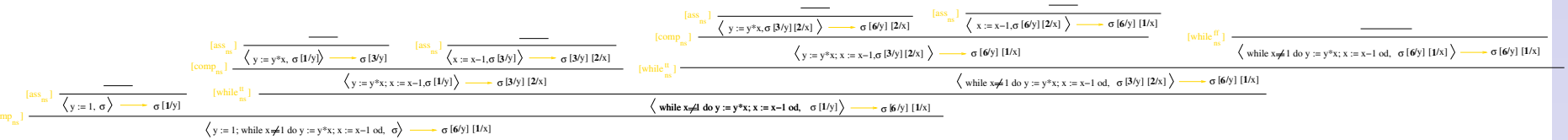
induzierte finale Zustand.

Behauptung:

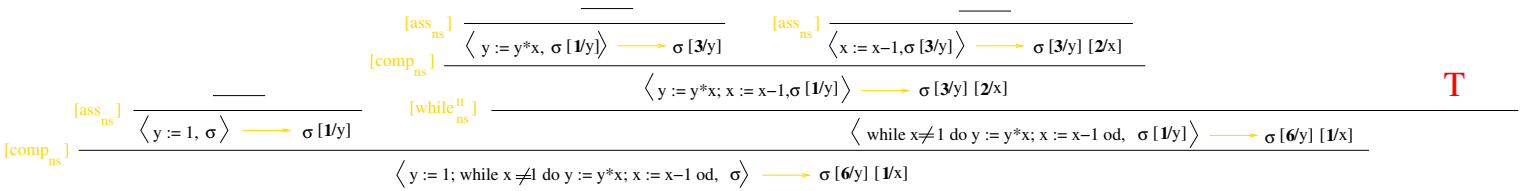
$$\langle y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[\mathbf{6}/y][\mathbf{3}/x]$$

Beispiel: Illustration der N-Semantik (2)

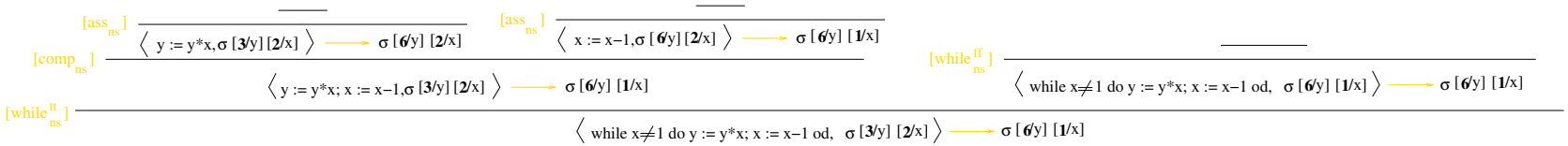
...der die Behauptung beweisende Ableitungsbaum gemäß des Regelwerks der N-Semantik:



...der gleiche Ableitungsbaum geringfügig größer durch Einführung des benannten Teilbaums T:



T ≡



NS-Regeln: Determiniertheit, Determinismus

Lemma 2.2.1

$$\forall\, \pi \in \mathbf{Prg}.\, \forall\, \sigma \in \Sigma.\, \forall\, \gamma, \gamma' \in \Gamma.\, \langle \pi, \sigma \rangle \to \gamma \wedge \langle \pi, \sigma \rangle \to \gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

Korollar 2.2.2

Die vom NS-Regelwerk für eine Konfiguration induzierte finale Konfiguration ist (sofern definiert) eindeutig bestimmt, d.h. determiniert.

Salopper: Die N-Semantik von WHILE ist deterministisch!

Das Semantikfunktional $[\![\ ]\!]_{ns}$

...dank Korollar 2.2.2 können wir festlegen:

Definition 2.2.3 (N-Semantik von WHILE)

Die natürliche Semantik (oder N-Semantik) von WHILE ist gegeben durch das Funktional

$$[\![\ .\ ]\!]_{ns} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

das definiert ist durch:

$$\forall\, \pi \in \mathbf{Prg}.\, \forall\, \sigma \in \Sigma.\, [\![\ \pi\ ]\!]_{ns}(\sigma) =_{df} \begin{cases} \sigma' & \text{falls } \langle \pi, \sigma \rangle \to \sigma' \\ \mathit{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

Induktion über Ableitungsbäume

....als Variante induktiver Beweisführung.

Induktion über die Form von Ableitungsbäumen:

- Induktionsanfang
  - Beweise, dass Eigenschaft E für die Axiome des Regelwerks gilt (und somit für alle nichtzusammengesetzten Ableitungsbäume).
- Induktionsschritt
  - Beweise für jede echte Regel des Regelwerks unter der Annahme, dass E für jede Prämisse dieser Regel gilt (Induktionshypothese!), dass E auch für die Konklusion dieser Regel gilt, sofern die (optional vorhandenen) Randbedingungen der Regel erfüllt sind.

Induktive Beweisführung

...über die Form von Ableitungsbäumen ist typisch zum Nachweis von Aussagen oder Eigenschaften im Zusammenhang mit natürlicher Semantik.

Ein typisches Beispiel hierfür ist der Beweis der Aussage von Lemma 2.2.1 aus diesem Kapitel:

Lemma 2.2.1 (wiederholt)

$$\forall\, \pi \in \mathbf{Prg}.\, \forall\, \sigma \in \Sigma.\, \forall\, \gamma, \gamma' \in \Gamma.\, \langle \pi, \sigma \rangle \to \gamma \wedge \langle \pi, \sigma \rangle \to \gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

Kapitel 2.3

Äquivalenz strukturell operationeller und natürlicher Semantik

Strukturell operationelle Semantik

Der Fokus liegt auf den

- individuellen Schritten einer Berechnungsfolge, d.h. auf der Ausführung von Zuweisungen und Tests.

Intuitiv haben die Transitionen $\langle \pi, \sigma \rangle \ggg \gamma$ der Transitionsrelation $\ggg$ folgende Bedeutung:

- Eine Transition beschreibt den ersten Schritt der Berechnungsfolge von π angesetzt auf σ.

Dabei sind folgende Übergänge möglich: γ ist von der Form

- $\langle \pi', \sigma' \rangle$: Die Abarbeitung von π ist nicht vollständig; das Restprogramm π' ist auf σ' anzusetzen. Ist von $\langle \pi', \sigma' \rangle$ kein Transitionsübergang möglich (z.B. Division durch $\mathbf{0}$), so terminiert die Abarbeitung von π in $\langle \pi', \sigma' \rangle$ irregulär.
- σ': Die Abarbeitung von π ist vollständig; π angesetzt auf σ terminiert in einem Schritt in σ' regulär.

Natürliche Semantik

Der Fokus liegt auf dem

- Zusammenhang von initialem und finalem Zustand einer Berechnungsfolge.

Intuitiv haben die Transitionen $\langle \pi, \sigma \rangle \to \sigma'$ der Transitionsrelation $\to$ folgende Bedeutung:

- π angesetzt auf initialen Zustand σ terminiert schließlich im finalen Zustand σ'.
- Existiert ein solches σ' nicht, so ist die N-Semantik für den initialen Zustand σ undefiniert.

Zusammenhang von $[\![\ ]\!]_{sos}$ und $[\![\ ]\!]_{ns}$

Lemma 2.3.1

$$\forall\, \pi \in \mathbf{Prg}.\ \forall\, \sigma, \sigma' \in \Sigma.\ \langle \pi, \sigma \rangle \to \sigma' \Rightarrow \langle \pi, \sigma \rangle \Longrightarrow^{*} \sigma'$$

Beweis durch Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums für $\langle \pi, \sigma \rangle \to \sigma'$.

Lemma 2.3.2

$$\forall\, \pi \in \mathbf{Prg}.\ \forall\, \sigma, \sigma' \in \Sigma.\ \forall\, k \in \mathbb{N}.\ \langle \pi, \sigma \rangle \Longrightarrow^{k} \sigma' \Rightarrow \langle \pi, \sigma \rangle \to \sigma'$$

Beweis durch Induktion über die Länge der Berechnungsfolge $\langle \pi, \sigma \rangle \Longrightarrow^{k} \sigma'$, d.h. durch (vollständige) Induktion über k.

Äquivalenz

...von strukturell operationeller und natürlicher Semantik von WHILE.

Aus Lemma 2.3.1 und Lemma 2.3.2 folgt unmittelbar:

Theorem 2.3.3 (Äquivalenz von $[\![\ ]\!]_{sos}$ und $[\![\ ]\!]_{ns}$)

$$\forall\, \pi \ \in\ \mathbf{Prg}.\ [\![\, \pi \,]\!]_{sos} = [\![\, \pi \,]\!]_{ns}$$

Kapitel 2.4

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 2 (1)

Gilles Kahn. *Natural Semantics*. In Proceedings of the 4th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'87), Springer-V., LNCS 247, 22-39, 1987.

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Chapter 2, Operational Semantics)

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 2, Operational Semantics)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 2 (2)


Gordon D. Plotkin. *A Structural Approach to Operational Semantics*. Lecture notes, DAIMI FN-19, Aarhus University, Dänemark, 1981, Nachdruck von 1991.


Gordon D. Plotkin. *An Operational Semantics for CSP*. In Proceedings of the TC-2 Working Conference on Formal Description of Programming Concepts II, Dines Bjørner (Hrsg.), North-Holland, Amsterdam, 1982.


Gordon D. Plotkin. *A Structural Approach to Operational Semantics*. Journal of Logic and Algebraic Programming 60-61:17-139, 2004.

Kapitel 3

Denotationelle Semantik von WHILE

Denotationelle Semantik

...die Bedeutung eines programmiersprachlichen Konstrukts wird durch mathematische Objekte, Abbildungen, modelliert, die den Effekt der Ausführung der Konstrukte beschreiben. Wichtig ist **einzig** *der Effekt, nicht wie er bewirkt wird.*

Fokus operationeller, denotationeller Semantik

...der Fokus

- operationeller Semantik liegt darauf, wie ein Programm ausgeführt wird, nicht auf dem (Gesamt-) Effekt, den es (im Sinn einer Abbildung) bewirkt.
- denotationeller Semantik liegt auf dem (Gesamt-) Effekt (im Sinn einer Abbildung), den die Ausführung eines Programms hat, nicht darauf, wie dieser Effekt erreicht wird.

Denotationelle Semantik erreicht dies, indem sie für jedes syntaktische Konstrukt eine semantische Funktion festlegt, die dem syntaktischen Konstrukt ein mathematisches Objekt, eine Abbildung als Bedeutung zuweist; eine Abbildung, die den Effekt der Ausführung des Konstrukts beschreibt (jedoch nicht, wie dieser Effekt erreicht wird oder erreicht werden kann).

Schlüsseleigenschaft

...Kompositionalität der semantischen Funktionen.

Intuitiv: Für jedes

- elementare syntaktische Konstrukt gibt es eine semantische Funktion, die seinen Effekt, seine Bedeutung beschreibt.
- zusammengesetzte syntaktische Konstrukt gibt es eine semantische Funktion, die kompositionell über die semantischen Funktionen seiner Komponenten definiert ist und seinen Effekt, seine Bedeutung beschreibt.

Kapitel 3.1

Denotationelle Semantik

Denotationelle Semantik von WHILE

...die denotationelle Semantik (oder D-Semantik) von WHILE ordnet jedem Programm π als Bedeutung eine partiell definierte Zustandstransformation zu:

$$\Sigma \hookrightarrow \Sigma$$

Die D-Semantik von WHILE ist demnach durch ein Zustandstransformationsfunktional $[\![\, . \,]\!]_{ds}$

$$[\![\, . \,]\!]_{ds} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

gegeben, das wir in der Folge definieren.

D-Regelwerk von WHILE: Definierende Abb.

$$[\![\mathit{skip}]\!]_{ds} = \mathit{id} \qquad \text{(Identität)}$$

$$[\![x := t]\!]_{ds}(\sigma) = \sigma[[\![t]\!]_A(\sigma)/x] \qquad \text{(Zustandssubstitution)}$$

$$[\![\pi_1; \pi_2]\!]_{ds} = [\![\pi_2]\!]_{ds} \circ [\![\pi_1]\!]_{ds} \qquad (\circ \text{ funktionale Komposition})$$

$$[\![\text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}]\!]_{ds} = \mathit{cond}\,([\![b]\!]_B, [\![\pi_1]\!]_{ds}, [\![\pi_2]\!]_{ds})$$

$$[\![\text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}]\!]_{ds} = \mathit{FIX}\ F$$

$$\text{mit } F\ g = \mathit{cond}\,([\![b]\!]_B, g \circ [\![\pi]\!]_{ds}, \mathit{id})$$

Dabei bezeichnen:

- *id*: Identische Zustandstransformation.
- *cond*: Fallunterscheidungsfunktional.
- *FIX*: Fixpunkt-Zustandstransformationsfunktional.

Zu den (Hilfs-) Funktionen und -funktionalen

...*id*, *cond* und *FIX*:

- $id : \Sigma \to \Sigma$: Identische Zustandstransformation definiert durch: $\forall\, \sigma \in \Sigma.\ id(\sigma) =_{df} \sigma$.
- $cond : (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{B}) \times (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \times (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$: Fallunterscheidungsfunktional.
- $FIX : ((\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$: Fixpunkt-Zustandstransformationsfunktional, das den kleinsten Fixpunkt des Argumentfunktionals liefert.

Das Funktional *cond*

Fallunterscheidungsfunktional

$$cond : (\Sigma \hookrightarrow \mathbb{B}) \times (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \times (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

definiert durch

$$cond\,(p, g_1, g_2)(\sigma) =_{df} \begin{cases} g_1(\sigma) & \text{falls } p(\sigma) = \textbf{wahr} \\ g_2(\sigma) & \text{falls } p(\sigma) = \textbf{falsch} \\ undef & \text{sonst} \end{cases}$$

Anmerkung zu den Argumenten und zum Resultat von *cond*:

- 1. Argument: Ein partiell definiertes Prädikat.
- 2. Argument, 3. Argument: Je eine partiell definierte Zustandstransformation.
- Resultat: Eine partiell definierte Zustandstransformation.

Mithilfe von *cond*

... ergibt sich für die denotationelle Bedeutung des Fallunterscheidungskonstrukts 'if-then-else-fi':

$$[\![\text{ if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi }]\!]_{ds}(\sigma)$$

$$= \quad cond\,([\![b]\!]_B, [\![\pi_1]\!]_{ds}, [\![\pi_2]\!]_{ds})(\sigma)$$

$$= \begin{cases} \sigma' & \text{falls } ([\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr} \ \wedge \ [\![\pi_1]\!]_{ds}(\sigma) = \sigma') \\ & \quad \vee \ ([\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{falsch} \ \wedge \ [\![\pi_2]\!]_{ds}(\sigma) = \sigma') \\ undef & \text{falls } ([\![b]\!]_B(\sigma) = undef) \\ & \quad \vee \ ([\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr} \ \wedge \ [\![\pi_1]\!]_{ds}(\sigma) = undef) \\ & \quad \vee \ ([\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{falsch} \ \wedge \ [\![\pi_2]\!]_{ds}(\sigma) = undef) \end{cases}$$

Erinnerung: $[\![.]\!]_B$ und $[\![.]\!]_A$ sind partiell definiert (z.B. Division durch $\mathbf{0}$), vgl. Kapitel 1.4 und 1.5.

Das Funktional *FIX*

Fixpunkt-Zustandstransformationsfunktional

$$FIX : ((\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

Im Zusammenhang mit der D-Semantik des while-Konstrukts

$$[\![\text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}]\!]_{ds}$$

wird *FIX* angewendet auf ein ganz bestimmtes Zustandstransformationsfunktional, das Funktional

$$F : (\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

das definiert ist durch:

$$F\ g = cond\ ([\![b]\!]_B, g \circ [\![\pi]\!]_{ds}, id)$$

Zur D-Semantik des while-Konstrukts (1)

Jede der Intuition der Bedeutung von Fallunterscheidung und while-Schleife entsprechende Festlegung der D-Semantik von Fallunterscheidungs- und while-Konstrukt muss erfüllen:

A) Die Anweisungen while b do π od und if b then (π; while b do π od) else *skip* fi haben denselben Effekt, d.h. ihre D-Semantik muss übereinstimmen:

$$[\![\text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}]\!]_{ds} =$$
$$[\![\text{if } b \text{ then } (\pi; \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}) \text{ else } \mathit{skip} \text{ fi}]\!]_{ds}$$

Zusammen mit A) liefern die D-Regeln für das Fallunterscheidungskonstrukt, das sequentielle Kompositions- und das *skip*-Konstrukt damit folgende Gleichheit:

B) $[\![\text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}]\!]_{ds} =$
$$\mathit{cond}\,([\![b]\!]_B, [\![\text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}]\!]_{ds} \circ [\![\pi]\!]_{ds}, \mathit{id})$$

Zur D-Semantik des while-Konstrukts (2)

Die Definition des Funktionals F liefert zusammen mit der D-Regel für das while-Konstrukt folgende Gleichheit:

C) $F \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} =_{df}$

$$cond\,(\llbracket b \rrbracket_B, \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} \circ \llbracket \pi \rrbracket_{ds}, id)$$

Zusammen implizieren B) und C) die Gleichheit:

D) $\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} = F \llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds}$

Das heißt: Die D-Semantik des while-Konstrukts ist *ein* Fixpunkt des Funktionals F.

Die D-Regel des while-Konstrukts legt fest:

E) $\llbracket \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od} \rrbracket_{ds} =_{df} FIX\ F$

Das heißt: Die D-Semantik des while-Konstrukts ist *der eindeutig bestimmte* kleinste Fixpunkt des Funktionals F.

Hauptresultat

...die definierenden Gleichungen des D-Regelwerks von WHILE sind 'vernünftig':

Theorem 3.1.1 (Determiniertheit, Determinismus)

Für alle WHILE-Programme $\pi \in \mathbf{Prg}$ ist durch das D-Regelwerk von WHILE in eindeutiger Weise eine partielle Zustandstransformation festgelegt.

Das Semantikfunktional $[\![\ ]\!]_{ds}$

...dank Theorem 3.1.1 können wir festlegen:

Definition 3.1.2 (D-Semantik von WHILE)

Die denotationelle Semantik (oder D-Semantik) von WHILE ist gegeben durch das Funktional

$$[\![\ .\ ]\!]_{ds} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

wobei für alle $\pi \in \mathbf{Prg}$ die partielle Zustandstransformation $[\![\ \pi\ ]\!]_{ds}$ diejenige gemäß Theorem 3.1.1 gegebene und eindeutig bestimmte partielle Zustandstransformation ist.

Kapitel 3.2

Fixpunktfunktional und Wohldefiniertheit

Zur Wohldefiniertheit

...von *FIX* und *FIX F*.

Arbeitsplan:

Wir stellen zunächst einige Resultate aus der

- Fixpunkttheorie

zusammen, die wir benötigen.

Anschließend zeigen wir, dass diese Resultate auf das D-Regelwerk

- anwendbar sind.

Dabei setzen wir voraus: Mathematische Grundlagen über

- Ordnungen, vollständige partielle Ordnungen (CPOs), Stetigkeit von Funktionen auf CPOs, das Fixpunkttheorem von Knaster, Tarski und Kleene (siehe Anhang A 'Mathematische Grundlagen' für Details).

Folgende Resultate

...sind zentral:

1. Die Menge der partiellen Zustandstransformationen $ZT =_{df} [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]$ kann vollständig partiell geordnet werden, d.h. das Paar $([\Sigma \hookrightarrow \Sigma], \sqsubseteq)$ ist für eine geeignete Relation $\sqsubseteq \subseteq ZT \times ZT$ eine CPO.
2. Das Funktional F ist im Kontext des D-Regelwerks stetig.
3. Fixpunktbildung wird im Kontext des D-Regelwerks ausschließlich auf stetige Funktionen angewendet.

Insgesamt folgt aus 1.), 2.) und 3.) die Wohldefiniertheit von

$$[\![\ ]\!]_{ds} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

Ordnung auf Zustandstransformationen

Bezeichne $ZT =_{df} [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]$ die Menge der

- partiellen Zustandstransformationen.

Wir definieren folgende Ordnung(srelation) $\sqsubseteq$ auf ZT:

$$\forall\, g_1, g_2 \in ZT.\ g_1 \sqsubseteq g_2 \iff_{df}$$
$$\forall\, \sigma \in \Sigma.\ g_1(\sigma)\ \mathit{definiert} = \sigma' \Rightarrow g_2(\sigma)\ \mathit{definiert} = \sigma'$$

Lemma 3.2.1 (Partielle Ordnung, kleinstes Element)

1. Das Paar $(ZT, \sqsubseteq)$ ist eine partielle Ordnung.
2. Die total undefinierte (d.h. nirgends definierte) Zustandstransformation $\bot \in ZT$ mit $\bot(\sigma) = \mathit{undef}$ für alle $\sigma \in \Sigma$ ist das eindeutig bestimmte kleinste Element in ZT bezüglich der Ordnungsrelation $\sqsubseteq$.

Der Graph totaler Funktionen

Definition 3.2.2 (Graph einer totalen Funktion)

Der Graph einer totalen Funktion $f : M \to N$ ist eine Relation *graph* auf $M \times N$ definiert durch:

$$graph(f) =_{df} \{\langle m, n\rangle \mid f(m) = n\} \subseteq M \times N$$

Lemma 3.2.3

Die Relation *graph* einer totalen Funktion $f : M \to N$ ist:

1. rechtseindeutig, d.h. $\forall\, m \in M.\ \forall\, n \in N.\ \langle m, n\rangle \in graph(f) \ \wedge\ \langle m, n'\rangle \in graph(f) \Rightarrow n = n'$
2. linkstotal, d.h. $\forall\, m \in M.\ \exists\, n \in N.\ \langle m, n\rangle \in graph(f)$.

Der Graph partieller Funktionen

Definition 3.2.4 (Graph einer partiellen Funktion)

Der Graph einer partiellen Funktion $f : M \hookrightarrow N$ mit Definitionsbereich $M_f \subseteq M$ ist eine Relation *graph* auf $M_f \times N$ definiert durch:

$$graph(f) =_{df} \{\langle m, n\rangle \mid m \in M_f \wedge f(m) = n\} \subseteq M_f \times N$$

Vereinbarung: Für $f : M \hookrightarrow N$ partiell definierte Funktion auf $M_f \subseteq M$ schreiben wir:

- $f(m) = n$, falls $\langle m, n\rangle \in graph(f)$
- $f(m) = undef$, falls $m \notin M_f$

Ordnungen, Ketten, Schranken

Wir definieren:

- $\forall f, g : M \to N.\ f \sqsubseteq g \iff_{df} graph(f) \subseteq graph(g)$
- Eine Menge $G =_{df} \{g_1, g_2, g_3, \ldots\} \subseteq [M \to N]$ von Funktionen heißt eine Kette, wenn G total geordnet ist bezüglich $\sqsubseteq$, d.h. die Elemente von G lassen sich anordnen in der Form $g_1 \sqsubseteq g_2 \sqsubseteq g_3 \sqsubseteq \ldots$.
- Eine Funktion $g : M \to N$ heißt obere Schranke einer Menge $G =_{df} \{g_1, g_2, g_3, \ldots\} \subseteq [M \to N]$ von Funktionen, wenn gilt: $\forall g' \in G.\ g' \sqsubseteq g$.
- Eine Funktion $g : M \to N$ heißt kleinste obere Schranke von $G =_{df} \{g_1, g_2, g_3, \ldots\} \subseteq [M \to N]$, wenn gilt:
  1. g ist obere Schranke von G.
  2. $\forall g' : [M \to N].$ (g' obere Schranke von G). $g \sqsubseteq g'$.

Beachte: Die obigen Festlegungen können in natürlicher Weise auf partielle Funktionen ausgedehnt werden

Schranken von Ketten (partieller) Funktionen

Lemma 3.2.5

Sei $Y \subseteq [M \hookrightarrow N]$ eine Kette (partieller) Funktionen. Dann gilt: Die kleinste obere Schranke von Y, in Zeichen: $\bigsqcup Y$, existiert und ist gegeben durch:

$$\mathit{graph}(\bigsqcup Y) \text{ existiert } = \bigcup \{\mathit{graph}(g) \mid g \in Y\}$$

Beachte: Eine Funktion $g : M \hookrightarrow N$ kann mit ihrem Graphen $\mathit{graph}(g)$ identifiziert werden und umgekehrt.

Bezogen auf Lemma 3.2.5 heißt das:

$$\forall\, m \in M.\ (\bigsqcup Y)(m) = n \iff \exists\, g \in Y.\ g(m) = n$$

CPO auf Zustandstransformationen

...die Anwendung der vorherigen Ergebnisse auf die Menge ZT partieller Zustandstransformationen liefert:

Lemma 3.2.6 (Vollständige partielle Ordnung)

Das Paar $(ZT, \sqsubseteq)$ ist eine vollständige partielle Ordnung (oder CPO) mit kleinstem Element $\bot$.

Definition 3.2.7 (Vollständige partielle Ordnung)

Eine partielle Ordnung $(P, \sqsubseteq)$ heißt eine vollständige partielle Ordnung (engl. complete partial order (CPO)), falls jede (aufsteigende) Kette $C \subseteq P$ eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup C$ in P besitzt, d.h. $\bigsqcup C$ *exists* $\in P$.

Monotonie und Stetigkeit

...von Funktionen auf vollständigen partiellen Ordnungen.

Definition 3.2.8 (Monotonie, Stetigkeit)

Seien $(C, \sqsubseteq_C)$ und $(D, \sqsubseteq_D)$ zwei CPOs und $f : C \to D$ eine Funktion von C nach D. Dann heißt f

- monoton gdw. $\forall\, c, c' \in C.\ c \sqsubseteq_C c' \Rightarrow f(c) \sqsubseteq_D f(c')$
  (Erhalt der Ordnung der Elemente)
- stetig gdw. (i) f monoton
  (ii) $\forall\, C' \subseteq C.\ f(\bigsqcup_C C') =_D \bigsqcup_D f(C')$
  (Erhalt der kleinsten oberen Schranken)

Stetigkeitsresultate

Lemma 3.2.9

Sei $p \in [\Sigma \hookrightarrow \mathbb{B}]$, $g_0 \in [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]$ und F definiert durch:

$$F\ g = \mathit{cond}\ (p, g, g_0)$$

Dann gilt: F ist stetig.

Lemma 3.2.10

Sei $g_0 \in [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]$ und F definiert durch:

$$F\ g = g \circ g_0$$

Dann gilt: F ist stetig.

Summa summarum

Zusammen mit:

Lemma 3.2.11

Das D-Regelwerk von WHILE definiert eine totale Funktion:

$$[\![\ ]\!]_{ds} \in [\mathbf{Prg} \to ZT]$$

...sind wir durch. Wir können zeigen:

Theorem 3.2.12 (Wohldefiniertheit von $[\![\ ]\!]_{ds}$)

$[\![\ ]\!]_{ds} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$ ist wohldefiniert

Beweisskizze

Aus

1. Die Menge $ZT =_{df} [\Sigma \hookrightarrow \Sigma]$ der partiellen Zustandstransformationen bildet zusammen mit der Ordnung $\sqsubseteq$ eine CPO.
2. Das Funktional F defniert durch $F\ g = \mathit{cond}\,(p, g, g_0)$ und die sequentielle Komposition $g \circ g_0$ von g und g_0 sind stetig.
3. Bei der Definition von $[\![\ ]\!]_{ds}$ wird Fixpunktbildung ausschließlich auf stetige Funktionen auf einer CPO angewendet.

...folgt insgesamt die Wohldefiniertheit der D-Semantik:

$$[\![\ ]\!]_{ds} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

Kapitel 3.3

Äquivalenz denotationeller und operationeller Semantik

Äquivalenz von $[\![\ ]\!]_{ds}$ und $[\![\ ]\!]_{sos}$ (1)

Lemma 3.3.1

$$\forall\, \pi \ \in\ \mathbf{Prg}.\ [\![\, \pi \,]\!]_{ds} \ \sqsubseteq\ [\![\, \pi \,]\!]_{sos}$$

Beweis durch strukturelle Induktion über den induktiven Aufbau von π.

Äquivalenz von $[\![\ ]\!]_{ds}$ und $[\![\ ]\!]_{sos}$ (2)

Lemma 3.3.2

$$\forall\, \pi \ \in\ \mathbf{Prg}.\ [\![\, \pi \,]\!]_{sos} \ \sqsubseteq\ [\![\, \pi \,]\!]_{ds}$$

Beweis von

$$\forall\, \pi \in \mathbf{Prg}.\ \forall\, \sigma, \sigma' \in \Sigma.\ \langle \pi, \sigma \rangle \ \Longrightarrow\!\!\!\!\gg^{*}\ \sigma' \ \Rightarrow\ [\![\, \pi \,]\!]_{ds}(\sigma) = \sigma'$$

durch Induktion über die Länge k der Berechnungsfolge $\langle \pi, \sigma \rangle \ \Longrightarrow\!\!\!\!\gg^{k}\ \langle \pi', \sigma' \rangle$ unter Benutzung von 1.) und 2.), dass:

$\forall\, \pi \in \mathbf{Prg}.\ \forall\, \sigma, \sigma' \in \Sigma.$

1. $\langle \pi, \sigma \rangle \ \Longrightarrow\!\!\!\!\gg\ \sigma' \ \Rightarrow\ [\![\, \pi \,]\!]_{ds}(\sigma) = \sigma'$
2. $\langle \pi, \sigma \rangle \ \Longrightarrow\!\!\!\!\gg\ \langle \pi', \sigma' \rangle \ \Rightarrow\ [\![\, \pi \,]\!]_{ds}(\sigma) = [\![\, \pi' \,]\!]_{ds}(\sigma')$

...die durch Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums für $\langle \pi, \sigma \rangle \ \Longrightarrow\!\!\!\!\gg\ \sigma'$ bzw. $\langle \pi, \sigma \rangle \ \Longrightarrow\!\!\!\!\gg\ \langle \pi', \sigma' \rangle$ gezeigt werden.

Äquivalenz von $[\![\ ]\!]_{ds}$, $[\![\ ]\!]_{sos}$ und $[\![\ ]\!]_{ns}$

Aus Lemma 3.3.1 und Lemma 3.3.2 folgt:

Theorem 3.3.3 (Äquivalenz von $[\![\ ]\!]_{ds}$ und $[\![\ ]\!]_{sos}$)

$$\forall\, \pi \ \in\ \mathbf{Prg}.\ [\![\, \pi \,]\!]_{ds} = [\![\, \pi \,]\!]_{sos}$$

Aus Theorem 3.3.3 und Theorem 2.3.3 folgt:

Theorem 3.3.4 (Äquivalenz von $[\![\ ]\!]_{ds}$, $[\![\ ]\!]_{sos}$, $[\![\ ]\!]_{ns}$)

$$\forall\, \pi \ \in\ \mathbf{Prg}.\ [\![\, \pi \,]\!]_{ds} = [\![\, \pi \,]\!]_{sos} = [\![\, \pi \,]\!]_{ns}$$

Kapitel 3.4

Schlussfolgerung zur Semantik von WHILE

Schlussfolgerung

...die Äquivalenz der strukturell operationellen, natürlichen und denotationellen Semantik von WHILE erlaubt, den semantik-angebenden Index in der Folge fortzulassen und vereinfachend von $[\![\ ]\!]_{\text{WHILE}}$ als **der** Semantik von WHILE zu sprechen:

$$[\![\ ]\!]_{\text{WHILE}} : \mathbf{Prg} \to (\Sigma \hookrightarrow \Sigma)$$

definiert (z.B.) durch:

- Sprachentwickler: $[\![\ ]\!]_{\text{WHILE}} =_{df} [\![\ ]\!]_{ds}$
- Sprachimplementierer: $[\![\ ]\!]_{\text{WHILE}} =_{df} [\![\ ]\!]_{sos}$

Kapitel 3.5

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 3

Michael J.C. Gordon. *The Denotational Description of Programming Languages*. Springer-V., 1979.

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Chapter 4, Denotational Semantics)

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 5, Denotational Semantics; Chapter 6, More on Denotational Semantics)

Joseph E. Stoy. *Denotational Semantics: The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory*. MIT Press, 1981.

Teil II

Verifikation

Kapitel 4

Axiomatische Semantik von WHILE

Axiomatische Semantik von WHILE

...bestimmte Eigenschaften des Effekts der Ausführung eines Konstrukts werden als Zusicherungen ausgedrückt. Bestimmte andere Aspekte der Ausführung werden dabei i.a. ignoriert.

Kapitel 4.1

Direkte Programmverifikation

Programmverifikation

...beschäftigt sich damit zu beweisen, dass ein Programm bestimmte

- Eigenschaften

erfüllt (oder besitzt oder für diese Eigenschaften korrekt ist).

Dabei lässt sich grob unterscheiden zwischen

- partiellen
- totalen

Korrektheitseigenschaften.

Partielle, totale Korrektheitseigenschaften

...für ein Programm π.

Partielle Korrektheitseigenschaften von π garantieren:

- Wenn π angesetzt auf einen Zustand σ regulär terminiert in einem Zustand σ', dann stehen die Werte der Variablen von σ und σ' in einer bestimmten Beziehung zueinander.

Totale Korrektheitseigenschaften von π garantieren:

- Wird π angesetzt auf einen Zustand σ, dann terminiert π regulär in einem Zustand σ' und die Werte der Variablen von σ und σ' stehen in einer bestimmten Beziehung zueinander.

Informell:

Totale Korrektheit "gleich"
Partielle Korrektheit "plus" Reguläre Termination

Beispiel: Programm und Programmeigenschaft

Betrachte das (kanonische) Fakultätsprogramm:

$$\pi \equiv x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$

und folgende Eigenschaft

$$E : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{B}$$

definiert durch:

$$\forall\, \sigma, \sigma' \in \Sigma.\ E(\sigma, \sigma') =_{df} \sigma'(y) = \sigma(a)!$$

wobei $! : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_1$ die Fakultätsfunktion bezeichnet definiert durch:

$$! : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_1$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0.\ n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

Partielle, totale Korrektheit von π bzgl. E

Lemma 4.1.1 (Partielle Korrektheit von π bzgl. E)

Wenn π angesetzt auf einen Zustand $\sigma \in \Sigma$ regulär in einem Zustand $\sigma' \in \Sigma$ terminiert, dann gilt $E(\sigma, \sigma')$, d.h.:

$$\sigma'(y) = \sigma(a)!$$

d.h. π ist partiell korrekt für E (für jeden Anfangszustand σ).

Lemma 4.1.2 (Totale Korrektheit von π bzgl. E)

Wird π angesetzt auf einen Zustand $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(a) \geq 0$, dann terminiert π regulär in einem Zustand $\sigma' \in \Sigma$ und es gilt $E(\sigma, \sigma')$, d.h.:

$$\sigma'(y) = \sigma(a)!$$

d.h. π ist total korrekt für E (für jeden Anfangszustand σ mit $\sigma(a) \geq 0$).

Beweisskizze für Lemma 4.1.1 (1)

Wegen $[\![\ ]\!]_{sos} = [\![\ ]\!]_{ns} = [\![\ ]\!]_{ds}$ (Äquivalenztheorem 3.3.4) reicht es bei Wahl der

- strukturell operationellen Semantik zu zeigen:

  $$\forall\, \sigma, \sigma' \in \Sigma.\ \langle \pi, \sigma \rangle \Longrightarrow^* \sigma' \Rightarrow \sigma'(y) = \sigma(a)! \wedge \sigma(a) \geq \mathbf{0} \quad (*)$$

  wobei $(*)$ über eine vollständige Induktion über die Länge der Ableitungsfolge von

  $$\langle \pi, \sigma \rangle \Longrightarrow^* \sigma'$$

  bewiesen werden kann.
- natürlichen Semantik zu zeigen:

  $$\forall\, \sigma, \sigma' \in \Sigma.\ \langle \pi, \sigma \rangle \to \sigma' \Rightarrow \sigma'(y) = \sigma(a)! \wedge \sigma(a) \geq \mathbf{0} \quad (**)$$

  wobei $(**)$ über eine strukturelle Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums von

  $$\langle \pi, \sigma \rangle \to \sigma'$$

  bewiesen werden kann.

Beweisskizze für Lemma 4.1.1 (2)

...reicht es bei Wahl der

- denotationellen Semantik zu zeigen:

$$\psi([\![\, \pi \,]\!]_{ds}) = \textbf{wahr} \quad (***)$$

wobei $\psi : [(\Sigma \hookrightarrow \Sigma) \to \mathbb{B}]$ ein Prädikat auf der Menge der Zustandstransformationen ist, das definiert ist durch:

$$\forall\, g \in [\Sigma \hookrightarrow \Sigma].\ \psi(g) = \textbf{wahr} \iff_{df}$$
$$\forall\, \sigma, \sigma' \in \Sigma.\ g(\sigma) = \sigma' \Rightarrow \sigma'(y) = \sigma(a)! \wedge \sigma(a) \geq \mathbf{0}$$

wobei $(***)$ nach Beweis der Zulässigkeit von ψ (s. Definition A.6.1) mittels Fixpunktinduktion (s. Anhang A.6) bewiesen werden kann.

Übungsaufgabe

Vervollständige den Beweis von Lemma 4.1.1 mit Wahl der

1. strukturell operationellen
2. natürlichen
3. denotationellen

Semantik für π.

Bobachtung

...anhand der (hier nicht) vollständig ausgeführten Beweise von Lemma 4.1.1:

Unabhängig von der Wahl

- strukturell operationeller
- natürlicher
- denotationeller

Semantik für die Beweisausführung, erscheinen die Beweise durch die enge Kopplung an die volle Semantik von WHILE detaillierter und kleinteiliger als es für den Beweis von 'lediglich' Eigenschaft E nötig erscheint.

Erleichterung schafft hier der Übergang von direkter zu axiomatischer Programmverifikation, die von 'unwesentlichen' Details der Programmiersprachensemantik abstrahiert und deshalb 'einfachere' Beweise sog. Zusicherungen erlaubt.

Kapitel 4.2

Axiomatische Programmverifikation

Axiomatische Programmverifikation

...beschäftigt sich mit dem Beweis partieller und totaler Korrektheitseigenschaften von Programmen in Form sog. Zusicherungen, deren (semantischer) Gültigkeit und (syntaktischer) Ableitbarkeit mithilfe von Kalkülen:

Zentral die Begriffe:

- Hoare-Tripel (syntaktische Sicht) bzw. Korrektheitsformeln (semantische Sicht) der Form

$$\{p\}\ \pi\ \{q\} \quad \text{bzw.} \quad [p]\ \pi\ [q]$$

- Gültigkeit von Korrektheitsformeln im Sinn
  - partieller ($\{p\}\ \pi\ \{q\}$)
  - totaler Korrektheit ($[p]\ \pi\ [q]$).
- Ableitungskalküle (oder Beweiskalküle) für partielle, totale Korrektheit
  - (Kalkül-) Korrektheit
  - (Kalkül-) Vollständigkeit

Zentral für uns

...die Einführung von Begriff und Bedeutung von

- (Kalkül-) Korrektheit
- (Kalkül-) Vollständigkeit

am Beispiel von Ableitungskalkülen für

- partielle, totale Korrektheit

von Zusicherungen.

Bestandteile von Zusicherungen

In Zusicherungen der Form

$$\{p\}\ \pi\ \{q\} \quad \text{oder} \quad [p]\ \pi\ [q]$$

...ist

- π ein Programm

...heißen

- p Vorbedingung
- q Nachbedingung

der Zusicherungen.

Für die Wahl der Grundmenge von Vor- und Nachbedingungen gibt es verschiedene Möglichkeiten, die auf extensionale und intensionale Ansätze axiomatischer Programmverifikation führen.

Extensionale vs. intensionale Ansätze

...axiomatischer Programmverifikation.

Extensionale Ansätze: Prädikate als Grundmenge

- p, q Prädikate auf Zuständen, d.h. $p, q \in [\Sigma \to \mathbb{B}]$.

Intensionale Ansätze: Logische Formeln als Grundmenge

- p, q Formeln einer Logik $\mathcal{L}$, einer sog. Zusicherungssprache:
  - Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik (1. Stufe)
  - Prädikatenlogik 2. Stufe
  - ...

  deren Semantik gegeben ist durch ein Funktional:

$$[\![\cdot]\!]_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \Sigma \to \mathbb{B}$$

  d.h. $[\![p]\!]_{\mathcal{L}}, [\![q]\!]_{\mathcal{L}} \in [\Sigma \to \mathbb{B}]$.

  Beispiel: $\mathcal{L} =_{df}$ **Bexpr** mit $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{L}} =_{df} [\![\cdot]\!]_{B}$.

Sprechweisen von ‘erfüllt in’

...für Prädikate und logische Formeln relativ zu einem Zustand.

Sei $\sigma \in \Sigma$ ein Zustand.

Extensional: Sei $p : \Sigma \to \mathbb{B}$ ein Prädikat.

$$p \text{ heißt erfüllt in } \sigma \iff_{df} p(\sigma) = \textbf{wahr} \quad (\iff p(\sigma))$$

Intensional: Sei $p \in \mathcal{L}$ eine logische Formel.

$$p \text{ heißt erfüllt in } \sigma \iff_{df} [\![p]\!]_{\mathcal{L}}(\sigma) = \textbf{wahr} \quad (\iff [\![p]\!]_{\mathcal{L}}(\sigma))$$

Zwei wegbereitende klassische Arbeiten

...zu axiomatischer Semantik und Programmverifikation:

- Robert W. Floyd. Assigning Meaning to Programs. Proceedings of Symposium on Applied Mathematics, Mathematical Aspects of Computer Science, American Mathematical Society, New York, Vol. 19, 19-32, 1967.
- Charles A.R. Hoare. An Axiomatic Basis for Computer Programming. Communications of the ACM 12:576-580, 583, 1969.

Kapitel 4.2.1

Partielle und totale Korrektheit

Partielle Korrektheit

Sei π ein WHILE-Programm, p, q zwei logische Formeln oder Prädikate:

Definition 4.2.1.1 (Partielle Korrektheit)

Eine Hoaresche Zusicherung (oder Korrektheitsformel)

$$\{p\}\ \pi\ \{q\}$$

heißt gültig im Sinn partieller Korrektheit (oder partiell korrekt) (in Zeichen: $\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$) gdw für jeden Zustand $\sigma \in \Sigma$ gilt:

Ist die Vorbedingung p in σ erfüllt und terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär in einem Endzustand σ', dann ist die Nachbedingung q in σ' erfüllt.

Totale Korrektheit

Sei π ein WHILE-Programm, p, q zwei logische Formeln oder Prädikate:

Definition 4.2.1.2 (Totale Korrektheit)

Eine Hoaresche Zusicherung (oder Korrektheitsformel)

$$[p]\ \pi\ [q]$$

heißt gültig im Sinn totaler Korrektheit (oder total korrekt) (in Zeichen: $\models_{tk}\ [p]\ \pi\ [q]$) gdw für jeden Zustand $\sigma \in \Sigma$ gilt:

Ist die Vorbedingung p in σ erfüllt, dann terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär mit einem Endzustand σ' und die Nachbedingung q ist in σ' erfüllt.

Erinnerung: Terminierung, Divergenz

Ein WHILE-Programm π angesetzt auf einen Zustand $\sigma \in \Sigma$ terminiert

- regulär gdw π endet nach endlich vielen Schritten in einer finalen Konfiguration, d.h. in einem Zustand $\sigma' \in \Sigma$.
- irregulär gdw π endet nach endlich vielen Schritten in einer Zwischenkonfiguration $\langle \pi', \sigma' \rangle$, die keine Folgekonfiguration besitzt (die Berechnung bleibt in $\langle \pi', \sigma' \rangle$ stecken).

Ein WHILE-Programm π angesetzt auf einen Zustand $\sigma \in \Sigma$

- divergiert gdw π terminiert nicht (weder regulär noch irregulär).

Ein WHILE-Programm π heißt

- divergent gdw π divergiert für jeden Zustand $\sigma \in \Sigma$.

Wichtig: WHILE-Programme sind deterministisch!

Informell

Totale Korrektheit “gleich”

Partielle Korrektheit “plus” Reguläre Termination

Charakterisierung logischer Formeln, Prädikate

...durch erfüllende Zustandsmengen.

Definition 4.2.1.3 (Charakterisierung)

1. Sei p eine logische Formel. Die Zustandsmenge

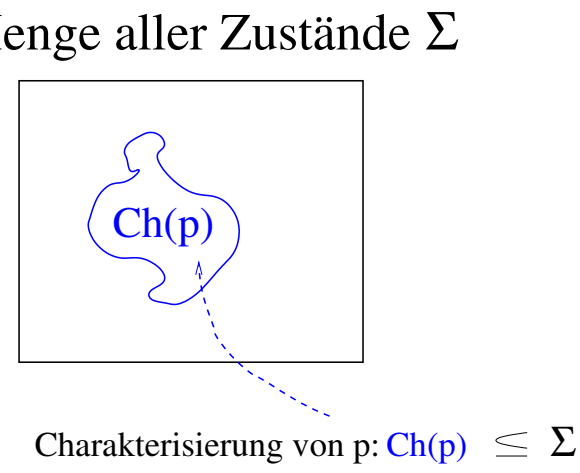
$$Ch(p) =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid [\![p]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr}\}$$

2. Sei p eine Prädikat. Die Zustandsmenge

$$Ch(p) =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid p(\sigma) = \textbf{wahr}\}$$

heißt Charakterisierung von p.

Veranschaulichung:



Partielle und totale Korrektheit

...ausgedrückt über die Charakterisierung von Vor- und Nachbedingungen von Korrektheitsformeln.

Lemma 4.2.1.4 (Charakterisierungslemma)

Eine Korrektheitsformel $\{p\}\ \pi\ \{q\}$ ist

1. partiell korrekt, $\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$, falls gilt:

$$[\![\ \pi\ ]\!](Ch(p)) \subseteq Ch(q)$$

   wobei $[\![\ \pi\ ]\!](Ch(p)) =_{df} \{[\![\ \pi\ ]\!](\sigma) \mid \sigma \in Ch(p)\}$.

2. total korrekt, $\models_{tk} [p]\ \pi\ [q]$, falls gilt:

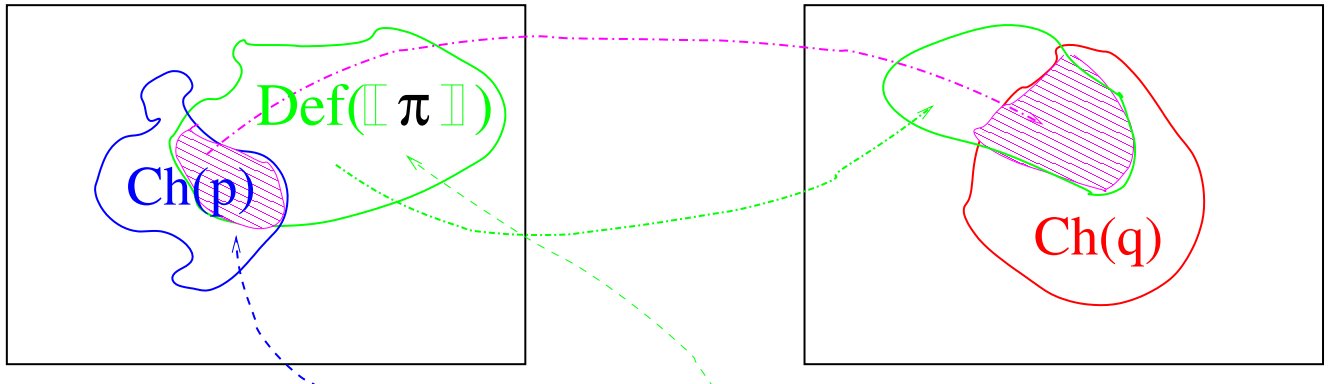
$$\{p\}\ \pi\ \{q\} \text{ partiell korrekt } \wedge\ Ch(p) \subseteq Def([\![\ \pi\ ]\!])$$

   wobei $Def([\![\ \pi\ ]\!])$ den Definitionsbereich von π bezeichnet, die Menge der Zustände, für die π regulär terminiert.

Veranschaulichung von Lemma 4.2.1.4(1)

...Gültigkeit von $\{p\}\ \pi\ \{q\}$ im Sinn partieller Korrektheit:

Menge aller Zustände Σ



Charakterisierung von p: $Ch(p) \leq \Sigma$

Definitionsbereich von π : $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \leq \Sigma$

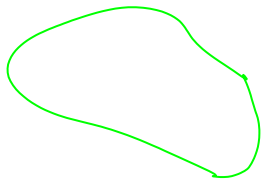


Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket)$

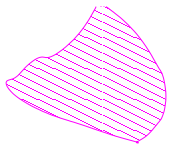
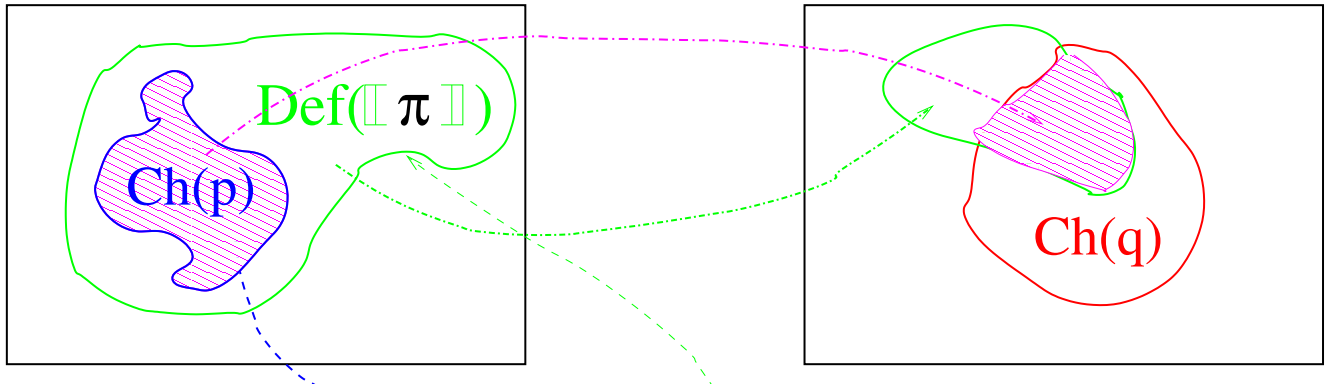


Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \wedge Ch(p)$

Veranschaulichung von Lemma 4.2.1.4(2)

...Gültigkeit von $[p]\ \pi\ [q]$ im Sinn totaler Korrektheit:

Menge aller Zustände Σ



Charakterisierung von p: $Ch(p) \leq \Sigma$

Definitionsbereich von π : $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \leq \Sigma$

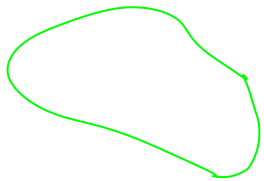


Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket)$

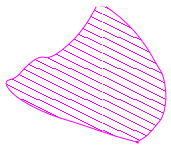


Bild von $\llbracket \pi \rrbracket$ für $Def(\llbracket \pi \rrbracket) \wedge Ch(p)$

Zusammenhang

...partieller und totaler Korrektheit:

Lemma 4.2.1.5

Für WHILE-Programme π gilt:

$$\models_{tk} [p]\ \pi\ [q] \quad \Rightarrow \quad \models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

...d.h. totale Korrektheit eines WHILE-Programms bzgl. eines Paars aus Vor- und Nachbedingung impliziert auch partielle Korrektheit bzgl. dieses Vor- und Nachbedingungspaars.

Beispiele Hoarescher Zusicherungen

...für partielle Korrektheit:

$$\{true\}$$
$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$\{y = a!\}$$

...für totale Korrektheit:

$$[a \geq 0]$$
$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[y = a!]$$

des WHILE-Programms zur Berechnung der Fakultätsfunktion.

Lesart von Vor- und Nachbedingungen

...als Prädikat (extensional) oder logische Formel, hier Boolesche Ausdrücke (intensional):

$$\{true\} \;/\; [a \geq 0]$$
$$x := a;\; y := 1;\; \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\; x := x - 1 \text{ od}$$
$$\{y = a!\} \;/\; [y = a!]$$

Vorbedingungen $true$, $a \geq 0$ und Nachbedingung $y = a!$ können gelesen werden

- intensional als Boolesche Ausdrücke
  $true, (a \geq 0), (y = a!) \in \mathbf{Bexpr}$.
- extensional als Prädikate
  $true, (a \geq 0), (y = a!) \in [\Sigma \to \mathbb{B}]$ definiert durch
  - $\forall\, \sigma \in \Sigma.\ (true)(\sigma) =_{df} \mathbf{wahr}$
  - $\forall\, \sigma \in \Sigma.\ (a \geq 0)(\sigma) =_{df} \mathit{größergleich}(\sigma(a), \mathbf{0})$
  - $\forall\, \sigma \in \Sigma.\ (y = a!)(\sigma) =_{df} \mathit{gleich}(\sigma(y), \sigma(a)!)$

Für die Lesart von Vor- und Nachbedingungen

...als Prädikate werden diese als Prädikatkurzschreibweisen gemäß folgender Vereinbarungen angesehen:

$p_1 \wedge p_2$	kurz für	p	def. durch	$p(\sigma) =_{df} \mathit{und}(p_1(\sigma), p_2(\sigma))$
$p_1 \vee p_2$	kurz für	p	def. durch	$p(\sigma) =_{df} \mathit{oder}(p_1(\sigma), p_2(\sigma))$
$\neg p$	kurz für	p'	def. durch	$p'(\sigma) =_{df} \mathit{nicht}(p(\sigma))$
$p[a/x]$	kurz für	p'	def. durch	$p'(\sigma) =_{df} p(\sigma[[\![a]\!]_A(\sigma)/x)$
$p_1 \Rightarrow p_2$	kurz für	p	def. durch	$p(\sigma) =_{df} \mathit{impl}(p_1(\sigma), p_2(\sigma))$
$a_1 = a_2$	kurz für	p	def. durch	$p(\sigma) =_{df} \mathit{gleich}([\![a_1]\!]_A(\sigma), [\![a_2]\!]_A(\sigma))$
$a_1 > a_2$	kurz für	p	def. durch	$p(\sigma) =_{df} \mathit{größer}([\![a_1]\!]_A(\sigma), [\![a_2]\!]_A(\sigma))$
...	...	...	...	...

Programmvariablen vs. logische Variablen

...in Zusicherungen $\{p\}\ \pi\ \{q\}$ wird unterschieden zwischen:

- Programmvariablen
  ...Variablen, die in π vorkommen (und deren Wert möglicherweise durch π verändert wird).
- logischen Variablen
  ...Variablen, auf die in π nicht (oder höchstens lesend) zugegriffen wird (und deren Wert deshalb von π nicht verändert werden kann).

Logische Variablen erlauben es

- sich Werte von Programmvariablen von vor Ausführung eines Programm(stücks) zu 'merken' und sich in Nachbedingungen darauf zu beziehen.

Veranschaulichung

$$[x = n \wedge n \geq 0]$$
$$y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[y = n!]$$

...ist gültiges Hoare-Tripel: Die Nachbedingung trifft eine Aussage über den Zusammenhang des Werts der logischen Variable n (vor und nach Ausführung des Programms) und des Werts von Programmvariable y nach Ausführung des Programms.

$$[x = n \wedge n \geq 0]$$
$$y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[y = x!]$$

...ist weder gültiges noch sinnvolles Hoare-Tripel: Die Nachbedingung trifft eine (i.a. falsche) Aussage über den Zusammenhang der Werte der Programmvariablen x und y nach Ausführung des Programms; ein Zusammenhang zum Wert v. n fehlt.

Zusammenfassung (1)

...Hoaresche Zusicherungen (oder Korrektheitsformeln) Tripel sind von der Form

- $\{p\}\ \pi\ \{q\}$ im Sinn partieller Korrektheit.
- $[p]\ \pi\ [q]$ im Sinn totaler Korrektheit.

Dabei sind

- π ein Programm.
- p, q als Vor- und Nachbedingung bezeichnete Prädikate (extensional) oder logische Formeln (intensional), meist prädikatenlogische Formeln 1. Stufe.
- p, q können logische und Programmvariablen enthalten.

Zusammenfassung (2)

...für Tripel der Form

- $\{p\}\ \pi\ \{q\}$, $[p]\ \pi\ [q]$

betont die Sprechweise

- Hoaresches Tripel (oder Hoare-Tripel)
- Hoaresche Zusicherung (oder Korrektsheitsformel)

jeweils die

- syntaktische Sicht ($\vdash_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$, $\vdash_{tk} [p]\ \pi\ [q]$)
- semantische Sicht ($\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$, $\models_{tk} [p]\ \pi\ [q]$)

auf die Tripel.

Kapitel 4.2.2

Stärkste Nachbedingungen, schwächste Vorbedingungen, schwächste liberale Vorbedingungen

Stärkere, schwächere

...Formeln und Prädikate.

Definition 4.2.2.1 (stärker als, schwächer als)

1. Seien p, q logische Formeln.
   - 1.1 p heißt stärker als q gdw $p \Rightarrow q$.
   - 1.2 p heißt schwächer als q gdw $q \Rightarrow p$.
2. Seien p, q Prädikate.
   - 2.1 p heißt stärker als q gdw $\forall\, \sigma \in \Sigma.\ p(\sigma) \Rightarrow q(\sigma)$.
   - 2.2 p heißt schwächer als q gdw $\forall\, \sigma \in \Sigma.\ q(\sigma) \Rightarrow p(\sigma)$.

Seien p, q logische Formeln oder Prädikate.

Lemma 4.2.2.2

$$p \text{ stärker als } q \iff q \text{ schwächer als } p$$

Stärkste, schwächste

...Formeln oder Prädikate relativ zu einer Eigenschaft.

Seien p, q logische Formeln oder Prädikate, E eine Eigenschaft logischer Formeln oder Prädikate.

Definition 4.2.2.3 (Relativ stärkst, relativ schwächst)

- p heißt stärkst relativ zu E (oder relativ E-stärkst) für q gdw
  1. p erfüllt E.
  2. p stärker als q.
  3. $\forall\, p'.\, (p'$ erfüllt $E \wedge p'$ stärker als $q).\ p$ stärker als p'.
- p heißt schwächst relativ zu E (oder relativ E-schwächst) für q gdw
  1. p erfüllt E.
  2. p schwächer als q.
  3. $\forall\, p'.\, (p'$ erfüllt $E \wedge p'$ schwächer als $q).\ p$ schwächer als p'.

Schwächste liberale Vorbedingungen

...im Kontext mit partieller Korrektheit.

Definition 4.2.2.4 (Schwächste liberale Vorbedingung)

Sei π ein Programm, q eine Formel oder Prädikat. Dann heißt $wlp(\pi, q)$ schwächste liberale Vorbedingung von π bezüglich Nachbedingung q, wenn

$$\{wlp(\pi, q)\}\ \pi\ \{q\}$$

partiell korrekt ist und $wlp(\pi, q)$ die schwächste Formel oder Prädikat mit dieser Eigenschaft ist.

...d.h. $wlp(\pi, q)$ ist schwächst für q relativ zu E mit

$$\forall\, p.\ E(p) =_{df} \models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}.$$

Schwächste Vorbedingungen

...im Kontext mit totaler Korrektheit.

Definition 4.2.2.5 (Schwächste Vorbedingung)

Sei π ein Programm, q eine Formel oder Prädikat. Dann heißt $wp(\pi, q)$ schwächste Vorbedingung von π bezüglich Nachbedingung q, wenn

$$[wp(\pi, q)]\ \pi\ [q]$$

total korrekt ist und $wp(\pi, q)$ die schwächste Formel oder Prädikat mit dieser Eigenschaft ist.

...d.h. $wp(\pi, q)$ ist schwächst für q relativ zu E mit

$$\forall\, p.\ E(p) =_{df} \models_{tk} [p]\ \pi\ [q].$$

Stärkste Nachbedingungen

...im Kontext partieller Korrektheit.

Definition 4.2.2.6 ((Partiell) stärkste Nachbeding.)

Sei π ein Programm, p eine Formel oder Prädikat. Dann heißt $sp_{pk}(p, \pi)$ (partiell) stärkste Nachbedingung von π bezüglich Vorbedingung p, wenn

$$\{p\}\ \pi\ \{sp(p, \pi)\}$$

partiell korrekt ist und $sp_{pk}(p, \pi)$ die stärkste Formel mit dieser Eigenschaft ist.

...d.h. $sp_{pk}(p, \pi)$ ist stärkst für p relativ zu E mit

$$\forall\, q.\ E(q) =_{df} \models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}.$$

Stärkste Nachbedingungen

...im Kontext totaler Korrektheit.

Definition 4.2.2.7 ((Total) stärkste Nachbedingung)

Sei π ein Programm, p eine Formel oder Prädikat. Dann heißt $sp_{tk}(p, \pi)$ (total) stärkste Nachbedingung von π bezüglich Vorbedingung p, wenn

$$[p]\ \pi\ [sp(p, \pi)]$$

total korrekt ist und $sp_{tk}(p, \pi)$ die stärkste Formel mit dieser Eigenschaft ist.

...d.h. $sp_{tk}(p, \pi)$ ist stärkst für p relativ zu E mit

$$\forall\, q.\ E(q) =_{df} \models_{tk} [p]\ \pi\ [q].$$

Stärkste Nach-, schwächste Vorbedingungen

...als Charakterisierung(smeng)en von Formeln, Prädikaten.

Sei π ein WHILE-Programm, p, q zwei logische Formeln oder Prädikate:

Lemma 4.2.2.8 (Charakterisierungsmengen)

1. $[\![\pi]\!](Ch(p))$ ist die Charakterisierungsmenge der (partiell und total) stärksten Nachbedingung von π bezüglich p.
2. $[\![\pi]\!]^{-1}(Ch(q))$ ist die Charakterisierungsmenge der schwächsten Vorbedingung von π bezüglich q, wobei $[\![\pi]\!]^{-1}(\Sigma') =_{df} \{\sigma \in \Sigma \mid [\![\pi]\!](\sigma) \in \Sigma'\}$.
3. $[\![\pi]\!]^{-1}(Ch(q)) \cup \mathcal{C}(Def([\![\pi]\!]))$ ist die Charakterisierungsmenge der schwächsten liberalen Vorbedingung von π bezüglich q, wobei $\mathcal{C}$ den Mengenkomplementoperator (bzgl. Grundmenge Σ) bezeichnet: $\forall \Sigma' \subseteq \Sigma.\ \mathcal{C}(\Sigma') =_{df} \Sigma \backslash \Sigma'$.

Bemerkung

Die Definitionen

- schwächster, schwächster liberaler Vorbedingungen
- partiell, total stärkster Nachbedingungen

sind für Prädikate und Formeln in gleicher Weise getroffen.

Allerdings ist nicht gesichert, dass jede Charakterisierungsmenge schwächster Vor-/stärkster Nachbedingungen (i.S.v. Lemma 4.2.2.8) stets durch eine passende Formel der Zusicherungssprache beschrieben werden kann, d.h. deren Charakterisierung mit der Charakterisierungsmenge der entsprechenden schwächsten Vor-/stärksten Nachbedingung übereinstimmt.

Die Darstellbarkeit einer Zustandsmenge als Formel ist an die Ausdruckskraft der Formelsprache, d.h. der gewählten Logik, gebunden; s. dazu auch Kap. 4.4 zur Vollständigkeit intensionaler Ableitungskalküle.

Zusammenhang

...stärkster Nach- und schwächster Vorbedingungen:

Lemma 4.2.2.9

Ist $[\![\pi]\!]$ total definiert, d.h. $Def([\![\pi]\!]) = \Sigma$, dann gilt für alle p, q Formeln oder Prädikate:

$$[\![\pi]\!](Ch(p)) \subseteq Ch(q) \iff [\![\pi]\!]^{-1}(Ch(q)) \supseteq Ch(p)$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Kapitel 4.2.3

Korrektheit, Vollständigkeit von Ableitungskalkülen

Korrektheits- und Vollständigkeitsfrage

...für Ableitungs- (oder (Beweis-) Kalküle (oder Regelwerke) K für partielle oder totale Korrektheit.

Korrektheitsfrage:

- Ist jede mithilfe von K ableitbare (oder beweisbare) (in Zeichen: $\vdash_K$) Korrektheitsformel partiell/total korrekt?

Vollständigkeitsfrage:

- Ist jede partiell/total korrekte Korrektheitsformel (in Zeichen: $\models_{pk/tk}$) mithilfe von K ableitbar (oder beweisbar)?

Korrektheit und Vollständigkeit eines Kalküls

...für partielle Korrektheit.

Definition 4.2.3.1 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Ein Beweiskalkül K_{pk} für partielle Korrektheit heißt

- korrekt (engl. sound), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel mit K_{pk} ableitbar ($\vdash_{K_{pk}} \{p\}\ \pi\ \{q\}$), dann ist sie semantisch gültig im Sinn partieller Korrektheit ($\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$), d.h.:

$$\vdash_{K_{pk}} \{p\}\ \pi\ \{q\} \ \Rightarrow\ \models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

- vollständig (engl. complete), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel semantisch gültig im Sinn partieller Korrektheit ($\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$), dann ist sie mit K_{pk} ableitbar ($\vdash_{K_{pk}} \{p\}\ \pi\ \{q\}$), d.h.:

$$\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\} \ \Rightarrow\ \vdash_{K_{pk}} \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

Korrektheit und Vollständigkeit eines Kalküls

...für totale Korrektheit.

Definition 4.2.3.2 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Ein Beweiskalkül K_{tk} für totale Korrektheit heißt

- korrekt (engl. sound), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel mit K_{tk} ableitbar ($\vdash_{K_{tk}} [p]\ \pi\ [q]$), dann ist sie auch semantisch gültig im Sinn totaler Korrektheit ($\models_{tk} [p]\ \pi\ [q]$), d.h.:

$$\vdash_{K_{tk}} [p]\ \pi\ [q] \ \Rightarrow\ \models_{tk} [p]\ \pi\ [q]$$

- vollständig (engl. complete), falls gilt: Ist eine Korrektheitsformel semantisch gültig im Sinn totaler Korrektheit ($\models_{tk} [p]\ \pi\ [q]$), dann ist sie auch mit K_{tk} ableitbar ($\vdash_{K_{tk}} [p]\ \pi\ [q]$), d.h.:

$$\models_{tk} [p]\ \pi\ [q] \ \Rightarrow\ \vdash_{K_{tk}} [p]\ \pi\ [q]$$

Kapitel 4.3

Ableitungskalkül HK_{pk} für partielle Korrektheit

Hoare-Kalkül HK_{pk} für partielle Korrektheit

Seien p, q zwei logische Formeln oder Prädikate.

Axiome:

[skip] $$\frac{}{\{p\}\ skip\ \{p\}}$$

[ass] $$\frac{}{\{p[t/x]\}\ x{:=}t\ \{p\}}$$

(Rückwärtssubstitution, Rückwärtsregel)

Regeln:

[comp] $$\frac{\{p\}\ \pi_1\ \{r\},\ \{r\}\ \pi_2\ \{q\}}{\{p\}\ \pi_1;\pi_2\ \{q\}}$$

[ite] $$\frac{\{p \wedge b\}\ \pi_1\ \{q\},\ \{p \wedge \neg b\}\ \pi_2\ \{q\}}{\{p\}\ \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } \{q\}}$$

[while$_{pk}$] $$\frac{\{I \wedge b\}\ \pi\ \{I\}}{\{I\}\ \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } \{I \wedge \neg b\}}$$

(I Invariante)

[cons] $$\frac{p \Rightarrow p_1,\ \{p_1\}\ \pi\ \{q_1\},\ q_1 \Rightarrow q}{\{p\}\ \pi\ \{q\}}$$

Anmerkungen zur while-Regel [while$_{pk}$]

$$[\text{while}_{pk}] \quad \frac{\{I \wedge b\}\ \pi\ \{I\}}{\{I\}\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ \{I \wedge \neg b\}} \qquad (I \text{ Invariante})$$

Informell:

Die Prämisse der while-Regel [while$_{pk}$] besagt:

- Gelten vor Ausführung des Schleifenrumpfs die Abbruchbedingung b der Schleife und die Formel bzw. das Prädikat I, so gilt I auch nach Ausführung des Schleifenrumpfs.

I wird deshalb als Schleifeninvariante (oder Invariante) der while-Schleife bezeichnet.

Die Konklusion der while-Regel [while$_{pk}$] besagt:

- Die Schleifeninvariante gilt vor Eintritt in und nach Austritt aus der Schleife; zusätzlich gilt nach Austritt aus der Schleife die Negation der Abbruchbedingung b der Schleife, d.h. das Prädikat $\neg\, b$.

Anmerkungen zur Konsequenzregel (1)

[cons] $$\frac{p \Rightarrow p_1,\ \{p_1\}\ \pi\ \{q_1\},\ q_1 \Rightarrow q}{\{p\}\ \pi\ \{q\}}$$

Informell: Die Konsequenzregel ist die

- Schnittstelle zwischen den programmbezogenen Axiomen und Regeln des Beweiskalküls und den logischen Formeln der Zusicherungssprache.

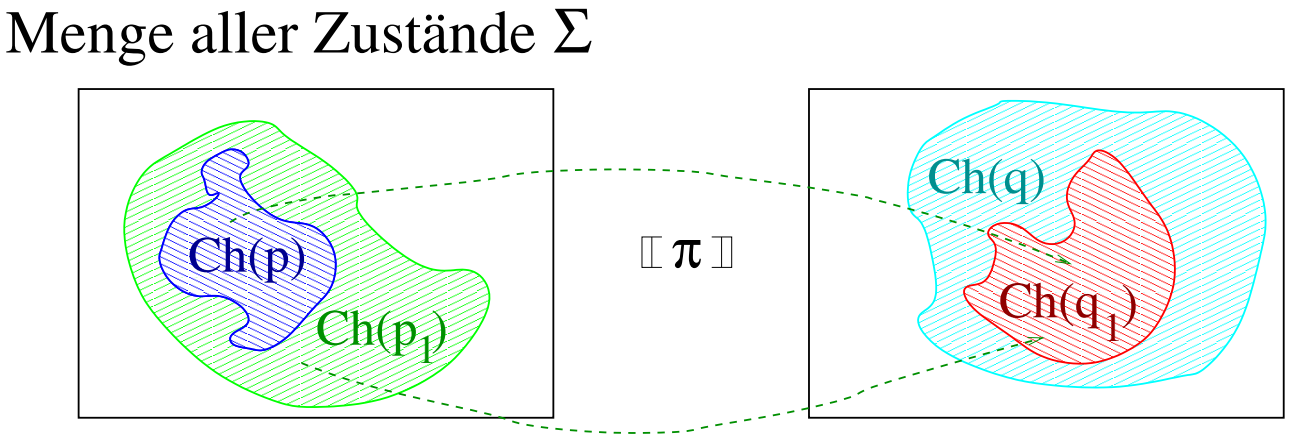
Sie erlaubt

- Vorbedingungen zu verstärken
  ...Übergang von p_1 zu p: Möglich, falls
  $$p \Rightarrow p_1 \ (\ \Leftrightarrow\ \ Ch(p) \subseteq Ch(p_1)\ )$$
- Nachbedingungen abzuschwächen
  ...Übergang von q_1 zu q: Möglich, falls
  $$q_1 \Rightarrow q \ (\ \Leftrightarrow\ \ Ch(q_1) \subseteq Ch(q)\ )$$

um so die Anwendung anderer Beweisregeln zu ermöglichen.

Anmerkungen zur Konsequenzregel (2)

...Veranschaulichung von Verstärkung und Abschwächung:



$$p \Longrightarrow p_1 \qquad \{p_1\}\ \pi\ \{q_1\} \qquad q_1 \Longrightarrow q$$

$$\text{z.B.:}\quad x>5 \Longrightarrow x>0 \qquad \{\ x>0\ \}\ \pi\ \{\ y>5\ \} \qquad y>5 \Longrightarrow y>0$$

Anmerkungen zur Konsequenzregel (3)

Pragmatisch ist es vorteilhaft, zusätzlich zur Konsequenzregel

$$[\text{cons}] \quad \frac{p \Rightarrow p_1,\ \{p_1\}\ \pi\ \{q_1\},\ q_1 \Rightarrow q}{\{p\}\ \pi\ \{q\}}$$

auch folgende Spezialisierungen der Konsequenzregel zum Beweiskalkül hinzuzunehmen:

$$[\text{cons}'] \quad \frac{p \Rightarrow p_1,\ \{p_1\}\ \pi\ \{q\}}{\{p\}\ \pi\ \{q\}}$$

$$[\text{cons}''] \quad \frac{\{p\}\ \pi\ \{q_1\},\ q_1 \Rightarrow q}{\{p\}\ \pi\ \{q\}}$$

In der Folge gehen wir davon aus, dass HK_{pk} (und später auch HK'_{tk}, HK_{tk}) die Konsequenzregeln [cons], [cons′] und [cons″] enthält.

Diskussion von Vorwärtszuweisungsregel(n)

Die Vorwärtsregel für die Zuweisung

$$[\text{ass}_{vw}] \quad \frac{}{\{p\}\ x{:=}t\ \{\exists z.\ p[z/x] \wedge x{=}t[z/x]\}} \qquad (\text{'Vorwärtssubstitution'})$$

...mag natürlich erscheinen, ist aber beweistechnisch unangenehm durch das Mitschleppen quantifizierter Formeln.

Beachte: Folgende scheinbar naheliegende quantorfreie Variante einer Vorwärtszuweisungsregel ist nicht korrekt:

$$[\text{ass}_{vw\text{-}naiv}] \quad \frac{}{\{p\}\ x{:=}t\ \{p[t/x]\}}$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Kapitel 4.4

Korrektheit und Vollständigkeit von HK_{pk}

Korrektheit von HK_{pk}

Sei π ein WHILE-Programm, p, q zwei logische Formeln oder Prädikate:

Theorem 4.4.1 (Korrektheit von HK_{pk})

Der Ableitungkalkül HK_{pk} ist korrekt, d.h. jedes mit den Axiomen und Regeln von HK_{pk} ableitbare Hoaresche Tripel (in Zeichen: $\vdash_{HK_{pk}} \{p\}\ \pi\ \{q\}$) ist gültig im Sinn partieller Korrektheit (in Zeichen: $\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$), d.h.:

$$\vdash_{HK_{pk}} \{p\}\ \pi\ \{q\} \ \Rightarrow\ \models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums der Korrektheitsformel $\{p\}\ \pi\ \{q\}$.

Vollständigkeit von HK_{pk}

Sei π ein WHILE-Programm, p, q zwei Prädikate (extensionaler Ansatz):

Theorem 4.4.2 (Vollständigkeit von HK_{pk})

Der Ableitungkalkül HK_{pk} ist vollständig, d.h. jede im Sinn partieller Korrektheit gültige Korrektheitsformel (in Zeichen: $\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$) ist mit den Axiomen und Regeln von HK_{pk} ableitbar (in Zeichen: $\vdash_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$), d.h.:

$$\models_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\} \Rightarrow \vdash_{pk} \{p\}\ \pi\ \{q\}$$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von π.

Für den intensionalen Ansatz

...mit Wahl von **Bexpr** als Logik bzw. Zusicherungssprache und $[\![\ ]\!]_B$ als Semantik gilt Vollständigkeitstheorem 4.4.2 nicht.

Wichtig ist folgende Beobachtung:

Lemma 4.4.3

1. $\forall\, \Sigma' \subseteq \Sigma.\ \exists\, p \in [\Sigma \to \mathbb{B}].\ Ch(p) = \Sigma'$
2. $\exists\, \Sigma' \subseteq \Sigma.\ \forall\, p \in \mathbf{Bexpr}.\ Ch(p) \neq \Sigma'$

Beweis von

1. Sei $\Sigma' \subseteq \Sigma$ beliebig. Definiere $p : \Sigma \to \mathbb{B}$ durch:

$$\forall\, \sigma \in \Sigma.\ p(\sigma) = \mathbf{wahr} \iff_{df} \sigma \in \Sigma'$$

   Wie man leicht sieht, gilt: $Ch(p) = \Sigma'$.
2. Beweis durch Reduktion auf das Halteproblem. □

Die Aussage von Lemma 4.4.3(2)

...informell gedeutet:

- Anders als Prädikate ist **Bexpr** nicht ausdruckskräftig genug, jede Teilmenge Σ' von Σ durch eine Formel p zu beschreiben, d.h. durch eine Formel, deren Charakterisierung $Ch(p)$ gerade Σ' ist.
- Anders als durch Prädikate sind daher insbesondere schwächste oder schwächste liberale Vorbedingungen für Paare aus Programm und Nachbedingung i.a. nicht durch Formeln aus **Bexpr** ausdrückbar.
- Daran scheitern Beweisversuche von Vollständigkeitstheorem 4.4.2 für den intensionalen Ansatz mit **Bexpr** als Zusicherungssprache und $[\![\ ]\!]_B$ als Semantik.

Zu Lem. 4.4.3(2): Halteproblemreduktion (1)

Sei π ein WHILE-Programm mit unentscheidbarem Halteproblem, $\mathcal{L} =_{df}$ **Bexpr** die Zusicherungssprache mit Semantik $[\![\ ]\!]_{\mathcal{L}} =_{df} [\![\ ]\!]_{B}$.

Gemäß Definition 4.2.2.4 und 4.2.1.1 gilt:

Die Korrektheitsformel

$$\{wlp(\pi, false)\}\ \pi\ \{false\} \qquad (a)$$

ist partiell korrekt gdw π terminiert nicht regulär angesetzt auf einen Zustand aus $Ch(wlp(\pi, false))$.

Zu Lem. 4.4.3(2): Halteproblemreduktion (2)

Angenommen, es gibt $f_\pi \in \mathcal{L}$ mit:

$$\forall\, \sigma \in \Sigma.\ [\![\, f_\pi \,]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr} \iff$$
$$\pi \text{ terminiert nicht regulär angesetzt auf } \sigma \quad (b)$$

Mit $f_\pi \in \mathcal{L}$ ist auch $\neg f_\pi \in \mathcal{L}$ mit:

$$\forall\, \sigma \in \Sigma.\ [\![\, \neg f_\pi \,]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr} \iff$$
$$\pi \text{ terminiert regulär angesetzt auf } \sigma \quad (c)$$

Aus (b), (c) folgt zusammen mit (a) und Definition 4.2.2.4:

$$Ch(f_\pi) = Ch(wlp(\pi, false))$$
$$Ch(\neg f_\pi)\ (= \mathcal{C}(Ch(wlp(\pi, false)))) = \Sigma \setminus Ch(wlp(\pi, false))$$

Da $[\![\, f_\pi \,]\!]_B(\sigma)$, $[\![\, \neg f_\pi \,]\!]_B(\sigma)$ für alle $\sigma \in \Sigma$ berechenbar sind (s. Kap. 1.5) und somit $Ch(f_\pi)$, $Ch(\neg f_\pi)$ entscheidbar sind, ergibt sich ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit des Halteproblems für π. Folglich kann die Annahme $f_\pi \in \mathcal{L}$ nicht richtig sein.

Vollständigkeit intensionaler Ansätze

...erfordert den Übergang von **Bexpr** zu

- ausdruckskräftigeren

mächtigeren Logiken als Zusicherungssprachen.

Vollständigkeit intensionaler Ansätze ist deshalb i.a. nur relativ zur Ausdruckskraft der Zusicherungssprache und der Entscheidbarkeit (oder schwächer Aufzählbarkeit) der zugrundeliegenden Theorien (bei uns die Theorie Boolescher Ausdrücke über arithmetischen Ausdrücken und ganzen Zahlen) erreichbar.

Das ermöglicht Beweise

- relativer Vollständigkeit (im Sinn von Cook)

passender Hoarescher Ableitungs- (oder Beweis-) Kalküle.

Die Details relativer Vollständigkeiten sind für uns in der Folge nicht relevant und werden daher nicht näher betrachtet.

Übungsaufgabe

Warum führt der prädikatenbasierte extensionale Ansatz anders als der formelbasierte intensionale Ansatz nicht zum Widerspruch zur Unentscheidbarkeit des Halteproblems nach dem Muster der Überlegungen zu Lemma 4.4.3(2)?

Kapitel 4.5

Partielle Korrektheitsbeweise

Kapitel 4.5.1

Beispiele: Fakultät und Division mit Rest

Fakultäts- und Divisionsprogramm

Lemma 4.5.1.1 (Fakultät)

Die Hoaresche Zusicherung

$$\{true\}$$
$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$\{y = a!\}$$

ist gültig im Sinn partieller Korrektheit.

Lemma 4.5.1.2 (Division mit Rest)

Die Hoaresche Zusicherung

$$\{x \geq 0 \wedge y > 0\}$$
$$q := 0;\ r := x;\ \text{while } r \geq y \text{ do } q := q + 1;\ r := r - y \text{ od}$$
$$\{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

ist gültig im Sinn partieller Korrektheit.

Beweisdarstellungen: Baum und lineare Skizze

Aufgabe: Beweise Lemma 4.5.1.1 und 4.5.1.2.

...d.h., zeige, dass die Hoareschen Tripel für die Berechung der Fakultätsfunktion und der ganzzahligen Division mit Rest gültig sind im Sinn partieller Korrektheit.

Wir zeigen die Beweise in zwei notationellen Varianten. Als

- Ableitungsbaum (kanonische Variante).
- lineare Beweisskizze (pragmatische Variante).

Kapitel 4.5.2

Ableitungsbäume

Fakultätsprogramm: Festlegung der Invariante

Schritt 1:

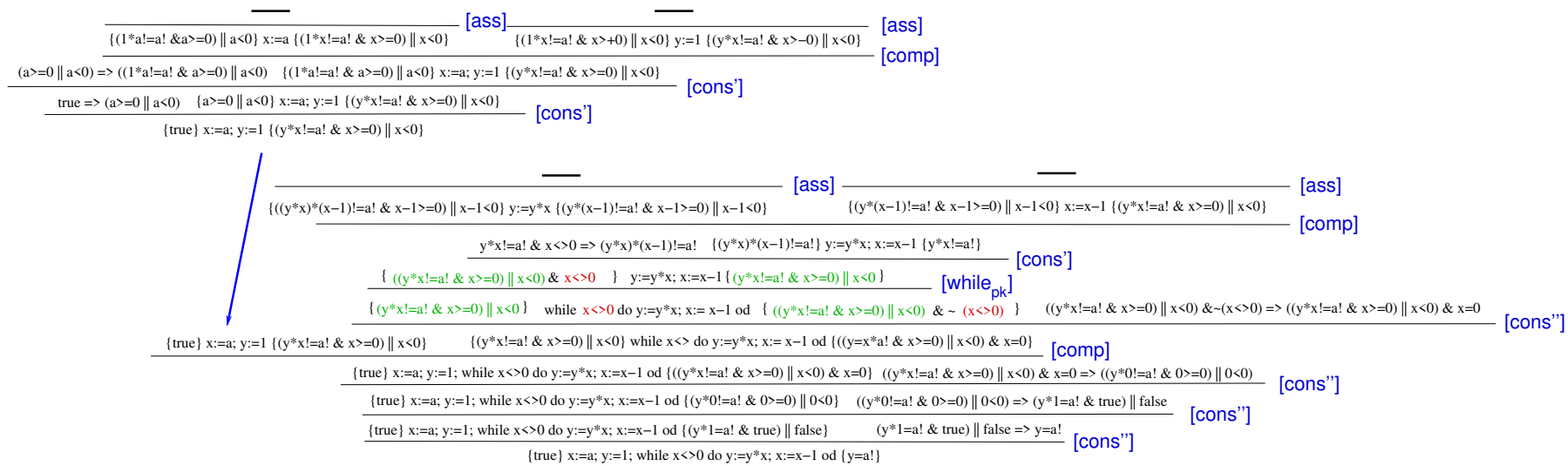
"Träumen" von

- $I \equiv (y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0$

...als (geeignete) Invariante, um die Regel $[\text{while}_{pk}]$ anwenden und den Beweis erfolgreich abschließen zu können.

Fakultätsprogramm: Ableitungsbaum

Schritt 2: Angabe des Ableitungsbaums



& : Logisches und || : Logisches oder ~ : Logisches nicht <> : ungleich–Relator >= : größergleich–Relator

Fakultätsprogramm: Zusammenfassung

Durch Angabe eines Ableitungsbaums haben wir gezeigt:

Die Hoaresche Zusicherung

$$\{true\}$$

$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$

$$\{y = a!\}$$

ist mit den Axiomen und Regeln von HK_{pk} ableitbar. Gemäß Korrektheitstheorem 4.4.1 ist die Zusicherung damit gültig im Sinn partieller Korrektheit. Damit ist der Beweis von Lemma 4.5.1.1 erbracht.

Divisionsprogramm: Festlegung der Invariante

Schritt 1:

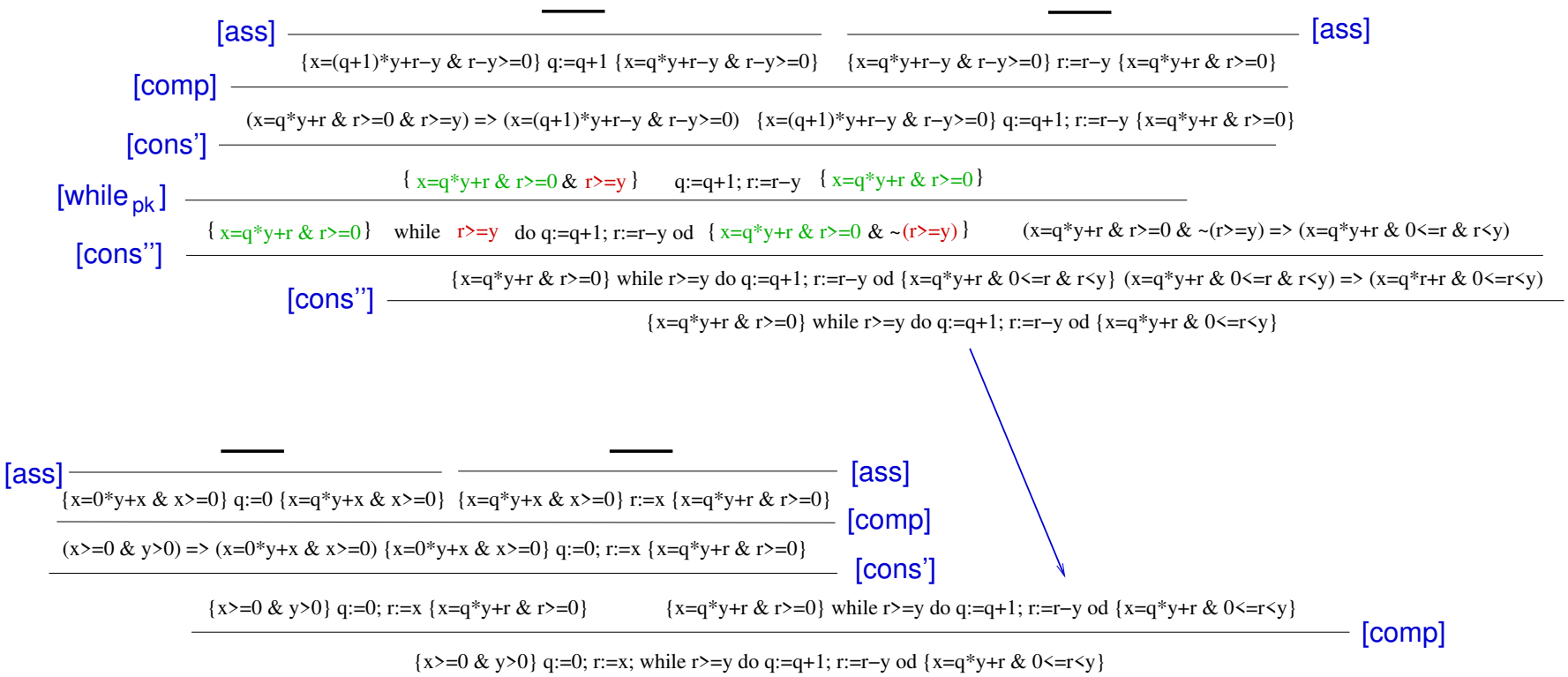
"Träumen" von

- $I \equiv x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y$

...als (geeignete) Invariante, um die Regel $[\text{while}_{pk}]$ anwenden und den Beweis erfolgreich abschließen zu können.

Divisionsprogramm: Ableitungsbaum

Schritt 2: Angabe des Ableitungsbaums



& : Logisches und ~ : Logisches nicht >= : größergleich–Relator <= : kleinergleich–Relator

Divisionsprogramm: Zusammenfassung

Durch Angabe eines Ableitungsbaums haben wir gezeigt:

Die Hoaresche Zusicherung

$$\{x \geq 0 \wedge y > 0\}$$
$$q := 0;\ r := x;\ \text{while } r \geq y \text{ do } q := q + 1;\ r := r - y \text{ od}$$
$$\{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

ist mit den Axiomen und Regeln von HK_{pk} ableitbar. Gemäß Korrektheitstheorem 4.4.1 ist die Zusicherung damit gültig im Sinn partieller Korrektheit. Damit ist der Beweis von Lemma 4.5.1.2 erbracht.

Ableitungsbäume vs. lineare Beweisskizzen

Die von den Kalkülregeln induzierte Darstellung

- Hoarescher Korrektheitsbeweise in Form von Ableitungsbäumen ist i.a. schwerfällig und unhandlich.

Als Ergänzung hat sich deshalb eine

- pragmatische notationelle Variante eingebürgert, bei der in den Programmtext Zusicherungen als Annotationen eingestreut werden.

Man spricht von sog.

- linearen Beweisen oder linearen Beweisskizzen.

Vorteil

...des linearen gegenüber des baumartigen Notationsstils:

- Wenig Redundanz: Kompaktere, knappere Beweise.
- Kein Informationsverlust: Ableitungsbaum jederzeit aus der Beweisskizze herstellbar.

In der Folge

- demonstrieren wir diesen Notationsstil am Beispiel des Beweises von Lemma 4.5.1.1 zum Nachweis der partiellen Korrektheit des Fakultätsprogramms bezüglich des angegebenen Paars von Vor- und Nachbedingung.

Kapitel 4.5.3

Lineare Beweisskizzen

Lemma 4.5.1.1: Fakultätsprogramm

...Beweis von Lemma 4.5.1.1:

Wir zeigen durch Angabe einer linearen Beweisskizze, dass das Hoaresche Tripel

$$\{true\}$$
$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$\{y = a!\}$$

gültig ist im Sinn partieller Korrektheit.

...und entwickeln die lineare Beweisskizze dafür Schritt für Schritt!

Fakultätsprogramm: Festlegung der Invariante

Schritt 1:

"Träumen" von

- $I \equiv (y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0$

...als (geeignete) Invariante, um die Regel $[\text{while}_{pk}]$ anwenden und den Beweis erfolgreich abschließen zu können.

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (1)

Schritt 2: Behandlung des Rumpfs der while-Schleife.

Die Herleitung von

$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

erlaubt mithilfe der $[\text{while}_{pk}]$-Regel den Übergang zu:

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

while $x \neq 0$ do

$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

od $[\text{while}_{pk}]$

$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (2)

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife im Detail:

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (3)

Wegen Rückwärtszuweisungsregel wird der Rumpf der while-Schleife von hinten nach vorne bearbeitet:

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$y := y * x;$$

$$\{(y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (4)

Nochmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; \text{ [ass]}$$

$$\{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

...wobei noch eine Beweislücke verbleibt!

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (5)

Schließen der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie algebraischer und Boolescher Ausdrücke:

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (6)

Anwendung der [while$_{pk}$]-Regel liefert nun wie gewünscht:

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

$$\text{od } [\text{while}_{pk}]$$

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (7)

Schritt 3: Zur gewünschten Nachbedingung verbleibt ebenfalls eine Beweislücke:

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$\{((y * x) * (x-1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

$$\text{od } [\text{while}_{pk}]$$

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\}$$

$$\{y = a!\}$$

Fakultätsprogramm Lineare Beweisskizze (8)

Schließen der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$
while $x \neq 0$ do
$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \ \wedge \ x \neq 0\}$$
$$\Downarrow \ [\text{cons}']$$
$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$
$y := y * x$; [ass]
$$\{(y * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$
$x := x - 1$; [ass]
$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$
od $[\text{while}_{pk}]$
$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \vee \ x < 0) \ \wedge \ \neg(x \neq 0)\}$$
$$\Downarrow \ [\text{cons}'']$$
$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \vee \ x < 0) \ \wedge \ x = 0\}$$
$$\Downarrow \ [\text{cons}'']$$
$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ x = 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ x = 0)\}$$
$$\Downarrow \ [\text{cons}'']$$
$$\{(y * 0! = a! \ \wedge \ x = 0) \ \vee \ \mathit{false}\}$$
$$\Downarrow \ [\text{cons}'']$$
$$\{y * 1 = a! \ \wedge \ x = 0\}$$
$$\Downarrow \ [\text{cons}'']$$
$$\{y = a!\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (9)

Aus Platzgründen etwas verkürzt dargestellt:

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge x \neq 0\}$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$\{((y * x) * (x-1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0) \vee x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0\}$$

$$\text{od } [\text{while}_{pk}]$$

$$\{((y * x! = a! \wedge x \geq 0) \vee x < 0) \wedge \neg(x \neq 0)\}$$

$$\Downarrow 5x \ [\text{cons}'']$$

$$\{y = a!\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (10)

Schritt 4: Es verbleibt, die Beweislücke zur gewünschten Vorbedingung zu schließen:

$$\{true\}$$

$$x := a;$$

$$y := 1;$$

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \ \wedge \ x \neq 0\}$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

$$\text{od } [\text{while}_{pk}]$$

$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \ \wedge \ \neg(x \neq 0)\}$$

$$\Downarrow 5x \ [\text{cons}'']$$

$$\{y = a!\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (11)

Einmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\{true\}$$

$$x := a;$$

$$\{(1 * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

$$y := 1; \ [ass]$$

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \ \wedge \ x \neq 0\}$$

$$\Downarrow [cons']$$

$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; \ [ass]$$

$$\{(y * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \ [ass]$$

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

$$\text{od } [while_{pk}]$$

$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \vee \ x < 0) \ \wedge \ \neg(x \neq 0)\}$$

$$\Downarrow 5x \ [cons'']$$

$$\{y = a!\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (12)

Nochmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$\{true\}$$

$$\{(1 * a! = a! \ \wedge \ a \geq 0) \ \vee \ a < 0\}$$

$$x := a; \ [ass]$$

$$\{(1 * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

$$y := 1; \ [ass]$$

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \ \wedge \ x \neq 0\}$$

$$\Downarrow [cons']$$

$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$

$$y := y * x; \ [ass]$$

$$\{(y * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$

$$x := x - 1; \ [ass]$$

$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$

$$\text{od } [while_{pk}]$$

$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \vee \ x < 0) \ \wedge \ \neg(x \neq 0)\}$$

$$\Downarrow 5x \ [cons'']$$

$$\{y = a!\}$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (13)

Schließen der letzten Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$\{true\}$$
$$\Downarrow [cons']$$
$$\{a \geq 0 \ \vee \ a < 0\}$$
$$\Downarrow [cons']$$
$$\{(1 * a! = a! \ \wedge \ a \geq 0) \ \vee \ a < 0\}$$
$$x := a; \ [ass]$$
$$\{(1 * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$
$$y := 1; \ [ass]$$
$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$
$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$
$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \ \wedge \ x \neq 0\}$$
$$\Downarrow [cons']$$
$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$
$$y := y * x; \ [ass]$$
$$\{(y * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$
$$x := x - 1; \ [ass]$$
$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$
$$\text{od } [while_{pk}]$$
$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \vee \ x < 0) \ \wedge \ \neg(x \neq 0)\}$$
$$\Downarrow 5x \ [cons'']$$
$$\{y = a!\}$$

Gesamtskizze

$$\{true\}$$
$$\Downarrow [cons']$$
$$\{a \geq 0 \ \vee \ a < 0\}$$
$$\Downarrow [cons']$$
$$\{(1 * a! = a! \ \wedge \ a \geq 0) \ \vee \ a < 0\}$$
$$x := a; \ [ass]$$
$$\{(1 * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$
$$y := 1; \ [ass]$$
$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$
$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$
$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0) \ \wedge \ x \neq 0\}$$
$$\Downarrow [cons']$$
$$\{((y * x) * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$
$$y := y * x; \ [ass]$$
$$\{(y * (x - 1)! = a! \ \wedge \ x - 1 \geq 0) \ \vee \ x - 1 < 0\}$$
$$x := x - 1; \ [ass]$$
$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \ \vee \ x < 0\}$$
$$\text{od } [while_{pk}]$$
$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \vee \ x < 0) \ \wedge \ \neg(x \neq 0)\}$$
$$\Downarrow [cons'']$$
$$\{((y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0) \vee \ x < 0) \ \wedge \ x = 0\}$$
$$\Downarrow [cons'']$$
$$\{(y * x! = a! \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ x = 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ x = 0)\}$$
$$\Downarrow [cons'']$$
$$\{(y * 0! = a! \ \wedge \ x = 0) \ \vee \ false\}$$
$$\Downarrow [cons'']$$
$$\{y * 1 = a! \ \wedge \ x = 0\}$$
$$\Downarrow [cons'']$$
$$\{y = a!\}$$

Zusammenfassung

Durch Angabe einer linearen Beweisskizze haben wir gezeigt:

Die Hoaresche Zusicherung

$$\{true\}$$

$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$

$$\{y = a!\}$$

ist mit den Axiomen und Regeln von HK_{pk} ableitbar. Gemäß Korrektheitstheorem 4.4.1 ist die Zusicherung damit gültig im Sinn partieller Korrektheit. Damit ist der Beweis von Lemma 4.5.1.1 erbracht.

Übungsaufgabe 1: Fakultätsprogramm

Zeige durch Angabe

- eines Ableitungsbaums
- einer linearen Beweisskizze

dass (auch) die Hoaresche Zusicherung

$$\{a \geq 0\}$$

$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$

$$\{y = a!\}$$

gültig ist im Sinn partieller Korrektheit, d.h. zeige

$$\models_{pk} \{a \geq 0\}\ \pi\ \{y = a!\}$$

Lässt sich die Invariante aus dem Beweis partieller Korrektheit zur Vorbedingung *true* für den Beweis zur Vorbedingung $a \geq 0$ abschwächen? Begründe die Antwort.

Übungsaufgabe 2: Divisionsprogramm

...ganzzahlige Division mit Rest.

Beweise Lemma 4.5.1.2.

Zeige durch Angabe einer linearen Beweisskizze, dass die Hoaresche Zusicherung

$$\{x \geq 0 \wedge y > 0\}$$

$$\pi \equiv q := 0;\ r := x;\ \text{while } r \geq y \text{ do } q := q + 1;\ r := r - y \text{ od}$$

$$\{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

gültig ist im Sinn partieller Korrektheit, d.h. zeige

$$\models_{pk} \{x \geq 0 \wedge y > 0\}\ \pi\ \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

Übungsaufgabe 3: Divisionsprogramm (1)

Überlege, ob $x \geq 0 \wedge y > 0$ die schwächste liberale Vorbedingung für das Programm

$\pi \equiv q := 0;\ r := x;\ \text{while } r \geq y \text{ do } q := q + 1;\ r := r - y \text{ od}$

zur ganzzahligen Division mit Rest und die Nachbedingung

$$x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y$$

ist?

Falls nein, bestimme eine Vorbedingung *wlp* und beweise, dass *wlp* tatsächlich die gesuchte schwächste liberale Vorbedingung beschreibt, d.h. beweise:

$$wlp \iff wlp(\pi, x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y) \quad (*)$$

Übungsaufgabe 3: Divisionsprogramm (2)

Zeige zum Beweis von $(*)$ insbesondere die partielle Korrektheit der Hoareschen Zusicherung

$$\{wlp\}\ \pi\ \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

d.h. zeige

$$\models_{pk} \{wlp\}\ \pi\ \{x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

durch Angabe

1. eines Ableitungsbaums.
2. einer linearen Beweisskizze.

Welche Eigenschaften sind darüberhinaus zu zeigen, um $(*)$ und damit die Äquivalenz von wlp zur schwächsten liberalen Vorbedingung $wlp(\pi, x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y)$ zu zeigen?

Beweise die zusätzlichen Eigenschaften.

Kapitel 4.6

Ableitungskalküle HK'_{tk}, HK_{tk} für totale Korrektheit

Die Hoare-Kalküle

...für partielle und totale Korrektheit für WHILE sind nahezu

- identisch.

Einziger Unterschied: Die Regel $[\text{while}_{pk}]$ zur Behandlung der

- while-Schleife

die beim Übergang von HK_{pk} zu HK_{tk} ersetzt werden muss durch eine

- terminierungssensitive Regel $[\text{while}_{tk}]$.

Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die eine Abwägung treffen zwischen Einfachheit der

- Regel (Variante V1).
- Regelanwendung (Variante V2).

V1: Hoare-Kalkül HK_{tk} für totale Korrektheit

Variante 1: Regeleinfachheit vor Regelanwendungseinfachheit

$$[\text{while}'_{tk}] \quad \frac{I \Rightarrow t{\geq}0,\ [I \wedge b \wedge t{=}w]\ \pi\ [I \wedge t{<}w]}{[I]\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ [I \wedge \neg b]} \qquad (I \text{ Invariante})$$

wobei

- t arithmetischer Ausdruck über ganzen Zahlen, sog. Terminierungsterm.
- w ganzzahlige 'frische' logische Variable, d.h. w kommt in I, b, π und t nicht frei vor.

Terminationsordnung ist: $(\mathbb{N}, \textit{kleiner})$ (bzw. $(\mathbb{N}, <)$ bei überladener Verwendung des Symbols $<$)

Anmerkungen zur while-Regel $[\text{while}'_{tk}]$ (1)

$$[\text{while}'_{tk}] \quad \frac{I \Rightarrow t{\geq}0,\ [I \wedge b \wedge t{=}w]\ \pi\ [I \wedge t{<}w]}{[I]\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ [I \wedge \neg b]} \qquad (I \text{ Invariante})$$

Informell:

Die linke Prämisse $I \Rightarrow t \geq 0$ von $[\text{while}'_{tk}]$ besagt:

- Vor Ausführung des Schleifenrumpfs (I ist wahr!), gilt $t \in \mathbb{N}_0,\ t \geq 0$.

Das bedeutet, der Wert des Terminierungsterms t ist vor (und nach) jeder Ausführung des Schleifenrumpfs Element der durch die Relation *kleiner* $(<)$ Noethersch geordneten Menge $\mathbb{N}_0$.

Anmerkungen zur while-Regel $[\text{while}'_{tk}]$ (2)

Die rechte Prämisse $[I \wedge b \wedge t = w]\ \pi\ [I \wedge t < w]$ von $[\text{while}'_{tk}]$ besagt:

- Wenn t vor Ausführung des Schleifenrumpfs den Wert w hat, so hat t nach Ausführung des Schleifenrumpfs einen echt kleineren Wert, da w als 'frische' logische Variable in π nicht vorkommt und deshalb vor und nach Ausführung des Schleifenrumpfs denselben Wert hat.

Zusammen mit der linken Prämisse folgt daraus, dass der Wert des Terminierungsterms t mit jeder Ausführung des Schleifenrumpfs echt kleiner wird, d.h. bzgl. der Noetherschen Ordnung *kleiner* $(<)$ von $\mathbb{N}_0$ echt abnimmt.

Da es in $\mathbb{N}_0$ keine unendlich absteigenden Ketten gibt, kann die linke Prämisse also nur endlich oft wahr sein, woraus die Terminierung der while-Schleife folgt.

V2: Hoare-Kalkül HK_{tk} für totale Korrektheit

Variante 2: Regelanwendungseinfachheit vor Regeleinfachheit

$$[\text{while}_{tk}] \quad \frac{I \wedge b \Rrightarrow u[t/v],\ [I \wedge b \wedge t{=}w]\ \pi\ [I \wedge t{<}w]}{[I]\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ [I \wedge \neg b]} \qquad (I \text{ Invariante})$$

wobei

- u Boolescher Ausdruck über der Variablen v.
- t arithmetischer Ausdruck über ganzen Zahlen, sog. Terminierungsterm.
- w ganzzahlige 'frische' logische Variable, d.h. w kommt in I, b, π und t nicht frei vor.
- $M =_{df} \{\sigma(v) \mid \sigma \in Ch(u)\}$ bzgl. $\sqsubset$ Noethersch geordnete Menge (oder Noethersche (Halb-) Ordnung).

Terminationsordnung ist: $(M, \sqsubset)$

Anmerkungen zur while-Regel $[\text{while}_{tk}]$ (1)

$$[\text{while}_{tk}] \quad \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v],\ [I \wedge b \wedge t{=}w]\ \pi\ [I \wedge t{<}w]}{[I]\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ [I \wedge \neg b]} \qquad (I \text{ Invariante})$$

Informell:

Die linke Prämisse $I \wedge b \Rightarrow u[t/v]$ von $[\text{while}_{tk}]$ besagt:

- Vor jeder Ausführung des Schleifenrumpfs ($I \wedge b$ wahr!), gilt, dass $u[t/v]$ wahr ist.

Zusammen mit der Definition von M folgt daraus, dass der Wert des Terminierungsterms t vor jeder Ausführung des Schleifenrumpfs Element einer Noethersch geordneten Menge ist.

Anmerkungen zur while-Regel [while$_{tk}$] (2)

Die rechte Prämisse $[I \wedge b \wedge t = w]\ \pi\ [I \wedge t < w]$ von [while$_{tk}$] besagt:

- Wenn t vor Ausführung des Schleifenrumpfs den Wert w hat, so hat t nach Ausführung des Schleifenrumpfs einen echt kleineren Wert, da w als logische Variable in π nicht vorkommt und deshalb vor und nach Ausführung des Schleifenrumpfs denselben Wert hat.

Zusammen mit der linken Prämisse folgt daraus, dass der Wert des Terminierungsterms t mit jeder Ausführung des Schleifenrumpfs echt kleiner wird, d.h. bzgl. der Noetherschen Ordnung von M echt abnimmt.

Da es in M keine unendlich absteigenden Ketten gibt, kann die linke Prämisse also nur endlich oft wahr sein, woraus die Terminierung der while-Schleife folgt.

V1: Hoare-Kalkül HK'_{tk} für totale Korrektheit

Seien p, q zwei logische Formeln oder Prädikate.

Axiome:

[skip] $\dfrac{}{[p]\ \mathit{skip}\ [p]}$

[ass] $\dfrac{}{[p[t/x]]\ x{:=}t\ [p]}$ (Rückwärtssubstitution, Rückwärtsregel)

Regeln:

[comp] $\dfrac{[p]\ \pi_1\ [r],\ [r]\ \pi_2\ [q]}{[p]\ \pi_1;\pi_2\ [q]}$

[ite] $\dfrac{[p \wedge b]\ \pi_1\ [q],\ [p \wedge \neg b]\ \pi_2\ [q]}{[p]\ \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } [q]}$

[while$'_{tk}$] $\dfrac{I \Rightarrow t{\geq}0,\ [I \wedge b \wedge t{=}w]\ \pi\ [I \wedge t{<}w]}{[I]\ \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]}$ (I Invariante)

[cons] $\dfrac{p \Rightarrow p_1,\ [p_1]\ \pi\ [q_1],\ q_1 \Rightarrow q}{[p]\ \pi\ [q]}$

Beachte die überladene Verwendung der eckigen Klammern in [ass].

V2: Hoare-Kalkül HK_{tk} für totale Korrektheit

Seien p, q zwei logische Formeln oder Prädikate.

Axiome:

[skip] $\dfrac{}{[p]\ skip\ [p]}$

[ass] $\dfrac{}{[p[t/x]]\ x{:=}t\ [p]}$ (Rückwärtssubstitution, Rückwärtsregel)

Regeln:

[comp] $\dfrac{[p]\ \pi_1\ [r],\ [r]\ \pi_2\ [q]}{[p]\ \pi_1;\pi_2\ [q]}$

[ite] $\dfrac{[p \wedge b]\ \pi_1\ [q],\ [p \wedge \neg b]\ \pi_2\ [q]}{[p]\ \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } [q]}$

[while_{tk}] $\dfrac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v],\ [I \wedge b \wedge t{=}w]\ \pi\ [I \wedge t{<}w]}{[I]\ \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } [I \wedge \neg b]}$ (I Invariante)

[cons] $\dfrac{p \Rightarrow p_1,\ [p_1]\ \pi\ [q_1],\ q_1 \Rightarrow q}{[p]\ \pi\ [q]}$

Beachte die überl. Verw. der eckigen Klammern in [ass], [while_{tk}].

Vergleich von $[\text{while}_{tk}]$ und $[\text{while}'_{tk}]$

...zentraler Unterschied:

- $[\text{while}_{tk}]$: Beliebige Noethersche Ordnung als Terminationsordnung zulässig: $(M, \sqsubset)$.
- $[\text{while}'_{tk}]$: Festlegung auf eine spezielle Noethersche Ordnung als Terminationsordnung, nämlich: $(\mathbb{N}_0, <)$.

Beachte: Oft erfordert die Rückspiegelung einer sich 'natürlich' anbietenden Noetherschen Terminationsordnung auf die spezielle Noethersche Ordnung $(\mathbb{N}_0, <)$ zusätzlichen Modellierungsaufwand.

In diesen Fällen bietet $[\text{while}_{tk}]$ pragmatische Vorteile im Vergleich zu $[\text{while}'_{tk}]$.

Irreflexive partielle Ordnungen

Definition 4.6.1 (Irreflexive partielle Ordnung)

Sei P eine Menge und $\sqsubset$ eine irreflexive und transitive Relation auf P. Dann heißt das Paar $(P, \sqsubset)$ eine irreflexive partielle Ordnung. Gilt $p \sqsubset p'$, $p, p' \in P$, so heißt p kleiner als p' und p' größer als p.

Beispiele: $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Z}, >)$, $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}, >)$ sind irreflexive partielle Ordnungen (überladene Verwendung der Symbole $<$, $>$).

Wohlfundierte Ordnungen

Definition 4.6.2 (Wohlfundierte Ordnung)

Sei $(P, \sqsubset)$ eine irreflexive partielle Ordnung und W eine Teilmenge von P.

- $\sqsubset$ heißt wohlfundiert auf W, wenn es keine unendlich absteigende Kette

$$\ldots \sqsubset w_2 \sqsubset w_1 \sqsubset w_0$$

  von Elementen $w_i \in W$ gibt.
- Ist $\sqsubset$ wohlfundiert auf W, heißt das Paar $(W, \sqsubset)$ eine wohlfundierte Struktur (oder Noethersch geordnete Menge oder wohlfundierte oder Noethersche Ordnung).

Beispiele: $(\mathbb{N}, <)$ ist eine Noethersche Ordnung, nicht aber $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Z}, >)$ und $(\mathbb{N}, >)$.

Konstruktion wohlfundierter Ordnungen

...aus gegebenen wohlfundierten Ordnungen:

Lemma 4.6.3

Seien $(W_1, \sqsubset_1)$ und $(W_2, \sqsubset_2)$ zwei wohlfundierte Ordnungen. Dann sind auch

1. $(W_1 \times W_2, \sqsubset_{com})$ mit komponentenweiser Ordnung definiert durch

$$(m_1, m_2) \sqsubset_{com} (n_1, n_2) \iff_{df} m_1 \sqsubset_1 n_1 \wedge m_2 \sqsubset_2 n_2$$

2. $(W_1 \times W_2, \sqsubset_{lex})$ mit lexikographischer Ordnung definiert durch

$$(m_1, m_2) \sqsubset_{lex} (n_1, n_2) \iff_{df} (m_1 \sqsubset_1 n_1) \vee (m_1 = n_1 \wedge m_2 \sqsubset_2 n_2)$$

wohlfundierte Ordnungen.

Vergleich von HK'_{tk}, HK_{tk} und HK_{pk}

...HK'_{tk}, HK_{tk} und HK_{pk} sind bis auf die Prämissen der Schleifenregeln identisch:

- Totale Korrektheit: $[\text{while}'_{tk}]$, $[\text{while}_{tk}]$

$$[\text{while}'_{tk}] \quad \frac{I \Rightarrow t{\geq}0,\ [I \wedge b \wedge t{=}w]\ \pi\ [I \wedge t{<}w]}{[I]\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ [I \wedge \neg b]} \qquad (I \text{ Invariante})$$

$$[\text{while}_{tk}] \quad \frac{I \wedge b \Rightarrow u[t/v],\ \{I \wedge b \wedge t{=}w\}\ \pi\ \{I \wedge t{<}w\}}{[I]\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ [I \wedge \neg b]} \qquad (I \text{ Invariante})$$

- Partielle Korrektheit: $[\text{while}_{pk}]$

$$[\text{while}_{pk}] \quad \frac{\{I \wedge b\}\ \pi\ \{I\}}{\{I\}\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ \{I \wedge \neg b\}} \qquad (I \text{ Invariante})$$

Abschließende beweistechnische Anmerkung

...'zerlegt' man die Prämissen von $[\text{while}'_{tk}]$ wie folgt:

$$[\text{while}''_{tk}] \quad \frac{\{I \wedge b\}\ \pi\ \{I\},\ I \Rightarrow t{\geq}0,\ [I \wedge b \wedge t{=}w]\ \pi\ [t{<}w]}{[I]\ \text{while}\ b\ \text{do}\ \pi\ \text{od}\ [I \wedge \neg b]}\ (I\ \text{Invariante})$$

wird deutlich, dass der Beweis totaler Korrektheit einer Hoareschen Zusicherung besteht aus dem Nachweis

- partieller Korrektheit.
- Regulärer Terminierung des Programms.

Totale Korrektheit "gleich"
Partielle Korrektheit "plus" Reguläre Terminierung

Diese Trennung kann im Beweis explizit vollzogen werden. Der Gesamtbeweis wird dadurch modular, wobei der Terminationsbeweis zudem oft einfach ist.

Bemerkung: Die obige Zerlegung kann in gleicher Weise für die Schleifenregel $[\text{while}_{tk}]$ erfolgen.

Kapitel 4.7

Korrektheit und Vollständigkeit von HK'_{tk}, HK_{tk}

Korrektheit von HK'_{tk} und HK_{tk}

Sei π ein WHILE-Programm, p, q zwei logische Formeln oder Prädikate:

Theorem 4.7.1 (Korrektheit von HK'_{tk} und HK_{tk})

Die Ableitungkalküle HK'_{tk} und HK_{tk} sind korrekt, d.h. jede mit den Axiomen und Regeln von HK'_{tk} und HK_{tk} ableitbare Korrektheitsformel (in Zeichen: $\vdash_{HK'_{tk}/HK_{tk}} [p]\ \pi\ [q]$) ist gültig im Sinne totaler Korrektheit (in Zeichen: $\models_{tk} [p]\ \pi\ [q]$), d.h.:

$$\vdash_{HK'_{tk}/HK_{tk}} [p]\ \pi\ [q] \ \Rightarrow\ \models_{tk} [p]\ \pi\ [q]$$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau des Ableitungsbaums der Korrektheitsformel $\{p\}\ \pi\ \{q\}$.

Vollständigkeit von HK'_{tk} und HK_{tk}

Sei π ein WHILE-Programm, p, q zwei Prädikate (extensionaler Ansatz):

Theorem 4.7.2 (Vollständigkeit von HK'_{tk} und HK_{tk})

Die Ableitungkalküle HK'_{tk} und HK_{tk} sind vollständig, d.h. jede im Sinn totaler Korrektheit gültige Korrektheitsformel (in Zeichen: $\models_{tk} [p]\ \pi\ [q]$) ist mit den Axiomen und Regeln von HK'_{tk} und HK_{tk} ableitbar (in Zeichen: $\vdash_{HK'_{tk}/HK_{tk}} [p]\ \pi\ [q]$), d.h.:

$$\models_{tk} [p]\ \pi\ [q] \ \Rightarrow\ \vdash_{HK'_{tk}/HK_{tk}} [p]\ \pi\ [q]$$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von π.

Kapitel 4.8

Totale Korrektheitsbeweise

Kapitel 4.8.1

Beispiele: Fakultät und Division mit Rest

Fakultäts- und Divisionsprogramm

Lemma 4.8.1.1 (Fakultät)

Die Hoaresche Zusicherung

$$[a \geq 0]$$

$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$

$$[y = a!]$$

ist gültig im Sinn totaler Korrektheit.

Lemma 4.8.1.2 (Division mit Rest)

Die Hoaresche Zusicherung

$$[x \geq 0 \wedge y > 0]$$

$$q := 0;\ r := x;\ \text{while } r \geq y \text{ do } q := q + 1;\ r := r - y \text{ od}$$

$$[x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y]$$

ist gültig im Sinn totaler Korrektheit.

Beweisdarstellungen: Baum und lineare Skizze

Aufgabe: Beweise Lemma 4.8.1.1 und 4.8.1.2.

...d.h., zeige, dass die Hoareschen Tripel für die Berechung der Fakultätsfunktion und der ganzzahligen Division mit Rest gültig sind im Sinn totaler Korrektheit.

Führe die Beweise in zwei notationellen Varianten. Als

- Ableitungsbaum (kanonische Variante).
- lineare Beweisskizze (pragmatische Variante).

Kapitel 4.8.2

Ableitungsbäume

Übungsaufgabe

Beweise die Gültigkeit der Hoareschen Zusicherungen aus

- Lemma 4.8.1.1 (Fakultät)
- Lemma 4.8.1.2 (Division mit Rest)

mithilfe der Axiome und Regeln von

1. HK'_{tk}
2. HK_{tk}

durch Ableitung und Angabe entsprechender Ableitungsbäume.

Kapitel 4.8.3

Lineare Beweisskizzen

Lemma 4.8.1.1: Fakultätsprogramm

...Beweis von Lemma 4.8.1.1:

Wir zeigen durch Angabe einer linearen Beweisskizze, dass das Hoaresche Tripel

$$[a \geq 0]$$

$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$

$$[y = a!]$$

gültig ist im Sinn totaler Korrektheit.

...und entwickeln die lineare Beweisskizze dafür Schritt für Schritt!

Fakultätsprogramm: Invariante, Term.-Term

Schritt 1:

"Träumen" von

- $I \equiv y * x! = a! \wedge x \geq 0$ als Invariante
- $t \equiv x$ als Terminierungsterm
- $u \equiv v > 0$ als Boolescher Ausdruck über v

...geeignet, um die Regel $[\text{while}_{tk}]$ anwenden und den Beweis erfolgreich abschließen zu können.

Mit Wahl von $u \equiv v > 0$ und $t \equiv x$

...gilt für:

- $u[t/v]$: $u[t/v] = (v > 0)[x/v] = x > 0$
- M:

$$\begin{aligned} M &= {}_{df} \{\, \sigma(v) \mid \sigma \in Ch(u) \,\} \\ &= \{\, \sigma(v) \mid \sigma \in Ch(v > 0) \,\} \\ &= \{\, \sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma \wedge \mathit{größer}([\![\, v \,]\!]_A(\sigma), [\![\, 0 \,]\!]_A(\sigma)) \,\} \\ &= \{\, \sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma \wedge \mathit{größer}(\sigma(v), \mathbf{0}) \,\} \\ &= \mathbb{N}_1 \end{aligned}$$

Damit gilt: M ist bzgl. der Relation *größer* auf $\mathbb{N}_1$ Noethersch geordnet, d.h.

$$(M, \sqsubseteq) = (\mathbb{N}_1, \mathit{größer})$$

ist Noethersche Ordnung.

Mit Wahl von $I \equiv y * x! = a! \wedge x \geq 0$

...und der Schleifenbedingung $b \equiv x \neq 0$ aus π gilt:

Für alle Zustände $\sigma \in \Sigma$, in denen

- I erfüllt ist, gilt: $\mathbf{0} \leq \sigma(x) \in \mathbb{N}_0$
- I und b erfüllt sind, gilt: $\mathbf{1} \leq \sigma(x) \in M\ (= \mathbb{N}_1)$

Anders ausgedrückt:

- $\forall\, \sigma \in Ch(I).\ \sigma(x) \geq \mathbf{0}$
  d.h.: $\{\sigma(x) \,|\, \sigma \in Ch(I)\} = \mathbb{N}_0$
- $\forall\, \sigma \in Ch(I \wedge b).\ \sigma(x) \geq \mathbf{1}$
  d.h. : $\{\sigma(x) \,|\, \sigma \in Ch(I \wedge b)\} = \mathbb{N}_1$

Insbesondere:

- $\{\sigma(x) \,|\, \sigma \in Ch(I)\}$, $\{\sigma(x) \,|\, \sigma \in Ch(I \wedge b)\}$ Noethersch geordnet.
- $\forall\, \sigma \in Ch(I) \cup Ch(I \wedge b).\ \sigma(x)$ Element Noethersch geordneter Menge.

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (1)

Schritt 2: Behandlung des Rumpfs der while-Schleife.

Die Herleitung von

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$
$$y := y * x;$$
$$x := x - 1;$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

erlaubt mithilfe der $[\text{while}_{tk}]$-Regel den Übergang zu:

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$
$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$
$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$
$$y := y * x;$$
$$x := x - 1;$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$
$$\text{od } [\text{while}_{tk}]$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (2)

Behandlung des Rumpfs der while-Schleife im Detail:

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (3)

Wegen Rückwärtszuweisungsregel wird der Rumpf der while-Schleife von hinten nach vorne bearbeitet:

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$y := y * x;$$
$$[y * (x-1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (4)

Nochmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \ \wedge \ x = w]$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$
$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$
$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

...wobei noch eine Beweislücke verbleibt!

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (5)

Schließen der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; [\text{ass}]$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (6)

Anwendung der [while$_{tk}$]-Regel liefert nun wie gewünscht:

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

$$\text{od } [\text{while}_{tk}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (7)

Schritt 3: Zur gewünschten Nachbedingung verbleibt ebenfalls eine Beweislücke:

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \ \wedge \ x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

$$\text{od } [\text{while}_{tk}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

$$[y = a!]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (8)

Schließen der Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

while $x \neq 0$ do

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

od $[\text{while}_{tk}]$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

$$\Downarrow [\text{cons}'']$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x = 0]$$

$$\Downarrow [\text{cons}'']$$

$$[y * 0! = a!]$$

$$\Downarrow [\text{cons}'']$$

$$[y = a!]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (9)

Aus Platzgründen etwas verkürzt dargestellt:

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

$$\text{od } [\text{while}_{tk}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

$$\Downarrow 3x \ [\text{cons}'']$$

$$[y = a!]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (10)

Schritt 4: Es verbleibt, die Beweislücke zur gewünschten Vorbedingung zu schließen:

$$[a \geq 0]$$

$$x := a;$$

$$y := 1;$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

while $x \neq 0$ do

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; \ [\text{ass}]$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; \ [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

od $[\text{while}_{tk}]$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

$$\Downarrow 3x \ [\text{cons}'']$$

$$[y = a!]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (11)

Einmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$[a \geq 0]$$

$$x := a;$$

$$[1 * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$y := 1; \text{ [ass]}$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; \text{ [ass]}$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

$$\text{od } [\text{while}_{tk}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

$$\Downarrow 3x \text{ [cons}'']$$

$$[y = a!]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (12)

Nochmalige Anwendung der [ass]-Regel liefert:

$$[a \geq 0]$$

$$[1 * a! = a! \wedge a \geq 0]$$

$$x := a; \text{ [ass]}$$

$$[1 * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$y := 1; \text{ [ass]}$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; \text{ [ass]}$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; \text{ [ass]}$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

$$\text{od } [\text{while}_{tk}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

$$\Downarrow 3x \ [\text{cons}'']$$

$$[y = a!]$$

Fakultätsprogramm: Lineare Beweisskizze (13)

Schließen der letzten Beweislücke in der zugrundeliegenden Theorie arithmetischer und Boolescher Ausdrücke:

$$[a \geq 0]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[1 * a! = a! \wedge a \geq 0]$$

$$x := a; [\text{ass}]$$

$$[1 * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$y := 1; [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; [\text{ass}]$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

$$\text{od } [\text{while}_{tk}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

$$\Downarrow 3x [\text{cons}'']$$

$$[y = a!]$$

Gesamtskizze

$$[a \geq 0]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[1 * a! = a! \wedge a \geq 0]$$

$$x := a; [\text{ass}]$$

$$[1 * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$y := 1; [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0]$$

$$\text{while } x \neq 0 \text{ do}$$

$$y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow x > 0$$
$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0 \wedge x = w]$$

$$\Downarrow [\text{cons}']$$

$$[(y * x) * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$y := y * x; [\text{ass}]$$

$$[y * (x - 1)! = a! \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x - 1 < w]$$

$$x := x - 1; [\text{ass}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x < w]$$

$$\text{od } [\text{while}_{tk}]$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge \neg(x \neq 0)]$$

$$\Downarrow [\text{cons}'']$$

$$[y * x! = a! \wedge x \geq 0 \wedge x = 0]$$

$$\Downarrow [\text{cons}'']$$

$$[y * 0! = a!]$$

$$\Downarrow [\text{cons}'']$$

$$[y = a!]$$

Zusammenfassung

Durch Angabe einer linearen Beweisskizze haben wir gezeigt:

Die Hoaresche Zusicherung

$$[a \geq 0]$$

$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$

$$[y = a!]$$

ist mit den Axiomen und Regeln von HK_{tk} ableitbar. Gemäß Korrektheitstheorem 4.7.1 ist die Zusicherung damit gültig im Sinn totaler Korrektheit. Damit ist der Beweis von Lemma 4.8.1.1 erbracht.

Übungsaufgabe

...ganzzahlige Division mit Rest.

Beweise Lemma 4.8.1.2.

Zeige durch Angabe einer linearen Beweisskizze, dass die Hoaresche Zusicherung

$$[x \geq 0 \wedge y > 0]$$
$$q := 0;\ r := x;\ \text{while } r \geq y \text{ do } q := q + 1;\ r := r - y \text{ od}$$
$$[x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y]$$

gültig ist im Sinn totaler Korrektheit.

Kapitel 4.9

Ansätze und Werkzeuge für (semi-) automatische axiomatische Programmverifikation

Ansätze, Werkzeuge

...zur (semi-) automatischen Programmverifikation im Hoare-schen Stil.

Unter anderem:

- Theorema, RISC, JKU Linz.
- KeY-Hoare, KIT Karlsruhe, Chalmers University of Technology, TU Darmstadt.
- ...

Theorema-Projekt (1)

...www.theorema.org:

"The Theorema project aims at extending current computer algebra systems by facilities for supporting mathematical proving. The present early-prototype version of the Theorema software system is implemented in Mathematica. The system consists of a general higher-order predicate logic prover and a collection of special provers that call each other depending on the particular proof situations. The individual provers imitate the proof style of human mathematicians and produce human-readable proofs in natural language presented in nested cells. The special provers are intimately connected with the functors that build up the various mathematical domains."

(Exzerpt von http://www.theorema.org)

Theorema-Projekt (2)

"The long-term goal of the project is to produce a complete system which supports the mathematician in creating interactive text- books, i.e. books containing, besides the ordinary passive text, active text representing algorithms in executable format, as well as proofs which can be studied at various levels of detail, and whose routine parts can be automatically generated. This system will provide a uniform (logic and software) framework in which a working mathematician, without leaving the system, can get computer-support while looping through all phases of the mathematical problem solving cycle. [...]"

(Exzerpt von `http://www.theorema.org`)

KeY-Projekt (1)

...www.key-project.org:

Integrated Deductive Software Design

"The KeY System is a formal software development tool that aims to integrate design, implementation, formal specification, and formal verification of object-oriented software as seamlessly as possible. At the core of the system is a novel theorem prover for the first-order Dynamic Logic for Java with a user-friendly graphical interface.

The project was started in November 1998 at the University of Karlsruhe. It is now a joint project of Karlsruhe Institute of Technology and Chalmers University of Technology, Gothenburg, and TU Darmstadt.

The KeY tool is available for down-load. [...]"

(Exzerpt von http://www.key-project.org)

KeY-Projekt (2)

KeY-Hoare (www.key-project.org/download/hoare) unterstützt

- partielle Korrektheitsbeweise
- totale Korrektheitsbeweise und Ausführungszeitkorrektheitsbeweise (Versionen ab 0.1.6)
- ganzzahlige und Boolesche Felder (Versionen ab 0.1.7)

Nützliche Anleitung:

- Reiner Hähnle, Richard Bubel. *A Hoare-Style Calculus with Explicit State Updates*. Handout in a course on Program Verification at the Department of Computer Science at the Chalmers University of Technology on the Hoare Calculus and the usage of the tool KeY-Hoare, 19 pages. http://i12www.iti.uni-karlsruhe.de/~key/download/hoare/students.pdf

Kapitel 4.10

Historische Meilensteine der Programmverifikation

Meilensteine der Programmverifikation (1)

Frühe Anfänge

1949 Turings Vision: Korrekte Programme
Beispiel Fakultätsfunktion: Zusicherungen und Terminierungsfunktion

Axiomatische Methode

1967 Floyd: Flussdiagramme
Hoare: while-Programme

Erweiterung der axiomatischen Methode

1971 Hoare: Rekursive Prozeduren
1976/77 Owicki & Gries, Lamport: Parallele Programme
1980/81 Apt, Francez & de Roever, Levin & Gries: Verteilte Programme
1991 de Boer: Parallele, objektorientierte Programme
1977 Pnueli: Temporale Logik für Programme
1979 Clarke: Grenzen der axiomatischen Methode

Meilensteine der Programmverifikation (2)

Automatisierung der Verifikation

1981/82 Emerson & Clarke, Quielle & Sifakis: Modellprüfung
1977 Cousot & Cousot: Abstrakte Interpretation
1979 Deduktion: Interaktive Theorembeweiser
1967 Automatische Terminierungsbeweise

Entwicklung korrekter Programme

1976 Dijkstra: Kalkül der schwächsten Vorbedingung
1997 Meyer: Design-by-Contract
1969 Büchi & Landweber: Automatenbasierte Systeme

Quelle: Ernst-Rüdiger Olderog, Reinhard Wilhelm. Turing und die Verifikation. Informatik Spektrum 35(4):271-279, 2012.

Kapitel 4.11

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (1)

Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part 1*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 3:431-483, 1981.

Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part II: Nondeterminism*. Theoretical Computer Science 28(1-2):83-109, 1984.

Krzysztof R. Apt, Ernst-Rüdiger Olderog. *Programmverifikation – Sequentielle, parallele und verteilte Programme*. Springer-V., 1994.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (2)

Krzysztof R. Apt, Frank S. de Boer, Ernst-Rüdiger Olderog. *Verification of Sequential and Concurrent Programs*. Springer-V., 3. Auflage, 2009. (Chapter 3, While Programs; Chapter 3.3, Verification; Chapter 3.4, Proof Outlines – Partial Correctness, Total Correctness; Chapter 3.5, Completeness)

Bernhard Beckert, Reiner Hähnle, Peter H. Schmitt (Hrsg.). *Verification of Object-Oriented Software: The KeYApproach*. LNCS 4334, Springer-V., 2007.

Mordechai Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science*. 2. Auflage, Springer-V., 2001. (Chapter 9, Programs: Semantics and Verification)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (3)


Ernie Cohen, Dexter Kozen. *A Note on the Complexity of Propositional Hoare Logic*. ACM Transactions on Computational Logic 1(1):171-174, 2000.


Stephen A. Cook. *Soundness and Completeness of an Axiom System for Program Verification*. SIAM Journal on Computing 7(1):70-90, 1978.


Jaco W. De Backer. *Mathematical Theory of Program Correctness*. Prentice-Hall, 1980.


Edmund M. Clarke. *Programming Language Constructs for which it is Impossible to Obtain Good Hoare Axiom Systems*. Journal of the ACM 26(1):129-147, 1979.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (4)


Edmund M. Clarke, Stephen M. German, Joseph Y. Halpern. *Effective Axiomatizations of Hoare Logics*. Journal of the ACM 30(1):612-636, 1983.


Martin Davis. *Computability and Unsolvability*. Dover Publications, 1982.


Robert W. Floyd. *Assigning Meaning to Programs*. In Proceedings of Symposium on Applied Mathematics, Mathematical Aspects of Computer Science, American Mathematical Society, New York, 19:19-32, 1967.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (5)


Emily P. Friedman. *Relationships between Monadic Recursion Schemes and Deterministic Context-free Languages*. In IEEE Conference Record of the 15th Annual Symposium on Switching and Automata Theory (SWAT'74), 43-51, 1974.


Emily P. Friedman. *Equivalence Problems for Deterministic Context-free Languages and Monadic Recursion Schemes*. Journal of Computer and System Sciences 14(3):344-359, 1977.


Stephen J. Garland, David C. Luckham. *Program Schemes, Recursion Schemes, and Formal Languages*. Journal of Computer and System Sciences 7(2):119-160, 1973.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (6)

Seymour Ginsburg, Sheila Greibach. *Deterministic Context Free Languages*. Information and Control 9(6):620-648, 1966.

Reiner Hähnle, Richard Bubel. *A Hoare-Style Calculus with Explicit State Updates*. Handout in the course Program Verification at the Department of Computer Science at the Chalmers University of Technology, 19 Seiten. `http://i12www.iti.uni-karlsruhe.de/~key/download/hoare/students.pdf`

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (7)


Charles A.R. Hoare. *An Axiomatic Basis for Computer Programming*. Communications of the ACM 12(10):576-580, 583, 1969.


Charles A.R. Hoare. *The Emperor's Old Clothes*. Communications of the ACM 24(2):75-83, 1981. DOI: 10.1145/358549.358561


Charles A.R. Hoare. *The Ideal of Program Correctness*. The Computer Journal 50(3):254-260, 2007.


Charles A.R. Hoare. *Retrospective: An Axiomatic Basis for Computer Programming*. Communications of the ACM 52(10):30-32, 2009. DOI: 10.1145/1562764.1562779

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (8)

Tudor Jebelean, Laura Kovács, Nikolaj Popov. *Experimental Program Verification in the Theorema System*. In Proceedings of the 1st International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods (ISoLA 2004), 92-99, 2004. `www.risc.jku.at/publications/download/risc_2243/KoPoJeb.pdf`

Laura Kovács, Tudor Jebelean. *Practical Aspects of Imperative Program Verification using Theorema*. In Proceedings of the 5th International Workshop on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2003), 317-320, 2003. `www.risc.jku.at/publications/download/risc_464/synasc03.pdf`

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (9)

Laura Kovács, Tudor Jebelean. *Generation of Invariants in Theorema*. In Proceedings of the 10th International Symposium of Mathematics and its Applications, 407-415, 2003. `www.risc.jku.at/publications/download/risc_2053/2003-11-06-A.pdf`

Dexter Kozen, Jerzy Tiuryn. *On the Completeness of Propositional Hoare Logic*. Information Sciences 139(3-4):187-195, 2001.

Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis*. Springer-V., 2009. (Chapter 1, Introduction: What do we want to know about the Program?, Chapter 2, How to prove a Program Correct: Programs without Loops; Chapter 3, How to prove a Program Correct: Iterative Programs)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (10)


Jacques Loeckx, Kurt Sieber. *The Foundations of Program Verification*. Wiley, 1984.


Konstantinos Mamouras. *On the Hoare Theory of Monadic Recursion Schemes*. In Proceedings of the Joint Meeting of the 23rd EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL) and the 29th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS) (CSL-LICS'14), Article 69, 69.1-69.10, 2014.


Konstantinos Mamouras. *The Hoare Logic of Deterministic and Nondeterministic Monadic Recursion Schemes*. ACM Transactions on Computational Logic 17(2):13.1-13.30, 2016.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (11)

Robert Lover. *Elementary Logic for Software Development*. Springer-V., 2008. (Chapter 19, Program Correctness Proofs; Chapter 19.3, Proofs using Floyd's Method of Invariant Assertions; Chapter 20.2.1, Floyd-Hoare Logic)

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Chapter 6, Axiomatic Program Verification)

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 9, Axiomatic Program Verification; Chapter 10, More on Axiomatic Program Verification)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (12)


David von Oheimb. *Hoare Logic for Java in Isabelle/HOL*. Concurrency and Computation: Practice and Experience 13(13):1173-1214, 2001.


Ernst-Rüdiger Olderog. *Correctness of Programs with Pascal-like Procedures without Global Variables*. Theoretical Computer Science 30(1):49-90, 1984.


Ernst-Rüdiger Olderog, Bernhard Steffen. *Formale Semantik und Programmverifikation*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 145-166, 2006.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 4 (13)

Ernst-Rüdiger Olderog, Reinhard Wilhelm. *Turing und die Verifikation*. Informatik Spektrum 35(4):271-279, 2012.

Vaughan R. Pratt. *Semantical Considerations of Floyd-Hoare Logic*. In Proceedings of the 17th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'76), 109-121, 1976.

Kapitel 5

Axiomatische Ausführungszeitanalyse

Kapitel 5.1

Motivation

Übergang

...von axiomatischer Programmverifikation zu axiomatischer Programmanalyse.

...am Beispiel

- axiomatischer asymptotischer Ausführungszeitanalyse

nach:

- Kapitel 6.5, Assertions for Execution Time.
  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. Semantics with Applications – A Formal Introduction. Wiley, 1992.
- Kapitel 10.2, Assertions for Execution Time.
  Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. Semantics with Applications – An Appetizer. Springer-V., 2007.

Ausführungszeitanalyse

Hintergrund: In vielen Anwendungsbereichen sind

- (zumindest weiche) Aussagen über die Ausführungszeit von Programmen erforderlich, z.B. Antwortzeiten von Buchungsportalen.
- sogar harte Aussagen über die Ausführungs- bzw. Antwortzeiten von Programmen erforderlich, besonders für sicherheitskritische Echtzeitanwendungen (sog. Schlechtester-Fall-Ausführungszeitanalyse (engl. worst-case execution time (WCET) analysis).

Der Nachweis totaler Korrektheit mittels axiomatischer Programmverifikation garantiert zwar

- Terminierung eines Programms

sagt aber nichts über den tatsächlichen Ressourcen-, insbesondere Laufzeitbedarf aus.

In diesem Kapitel

...Erweiterung und Adaptierung des Ableitungskalküls für totale Korrektheit, um Aussagen über den

- asymptotischen Laufzeitbedarf

zu ermöglichen.

Grundidee (1)

...Zuordnung von Auswertungszeiten zu Ausdrücken:

- Numerale, Wahrheitswertkonstanten
  ...Auswertungszeit in konstanter Zeit, d.h. in Größenordnung $\mathcal{O}(\mathbf{1})$.
- Variablen
  ...Auswertungs- bzw. Zugriffszeit (lesen, schreiben) in konstanter Zeit, d.h. in Größenordnung $\mathcal{O}(\mathbf{1})$.
- Zusammengesetzte Ausdrücke
  ...Auswertungszeit in linearer Zeit abhängig von der Zahl **n** der Operatoren und Relatoren im Ausdruck, d.h. in Größenordnung $\mathcal{O}(\mathbf{n})$.

Grundidee (2)

...Zuordnung von Ausführungszeiten zu Programmkonstrukten:

- Leere Anweisung
  ...Ausführungszeit in konstanter Zeit, d.h. in Größenordnung $\mathcal{O}(\mathbf{1})$.
- Zuweisung
  ...Ausführungszeit in linearer Zeit in Größenordnung der Auswertungszeit des rechtsseitigen Ausdrucks.
- (Sequentielle) Komposition
  ...Ausführungszeit in Größenordnung (d.h. gleich bis auf einen konstanten Faktor) der Summe der Ausführungszeiten der Komponenten.

Grundidee (3)

- Fallunterscheidung
  ...Ausführungszeit in Größenordnung der Summe der Auswertungszeit der Bedingung und der größeren der Ausführungszeiten der beiden Zweige.
- while-Schleife
  ...Ausführungszeit in Größenordnung der Summe der wiederholten Auswertungszeiten der Abbruchbedingung und Ausführungszeiten des Schleifenrumpfs.

...Verfeinerungen und präzisere Zuordnungen sind möglich.

Formalisierung

...und Umsetzung der Grundidee in drei Schritten:

1. Ausführungszeitbewusste (abstrakte) Ausdruckssemantik:
   ...Einführung einer abstrakten Semantik, die die Auswertungszeit arithmetischer und Boolescher Ausdrücke beschreibt (Kapitel 5.2).
2. Ausführungszeitbewusste (abstrakte) Programmsemantik:
   ...Erweiterung und Adaption der natürlichen Semantik von WHILE zu einer ausführungszeitbewussten abstrakten Programmsemantik (Kapitel 5.3).
3. Ableitungskalkül für totale Korrektheit mit asymptotischen Ausführungszeitaussagen:
   Erweiterung und Adaption des Ableitungskalküls für totale Korrektheit zur Ableitung von Aussagen zur asymptotischen Ausführungszeit von Programmen (Kapitel 5.4).

Kapitel 5.2

Zeitbewusste Ausdruckssemantik

Zeitbewusste Ausdruckssemantik

...Einführung und Definition zeitbewusster (abstrakter) Semantikfunktionen für arithmetische und Boolesche Ausdrücke:

- $[\![.]\!]_{ZA} : \mathbf{Aexpr} \to \mathbb{Z}$
- $[\![.]\!]_{ZB} : \mathbf{Bexpr} \to \mathbb{Z}$

die als Bedeutung arithmetischen und Booleschen Ausdrücken ihre Auswertungszeit (in Zeiteinheiten einer hier nicht näher spezifizierten abstrakten Maschine AM) geben.

Intuitiv: $[\![a]\!]_{ZA}$, $a \in \mathbf{Aexpr}$, und $[\![b]\!]_{ZB}$, $b \in \mathbf{Bexpr}$, liefern die Anzahl der Zeiteinheiten, die AM zur Auswertung von a und b benötigt.

Zeitbewusste Semantik arithmet. Ausdrücke

$[\![\, . \,]\!]_{ZA} : \mathbf{Aexpr} \to \mathbb{Z}$ (zustandsunabhängig) induktiv definiert durch:

$$
\begin{aligned}
[\![\, n \,]\!]_{ZA} &=_{df} \mathbf{1} \\
[\![\, x \,]\!]_{ZA} &=_{df} \mathbf{1} \\
[\![\, a_1 + a_2 \,]\!]_{ZA} &=_{df} [\![\, a_1 \,]\!]_{ZA} + [\![\, a_2 \,]\!]_{ZA} + \mathbf{1} \\
[\![\, a_1 * a_2 \,]\!]_{ZA} &=_{df} [\![\, a_1 \,]\!]_{ZA} + [\![\, a_2 \,]\!]_{ZA} + \mathbf{1} \\
[\![\, a_1 - a_2 \,]\!]_{ZA} &=_{df} [\![\, a_1 \,]\!]_{ZA} + [\![\, a_2 \,]\!]_{ZA} + \mathbf{1} \\
[\![\, a_1 / a_2 \,]\!]_{ZA} &=_{df} [\![\, a_1 \,]\!]_{ZA} + [\![\, a_2 \,]\!]_{ZA} + \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

...andere Operatoren analog, ggf. mit operationsspezifischen Auswertungszeiten.

Zeitbewusste Semantik Boolescher Ausdrücke

$[\![.]\!]_{ZB} : \mathbf{Bexpr} \to \mathbb{Z}$ (zustandsunabhängig) induktiv definiert durch:

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\mathit{true}]\!]_{ZB} & =_{df} & \mathbf{1} \\
[\![\mathit{false}]\!]_{ZB} & =_{df} & \mathbf{1} \\
[\![a_1 = a_2]\!]_{ZB} & =_{df} & [\![a_1]\!]_{ZA} + [\![a_2]\!]_{ZA} + \mathbf{1} \\
[\![a_1 < a_2]\!]_{ZB} & =_{df} & [\![a_1]\!]_{ZA} + [\![a_2]\!]_{ZA} + \mathbf{1} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
[\![\neg b]\!]_{ZB} & =_{df} & [\![b]\!]_{ZB} + \mathbf{1} \\
[\![b_1 \wedge b_2]\!]_{ZB} & =_{df} & [\![b_1]\!]_{ZB} + [\![b_2]\!]_{ZB} + \mathbf{1} \\
[\![b_1 \vee b_2]\!]_{ZB} & =_{df} & [\![b_1]\!]_{ZB} + [\![b_2]\!]_{ZB} + \mathbf{1}
\end{array}
$$

...andere Relatoren (z.B. $\leq$, ...) analog, ggf. mit operationsspezifischen Auswertungszeiten.

Kapitel 5.3

Zeitbewusste natürliche Semantik

Erweiterung und Anpassung

...der

- natürlichen Semantik $[\![\ ]\!]_{ns}$ von WHILE

zur Bestimmung der

- Ausführungszeit von WHILE-Programmen

zusätzlich zu ihrer üblichen Bedeutung.

Methode: Ersetzen der Transitionen der Form

$$\langle \pi, \sigma \rangle \to \sigma'$$

der N-Semantik von WHILE durch Transitionen der NZ-Semantik der Form

$$\langle \pi, \sigma \rangle \to^t \sigma'$$

mit der Bedeutung, dass ein Programm π angesetzt auf σ nach t Zeiteinheiten in σ' terminiert.

NZS-Regelwerk von WHILE: Axiome

$$[\text{skip}_{nzs}] \quad \frac{}{\langle \mathit{skip}, \sigma \rangle \rightarrow^{1} \sigma}$$

$$[\text{ass}_{nzs}] \quad \frac{}{\langle x := t, \sigma \rangle \rightarrow^{[\![t]\!]_{ZA}+1} \sigma[[\![t]\!]_A(\sigma)/x]}$$

$$[\text{while}^{ff}_{nzs}] \quad \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow^{[\![b]\!]_{ZB}+3} \sigma} \qquad [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{falsch}$$

NZS-Regelwerk von WHILE: Regeln

$$[\text{while}^{tt}_{nzs}] \quad \frac{\langle \pi, \sigma\rangle \to^{t} \sigma', \langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma'\rangle \to^{t'} \sigma''}{\langle \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}, \sigma\rangle \to^{[\![b]\!]_{ZB}+t+t'+2} \sigma''} [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr}$$

$$[\text{if}^{tt}_{nzs}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma\rangle \to^{t} \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma\rangle \to^{[\![b]\!]_{ZB}+t+1} \sigma'} [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{wahr}$$

$$[\text{if}^{ff}_{nzs}] \quad \frac{\langle \pi_2, \sigma\rangle \to^{t} \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}, \sigma\rangle \to^{[\![b]\!]_{ZB}+t+1} \sigma'} [\![b]\!]_B(\sigma) = \textbf{falsch}$$

$$[\text{comp}_{nzs}] \quad \frac{\langle \pi_1, \sigma\rangle \to^{t_1} \sigma', \langle \pi_2, \sigma'\rangle \to^{t_2} \sigma''}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma\rangle \to^{t_1+t_2} \sigma''}$$

Beispiel: Illustration der NZ-Semantik (1)

...anhand des (kanonischen) Fakultätsprogramms.

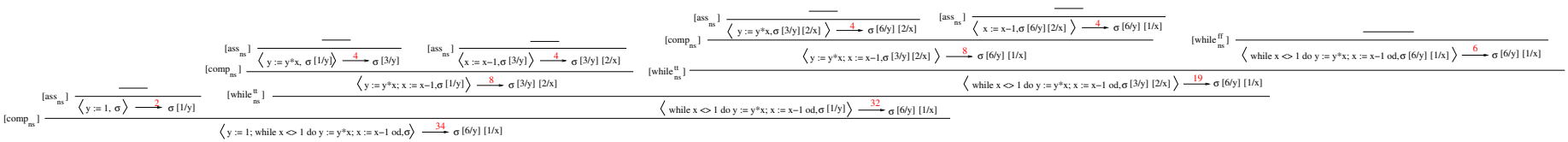
Sei $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(x) = \mathbf{3}$.

Dann gilt:

$$\langle y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}, \sigma \rangle \rightarrow^{34} \sigma[\mathbf{6}/y][\mathbf{1}/x]$$

...terminiert in 34 Zeiteinheiten im Zustand $\sigma[\mathbf{6}/y][\mathbf{1}/x]$.

Zugehöriger Ableitungsbaum:



Beispiel: Illustration der NZ-Semantik (2)

...der gleiche Ableitungsbaum in "etwas" größerer Darstellung durch Einführung eines benannten Teilbaums T:

$$\dfrac{\dfrac{}{\langle y := 1, \sigma\rangle \xrightarrow{2} \sigma\,[1/y]}\,[ass_{ns}] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle y := y*x, \sigma\,[1/y]\rangle \xrightarrow{4} \sigma\,[3/y]}\,[ass_{ns}] \qquad \dfrac{}{\langle x := x-1, \sigma\,[3/y]\rangle \xrightarrow{4} \sigma\,[3/y]\,[2/x]}\,[ass_{ns}]}{\langle y := y*x;\ x := x-1, \sigma\,[1/y]\rangle \xrightarrow{8} \sigma\,[3/y]\,[2/x]}\,[comp_{ns}] \qquad \dfrac{T}{\langle \text{while } x <> 1 \text{ do } y := y*x;\ x := x-1 \text{ od}, \sigma\,[1/y]\rangle \xrightarrow{32} \sigma\,[6/y]\,[1/x]}\,[while^{tt}_{ns}]}{\langle y := 1;\ \text{while } x <> 1 \text{ do } y := y*x;\ x := x-1 \text{ od}, \sigma\rangle \xrightarrow{34} \sigma\,[6/y]\,[1/x]}\,[comp_{ns}]$$

T =

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle y := y*x, \sigma\,[3/y]\,[2/x]\rangle \xrightarrow{4} \sigma\,[6/y]\,[2/x]}\,[ass_{ns}] \qquad \dfrac{}{\langle x := x-1, \sigma\,[6/y]\,[2/x]\rangle \xrightarrow{4} \sigma\,[6/y]\,[1/x]}\,[ass_{ns}]}{\langle y := y*x;\ x := x-1, \sigma\,[3/y]\,[2/x]\rangle \xrightarrow{8} \sigma\,[6/y]\,[1/x]}\,[comp_{ns}] \qquad \dfrac{}{\langle \text{while } x <> 1 \text{ do } y := y*x;\ x := x-1 \text{ od}, \sigma\,[6/y]\,[1/x]\rangle \xrightarrow{6} \sigma\,[6/y]\,[1/x]}\,[while^{ff}_{ns}]}{\langle \text{while } x <> 1 \text{ do } y := y*x;\ x := x-1 \text{ od}, \sigma\,[3/y]\,[2/x]\rangle \xrightarrow{19} \sigma\,[6/y]\,[1/x]}\,[while^{tt}_{ns}]$$

Kapitel 5.4

Zeitbewusste axiomatische Semantik

Erweiterung und Anpassung

...des

- Ableitungskalküls HK_{tk} für totale Korrektheit

von Programmen um den Aspekt ihrer asymptotischen Ausführungszeit.

Methode: Übergang von zeitunbewussten Korrektheitsformeln der Form

$$[p]\ \pi\ [q]$$

zu zeitbewussten Korrektheitsformeln der Form

$$[p]\ \pi\ [e \Downarrow q]$$

wobei

- π WHILE-Programm.
- p, q logische Formeln oder Prädikate als Vor- und Nachbedingung (wie bisher!).
- $e \in \mathbf{Aexp}$ arithmetischer Ausdruck als Ausführungszeitabschätzung.

Semantik zeitbewusster Korrektheitsformeln

Sei π ein WHILE-Programm, p, q zwei logische Formeln oder Prädikate, e ein arithmetischer Ausdruck.

Definition 5.1.1 (Gültigkeit zeitbew. Korrektheitsf.)

Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[p]\ \pi\ [e \Downarrow q]$$

ist gültig im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit (in Zeichen: $\models_{ztk} [p]\ \pi\ [e \Downarrow q]$) gdw. für jeden Zustand $\sigma \in \Sigma$ gilt:

Ist die Vorbedingung p in σ erfüllt, dann terminiert die zugehörige Berechnung von π angesetzt auf σ regulär in einem Endzustand σ' und die Nachbedingung q ist in σ' erfüllt und die benötigte Ausführungszeit von π ist durch e beschränkt, d.h. von der Grössenordnung $\mathcal{O}(e)$.

Charakterisierung zeitbew. totaler Korrektheit

Lemma 5.1.2 (Charakterisierung)

Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[p]\ \pi\ [e \Downarrow q]$$

ist gültig, in Zeichen: $\models_{ztk} [p]\ \pi\ [e \Downarrow q]$, gdw es existiert ein $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$, so dass für alle Zustände $\sigma \in \Sigma$ gilt:

Ist die Vorbedingung p in σ erfüllt, dann gibt es einen Zustand $\sigma' \in \Sigma$ und eine natürliche Zahl t, so dass gilt:

- π angesetzt auf σ terminiert in t Zeiteinheiten regulär in σ', d.h. $\langle \pi, \sigma \rangle \rightarrow^t \sigma'$.
- Nachbedingung q ist erfüllt in σ'.
- t ist von Größenordnung $\mathcal{O}(e)$, d.h. $t \leq \mathbf{k} * [\![e]\!]_A(\sigma)$ (In anderen Worten: t und $[\![e]\!]_A(\sigma)$ unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor).

Beachte

..der Ausdruck e zur Größenordnungsabschätzung wird im Anfangszustand σ ausgewertet, nicht im Endzustand σ':

- $t \leq \mathbf{k} * [\![e]\!]_A(\sigma)$

Diesem sinnvollen Umstand (Übungsaufgabe: Warum?) ist geschuldet, dass die Festlegung der Regeln

- $[while_e]$ und $[comp_e]$

des Hoare-artigen Ausführungszeitableitungskalküls AK_{ztk} komplizierter ausfällt als möglicherweise zunächst vermutet.

Laufzeitabschätzungskalkül AK_{ztk}: Axiome

$$[\mathrm{skip}_e] \quad \frac{}{\{p\}\ \mathit{skip}\ \{\mathbf{1} \Downarrow p\}}$$

$$[\mathrm{ass}_e] \quad \frac{}{\{p[t\backslash x]\}\ x{:=}t\ \{\mathbf{1} \Downarrow p\}}$$

Laufzeitabschätzungskalkül AK_{ztk}: Regeln

$$[\mathrm{comp}_e] \quad \frac{[p \wedge e_2' = u]\ \pi_1\ [e_1 \Downarrow r \wedge e_2 \leq u],\ [r]\ \pi_2\ [e_2 \Downarrow q]}{[p]\ \pi_1;\pi_2\ [e_1 + e_2' \Downarrow q]}$$

wobei u frische logische Variable.

$$[\mathrm{ite}_e] \quad \frac{[p \wedge b]\ \pi_1\ [e \Downarrow q],\ [p \wedge \neg b]\ \pi_2\ [e \Downarrow q]}{[p]\ \text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi } [e \Downarrow q]}$$

$$[\mathrm{while}_e] \quad \frac{[p(z+1) \wedge e' = u]\ \pi\ [e_1 \Downarrow p(z) \wedge e \leq u]}{[\exists z.\ p(z)]\ \text{while } b \text{ do } \pi \text{ od } [e \Downarrow p(0)]}$$

wobei: $p(z+1) \Rightarrow (b \wedge e \geq e_1 + e')$,

$p(0) \Rightarrow (\neg b \wedge 1 \leq e)$,

$z \in \mathbb{N}_0$, u frische logische Variable.

$$[\mathrm{cons}_e] \quad \frac{p \Rightarrow p_1 \quad [p_1]\ \pi\ [e' \Downarrow q_1] \quad q_1 \Rightarrow q}{[p]\ \pi\ [e \Downarrow q]} \qquad \exists \mathbf{k} \in \mathbb{N}.\ e' \leq \mathbf{k} * e$$

Anmerkungen zur AK_{ztk}-Kalkülregel [$comp_e$]

Die Anwendung der [$comp_e$]-Regel verlangt, dass es

- Ableitungen dafür gibt, dass e_1, e_2 die Größenordnung der Zahl der Ausführungsschritte von π_1, π_2 beschreiben.
- e_1 macht dies für π_1 relativ zum Anfangszustand von π_1 aus; e_2 für π_2 relativ zum Anfangszustand von π_2.
- Die Größenordnung der Zahl der Ausführungsschritte der sequentiellen Komposition $\pi_1; \pi_2$ ist deshalb nicht einfach summativ durch $e_1 + e_2$ beschrieben.
- Vielmehr muss für e_2 ein Ausdruck e_2' gefunden werden, so dass e_2 ausgewertet im Anfangszustand von π_2 durch die Grössenordnung von e_2' ausgewertet im Anfangszustand von π_1 beschränkt ist.
- Dies wird durch die Erweiterung der Vor- und Nachbedingung von π_1 unter Verwendung der frischen logischen Variable u erzwungen.

Anmerkungen zur AK_{ztk}-Kalkülregel [$while_e$]

Die Anwendung der [$while_e$]-Regel verlangt, dass es

- eine Ableitung bzw. Nachweis dafür gibt, dass e_1 die Größenordnung der Zahl der Ausführungsschritte des Schleifenrumpfs, e die der gesamten Schleife beschreiben.
- Ähnlich der [$comp_e$]-Regel ist die Größenordnung der Zahl der Ausführungsschritte der gesamten Schleife nicht direkt durch den summativen Ausdruck $e_1 + e$ beschrieben, da e_1 auf den Zustand vor Ausführung des Schleifenrumpfs Bezug nimmt, e hingegen auf den Zustand nach seiner einmaligen Ausführung.
- Deshalb muss ein Ausdruck e' gefunden werden, der ausgewertet vor Ausführung des Schleifenrumpfs Ausdruck e ausgewertet nach seiner Ausführung beschränkt.
- Das erfordert, dass e die Ungleichung $e \geq e_1 + e'$ erfüllt, da e die Ausführungszeit der while-Schleife unabhängig von der Anzahl ihrer Wiederholungen beschränken muss.

Anmerkungen zur AK_{ztk}-Kalkülregel $[\text{cons}_e]$

Pragmatisch ist es vorteilhaft, zusätzlich zur Konsequenzregel

$$[\text{cons}_e] \quad \frac{p \Rightarrow p_1 \quad [p_1]\ \pi\ [e' \Downarrow q_1] \quad q_1 \Rightarrow q}{[p]\ \pi\ [e \Downarrow q]} \qquad \exists\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}.\ e' \leq \mathbf{k} * e$$

auch folgende Spezialisierungen der Konsequenzregel zum Beweiskalkül hinzuzunehmen:

$$[\text{cons}'_e] \quad \frac{p \Rightarrow p_1 \quad [p_1]\ \pi\ [e' \Downarrow q]}{[p]\ \pi\ [e \Downarrow q]} \qquad \exists\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}.\ e' \leq \mathbf{k} * e$$

$$[\text{cons}''_e] \quad \frac{[p]\ \pi\ [e' \Downarrow q_1] \quad q_1 \Rightarrow q}{[p]\ \pi\ [e \Downarrow q]} \qquad \exists\, \mathbf{k} \in \mathbb{N}.\ e' \leq \mathbf{k} * e$$

In der Folge gehen wir davon aus, dass AK_{ztk} neben $[\text{cons}_e]$ auch die Konsequenzregeln $[\text{cons}'_e]$ und $[\text{cons}''_e]$ enthält.

Beispiele: Fakultätsprogramm (1)

1) Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[a = 3]$$
$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[1 \Downarrow \mathit{true}]$$

ist gültig im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit und beschreibt, dass die Zahl der Ausführungsschritte des Fakultätsprogramms angesetzt auf einen Zustand σ mit $\sigma(a) = \mathbf{3}$ durch $\mathcal{O}(\mathbf{1})$ beschränkt ist, also durch eine Konstante.

Beispiele: Fakultätsprogramm (2)

2) Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[a \geq 0]$$
$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[a \Downarrow \mathit{true}]$$

ist gültig im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit und beschreibt, dass die Zahl der Ausführungsschritte des Fakultätsprogramms angesetzt auf einen Zustand σ mit $\sigma(x) > \mathbf{0}$ durch $\mathcal{O}(a)$ beschränkt ist, also linear in der Größe von a und damit des Anfangswerts von x ist.

Kapitel 5.5

Zeitbewusste totale Korrektheitsbeweise

Fakultätsprogramm variiert

...Terminierung plus Terminierungsabschätzung:

Lemma 5.5.1 (Fakultät)

1. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[x = 3]$$
$$y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[1 \Downarrow \mathit{true}]$$

   ist gültig im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit.

2. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[x > 0]$$
$$y := 1;\ \text{while } x \neq 1 \text{ do } y := y * x\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[a \Downarrow \mathit{true}]$$

   ist gültig im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit.

Lemma 5.5.1(2): Lineare Beweisskizze (1)

$$[x > 0]$$
$$\vdots$$
$$y := 1;$$
$$\vdots$$
$$[\exists\, z \in \mathbb{N}_0.\ (x > 0 \wedge x = z + 1)] \quad (\equiv\ [\exists\, z \in \mathbb{N}_0.\ \mathit{INV}(z)])$$
$$\text{while } x \neq 1 \text{ do}$$
$$[(x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge x - 1 = u_1] \quad (\equiv\ [\mathit{INV}(z+1) \wedge x - 1 = u_1])$$
$$[(x > 0 \wedge x = (z + 1) + 1) \wedge x - 1 = u_1]$$
$$[((x > 0 \wedge x = (z + 1) + 1) \wedge x - 1 = u_1) \wedge 1 = u_2]$$
$$\Downarrow [\mathrm{cons}'_e]$$
$$[((x - 1 > 0 \wedge x - 1 = z + 1) \wedge x - 1 \leq u_1) \wedge 1 \leq u_2]$$
$$y := y * x;\ [\mathrm{ass}_e],\ [\mathrm{comp}_e]$$
$$[1 \Downarrow ((x - 1 > 0 \wedge x - 1 = z + 1) \wedge x - 1 \leq u_1) \wedge 1 \leq u_2]$$
$$[(x - 1 > 0 \wedge x - 1 = z + 1) \wedge x - 1 \leq u_1]$$
$$x := x - 1;\ [\mathrm{ass}_e]$$
$$[1 \Downarrow (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge x \leq u_1]$$
$$[1 + 1 \Downarrow (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge x \leq u_1]$$
$$\Downarrow [\mathrm{cons}''_e]$$
$$[1 \Downarrow (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge x \leq u_1] \quad (\equiv\ [1 \Downarrow\ \mathit{INV}(z) \wedge x \leq u_1])$$
$$(x > 0 \wedge x = (z + 1) + 1) \Rightarrow \neg(x = 1) \wedge x \geq 1 + (x - 1)\ (\equiv \mathit{INV}(z+1) \Rightarrow \neg(x = 1) \wedge x \geq 1 + (x - 1))$$
$$(x > 0 \wedge x = 0 + 1) \Rightarrow \neg(\neg(x = 1)) \wedge 1 \leq x \quad (\equiv\ \mathit{INV}(0) \Rightarrow \neg(\neg(x = 1)) \wedge 1 \leq x)$$
$$\text{od } [\mathrm{while}_e]$$
$$[x \Downarrow (x > 0 \wedge x = 0 + 1)] \quad (\equiv\ [x \Downarrow\ \mathit{INV}(0)])$$
$$\vdots$$
$$[x \Downarrow \mathit{true}]$$

$\mathit{INV}(z) = x > 0 \wedge x = z + 1,\ z \in \mathbb{N}_0$ (d.h. $\forall\, \sigma \in \Sigma.\ \mathit{INV}(z)(\sigma) = \sigma(x) > 0 \wedge \sigma(x) = z + 1$)

Lemma 5.5.1(2): Lineare Beweisskizze (2)

$$[x > 0]$$

$$[x > 0 \wedge 1 = u3]$$

$$\Downarrow [\mathrm{cons}'_e]$$

$$[\exists\, z\, \mathbb{N}_0.\ (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge 1 \leq u_3]$$

$$y := 1;\ [\mathrm{ass}_e],\ [\mathrm{comp}_e]$$

$$[1 \Downarrow \exists\, z \in \mathbb{N}_0.\ (x > 0 \wedge x = z + 1) \wedge 1 \leq u_3]$$

$$[\exists\, z \in \mathbb{N}_0.\ (x > 0 \wedge x = z + 1)] \quad (\equiv\ [\exists\, z \in \mathbb{N}_0.\ \mathit{INV}(z)])$$

$$\text{while } x \neq 1 \text{ do}$$

$$y := y * x;$$

$$x := x - 1;$$

$$\text{od } [\mathrm{while}_e]$$

$$[x \Downarrow (x > 0 \wedge x = 0 + 1)] \quad (\equiv\ [x \Downarrow \mathit{INV}(0)])$$

$$[1 + x \Downarrow x > 0 \wedge x = z + 1]$$

$$\Downarrow [\mathrm{cons}''_e] \quad (\text{da } (x > 0 \Rightarrow 1 + x \leq 2 * x) \wedge ((x > 0 \wedge x = z + 1) \Rightarrow \mathit{true}))$$

$$[x \Downarrow \mathit{true}]$$

$\mathit{INV}(z) = x > 0 \wedge x = z + 1,\ z \in \mathbb{N}_0$ (d.h. $\forall\, \sigma \in \Sigma.\ \mathit{INV}(z)(\sigma) = \sigma(x) > 0 \wedge \sigma(x) = z + 1$)

Übungsaufgabe: Fakultätsprogramm (1)

...Terminierung plus Terminierungsabschätzung:

Lemma 5.5.2 (Fakultät)

1. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[a = 3]$$

$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$

$$[1 \Downarrow \mathit{true}]$$

ist gültig im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit.

2. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[a \geq 0]$$

$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$

$$[a \Downarrow \mathit{true}]$$

ist gültig im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit.

Übungsaufgabe: Fakultätsprogramm (2)

Beweise Terminierung(sabschätzung) plus funkt. Korrektheit:

Lemma 5.5.3 (Fakultät)

1. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[a = 3]$$
$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[1 \Downarrow y = 6 = a!]$$

   ist gültig im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit.

2. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[a \geq 0]$$
$$x := a;\ y := 1;\ \text{while } x \neq 0 \text{ do } y := y * x;\ x := x - 1 \text{ od}$$
$$[a \Downarrow y = a!]$$

   ist gültig im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit.

Übungsaufgabe: Divisionsprogramm (1)

Beweise Terminierung plus Terminierungsabschätzung:

Lemma 5.5.4 (Ganzzahlige Division mit Rest)

1. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[x = 17 \wedge y = 4]$$

$q := 0;\ r := x;$ while $r \geq y$ do $q := q + 1;\ r := r - y$ od

$$[1 \Downarrow \mathit{true}]$$

ist gültig (im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit).

2. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[x \geq 0 \wedge y > 0]$$

$q := 0;\ r := x;$ while $r \geq y$ do $q := q + 1;\ r := r - y$ od

$$[x - y \Downarrow \mathit{true}]$$

ist gültig (im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit).

Übungsaufgabe: Divisionsprogramm (2)

Beweise Terminierung(sabschätzung) plus funkt. Korrektheit:

Lemma 5.5.5 (Ganzzahlige Division mit Rest)

1. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[x = 17 \wedge y = 4]$$

$q := 0;\ r := x;$ while $r \geq y$ do $q := q + 1;\ r := r - y$ od

$$[1 \Downarrow x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y \wedge q = 4 \wedge r = 1]$$

ist gültig (im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit).

2. Die zeitbewusste Korrektheitsformel

$$[x \geq 0 \wedge y > 0]$$

$q := 0;\ r := x;$ while $r \geq y$ do $q := q + 1;\ r := r - y$ od

$$[x - y \Downarrow x = q * y + r \wedge 0 \leq r < y\}$$

ist gültig (im Sinn zeitbewusster totaler Korrektheit).

Kapitel 5.6

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (1)

Axiomatische asymptotische Ausführungszeitanalyse


Hanne Riis Nielson. *Hoare Logic's for Run-time Analysis of Programs*. PhD thesis, Edinburgh University, UK, 1984.


Hanne Riis Nielson. *A Hoare-like Proof System for Run-Time Analysis of Programs*. Science of Computer Programming 9(2):107-136, 1987.


Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Chapter 6.5, Assertions for Execution Time)


Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 10.2, Assertions for Execution Time)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (2)

Schlechtester-Fall-Ausführungszeitanalyse: Überblicksarbeit

Reinhard Wilhelm, Jakob Engblom, Andreas Ermedahl, Niklas Holsti, Stephan Thesing, David Whalley, Guillem Bernat, Christian Ferdinand, Reinhold Heckmann, Tulika Mitra, Frank Mueller, Isabelle Puaut, Peter Puschner, Jan Staschulat, Per Stenström. *The Worst-case Execution Time Problem – Overview of Methods and Survey of Tools*. ACM Transactions on Embedded Computing Systems 7(3):36.1-53, 2008.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (3)

Schlechtester-Fall-Ausführungszeitanalyse: Ausgewählte Arbeiten und Werkzeuge

aiT Worst-Case Execution Time Analyzers. Website: `http://www.absint.com/ait`, 2016. [Online; accessed 1-August-2016]

Philip Axer, Rolf Ernst, Heiko Falk, Alain Girault, Daniel Grund, Nan Guan, Bengt Jonsson, Peter Marwedel, Jan Reineke, Christine Rochange, Maurice Sebastian, Reinhard von Hanxleden, Reinhard Wilhelm, Wang Yi. *Building Timing Predictable Embedded Systems*. ACM Transactions on Embedded Computing Systems 13(4):82, 2014.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (4)


Clément Ballabriga, Hugues Cassé, Christine Rochange, Pascal Sainrat. *OTAWA: An Open Toolbox for Adaptive WCET Analysis*. In Proceedings SEUS 2010, Springer-V., 35-46, 2010.


Raimund Kirner, Jens Knoop, Adrian Prantl, Markus Schordan, Albrecht Kadlec. *Beyond Loop Bounds: Comparing Annotation Languages for Worst-Case Execution Time Analysis*. Journal of Software and Systems Modeling 10(3):411-437, Springer-V., 2011.


Armelle Bonenfant, Hugues Cassé, Marianne De Michiel, Jens Knoop, Laura Kovács, Jakob Zwirchmayr. *FFX: A Portable WCET Annotation Language*. In Proceedings of the 20th International Conference on Real-Time and Network Systems (RTNS 2012), ACM, 91-100, 2012.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (5)


Marvin Damschen, Lars Bauer, Jörg Henkel. *Timing Analysis of Tasks on Runtime Reconfigurable Processors*. In IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems 25(1):294-307 2017.


Stephen A. Edwards, Edward A. Lee. *The Case for the Precision-timed (PRET) Machine*. In Proceedings of the 44th ACM/IEEE Design Automation Conference (DAC'07), 264-265, 2007.


Jan Gustafsson. *Usability Aspects of WCET Analysis*. In Proceedings of the 11th IEEE International Symposium on Object and Component-Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC 2008), 346-352, 2008.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (6)

Jan Gustafsson, Adam Betts, Andreas Ermedahl, Björn Lisper. *The Mälardalen WCET Benchmarks: Past, Present, and Future*. In Proceedings of the 10th International Workshop on Worst-Case Execution Time Analysis (WCET 2010), 136-146, 2010.

Thomas Leveque, Etienne Borde, Amine Marref, Jan Carlson. *Hierarchical Composition of Parametric WCET in a Component Based Approach*. In Proceedings of the 14th IEEE International Symposium on Object/Component/Service-Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC 2011), 261-268, 2011.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (7)


Yau-Tsun Steven Li, Sharad Malik. *Performance Analysis of Embedded Software using Implicit Path Enumeration*. ACM SIGPLAN Notices 30(11):88-98, 1995.


Björn Lisper, Andreas Ermedahl, Dietmar Schreiner, Jens Knoop, Peter Gliwa. *Practical Experiences of Applying Source-level WCET Flow Analysis to Industrial Code*. Journal of Software Tools for Technology Transfer (STTT) 15(1):53-63, Springer-V., 2013.


Greger Ottosson, Mikael Sjödin. *Worst-Case Execution Time Analysis for Modern Hardware Architectures*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN Workshop on Languages, Compilers, and Tools for Real-Time Systems (LCT-RTS'97), 1997.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (8)

Peter Puschner, Raimund Kirner, Robert G. Pettit. *Towards Composable Timing for Real-Time Programs*. Software Technologies for Future Dependable Distributed Systems, 1-5, 2009.

Peter Puschner, Daniel Prokesch, Benedikt Huber, Jens Knoop, Stefan Hepp, Gernot Gebhard. *The T-CREST Approach of Compiler and WCET-Analysis Integration*. In Proceedings of the 9th International Workshop on Software Technologies for Future Embedded and Ubiquitious Systems (SEUS 2013), 33-40, 2013.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 5 (9)


Jan Reineke, Björn Wachter, Stephan Thesing, Reinhard Wilhelm, Ilia Polian, Jochen Eisinger, Bernd Becker. *A Definition and Classification of Timing Anomalies*. In Proceedings of the 6th International Workshop on Worst-Case Execution Time Analysis (WCET 2006), 2006.


Henrik Theiling. *ILP-based Interprocedural Path Analysis*. In Proceedings of the International Workshop on Embedded Software (EMSOFT 2002), Springer-V., LNCS 2491, 349-363, 2002.


Lothar Thiele, Reinhard Wilhelm. *Design for Timing Predictability*. Real-Time Systems 28(2-3):157-177, 2004.

Teil III

Analyse

Kapitel 6

Programmanalyse

Kapitel 6.1

Motivation

Motivation

...in Kapitel 2 und 3 haben wir uns mit verschiedenen Methoden zur Festlegung einer

- konkreten Semantik $[\![\ ]\!]_{\text{While}}$ der Sprache While

und darauf aufbauend in Kapitel 4 und 5 mit

- axiomatischer Verifikation

zum Beweis von Eigenschaften eines Programms relativ zur konkreten Semantik $[\![\ ]\!]_{\text{While}}$ beschäftigt.

In der Folge

...werden wir uns mit Methoden zur Festlegung verschiedener

- abstrakter Semantiken $[\![\ ]\!]_{absSem}$ für WHILE

beschäftigen und darauf aufbauend mit

- Analyseverfahren

zum Beweis von Eigenschaften eines Programms relativ zu einer abstrakten Semantik $[\![\ ]\!]_{absSem}$, deren Ergebnisse bzgl. der konkreten Semantik $[\![\ ]\!]_{\mathrm{WHILE}}$ von WHILE korrekt sein müssen.

Dabei gilt

...(fast) alle interessanten Eigenschaften eines Programms sind bezüglich der konkreten wie (auch vieler) abstrakter Programmsemantiken

- unentscheidbar.

Glücklicherweise: Einige interessante Eigenschaften sind

- entscheidbar und
- nützlich

und ermöglichen Verfahren zur

- manuellen/semiautomatischen Programmverifikation
- semiautomatischen/vollautomatischen Programmanalyse.

Kapitel 6.2

Ausblick

Besonders

...die Entwicklung von Analyse- und Verifikationsverfahren relativ zu einer abstrakten Programmsemantik kann sich dabei zunutze machen, die fast immer konfliktären Ziele von

- Performanz/Effizienz/Skalierbarkeit und
- Akkuratheit/Vollständigkeit

gegeneinander abzuwiegen und abzutauschen, solange die erzielten Resultate noch

- nützlich

sind.

Mit der Aufgabe, Verfahren und Methoden zu entwickeln, die im Spannungsdreieck von

- Vollständigkeit, Nützlichkeit u. Performanz/Skalierbarkeit

eine gute Balance bewahren, beginnt Informatik.

Analyse- und Verifikationsverfahren

...zur Programmanalyse gibt es (deshalb) in verschiedensten Zugängen und Ausprägungen:

- Datenflussanalyse (Kap. 7)
- Reverse Datenflussanalyse (Kap. 8)
- Parallele Datenflussanalyse (Kap. 9)
- Abstrakte Interpretation (Kap. 15)
- Modellprüfung (Kap. 16)
- Symbolische Analyse
- Konkolische Analyse
- ...

von denen wir einige beginnend mit der sog. Datenflussanalyse in den folgenden Kapiteln genauer betrachten werden...

Anwendungen und Wechselbeziehungen

...exemplarisch auch hinsichtlich ihrer Nützlichkeit für Anwendungen am Beispiel der:

- Elimination unnötiger Anweisungen in Programmen (Kap. 12 und 13)
- Ersetzung von Ausdrücken durch ihre Werte (Kap. 14)

sowie ihrer Gemeinsamkeiten, Unterschiede, Verbindungen und Wechselbeziehungen untereinander:

- Abstrakte Interpretation und Datenflussanalyse (Kap. 15)
- Modellprüfung und Datenflussanalyse (Kap. 16)
- Modellprüfung und Abstrakte Interpretation (Kap. 17)

Kapitel 6.3

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (1)

Lehrbuchdarstellungen

Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi, Jeffrey D. Ullman. *Compilers: Principles, Techniques, & Tools*. Addison-Wesley, 2. Auflage, 2007. (Kapitel 1.2, The Structure of a Compiler; Kapitel 1.4, The Science of Building a Compiler; Kapitel 1.4.2, The Science of Code Optimization; Kapitel 9.1, The Principal Sources of Program Optimization)

Keith D. Cooper, Linda Torczon. *Engineering a Compiler*. Morgan Kaufman Publishers, 2004. (Anhang B.3.1, Graphical Intermediate Representations)

Matthew S. Hecht. *Flow Analysis of Computer Programs*. Elsevier, North-Holland, 1977.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (2)

Uday P. Khedker, Amitabha Sanyal, Bageshri Karkare. *Data Flow Analysis: Theory and Practice*. CRC Press, 2009. (Kapitel 3, Theoretical Abstractions in Data Flow Analysis; Kapitel 4, General Data Flow Frameworks; Kapitel 5, Complexity of Iterative Data Flow Analysis)

Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis*. Springer-V., 2009. (Kapitel 7, What can one tell about a Program without its Execution: Static Analysis)

Robert Morgan. *Building an Optimizing Compiler*. Digital Press, 1998. (Kapitel 2.3, Building the Flow Graph; Kapitel 4.7, Structure of Program Flow Graph)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (3)

Stephen S. Muchnick. *Advanced Compiler Design Implementation*. Morgan Kaufman Publishers, 1997. (Kapitel 7, Control-Flow Analysis)

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Kapitel 5, Static Program Analysis)

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Kapitel 7, Program Analysis; Kapitel 8, More on Program Analysis; Anhang B, Implementation of Program Analysis)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (4)

Grundlegende, wegweisende Arbeiten


Frances E. Allen, John A. Cocke. *A Program Data Flow Analysis Procedure*. Communications of the ACM 19(3):137-147, 1976.


Dhananjay M. Dhamdhere, Barry K. Rosen, F. Kenneth Zadeck. *How to Analyze Large Programs Efficiently and Informatively*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'92 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'92), ACM SIGPLAN Notices 27(7):212-223, 1992.


Susan Horwitz, Alan J. Demers, Tim Teitelbaum. *An Efficient General Iterative Algorithm for Dataflow Analysis*. Acta Informatica 24(6):679-694, 1987.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (5)


John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Global Data Flow Analysis and Iterative Algorithms*. Journal of the ACM 23:158-171, 1976.


John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Monotone Data Flow Analysis Frameworks*. Acta Informatica 7:305-317, 1977.


Gary A. Kildall. *A Unified Approach to Global Program Optimization*. In Conference Record of the 1st Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'73), 194-206, 1973.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (6)

Rahmenwerke und Werkzeugkisten

Marion Klein, Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *DFA&OPT-METAFrame: A Toolkit for Program Analysis and Optimization*. In Proceedings of the 2nd International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'96), Springer-V., LNCS 1055, 422-426, 1996.

Jens Knoop. *From DFA-Frameworks to DFA-Generators: A Unifying Multiparadigm Approach*. In Proceedings of the 5th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99), Springer-V., LNCS 1579, 360-374, 1999.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (7)


Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Properties of Data Flow Frameworks*. Acta Informatica 28(2):121-163, 1990.


Florian Martin. *PAG - An Efficient Program Analyzer Generator*. Journal of Software Tools for Technology Transfer 2(1):46-67, 1998.


Stephen P. Masticola, Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Lattice Frameworks for Multisource and Bidirectional Data Flow Problems*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 17(5):777-803, 1995.


Flemming Nielson. *Semantics-directed Program Analysis: A Tool-maker's Perspective*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 2-21, 1996.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (8)


Christian Fecht, Helmut Seidl. *Propagating Differences: An Efficient New Fixpoint Algorithm for Distributive Constraint Systems*. In Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98), Springer-V., LNCS 1381, 90-104, 1998.


Christian Fecht, Helmut Seidl. *A Faster Solver for General Systems of Equations*. Science of Computer Programming 35(2):137-161, 1999.


Bernhard Steffen, Andreas Claßen, Marion Klein, Jens Knoop, Tiziana Margaria. *The Fixpoint Analysis Machine*. In Proceedings of the 6th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR'95), Springer-V., LNCS 962, 72-87, 1995.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (9)

Flussgraph-Pragmatik

Larry Carter, Jeanne Ferrante, Clark Thomborson. *Folklore Confirmed: Reducible Flow Graphs are Exponentially Larger*. In Conference Record of the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 106-114, 2003.

Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *Basic-block Graphs: Living Dinosaurs?* In Proceedings of the 7th International Conference on Compiler Construction (CC'98), Springer-V., LNCS 1383, 65-79, 1998.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 6 (10)

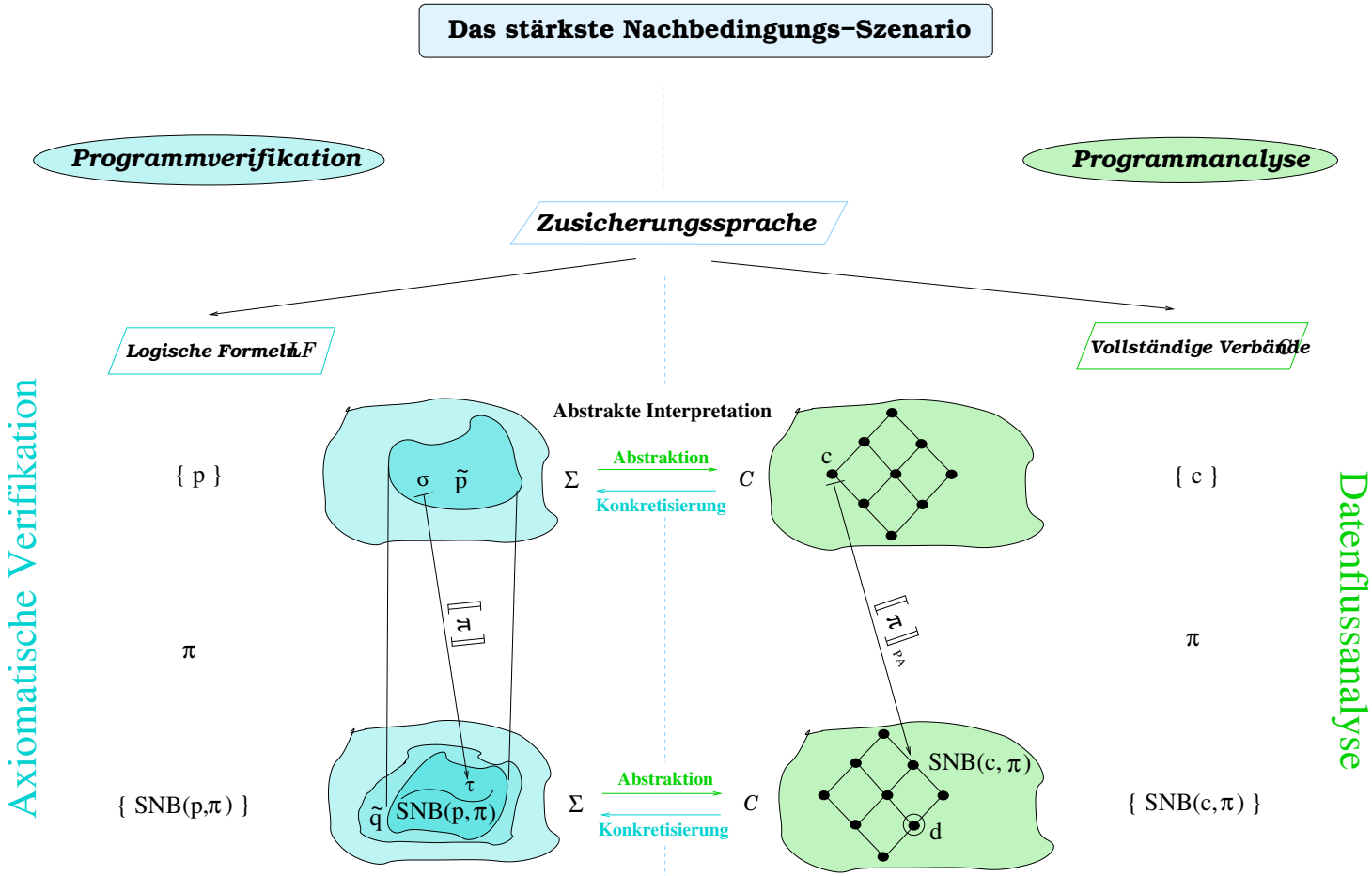
Verschiedenes

Stephen M. Blackburn, Amer Diwan, Matthias Hauswirth, Peter F. Sweeny, José Nelson Amaral, Tim Brecht, Lubomír Bulej, Cliff Click, Lieven Eeckhout, Sebastian Fischmeister, Daniel Frampton, Laurie J. Hendren, Michael Hind, Antony L. Hosking, Richard E. Jones, Tomas Kalibera, Nathan Keynes, Nathaniel Nystrom, Andreas Zeller. *The Truth, The Whole Truth, and Nothing But the Truth: A Pragmatic Guide to Assessing Empirical Evaluations*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 38(4), Article 15:1-20, 2016.

Kapitel 7

Datenflussanalyse

Motivation: Verifikation vs. Datenflussanalyse



SNB(p, π) ∈ *LF* *muss erfüllen:*

(1) $\models_{PV} \{ p \}\pi\{ SNB(p,\pi) \}$

(2) $\forall\, q \in LF.\ \models_{PV} \{ p \}\pi \{ q \}$ impliziert $SNB(p,\pi) \Longrightarrow q$

SNB(c, π) ∈ *C* *muss erfüllen:*

(1) $\models_{PA} \{ c \}\pi \{ SNB(c,\pi) \}$

(2) $\forall\, d \in C.\ \models_{PA} \{ c \}\pi \{ d \}$ impliziert $SNB(c,\pi) \sqsupseteq d$

Kapitel 7.1

Vorbereitung

Kapitel 7.1.1

Flussgraphen

Flussgraphen

...zur Darstellung von WHILE-Programmen.

Definition 7.1.1.1 (Flussgraph)

Ein Flussgraph ist ein Quadrupel $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$, wobei

- N Menge von Knoten.
- $E \subseteq N \times N$ Menge von Kanten.
- $\mathbf{s}$ ausgezeichneter Startknoten ohne Vorgänger.
- $\mathbf{e}$ ausgezeichneter Endknoten ohne Nachfolger.

Knoten repräsentieren Programmpunkte, Kanten die Verzweigungsstruktur von G. ObdA nehmen wir an, dass jeder Knoten von G auf einem Pfad von $\mathbf{s}$ nach $\mathbf{e}$ liegt.

Knoten- vs. kantenbenannte Flussgraphen

Die Instruktionen eines Flussgraphen (d.h. Zuweisungen, Tests) können seinen

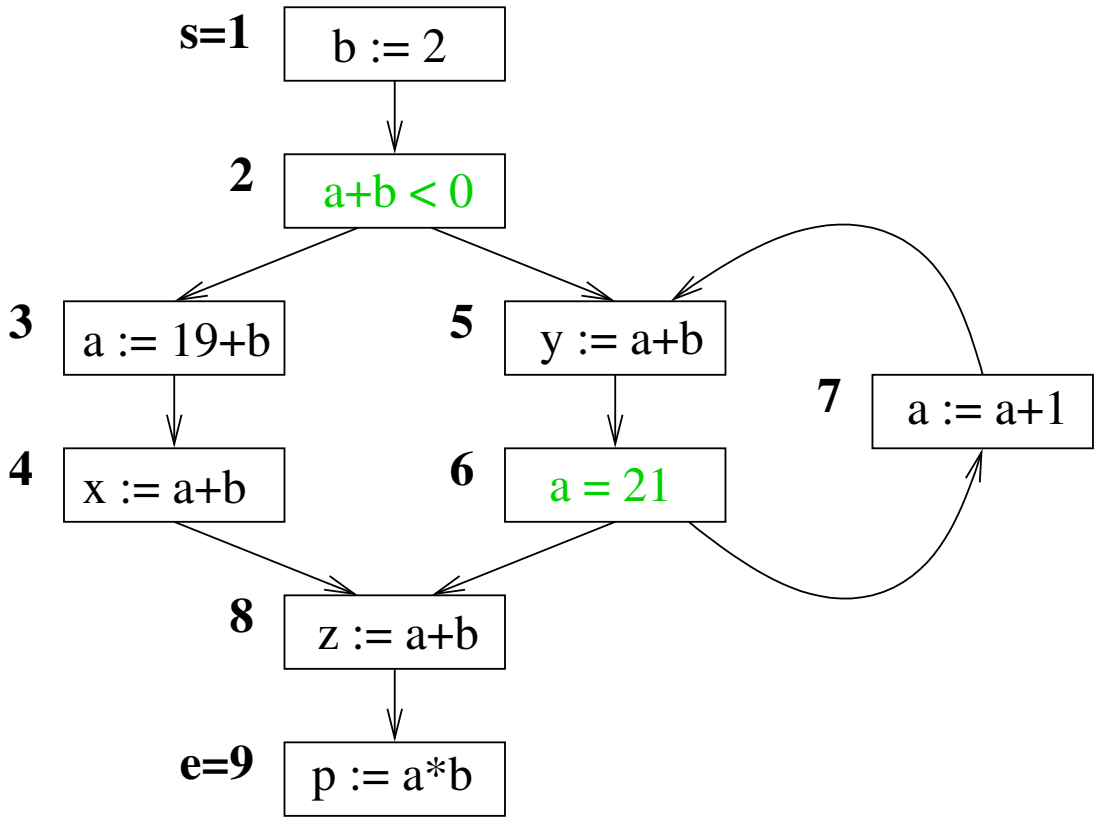
- Knoten
- Kanten

zugeordnet werden, was auf

- knoten- bzw.
- kantenbenannte

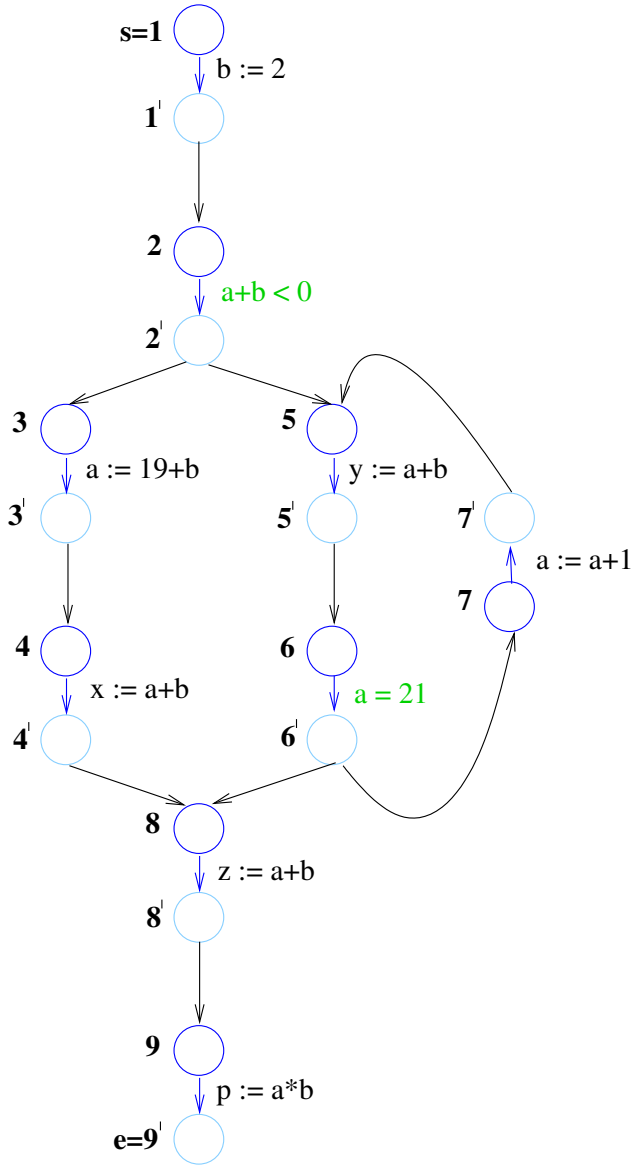
Flussgraphen führt.

Beispiel: Knotenbenannter Flussgraph



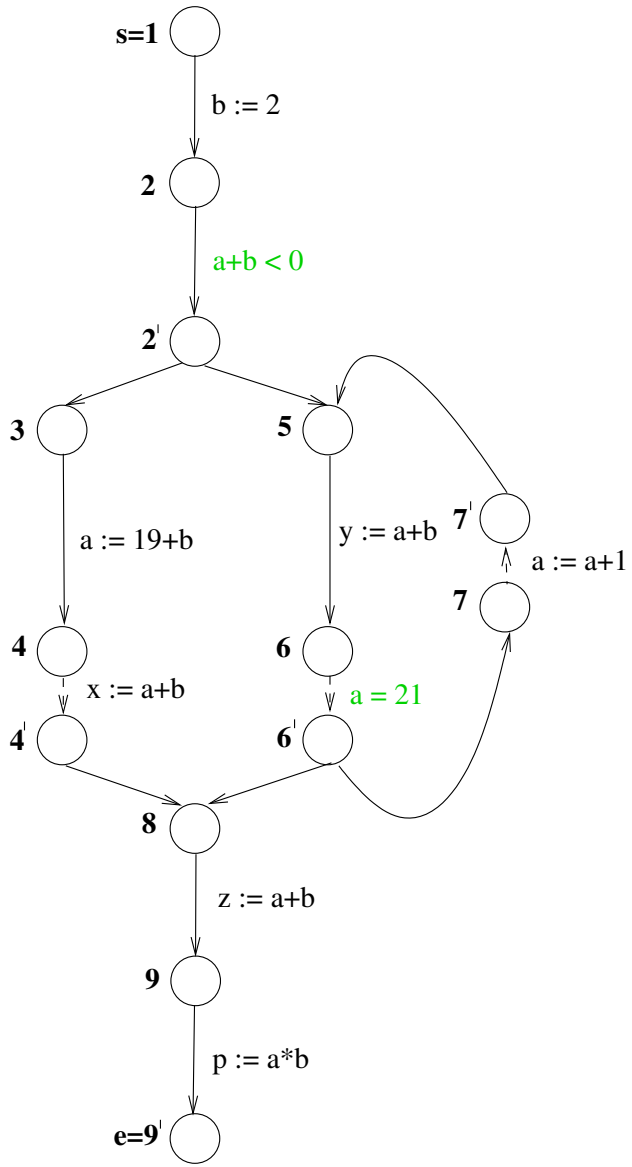
Beispiel: Kantenbenannter Flussgraph

...kanonisch aus dem knotenbenannten Gegenstück abgeleitet:

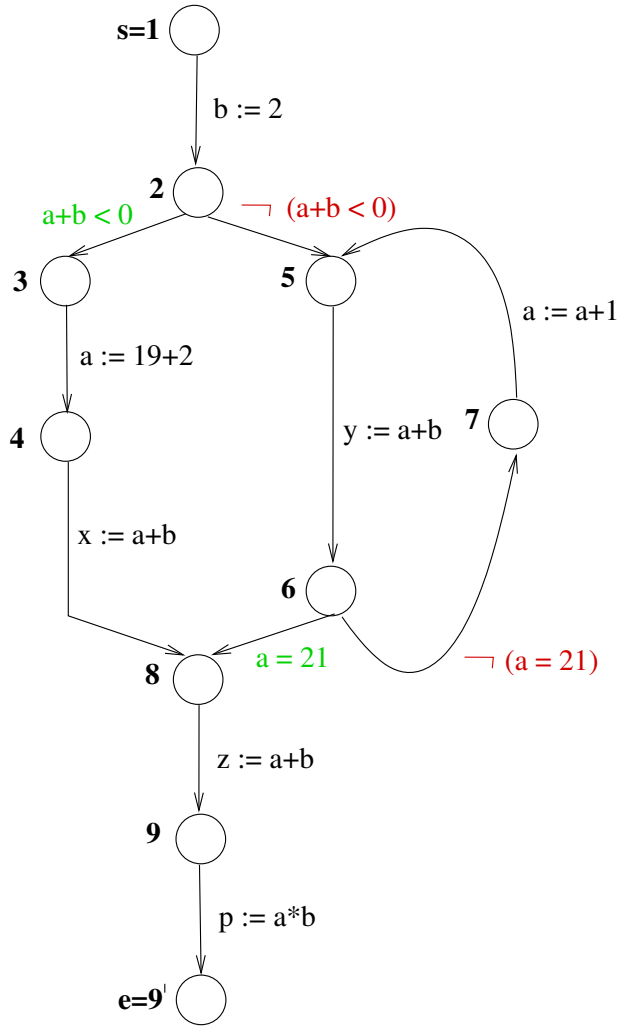


Kantenbenannter Flussgraph nach 'Aufräumen'

a)



b)



Vorgänger- und Nachfolgerknoten, Pfade

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Flussgraph, m, n zwei Knoten aus N.

Definition 7.1.1.2 (Vorgänger-, Nachfolgerknoten)

- $pred_G(n) =_{df} \{ m \mid (m, n) \in E \}$ bezeichnet die Menge der Vorgängerknoten von n.
- $succ_G(n) =_{df} \{ m \mid (n, m) \in E \}$ bezeichnet die Menge der Nachfolgerknoten von n.

Definition 7.1.1.3 (Pfade)

- Eine Folge von Kanten $\langle (n_1, m_1), (n_2, m_2), \ldots, (n_k, m_k) \rangle$, wobei $m_i = n_{i+1}$, $1 \leq i < k$, heißt Pfad von n_1 nach m_k.
- $\mathbf{P}_G[m, n]$ bezeichnet die Menge aller Pfade von m nach n.

Beachte, wenn G eindeutig im Kontext bestimmt ist, schreiben wir anstelle von $pred_G$, $succ_G$ und $\mathbf{P}_G$ kürzer $pred$, $succ$ und $\mathbf{P}$.

In der Folge

...betrachten wir

- kantenbenannte

Flussgraphen, die notationell zu weniger Aufwand führen und deshalb pragmatisch vorteilhaft sind.

Verzweigungsbedingungen in Flussgraphen werten wir nicht aus, um (einige) Unentscheidbarkeiten zu vermeiden; wir sprechen deshalb von nichtdeterministischen Flussgraphen.

Beachte, Vor- und Nachteile unterschiedlicher Flussgraphvarianten zur Darstellung von Programmen werden in

- Anhang B: Flussgraphvarianten

untersucht und ausgeführt.

Kapitel 7.1.2

Vollständige Verbände

Partiell geordnete Mengen, Verbände

Definition 7.1.2.1 (Partiell geordnete Mengen)

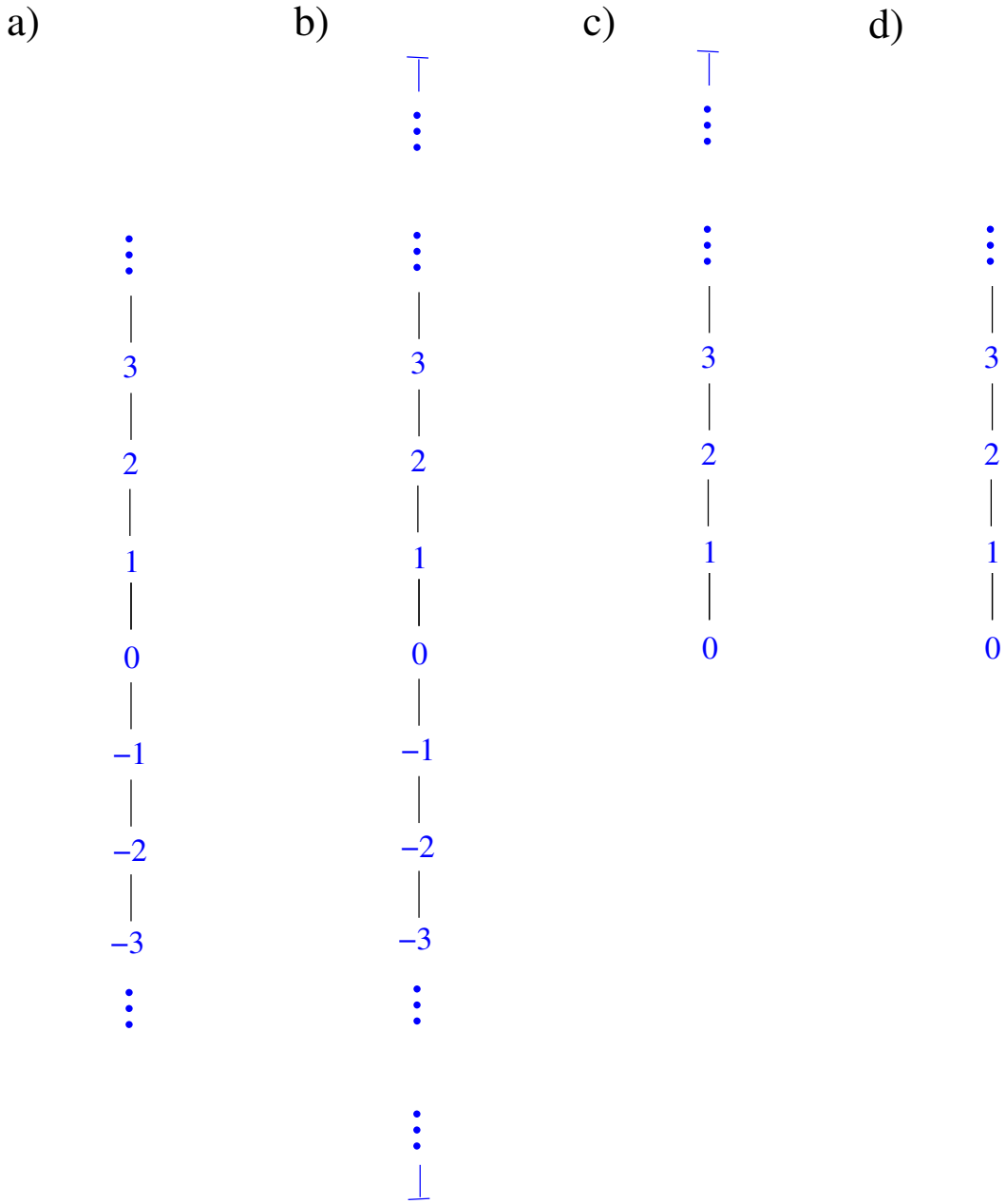
Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M. Dann heißt das Paar (M, R) eine partiell geordnete Menge (engl. partially ordered set) gdw R ist reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch.

Definition 7.1.2.2 (Verband, Vollständiger Verband)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partiell geordnete Menge. Dann heißt das Paar $(P, \sqsubseteq)$ ein

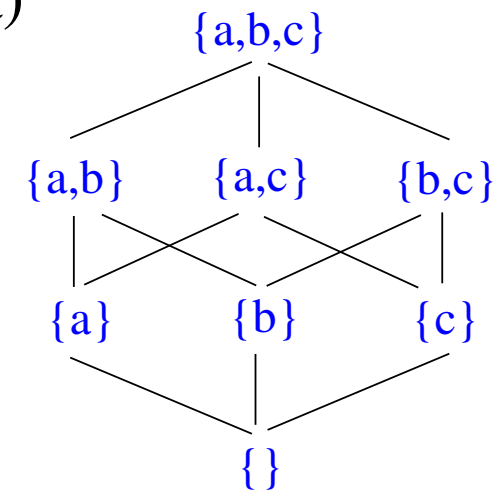
- Verband (engl. lattice), wenn jede endliche nichtleere Teilmenge P' von P eine kleinste obere und eine größte untere Schranke in P besitzt.
- vollständiger Verband (engl. complete lattice), wenn jede Teilmenge P' von P eine kleinste obere und eine größte untere Schranke in P besitzt.

Beispiele: Partiell geordnete Mengen, Verbände

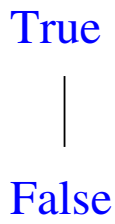


Beispiele: Vollständige Verbände

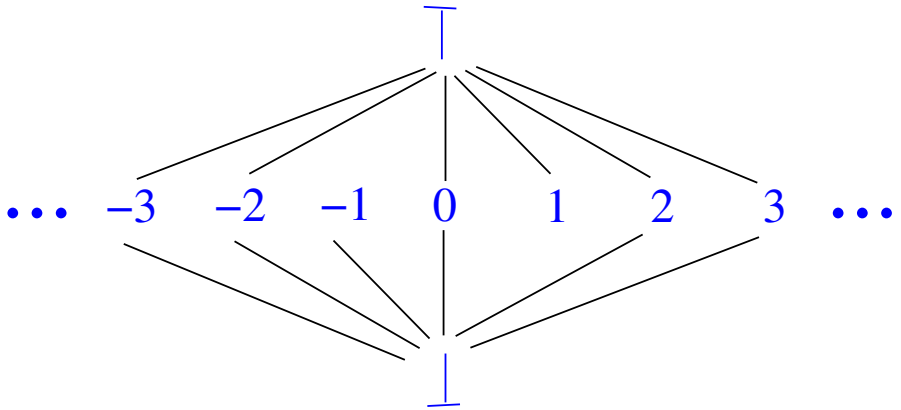
a)



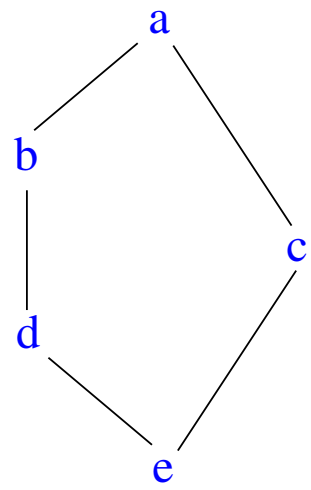
b)



c)



d)



Begriffe, Schreibweisen für Verbände

Sei $(C, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $C' \subseteq C$ eine Teilmenge von C. Dann bezeichnet

- $\bigsqcap C'$ die größte untere Schranke von C'.
- $\bigsqcup C'$ die kleinste obere Schranke von C'.
- $\bot$ das kleinste Element von C, wobei $\bot = \bigsqcap C = \bigsqcup \emptyset$.
- $\top$ das größte Element von C, wobei: $\top = \bigsqcup C = \bigsqcap \emptyset$.

Das legt nahe, einen vollständigen Verband als Sechstupel

- $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \bot, \top)$

zu schreiben, wobei $\sqcap$, $\sqcup$, $\bot$ und $\top$ als Schnitt, Vereinigung, 'bottom' und 'top' gelesen werden.

Absteigende, aufsteigende Kettenbedingung

Definition 7.1.2.3 (Kettenbedingung)

Sei $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \bot, \top)$ ein Verband. $\widehat{\mathcal{C}}$ erfüllt die

1. absteigende Kettenbedingung (engl. descending chain condition), wenn jede absteigende Kette schließlich stationär wird, d.h., für jede Kette $c_1 \sqsupseteq c_2 \sqsupseteq \ldots \sqsupseteq c_n \sqsupseteq \ldots$ gibt es einen Index $m \geq 1$ mit $c_m = c_{m+j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.
2. aufsteigende Kettenbedingung (engl. ascending chain condition), wenn jede aufsteigende Kette schließlich stationär wird, d.h., für jede Kette $c_1 \sqsubseteq c_2 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq c_n \sqsubseteq \ldots$ gibt es einen Index $m \geq 1$ with $c_m = c_{m+j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Monotonie, Distributivität und Additivität

...sind wichtige Eigenschaften von Funktionen auf Verbänden:

Definition 7.1.2.4 (Monotonie)

Sei $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \bot, \top)$ ein vollständiger Verband und $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ eine Funktion auf $\mathcal{C}$. Dann heißt f

- monoton gdw $\forall\, c, c' \in \mathcal{C}.\ c \sqsubseteq c' \Rightarrow f(c) \sqsubseteq f(c')$
  (Erhalt der Ordnung von Elementen)

Definition 7.1.2.5 (Distributivität, Additivität)

Sei $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \bot, \top)$ ein vollständiger Verband und $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ eine Funktion auf $\mathcal{C}$. Dann heißt f

- distributiv gdw $\forall\, \emptyset \neq C' \subseteq \mathcal{C}.\ f(\bigsqcap C') = \bigsqcap \{f(c) \mid c \in C'\}$
  (Erhalt größter unterer Schranken)
- additiv gdw $\forall\, \emptyset \neq C' \subseteq \mathcal{C}.\ f(\bigsqcup C') = \bigsqcup \{f(c) \mid c \in C'\}$
  (Erhalt kleinster oberer Schranken)

Monotonie

...charakterisiert über den Erhalt größter unterer und kleinster oberer Schranken:

Lemma 7.1.2.6

Sei $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \bot, \top)$ ein vollständiger Verband und $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ eine Funktion auf $\mathcal{C}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& f \text{ ist monoton} \\
\iff & \forall\, \emptyset \neq C' \subseteq \mathcal{C}.\ f(\bigsqcap C') \sqsubseteq \bigsqcap \{f(c) \mid c \in C'\} \\
\iff & \forall\, \emptyset \neq C' \subseteq \mathcal{C}.\ f(\bigsqcup C') \sqsupseteq \bigsqcup \{f(c) \mid c \in C'\}
\end{aligned}
$$

Zshg. v. Monotonie, Distributivität, Additivität

Sei $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \bot, \top)$ ein vollständiger Verband und $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ eine Funktion auf $\mathcal{C}$.

Lemma 7.1.2.7

1. f ist distributiv gdw f ist additiv.
2. f ist monoton, wenn f distributiv oder additiv ist.

Kapitel 7.2

Lokale DFA-Semantik

Lokale DFA-Semantik

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein kantenbenannter Flussgraph.

Definition 7.2.1 (Lokale DFA-Semantik)

Eine lokale abstrakte DFA-Semanctik für G ist eine Abbildung

$$[\![\ ]\!] : E \to (\mathcal{C} \to \mathcal{C})$$

wobei $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \bot, \top)$ ein vollständiger Verband ist.

Beachte: Die Elemente von $\widehat{\mathcal{C}}$ sind die mathematischen Objekte, die die interessierende Datenflussinformation(en) modellieren und repräsentieren.

Kapitel 7.3

DFA-Spezifikation

DFA-Spezifikation

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein kanntenbenannter Flussgraph.

Definition 7.3.1 (DFA-Spezifikation)

Eine DFA-Spezifikation für G ist ein Tripel $\mathcal{S}_G = (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$, wobei

- $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup, \bot, \top)$ ein vollständiger Verband
- $[\![\ ]\!] : E \to (\mathcal{C} \to \mathcal{C})$ eine lokale abstrakte Semantik
- $c_{\mathbf{s}} \in \mathcal{C}$ eine initiale Information (oder Anfangszusicherung)

ist.

Definition 7.3.2 (DFA-Problem)

Eine DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G = (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ definiert ein DFA-Problem für G.

Beachte

Für eine DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G = (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_s)$ für G gilt:

- Die Elemente von $\mathcal{C}$ repräsentieren die interessierende Datenflussinformation.
- Die Funktionen $[\![\ e\ ]\!]$, $e \in E$, repräsentieren die Instruktionssemantik auf dem abstrakten Analyseniveau.
- $c_s \in \mathcal{C}$ ist die Datenflussinformation, die am Startknoten s von G als gültig angenommen wird.

Insgesamt legt das nahe

- $\widehat{\mathcal{C}}$ einen DFA-Verband
- $[\![\ ]\!]$ eine lokale abstrakte DFA-Semantik (oder DFA-Semantik)
- $[\![\ e\ ]\!]$, $e \in E$, eine lokale DFA-Semantikfunktion (oder DFA-Funktion)
- $c_s \in \mathcal{C}$ eine DFA-Anfangszusicherung

zu nennen.

Generalvereinbarung

...für DFA-Verbände:

- Verbandmäßig größer heißt bessere, genauere Information!

(Beachte: In der Theorie abstrakter Interpretationen ist diese Vereinbarung genau andersherum getroffen (vgl. Kapitel 15.2)

Beispiel: Verfügbarkeit eines Terms t (1)

...ein Term t ist verfügbar an einem Programmpunkt n, wenn t auf jedem Pfad p von **s** nach n berechnet wird, ohne dass ein Operand von t nach der letzten Berechnung von t auf p modifiziert wird.

DFA-Spezifikation für die Verfügbarkeit eines Terms t:

- DFA-Verband
  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top) =_{df}$
  $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \leq, \mathbf{falsch}, \mathbf{wahr}) = \widehat{\mathbb{B}}$
- DFA-Semantik
  $[\![\ ]\!]^t_{av} : E \to (\ \mathbb{B} \to \mathbb{B}\ )$ where
  $\forall\, e \in E.\ \forall\, b \in \mathbb{B}.\ [\![\ e\ ]\!]^t_{av}(b) =_{df} (b \vee Comp^t_e) \wedge Transp^t_e$
- DFA-Anfangszusicherung: $b_{\mathbf{s}} \in \mathbb{B}$

Insgesamt:

- Verfügbarkeitsspezifikation: $\mathcal{S}^{av,t}_G = (\widehat{\mathbb{B}}, [\![\ ]\!]^t_{av}, b_{\mathbf{s}})$

Beispiel: Verfügbarkeit eines Terms t (2)

...wobei $\widehat{\mathbb{B}}$ den DFA-Verband und $Comp_e^t$, Mod_e^t und $Transp_e^t$ drei mit Kanten und ihren Instruktionen assoziierte lokale Prädikate bezeichnen:

- $\widehat{\mathbb{B}} =_{df} (\mathbb{B}, \wedge, \vee, \leq, \textbf{falsch}, \textbf{wahr})$

  ...Verband der Wahrheitswerte: kleinstes Element **falsch**, größtes Element **wahr**, **falsch** $\leq$ **wahr**, logisches $\wedge$ und logisches $\vee$ als Schnitt- und Vereinigungsoperation.

- $Comp_e^t$ ...**wahr**, wenn t bei Ausführung der Instruktion an Kante e berechnet wird, **falsch** sonst.

- $Transp_e^t$ ...**wahr**, wenn e transparent für t ist (d.h., keinem Operanden von t wird bei Ausführung der Instruktion an Kante e ein neuer Wert zugewiesen), **falsch** sonst.

DFA-Probleme

...sind praktisch relevant, wenn die ihnen zugrundeliegende lokale DFA-Semantik

- monoton
- distributiv/additiv

ist und die zugehörigen DFA-Verbände die

- absteigende/aufsteigende Kettenbedingung

erfüllen.

DFA-Semantiken u. -Probleme: Eigenschaften

Sei $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathsf{s}})$ eine DFA-Spezifikation für G.

Definition 7.3.3 (DFA-Semantikeigenschaften)

Die lokale DFA-Semantik $[\![\ ]\!] : E \to (\mathcal{C} \to \mathcal{C})$ von $\mathcal{S}_G$ ist monoton/distributiv/additiv gdw alle DFA-Funktionen $[\![\, e \,]\!]$, $e \in E$, sind monoton/distributiv/additiv.

Definition 7.3.4 (DFA-Problemeigenschaften)

Das durch $\mathcal{S}_G$ spezifizierte DFA-Problem

- ist monoton/distributiv/additiv gdw die lokale DFA-Semantik $[\![\ ]\!]$ von $\mathcal{S}_G$ ist monoton/distributiv/additiv.
- erfüllt die absteigende/aufsteigende Kettenbedingung gdw der DFA-Verband $\widehat{C}$ von $\mathcal{S}_G$ erfüllt die absteigende/aufsteigende Kettenbedingung.

Beispiel: Verfügbarkeit eines Terms t (1)

Lemma 7.3.5 (DFA-Funktionen)

$$\forall\, e \in E.\ [\![\, e \,]\!]^t_{av} = \begin{cases} Cst_{\mathbf{wahr}} & \text{falls } Comp^t_e \wedge Transp^t_e \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{falls } \neg Comp^t_e \wedge Transp^t_e \\ Cst_{\mathbf{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

- $Cst_{\mathbf{wahr}}, Cst_{\mathbf{falsch}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ (konstante Funktionen auf $\mathbb{B}$)
  $Cst_{\mathbf{wahr}} =_{df} \lambda b.\ \mathbf{wahr}$
  $Cst_{\mathbf{falsch}} =_{df} \lambda b.\ \mathbf{falsch}$
- $Id_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ (Identität auf $\mathbb{B}$)
  $Id_{\mathbb{B}} =_{df} \lambda b.\ b$

Beispiel: Verfügbarkeit eines Terms t (2)

Lemma 7.3.6 (Kettenbedingung)

$\widehat{\mathbb{B}}$ erfüllt die absteigende und aufsteigende Kettenbedingung.

Lemma 7.3.7 (Distributivität, Additivität)

$[\![e]\!]^t_{av}$, $e \in E$, ist distributiv und additiv (und deshalb auch monoton).

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.3.5 und Lemma 7.1.2.7(2).

Korollar 7.3.8 (Verfügbarkeit einesTerms t)

Das durch $\mathcal{S}^{av,t}_G = (\widehat{\mathbb{B}}, [\![\ ]\!]^t_{av}, b_{\mathbf{s}})$ spezifizierte DFA-Problem ist distributiv und additiv und erfüllt die absteigende und aufsteigende Kettenbedingung.

Hin zu einer globalen abstrakten Semantik (1)

...durch Globalisierung einer lokalen abstrakten Semantik für Instruktionen zu einer globalen abstrakten Semantik für Flussgraphen.

Das führt uns zur nichtdeterministischen operationellen

- Aufsammelsemantik (engl. collecting semantics (*CS*))

Von dieser leiten wir zwei deterministische operationelle Varianten ab: Die

- Schnitt-über-alle-Pfade (*SUP*) Semantik (engl. meet over all paths (*MOP*) semantics)
- Vereinigung-über-alle-Pfade (*VUP*) Semantik (engl. join over all paths (*JOP*) semantics)

Hin zu einer globalen abstrakten Semantik (2)

...und weiters zwei (berechenbare) deterministische denotationelle Varianten: Die

- maximale Fixpunktsemantik (*MaxFP*) (engl. maximum fixed point (*MaxFP*) semantics)
- minimale Fixpunktsemantik (*MinFP*) (engl. minimum fixed point (*MinFP*) semantics)

die algorithmische Verfahren zur Berechnung oder Approximation ihrer operationellen Gegenstücke induzieren.

Kapitel 7.4

Operationelle globale DFA-Semantik

Kapitel 7.4.1

Aufsammelsemantik

Ausdehnung der DFA-Fkt. v. Kanten auf Pfade

Sei $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_s)$ eine DFA-Spezifikation.

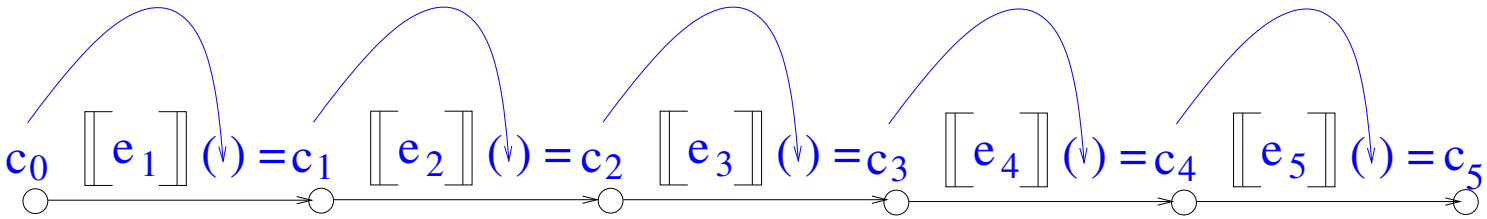
Definition 7.4.1.1 (Ausdehnung von $[\![\ ]\!]$ auf Pfade)

Die DFA-Semantik $[\![\, e \,]\!]$, $e \in E$, wird durch folgende Festlegung von Kanten auf Pfade $p = \langle e_1, e_2, \ldots, e_q \rangle$ ausgedehnt:

$$[\![\, p \,]\!] =_{df} \begin{cases} Id_{\mathcal{C}} & \text{falls } \lambda_p < 1 \\ [\![\, \langle e_2, \ldots, e_q \rangle \,]\!] \circ [\![\, e_1 \,]\!] & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ die Identität auf $\mathcal{C}$ bezeichnet, $Id_{\mathcal{C}} = \lambda c.\, c$.

Veranschaulichung der Ausdehnung von $[\![\ ]\!]$ auf Pfade:



Die DFA-Aufsammelsemantik

Sei $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ eine DFA-Spezifikation.

Definition 7.4.1.2 (DFA-Aufsammelsemantik)

Die von $\mathcal{S}_G$ induzierte (nichtdeterministische) DFA-Aufsammelsemantik (oder globale abstrakte Semantik) ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{AS}_{\mathcal{S}_G} : N \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$$

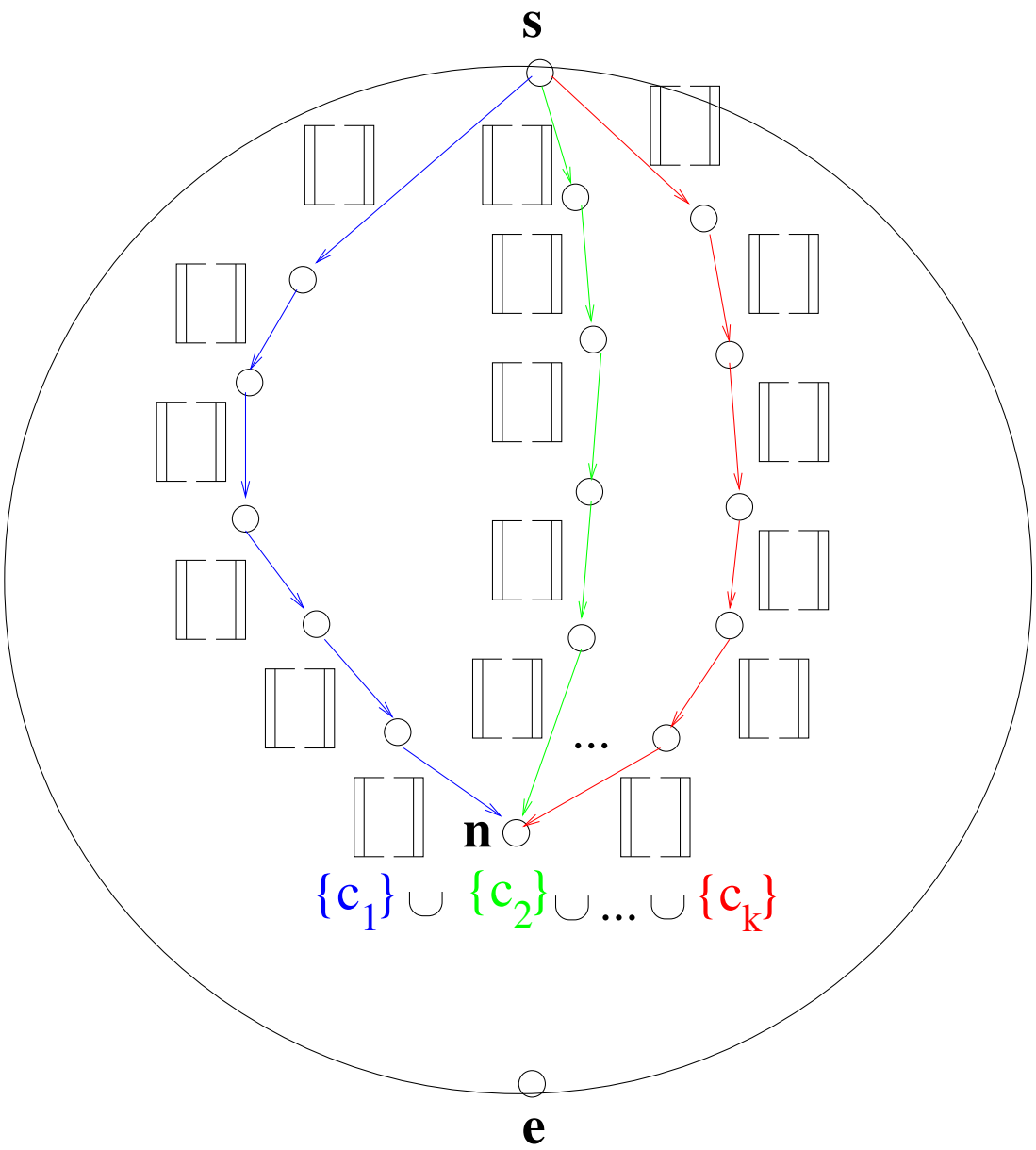
$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{AS}_{\mathcal{S}_G} =_{df} \{\, [\![\, p \,]\!](c_{\mathbf{s}}) \mid p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n] \,\}$$

wobei $\mathcal{P}$ den Potenzmengenoperator bezeichnet.

Beachte:

$$[\![\, \mathbf{s} \,]\!]^{AS}_{\mathcal{S}_G} \;=\; \{c_{\mathbf{s}}\}$$

Veranschaulichung d. DFA-Aufsammelsemantik



Beachte

...ist π ein WHILE-Programm, G seine Flussgraphdarstellung und $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], \bot)$ eine DFA-Spezifikation für G bzgl. der Anfangszusicherung $\bot$, dann kann die globale DFA-Semantik am Endknoten **e** des Programms

$$[\![\, \mathbf{e} \,]\!]^{AS}_{\mathcal{S}_G} \;=\; \{\, [\![\, p \,]\!](\bot) \,|\, p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, \mathbf{e}] \,\}$$

als nichtdeterministisches abstraktes Gegenstück der deterministischen WHILE-Semantik von π für Σ angesehen werden:

$$[\![\, \pi \,]\!]_{\mathrm{WHILE}}(\Sigma) \;= \{\, [\![\, \pi \,]\!]_{\mathrm{WHILE}}(\sigma) \,|\, \sigma \in \Sigma \}$$

Kapitel 7.4.2

Schnitt-über-alle-Pfade-Semantik

Die Schnitt-über-alle-Pfade (*SUP*) Semantik

Sei $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ eine DFA-Spezifikation.

Definition 7.4.2.1 (*SUP*-Semantik)

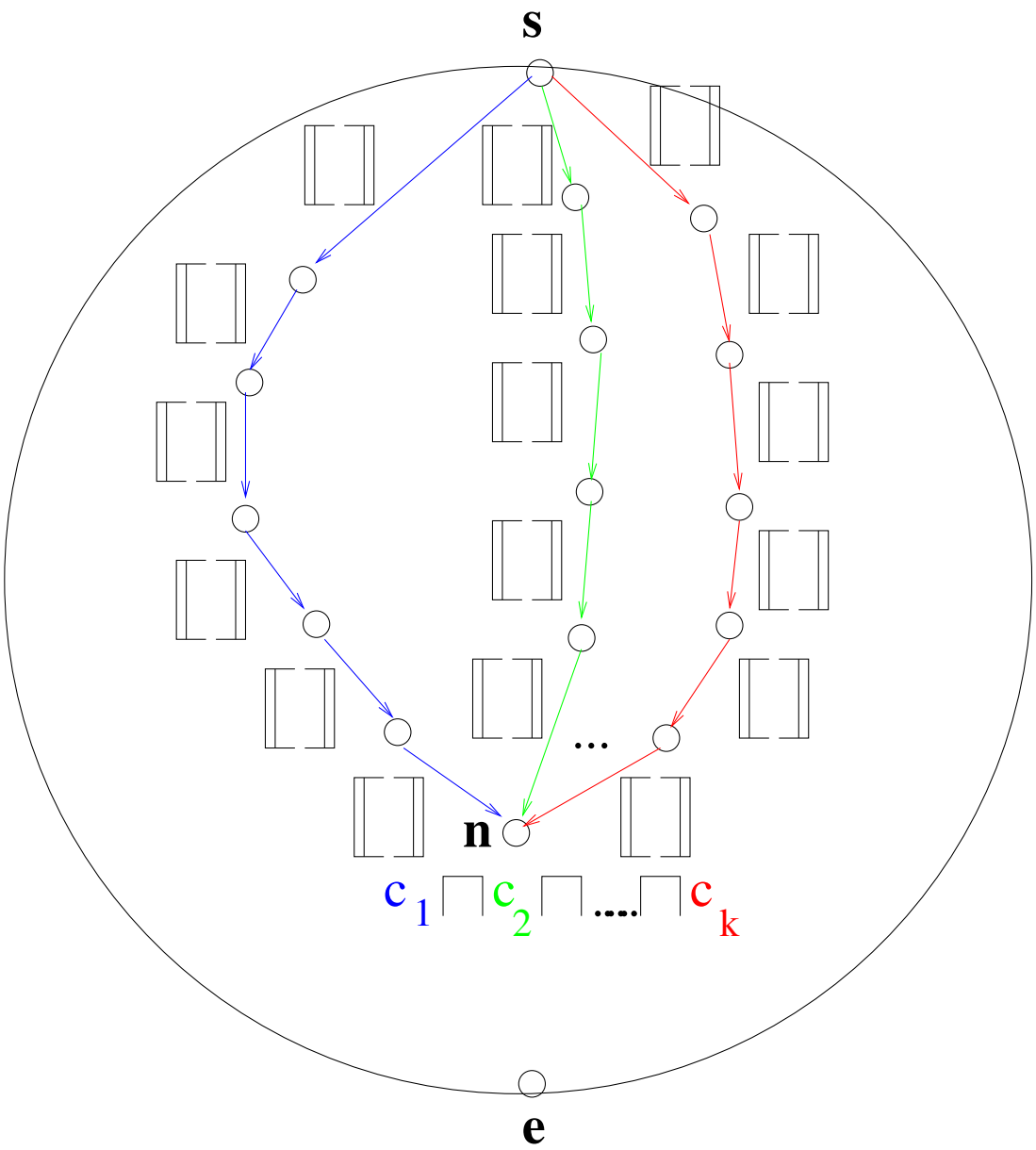
Die (deterministische) *SUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$ ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G} : N \to \mathcal{C}$$

$$\begin{aligned} \forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G} &=_{df} \bigsqcap [\![\, n \,]\!]^{AS}_{\mathcal{S}_G} \\ &= \bigsqcap \{\, [\![\, p \,]\!](c_{\mathbf{s}}) \mid p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n] \,\} \end{aligned}$$

Beachte: $\bigsqcap [\![\, n \,]\!]^{AS}_{\mathcal{S}_G}$ und folglich $[\![\, n \,]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G}$, $n \in N$, existieren, da $\widehat{\mathcal{C}}$ ein vollständiger Verband ist.

Veranschaulichung der *SUP*-Semantik



Kapitel 7.4.3

Vereinigung-über-alle-Pfade-Semantik

Vereinigung-über-alle-Pfade (*VUP*) Semantik

Sei $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ eine DFA-Spezifikation.

Definition 7.4.3.1 (*VUP*-Semantik)

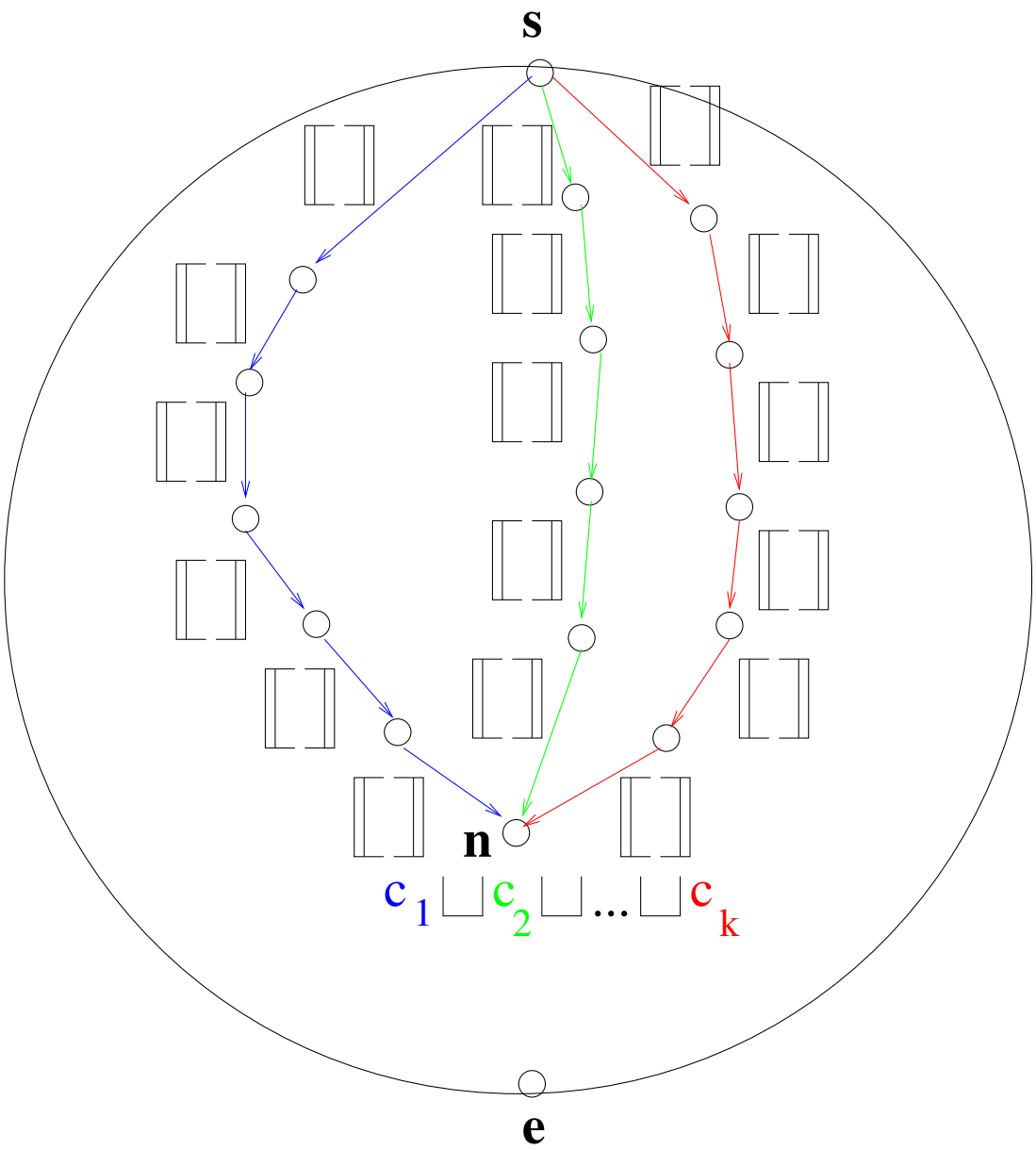
Die (deterministische) *VUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$ ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}_G} : N \to \mathcal{C}$$

$$\begin{aligned} \forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}_G} &=_{df} \bigsqcup [\![\, n \,]\!]^{AS}_{\mathcal{S}_G} \\ &= \bigsqcup \{\, [\![\, p \,]\!](c_{\mathbf{s}}) \mid p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n] \,\} \end{aligned}$$

Beachte: $\bigsqcup [\![\, n \,]\!]^{AS}_{\mathcal{S}_G}$ und folglich $[\![\, n \,]\!]^{JOP}_{\mathcal{S}_G}$, $n \in N$, existieren, da $\widehat{\mathcal{C}}$ ein vollständiger Verband ist.

Veranschaulichung der *VUP*-Semantik



Kapitel 7.4.4

SUP- und *VUP*-Semantik als spezifizierende Lösungen von DFA-Problemen

Wie veranschaulicht in den Abbildungen

...aus Kapitel 7.4.2 und 7.4.3, grenzen die *SUP*- und die *VUP*-Semantik die am Programmpunkt n bzgl. $\mathcal{S}_G$

- mögliche DFA-Information ein.

Unabhängig vom Pfad $p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n]$, auf dem Knoten n erreicht wird, ist die entlang p an n gewährleistete DFA-Information

- mindestens so groß wie die *SUP*-Semantik an n (es kann nicht schlechter, höchstens besser sein):

$$[\![p]\!](c_{\mathbf{s}}) \sqsupseteq [\![n]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G}$$

- höchstens so groß wie die *VUP*-Semantik an n (es kann nicht besser, höchstens schlechter sein):

$$[\![p]\!](c_{\mathbf{s}}) \sqsubseteq [\![n]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}_G}$$

Das bedeutet:

$$\forall\, p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n].\ [\![n]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G} \sqsubseteq [\![p]\!](c_{\mathbf{s}}) \sqsubseteq [\![n]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}_G}$$

Mit anderen Worten

...die *SUP*- und die *VUP*-Semantik liefern für jeden Programmpunkt n die DFA-Informationen, die im folgenden Sinn

- bestmöglich bzgl. $\mathcal{S}_G$ an n sind:
  - $[\![n]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G}$ ist die minimal gültige Information an n (es kann nicht schlechter sein, höchstens besser):
    $\forall\, p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n].\ [\![n]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G} \sqsubseteq [\![p]\!](c_{\mathbf{s}})$.
  - $[\![n]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}_G}$ ist die maximal gültige Information an n (es kann nicht besser sein, höchstens schlechter):
    $\forall\, p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n].\ [\![n]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}_G} \sqsupseteq [\![p]\!](c_{\mathbf{s}})$.

Das bedeutet, die *SUP*- und *VUP*-Semantik garantieren die Abwesenheit von 'Überraschungen': Unabhängig vom Pfad $p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n]$, auf dem Knoten n erreicht wird, gilt stets:

$$[\![n]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G} \sqsubseteq [\![p]\!](c_{\mathbf{s}}) \sqsubseteq [\![n]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}_G}$$

Spezifizierende Lösungen eines DFA-Problems

Das legt folgende Festlegung nahe:

Definition 7.4.4.1 (Spezifizierende Lsg. von DFA-P.)

Die *SUP*- und die *VUP*-Semantik eines Flussgraphen definieren die spezifizierenden Lösungen eines DFA-Problems, seine sog. *SUP*- und *VUP*-Lösung.

Konservative DFA-Algorithmen

Definition 7.4.4.2 (Konservativer DFA-Algorithmus)

Ein DFA-Algorithmus A heißt

- *SUP*-konservativ
- *VUP*-konservativ

für $\mathcal{S}_G$, wenn A mit einer

- unteren Approximation der *SUP*-Semantik
- oberen Approximation der *VUP*-Semantik

von $\mathcal{S}_G$ terminiert.

Straffe DFA-Algorithmen

Definition 7.4.4.3 (Straffer DFA-Algorithmus)

Ein DFA-Algorithmus A heißt

- *SUP*-straff
- *VUP*-straff

für $\mathcal{S}_G$, wenn A (akkurat) mit der

- *SUP*-Semantik
- *VUP*-Semantik

von $\mathcal{S}_G$ terminiert.

Kapitel 7.4.5

Unentscheidbarkeit von *SUP*- und *VUP*-Semantik

Leider

...die Definitionen der *SUP*- und *VUP*-Semantik induzieren nicht unmittelbar

- effektive Berechnungsverfahren

zu ihrer Berechnung (denke z.B. an Schleifen in einem nicht-deterministisch interpretierten Flussgraphen, wodurch die Zahl der Pfade, die zu einem Programmpunkt führen, unendlich ist).

Ungünstiger sogar, die *SUP*- und *VUP*-Semantik von Flussgraphen ist

- nicht entscheidbar!

Unentscheidbarkeit der *SUP*-Semantik

Theorem 7.4.5.1 (Unentscheidbarkeit d. *SUP*-Sem.)

Es gibt keinen Algorithmus A, so dass gilt:

- Eingabe für A ist
  - eine DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G = (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$.
  - Algorithmen zur Berechnung des Schnitts, des Tests auf Gleichheit und der Anwendung monotoner Funktionen auf $\widehat{\mathcal{C}}$.
- Ausgabe von A ist die *SUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$.

(John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. Monotone Data Flow Analysis Frameworks. Acta Informatica 7:305-317, 1977)

Unentscheidbarkeit der *VUP*-Semantik

Korollar 7.4.5.2 (Unentscheidbarkeit d. *VUP*-Sem.)

Es gibt keinen Algorithmus A, so dass gilt:

- Eingabe von A ist
  - eine DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G = (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$.
  - Algorithmen zur Berechnung von Vereinigung, des Tests auf Gleichheit und der Anwendung monotoner Funktionen auf $\widehat{\mathcal{C}}$.
- Ausgabe von A ist die *VUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$.

Hin zu konservativen und straffen DFA-Alg'en

...aufgrund der vorstehenden negativen Ergebnisse komplementieren wir den operationellen Ansatz, der der *SUP*- und *VUP*-Semantik zugrundeliegt, mit einem orthogonalen denotationellen Globalsierungsansatz einer lokalen abstrakten Semantik, die zur

- maximalen Fixpunktsemantik (*MaxFP*)
- minimalen Fixpunktsemantik (*MinFP*)

eines Flussgraphen führen.

Die *MaxFP*- und *MinFP*-Semantik heißen auch

- maximale Fixpunktlösung (*MaxFP*)
- minimale Fixpunktlösung (*MinFP*)

eines DFA-Problems, die (unter bestimmten Randbedingungen)

- effektiv berechnet

werden können.

Kapitel 7.5

Denotationelle globale DFA-Semantik

Kapitel 7.5.1

Maximale Fixpunktsemantik

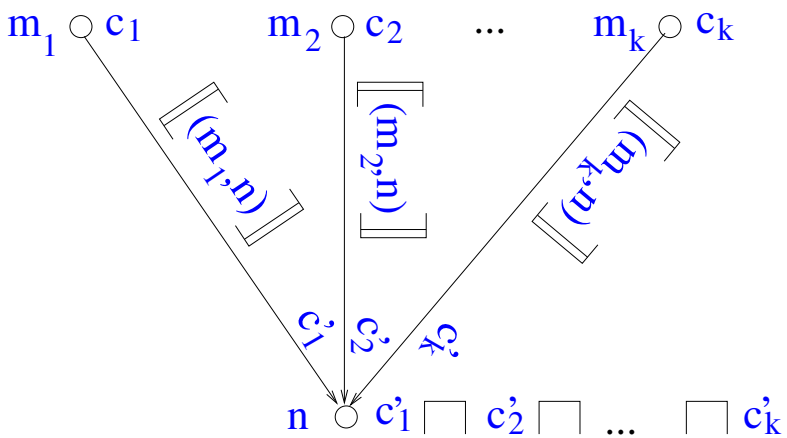
Der maximale Fixpunktansatz (*MaxFP*)

Sei $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ eine DFA-Spezifikation.

Gleichungssystem 7.5.1.1 (*MaxFP*-Gleichungssyst.)

$$inf(n) = \begin{cases} c_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigsqcap \{ [\![(m,n)]\!](inf(m)) \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Veranschaulichung des *MaxFP*-Ansatzes (für $n \neq \mathbf{s}$):



Die *MaxFP*-Semantik

Bezeichne

- $\nu\text{-}inf_{c_s}(n),\ n \in N$

die größte Lösung von Gleichungssystem 7.5.1.1.

Definition 7.5.1.2 (*MaxFP*-Semantik)

Die (deterministische) *MaxFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$ ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{MaxFP}_{\mathcal{S}_G} : N \to \mathcal{C}$$

$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{MaxFP}_{\mathcal{S}_G} =_{df} \nu\text{-}inf_{c_s}(n)$$

Beachte:

$$[\![\, \mathbf{s} \,]\!]^{MaxFP}_{\mathcal{S}_G} = c_{\mathbf{s}}$$

Kapitel 7.5.2

Minimale Fixpunktsemantik

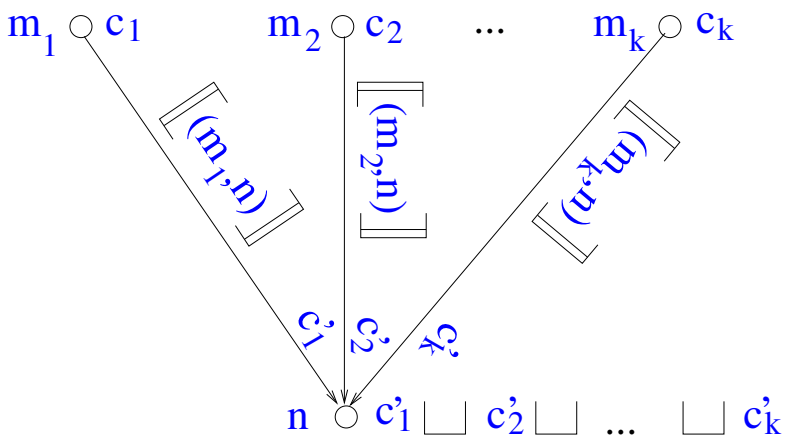
Der minimale Fixpunktansatz (*MinFP*)

Sei $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ eine DFA-Spezifikation.

Gleichungssystem 7.5.2.1 (*MinFP*-Gleichungssyst.)

$$inf(n) = \begin{cases} c_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigsqcup \{ [\![(m,n)]\!](inf(m)) \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Veranschaulichung des *MinFP*-Ansatzes (für $n \neq \mathbf{s}$):



Die *MinFP*-Semantik

Bezeichne

- $\mu\text{-}inf_{c_s}(n),\ n \in N$

die kleinste Lösung von Gleichungssystem 7.5.2.1.

Definition 7.5.2.2 (*MinFP*-Semantik)

Die *MinFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$ ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{MinFP}_{\mathcal{S}_G} : N \to \mathcal{C}$$

$$\forall\, n \in N.\ [\![\ n\ ]\!]^{MinFP}_{\mathcal{S}_G} =_{df} \mu\text{-}inf_{c_s}(n)$$

Beachte:

$$[\![\ \mathbf{s}\ ]\!]^{MinFP}_{\mathcal{S}_G} = c_{\mathbf{s}}$$

Kapitel 7.6

Generischer Fixpunktalgorithmus

Die *MaxFP*- und *MinFP*-Semantik

...sind aufgrund von *MaxFP*-Gleichungssystem 7.5.1.1 und *MinFP*-Gleichungssystem 7.5.2.1 praktisch relevant, da sie in generischer Weise ein

- iteratives Berechnungsverfahren (Algorithmus 7.6.1.1)

induzieren, das ihre größte und kleinste Lösung approximativ zu berechnen erlaubt, mithin die *MaxFP*- und *MinFP*-Semantik selbst

Kapitel 7.6.1

Algorithmus

Der generische Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 (1)

Eingabe: Eine DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G = _{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_s)$.

Ausgabe: Nach Terminierung des Algorithmus (s. Terminationstheorem 7.6.2.1), enthält Variable $inf[n]$ die *MaxFP*-Lösung von $\mathcal{S}_G$ am Knotn n.

Zusätzlich gilt (s. Sicherheitstheorem 7.7.1 und Koinzidenztheorem 7.7.2): Ist $[\![\ ]\!]$

- distributiv: $inf[n]$ enthält die
- monoton: $inf[n]$ enthält eine untere Approximation der

MOP-Lösung von $\mathcal{S}_G$ am Knoten n.

Anmerkung: Die Variable *workset* dient zur Steuerung des iterativen Berechnungsvorgang. Sie enthält diejenigen Knoten von G, deren Benennung kürzlich aktualisiert worden (d.h. kleiner geworden) ist, was sich entsprechend auf die ihrer direkten (und indirekten) Nachfolgerknoten auswirken kann.

Der generische Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 (2)

(Prolog: Initialisierung von *inf* und *workset*)
FORALL $n \in N \backslash \{\mathbf{s}\}$ DO $inf[n] := \top$ OD;
$inf[\mathbf{s}] := c_{\mathbf{s}}$;
$workset := N$;
(Hauptschleife: Die iterative Fixpunktberechnung)
WHILE $workset \neq \emptyset$ DO
    CHOOSE $m \in workset$;
        $workset := workset \backslash \{ m \}$;
        (Aktualisierung der Benennungen der Nachfolger von m)
        FORALL $n \in succ(m)$ DO
            $meet := [\![(m, n)]\!](inf[m]) \sqcap inf[n]$;
            IF $inf[n] \sqsupset meet$
                THEN
                    $inf[n] := meet$;
                    $workset := workset \cup \{ n \}$
            FI
        OD ESOOHC OD.

Kapitel 7.6.2

Terminierung

Terminierung

Theorem 7.6.2.1 (Terminierung)

Der generische Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 terminiert mit der

1. *MaxFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$, wenn gilt:
   - 1.1 $[\![\ ]\!]$ ist monoton.
   - 1.2 $\widehat{\mathcal{C}}$ erfüllt die absteigende Kettenbedingung.
2. *MinFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$, wenn gilt:
   - 2.1 $[\![\ ]\!]$ ist monoton.
   - 2.2 $\widehat{\mathcal{C}^{gst}}$ erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung, wobei

$$\widehat{\mathcal{C}^{gst}} =_{df} (\mathcal{C}, \sqcup, \sqcap, \sqsupseteq, \top, \bot)$$

den auf den 'Kopf gestellten' (oder 'gestürzten') Verband $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top)$ bezeichnet.

Berechenbare Lösungen eines DFA-Problems

...der generische Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 und das Terminierungstheorem 7.6.2.1 legen folgende Festlegung nahe:

Definition 7.6.2.2 (Berechenbare Lsg. eines DFA-P.)

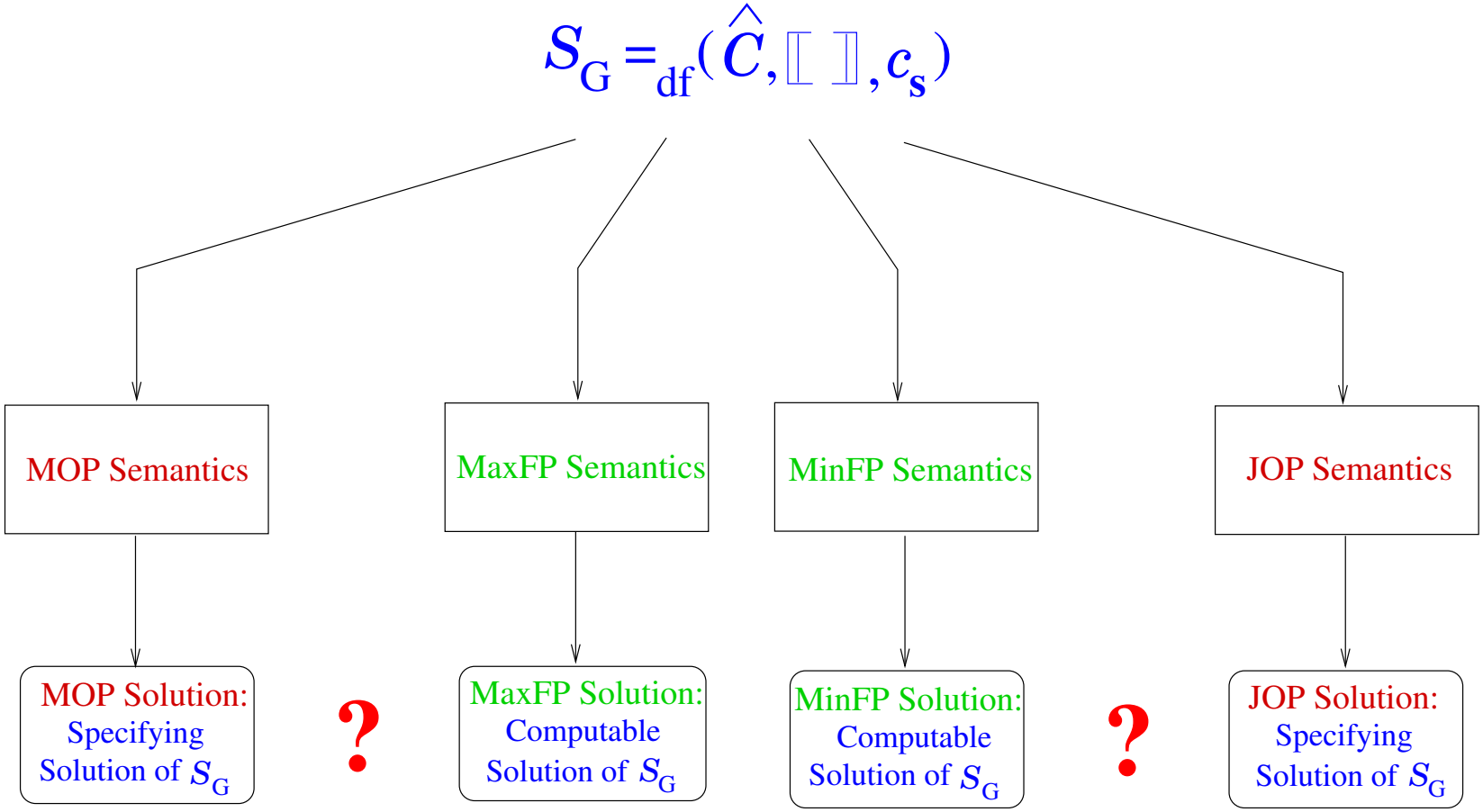
Die *MaxFP*- und *MinFP*-Semantik eines Flussgraphen definieren die berechenbaren Lösungen eines DFA-Problems, seine sog. *MaxFP*- und *MinFP*-Lösung.

Kapitel 7.7

Sicherheit und Koinzidenz

SUP/*MaxFP*- und *VUP*/*MinFP*-Semantik

...einer DFA-Spezifikation und die Frage nach ihrer Beziehung:



Sicherheit

Sei $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_s)$ eine DFA-Spezifikation.

Theorem 7.7.1 (Sicherheit)

1. Die *MaxFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$ ist eine sichere (d.h. untere) Aapproximation der *SUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$, d.h.:

$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{MaxFP}_{\mathcal{S}_G} \sqsubseteq [\![\, n \,]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G}$$

2. Die *MinFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$ ist eine sichere (d.h. obere) Approximation der *VUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$, d.h.:

$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{MinFP}_{\mathcal{S}_G} \sqsupseteq [\![\, n \,]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}_G}$$

wenn die DFA-Semantik $[\![\ ]\!]$ monoton ist.

Koinzidenz

Sei $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_s)$ eine DFA-Spezifikation.

Theorem 7.7.2 (Koinzidenz)

1. *MaxFP*- und *SUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$ stimmen überein (sind koinzident), d.h.:

$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{MaxFP}_{\mathcal{S}_G} = [\![\, n \,]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}_G}$$

2. *MinFP*- und die *VUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G$ stimmen überein (sind koinzident), d.h.:

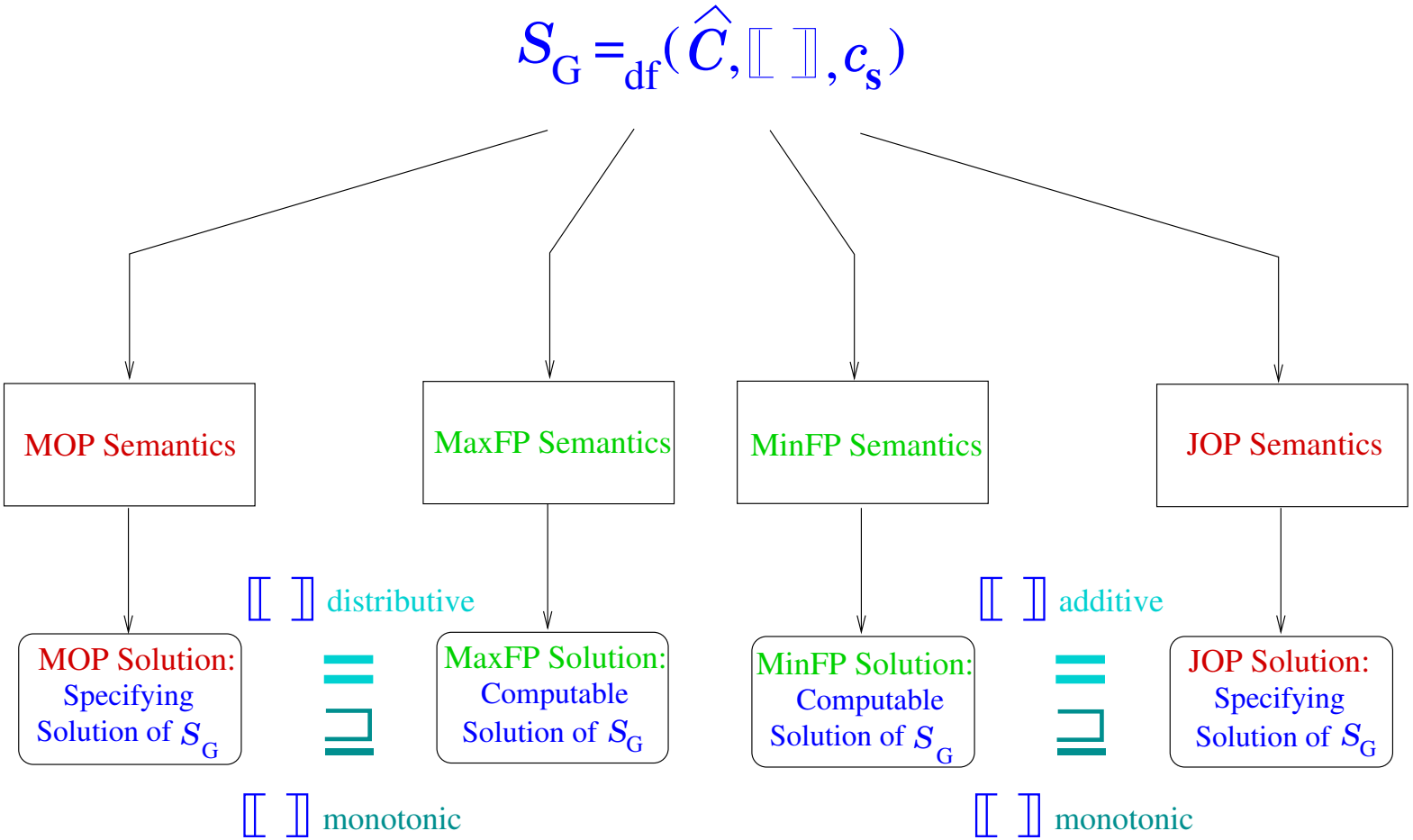
$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{MinFP}_{\mathcal{S}_G} = [\![\, n \,]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}_G}$$

wenn die DFA-Semantik $[\![\ ]\!]$ distributiv bzw. additiv ist.

Erinnerung an L. 7.1.2.7(1): $[\![\ ]\!]$ ist distributiv gdw $[\![\ ]\!]$ ist additiv.

SUP/*MaxFP*- und *VUP*/*MinFP*-Semantik

...einer DFA-Spezifikation und die Frage nach ihrer Beziehung:



Konservativität v. Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1

Korollar 7.7.3 (*SUP*/*VUP*-Konservativität)

Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 ist

- *SUP*- (*VUP*-) konservativ

für $\mathcal{S}_G$, d.h. er terminiert mit einer unteren (oberen) Approximation der *SUP*- (*VUP*-) Semantik von $\mathcal{S}_G$, wenn gilt:

1. $[\![\ ]\!]$ ist monoton.
2. $\widehat{\mathcal{C}}$ erfüllt die absteigende (aufsteigende) Kettenbedingung.

Straffheit von Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1

Korollar 7.7.4 (*SUP*/*VUP*-Straffheit)

Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 ist

- *MOP*- (*JOP*-) straff

für $\mathcal{S}_G$, d.h. er terminiert mit der *SUP*- (*VUP*-) Semantik von $\mathcal{S}_G$, wenn gilt:

1. $[\![\ ]\!]$ ist distributiv (additiv).
2. $\widehat{\mathcal{C}}$ erfüllt die absteigende (aufsteigende) Kettenbedingung.

Kapitel 7.8

Korrektheit und Vollständigkeit

Korrektheit und Vollständigkeit (1)

Analyseszenario:

- Sei ϕ eine interessierende Programmeigenschaft (z.B. die Verfügbarkeit eines Terms, die Lebendigkeit einer Variable, etc.).
- Sei $\mathcal{S}_G^\phi$ eine DFA-Spezifikation für ϕ.

Definition 7.8.1 (Korrektheit)

$\mathcal{S}_G^\phi$ ist *SUP*-korrekt (*VUP*-korrekt) für ϕ, wenn wann immer die *SUP*-Semantik (*VUP*-Semantik) von $\mathcal{S}_G^\phi$ anzeigt, dass ϕ gültig ist, ϕ gültig ist.

Definition 7.8.2 (Vollständigkeit)

$\mathcal{S}_G^\phi$ ist *SUP*-vollständig (*VUP*-vollständig) für ϕ, wenn wann immer ϕ gültig ist, die *SUP*-Semantik (*VUP*-Semantik) von $\mathcal{S}_G^\phi$ anzeigt, dass ϕ gültig ist.

Korrektheit und Vollständigkeit (2)

Intuitiv

- *SUP*-Korrektheit bedeutet: $[\![\ ]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}^{\phi}_{G}}$ 'impliziert' ϕ.
- *SUP*-Vollständigkeit bedeutet: ϕ 'impliziert' $[\![\ ]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}^{\phi}_{G}}$.

und

- *VUP*-Korrektheit bedeutet: ϕ 'impliziert' $[\![\ ]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}^{\phi}_{G}}$.
- *VUP*-Vollständigekeit bedeutet: $[\![\ ]\!]^{VUP}_{\mathcal{S}^{\phi}_{G}}$ 'impliziert' ϕ.

Korrektheit und Vollständigkeit (3)

Intuitiv: Wenn $\mathcal{S}_G^\phi$ *SUP-* (*VUP-*) korrekt und vollständig für Eigenschaft ϕ ist, bedeutet das:

Wir berechnen

- die interessierende Eigenschaft,
- die ganze interessierende Eigenschaft,
- und nur die interessierende Eigenschaft.

Mit anderen Worten, wir berechnen

- die interessierende Eigenschaft akkurat!

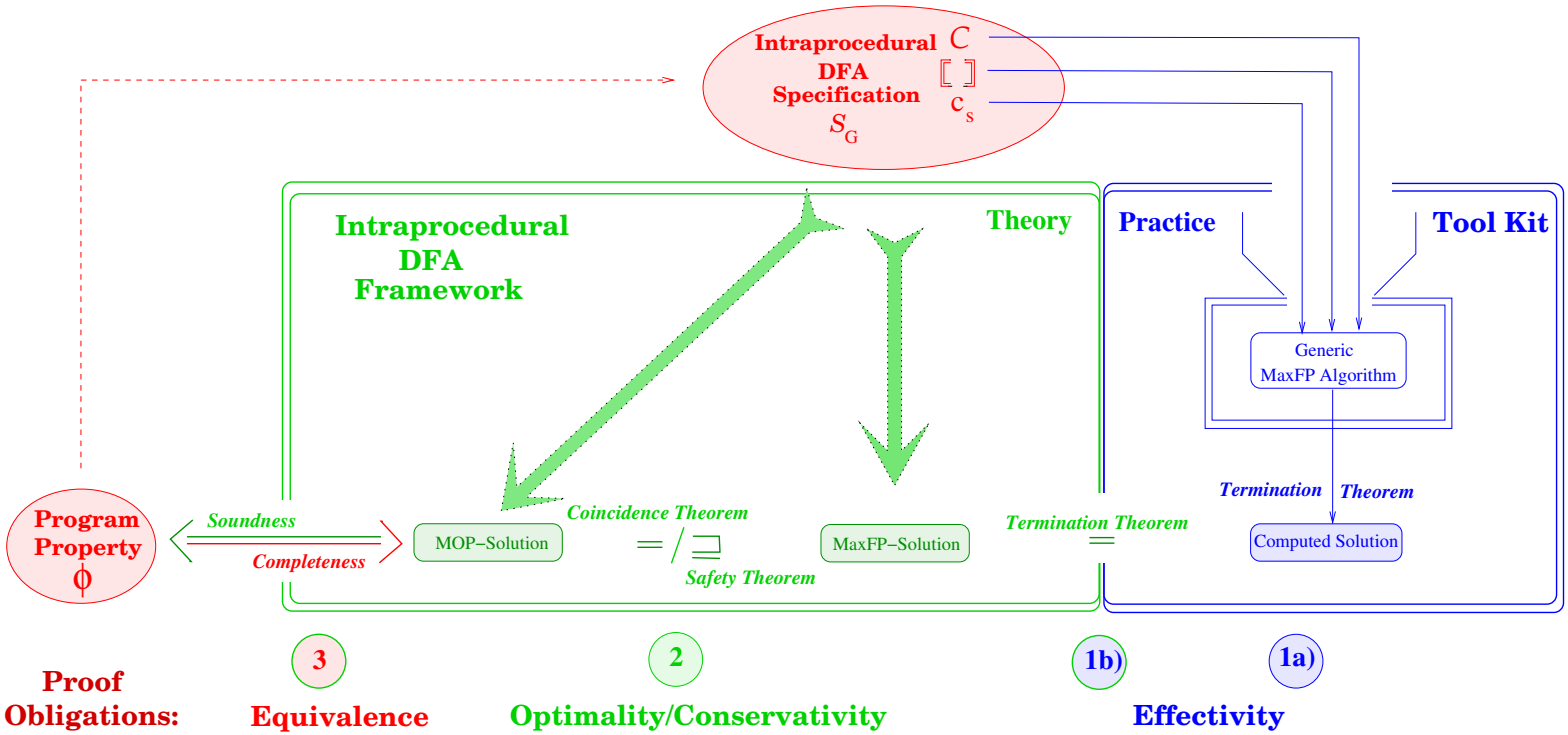
Kapitel 7.9

DFA-Rahmen- und Werkzeugkastensicht

Datenflussanalyse: Eine ganzheitliche Sicht

...(intraprozedurale) DFA unter einer ganzheitlichen Sicht:

- Die Rahmenwerk- und Werkzeugkastensicht (*SUP*/*MaxFP*) auf DFA



Datenflussanalyse praktisch

...die Arbeit mit Rahmenwerk und Werkzeugkasten ist ein dreistufiger Prozess:

Der dreistufige Prozess

1. **Identifikation der interessierenden Programmeigenschaft**

   Identifiziere die interessierende Programmeigenschaft ϕ (z.B. die Verfügbarkeit eines Terms, die Lebendigkeit einer Variable, etc.) und definiere ϕ formal.

2. **Entwicklung einer DFA-Spezifikation**

   Entwickle eine DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G^\phi = (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_s)$ für ϕ.

3. **Erbringung v. Beweisverpflichtungen, Erhalt v. Garantien**

   Beweise eine feste Reihe von Beweisverpflichtungen über die Komponenten von $\mathcal{S}_G^\phi$ und die Beziehung der *SUP*- (*VUP*-) Lösung und ϕ und erhalte Garantien, dass die *MaxFP*- (*MinFP*-) Lösung korrekt oder sogar korrekt und vollständig für ϕ ist.

Beweisverpflichtungen, implizierte Garantien (1)

Beweisverpflichtungen und Garantien im Detail:

- Beweisverpflichtungen 1a), 1b): Absteigende (aufsteigende) Kettenbedingung für $\widehat{\mathcal{C}}$, Monotonie für $[\![\ ]\!]$

  Garantien:

  - Effektivität: Terminierung von Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*- (*MinFP*-) Semantik von $\mathcal{S}_G^\phi$.
  - Konservativität: Die *MaxFP*- (*MinFP*-) Lösung von $\mathcal{S}_G^\phi$ ist *SUP* (*VUP*-) konservativ.

- Beweisverpflichtung 2): Distributivität (Additivität) für $[\![\ ]\!]$

  Garantie:

  - Straffheit: Die *MaxFP*- (*MinFP*-) Semantik von $\mathcal{S}_G^\phi$ ist *SUP*- (*VUP*-) straff.

Beweisverpflichtungen, implizierte Garantien (2)

- Beweisverpflichtung 3): Äquivalenz von $SUP_{\mathcal{S}_G^\phi}$ ($VUP_{\mathcal{S}_G^\phi}$) und ϕ

  Garantien:

  - Wann immer die *SUP*-Lösung von $\mathcal{S}_G^\phi$ die Gültigkeit von ϕ anzeigt, dann ist ϕ gültig: Korrektheit.

    $\rightsquigarrow$ Wir berechnen die interessierende Programmeigenschaft und nur die interessierende Programmeigenschaft.
  - Wann immer ϕ gültig ist, dann zeigt die *SUP*-Lösung von $\mathcal{S}_G^\phi$ dies an: Vollständigkeit.

    $\rightsquigarrow$ Wir berechnen die ganze interessierende Programmeigenschaft.
  - Analog und entsprechend für die *VUP*-Lösung von $\mathcal{S}_G^\phi$.

  Garantie von Korrektheit und Vollständigkeit:

  - Wir berechnen Programmeigenschaft ϕ accurat!

Kapitel 7.10

Anwendungsbeispiele

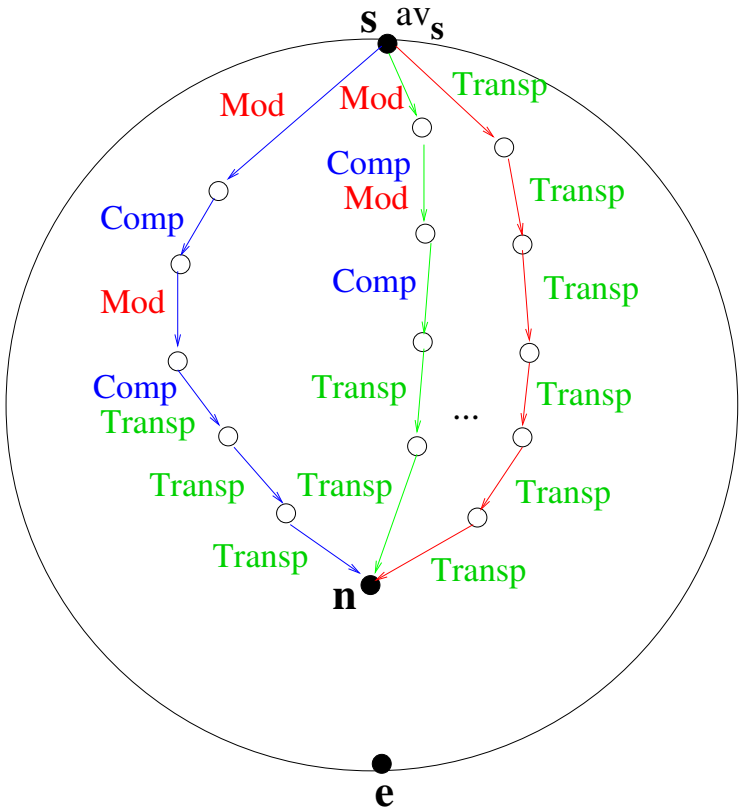
Kapitel 7.10.1

Distributive DFA: Verfügbare Ausdrücke

Intuitiv

...ein Term heißt verfügbar an einem Knoten, wenn egal auf welchem Pfad vom Programmanfang zu diesem Knoten der Term berechnet wird, ohne dass anschließend eine seiner Operandenvariablen vor Erreichen dieses Knotens einen Wert zugewiesen bekommt.

Veranschaulichung:



Verfügbarkeit

...wir spezifizieren in der Folge das Verfügbarkeitsproblem (engl. availability) in vier verschiedenen Varianten, um die

- Verwendung unterschiedlicher Verbände für DFA
- Klasse sog.
  - Bitvektor
  - Gen/Kill

  DFA-Probleme

zu illustrieren, für die Verfügbarkeit ein typisches Beispiel ist.

...Verfügbarkeit von Termen ist ein

- kanonisches Beispiel für ein distributives DFA-Problem.

Vorbereitungen

Sei $\iota_e \equiv x := exp$ (oder $\iota_e \equiv exp$) die Instruktion (oder die Bedingung) an Kante e, t ein Term.

Lokale Prädikate (für Kanten)

- $Comp_e^t$

  ...**wahr**, wenn t an Kante ι_e berechnet wird (d.h. t ist ein Teilterm des rechtsseitigen Ausdrucks exp von ι_e), **falsch** sonst.

- Mod_e^t

  ...**wahr**, wenn t an Kante ι_e modifiziert wird (d.h. ι_e weist einem Operanden von t einen (neuen) Wert zu), **falsch** sonst.

- $Transp_e^t =_{df} \neg Mod_e^t$

  ...**wahr**, wenn e transparent für t ist (d.h. ι_e weist keinem Operanden von t einen Wert zu), **falsch** sonst.

Variante 1: Festlegung des Analyseszenarios

...Verfügbarkeit für einen einzelnen Term t.

Verband

- $\widehat{\mathbb{B}} =_{df} (\mathbb{B}, \wedge, \vee, \leq, \textbf{falsch}, \textbf{wahr})$

  ...Verband der Booleschen Wahrheitswerte: Kleinstes Element **falsch**, größtes Element **wahr**, **falsch** $\leq$ **wahr**, logisches $\wedge$ und logisches $\vee$ als Schnitt- und Vereinigungsoperation.

Hilfsfunktionen

- Konstante Funktionen $Cst_{\textbf{wahr}}, Cst_{\textbf{falsch}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

  $Cst_{\textbf{wahr}} =_{df} \lambda b.\ \textbf{wahr}$
  $Cst_{\textbf{falsch}} =_{df} \lambda b.\ \textbf{falsch}$

- Identität $Id_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$

  $Id_{\mathbb{B}} =_{df} \lambda b.\ b$

Variante 1: Spezifikation der DFA

DFA-Spezifikation

- DFA-Verband
  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top) =_{df}$
  $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \leq, \textbf{falsch}, \textbf{wahr}) = \widehat{\mathbb{B}}$
- DFA-Semantik
  $[\![\ ]\!]^t_{av} : E \to (\ \mathbb{B} \to \mathbb{B}\ )$, wobei
  $\forall\, e \in E\ \forall\, b \in \mathbb{B}.\ [\![\, e\,]\!]^t_{av}(b) =_{df} (b \vee \mathit{Comp}^t_e) \wedge \mathit{Transp}^t_e$
- Anfangszusicherung: $b_{\mathbf{s}} \in \mathbb{B}$

Verfügbarkeitsspezifikation für t

- Spezifikation: $\mathcal{S}^{av,t}_G = (\widehat{\mathbb{B}}, [\![\ ]\!]^t_{av}, b_{\mathbf{s}})$

Variante 1: Erbringung d. Beweisverpflichtungen

Lemma 7.10.1.1 (DFA-Funktionen)

$$\forall\, e \in E.\ [\![\, e \,]\!]^t_{av} = \begin{cases} Cst_{\mathbf{wahr}} & \text{falls } Comp^t_e \wedge Transp^t_e \\ Id_{\mathbb{IB}} & \text{falls } \neg Comp^t_e \wedge Transp^t_e \\ Cst_{\mathbf{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 7.10.1.2 (Kettenbedingungen)

$\widehat{\mathbb{IB}}$ erfüllt die absteigende und aufsteigende Kettenbedingung.

Lemma 7.10.1.3 (Distributivität, Additivität)

$[\![\ ]\!]^t_{av}$ ist distributiv und additiv.

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.1.1.

Korollar 7.10.1.4 (Monotonie)

$[\![\ ]\!]^t_{av}$ ist monoton.

Variante 1: Einsammeln der Garantien

...für Terminierung, Straffheit.

Theorem 7.10.1.5 (Terminierung)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{av,t} = (\widehat{\mathbb{B}}, [\![\ ]\!]_{av}^t, b_{\mathbf{s}})$ terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*/*MinFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{av,t}$.

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.1.2, Korollar 7.10.1.4 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Theorem 7.10.1.6 (Straffheit)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{av,t} = (\widehat{\mathbb{B}}, [\![\ ]\!]_{av}^t, b_{\mathbf{s}})$ ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*/*VUP*-straff für $\mathcal{S}_G^{av,t}$ (d.h. terminiert mit der *SUP*/*VUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{av,t}$).

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.1.3, Koinzidenztheorem 7.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Variante 2: Festlegung des Analyseszenarios

...Verfügbarkeit für eine endliche Menge von Termen T.

Verband

- $\widehat{\mathcal{P}(T)} =_{df} (\mathcal{P}(T), \cap, \cup, \subseteq, \emptyset, T)$

  ...Potenzmengenverband von T: Kleinstes Element $\emptyset$, größtes Element T, Teilmengenrelation $\subseteq$ als Ordnungsrelation, Mengendurchschnitt $\cap$ und Mengenvereinigung $\cup$ als Schnitt- bzw. Vereinigungsoperation.

Variante 2: Spezifikation der DFA

DFA-Spezifikation

- DFA-Verband
  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top) =_{df} (\mathcal{P}(T), \cap, \cup, \subseteq, \emptyset, T) = \widehat{\mathcal{P}(T)}$
- DFA-Semantik
  $[\![\ ]\!]^T_{av} : E \to (\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T))$, wobei
  $\forall\, e \in E\ \forall\, T' \in \mathcal{P}(T).\ [\![e]\!]^T_{av}(T') =_{df}$
  $\{t \in T \mid (t \in T' \vee Comp^t_e) \wedge Transp^t_e\}$
- Anfangszusicherung: $T_s \in \mathcal{P}(T)$

Verfügbarkeitsspezifikation für T

- Spezifikation: $\mathcal{S}^{av,T}_G = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, [\![\ ]\!]^T_{av}, T_s)$

Variante 2: Erbringung d. Beweisverpflichtungen

Lemma 7.10.1.7 (Kettenbedingungen)

$\widehat{\mathcal{P}(T)}$ erfüllt die absteigende und aufsteigende Kettenbedingung.

Lemma 7.10.1.8 (Distributivität, Additivität)

$[\![\ ]\!]^T_{av}$ ist distributiv und additiv.

Korollar 7.10.1.9 (Monotonie)

$[\![\ ]\!]^T_{av}$ ist monoton.

Variante 2: Einsammeln der Garantien

...für Terminierung, Straffheit.

Theorem 7.10.1.10 (Terminierung)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{av,T} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, [\![\ ]\!]_{av}^T, T_{\mathbf{s}})$ terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*/*MinFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{av,T}$.

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.1.7, Korollar 7.10.1.9 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Theorem 7.10.1.11 (Straffheit)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{av,T} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, [\![\ ]\!]_{av}^T, T_{\mathbf{s}})$ ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*/*VUP*-straff für $\mathcal{S}_G^{av,T}$ (d.h. terminiert mit der *SUP*/*VUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{av,T}$).

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.1.8, Koinzidenztheorem 7.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Variante 3: Festlegung d. Analyseszenarios (1)

...Verfügbarkeit für eine endliche Menge von Termen T, $|T| = n$.

Verband

- $\widehat{\mathbb{B}^n} =_{df} (\mathbb{B}^n, \wedge_{pw}, \vee_{pw}, <_{pw}, \overline{\textbf{falsch}}, \overline{\textbf{wahr}})$

  ...n-stelliger Kreuzproduktverband über $\mathbb{B}$: Kleinstes Element $\overline{\textbf{falsch}} =_{df} (\textbf{falsch}, \ldots, \textbf{falsch}) \in \mathbb{B}^n$, größtes Element $\overline{\textbf{wahr}} =_{df} (\textbf{wahr}, \ldots, \textbf{wahr}) \in \mathbb{B}^n$, Ordnungsrelation $<_{pw}$ als punktweise Ausdehnung von $<$ von $\widehat{\mathbb{B}}$ auf $\widehat{\mathbb{B}^n}$, $\wedge_{pw}$ und $\vee_{pw}$ als punktweise Ausdehnung des logischen $\wedge$ und logischen $\vee$ von $\widehat{\mathbb{B}}$ auf $\widehat{\mathbb{B}^n}$ als Schnitt- bzw. Vereinigungsoperation.

Variante 3: Festlegung d. Analyseszenarios (2)

Hilfsfunktionen

- $ix : T \to \{1, \ldots, n\},\ ix^{-1} : \{1, \ldots, n\} \to T$

  ...bijektive Indexabbildungen, die jedem Term $t \in T$ eindeutig eine Zahl in $\{1, \ldots, n\}$ zuordnen und umgekehrt.

  Das $ix(t)$-te Element eines Tupels
  $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_{ix(t)}, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}^n$
  ist die für t in $\bar{b}$ abgelegte Verfügbarkeitsinformation.

- $\cdot\downarrow_\cdot : \mathbb{B}^n \to \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{B}$

  ...Projektionsfunktion, die das i-te Element eines Tupels $\bar{b} \in \mathbb{B}^n$ liefert, d.h. $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.\ \bar{b}\downarrow_i =_{df} b_i$.

Variante 3: Spezifik. der DFA (Kreuzp.-sicht)

DFA-Spezifikation (Kreuzproduktsicht (kps))

- DFA-Verband
  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top) =_{df}$
  $(\mathbb{B}^n, \wedge_{pw}, \vee_{pw}, <_{pw}, \overline{\textbf{falsch}}, \overline{\textbf{wahr}}) = \widehat{\mathbb{B}^n}$
- DFA-Semantik
  $[\![\ ]\!]^T_{av,kps} : E \to (\ \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n\ )$, wobei
  $\forall\, e \in E\ \forall\, v \in \mathbb{B}^n.\ [\![\ e\ ]\!]^T_{av,kps}(\bar{b}) =_{df} \bar{b}'$
  where $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.\ \bar{b}'\downarrow_i\ =_{df}$
  $(\bar{b}\downarrow_i\ \vee\ Comp_e^{ix^{-1}(i)}) \wedge Transp_e^{ix^{-1}(i)}$
- Anfangszusicherung: $\bar{b}_{\mathbf{s}} \in \mathbb{B}^n$

Verfügbarkeitsspezifikation für T

- Spezifikation: $\mathcal{S}_G^{av,T,kps} = (\widehat{\mathbb{B}^n}, [\![\ ]\!]^T_{av,kps}, \bar{b}_{\mathbf{s}})$

Variante 3: Hin zur Bitvektorsicht (1)

...als Implementierung von $\mathcal{S}_G^{av,T,kps}$:

- $\widehat{\mathbb{B}^n}$ kann effizient in Form von Bitvektoren der Länge n implementiert werden: $\vec{bv} = [d_1, \ldots, d_n]$, $d_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n$.
- Bezeichne $\mathcal{BV}^n$ die Menge aller Bitvektoren der Länge n.
- Sei $\vec{bv}[i] = d_i$ für alle $\vec{bv} = [d_1, \ldots, d_n] \in \mathcal{BV}^n$, $1 \leq i \leq n$.
- Sei $\vec{0} =_{df} [0, \ldots, 0] \in \mathcal{BV}^n$ und $\vec{1} =_{df} [1, \ldots, 1] \in \mathcal{BV}^n$.
- Bezeichnen $min_{\mathcal{BV}}$ und $max_{\mathcal{BV}}$ die bitweise Minimumsfunktion ('logisches $\wedge$') und die bitweise Maximumsfunktion ('logisches $\vee$') auf Bitvektoren, d.h.:
  $\forall\, \vec{bv_1}, \vec{bv_2} \in \mathcal{BV}^n\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.
  - $(\vec{bv_1}\ min_{\mathcal{BV}}\ \vec{bv_2})[i] =_{df} min(\vec{bv_1}[i], \vec{bv_2}[i])$
  - $(\vec{bv_1}\ max_{\mathcal{BV}}\ \vec{bv_2})[i] =_{df} max(\vec{bv_1}[i], \vec{bv_2}[i])$

Variante 3: Hin zur Bitvektorsicht (2)

Hilfsfunktionen:

- $ix : T \to \{1, \ldots, n\},\ ix^{-1} : \{1, \ldots, n\} \to T$

  ...bijektive Indexabbildungen, die jedem Term $t \in T$ eine eindeutig bestimmte Zahl in $\{1, \ldots, n\}$ zuordnen und umgekehrt.

  Das $ix(t)$-te Element eines Bitvektors
  $\vec{bv} = [d_1, \ldots, d_{ix(t)}, \ldots, d_n)] \in \mathcal{BV}^n$
  ist die für t in $\vec{bv}$ abgelegte Verfügbarkeitsinformation.

Variante 3: Hin zur Bitvektorsicht (3)

...Ausdehnung und Anpassung der lokalen Prädikate für Bitvektoren:

- $\overrightarrow{Comp}_e^T \in \mathcal{BV}^n$

  $$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.\ \overrightarrow{Comp}_e^T\ [i] =_{df} \begin{cases} 1 & \text{falls } Comp_e^{ix^{-1}(i)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\overrightarrow{Transp}_e^T \in \mathcal{BV}^n$

  $$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.\ \overrightarrow{Transp}_e^T\ [i] =_{df} \begin{cases} 1 & \text{falls } Transp_e^{ix^{-1}(i)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Variante 3: Spezifik. der DFA (Bitvektorsicht)

DFA-Spezifikation (Bitvektorsicht (bvs))

- DFA-Verband
  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top) =_{df}$
  $$(\mathcal{BV}^n, min_{\mathcal{BV}}, max_{\mathcal{BV}}, <_{\mathcal{BV}}, \vec{0}, \vec{1}) = \widehat{\mathcal{BV}^n}$$
- DFA-Semantik
  $[\![\ ]\!]^T_{av,bvs} : E \to (\ \mathcal{BV}^n \to \mathcal{BV}^n\ )$, wobei
  $\forall\, e \in E\ \forall\, \vec{bv} \in \mathcal{BV}^n.\ [\![\ e\ ]\!]^T_{av,bvs}(\vec{bv}) =_{df}$
  $$(\vec{bv}\ max_{\mathcal{BV}}\ \overrightarrow{Comp}^T_e)\ min_{\mathcal{BV}}\ \overrightarrow{Transp}^T_e$$
- Anfangszusicherung: $\vec{bv_s} \in \mathcal{BV}^n$

Verfügbarkeitsspezifikation für T

- Spezifikation: $\mathcal{S}^{av,T,bvs}_G = (\widehat{\mathcal{BV}^n}, [\![\ ]\!]^T_{av,bvs}, \vec{bv_s})$

Variante 3: Erbringung d. Beweisverpflichtungen

Lemma 7.10.1.12 (Kettenbedingungen)

$\widehat{\mathbb{B}^n}$ und $\widehat{\mathcal{BV}^n}$ erfüllen die absteigende und aufsteigende Kettenbedingung.

Lemma 7.10.1.13 (Distributivität, Additivität)

$[\![\ ]\!]^T_{av,kps}$ und $[\![\ ]\!]^T_{av,bvs}$ sind distributiv und additiv.

Corollary 7.10.1.14 (Monotonie)

$[\![\ ]\!]^T_{av,kps}$ und $[\![\ ]\!]^T_{av,bvs}$ sind monoton.

Variante 3: Einsammeln der Garantien (1)

...für Terminierung.

Theorem 7.10.1.15 (Terminierung)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{av,T,kps} = (\widehat{\mathbb{B}^n}, [\![\ ]\!]^T_{av,kps}, \bar{b}_{\mathbf{s}})$ oder $\mathcal{S}_G^{av,T,bvs} = (\widehat{\mathcal{BV}^n}, [\![\ ]\!]^T_{av,bvs}, \vec{bv}_{\mathbf{s}})$ terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*/*MinFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{av,T,kps}$ bzw. $\mathcal{S}_G^{av,T,bvs}$.

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.1.12, Korollar 7.10.1.14 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Variante 3: Einsammeln der Garantien (2)

...für Straffheit.

Theorem 7.10.1.16 (Straffheit)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{av,T,kps} = (\widehat{\mathbb{B}^n}, [\![\ ]\!]_{av,kps}^T, \bar{b}_s)$ oder $\mathcal{S}_G^{av,T,bvs} = (\widehat{\mathcal{BV}^n}, [\![\ ]\!]_{av,bvs}^T, \vec{bv}_s)$ ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*/*VUP*-straff für $\mathcal{S}_G^{av,T,cpv}$ bzw. $\mathcal{S}_G^{av,T,bvv}$ (d.h. terminiert mit der *SUP*/*VUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{av,T,kps}$ bzw. $\mathcal{S}_G^{av,T,bvs}$).

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.1.13, Koinzidenztheorem 7.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Beachte:

- Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{av,T,bvs}$ statt seines Kreuzproduktgegenstücks profitiert Algorithmus 7.6.1.1 von den Vorteilen der auf Prozessoren vorhandenen effizienten Bitvektoroperat.
- Man bezeichnet Verfügbarkeit deshalb als Bitvektorprobl.

Variante 4: Festlegung des Analyseszenarios

...Verfügbarkeit für eine endliche Menge von Termen T.

Einführung sog. Gen/Kill-Prädikate für Kanten

- $Gen_e^T =_{df} \{t \in T \mid Comp_e^t \wedge \neg Mod_e^t\}$
  $= \{t \in T \mid Comp_e^t \wedge Transp_e^t\}$
- $Kill_e^T =_{df} \{t \in T \mid Mod_e^t\}$
  $= \{t \in T \mid \neg Transp_e^t\}$

Variante 4: Spezifik. der DFA (gen/kill-Sicht)

DFA-Spezifikation (gen/kill-Sicht (gks))

- DFA-Verband
  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top) =_{df} (\mathcal{P}(T), \cap, \cup, \subseteq, \emptyset, T) = \widehat{\mathcal{P}(T)}$
- DFA-Semantik
  $[\![\ ]\!]^T_{av,gks} : E \to (\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T))$, wobei
  $\forall e \in E\ \forall T' \in \mathcal{P}(T).\ [\![e]\!]^T_{av,gks}(T') =_{df} (T' \setminus Kill^T_e) \cup Gen^T_e$
- Anfangszusicherung: $T_{\mathbf{s}} \in \mathcal{P}(T)$

Verfügbarkeitsspezifikation für T

- Spezifikation: $\mathcal{S}^{av,T,gks}_G = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, [\![\ ]\!]^T_{av,gks}, T_{\mathbf{s}})$

Variante 4: Erbringung d. Beweisverpflichtungen

Vergleiche

- $[\![\ ]\!]^T_{av,gks} : E \to (\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T))$, wobei
  $\forall e \in E\, \forall T' \in \mathcal{P}(T).\ [\![e]\!]^T_{av,gks}(T') =_{df} (T' \setminus Kill^T_e) \cup Gen^T_e$

mit

- $[\![\ ]\!]^T_{av} : E \to (\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T))$, wobei
  $\forall\, e \in E\ \forall\, T' \in \mathcal{P}(T).\ [\![e]\!]^T_{av}(T') =_{df}$
  $\{t \in T \mid (t \in T' \vee Comp^t_e) \wedge Transp^t_e\}$

...wir erhalten:

Lemma 7.10.1.17 (Gleichheit)

$$[\![\ ]\!]^T_{av} = [\![\ ]\!]^T_{av,gks}$$

Variante 4: Einsammeln der Garantien

...für Terminierung, Straffheit.

Theorem 7.10.1.18 (Terminierung)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{av,T,gks} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, [\![\ ]\!]_{av,gks}^T, T_s)$ terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*/*MinFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{av,T,gks}$.

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.1.7, Lemma 7.10.1.8, Korollar 7.10.1.9 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Theorem 7.10.1.19 (Straffheit)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{av,T,gks} = (\widehat{\mathcal{P}(T)}, [\![\ ]\!]_{av,gks}^T, T_s)$ ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*/*VUP*-straff für $\mathcal{S}_G^{av,T,gks}$ (d.h. terminiert mit der *SUP*/*VUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{av,T,gks}$).

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.1.7, Lemma 7.10.1.8, Koinzidenztheorem 6.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Verfügbarkeit erneut als Gen/Kill-Problem (1)

...Spezialisierung des generischen *MaxFP*-Gleichungssystems 7.5.1.1:

Gleichungssystem 7.5.1.1 (*MaxFP*-Gleichungssyst.)

$$inf(n) = \begin{cases} c_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigsqcap \{ [\![(m,n)]\!](inf(m)) \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

...für das Verfügbarkeitsproblem liefert:

Gleichungssystem 7.10.1.20 (Verfügbarkeit)

$$Available(n) = \begin{cases} T_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigcap \{ [\![(m,n)]\!]^{T}_{av,gks}(Available(m)) \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Verfügbarkeit erneut als Gen/Kill-Problem (2)

...durch zusätzliches Expandieren von $[\![\ ]\!]^T_{av,gks}$ erhalten wir:

Gleichungssystem 7.10.1.21 (Verfügbarkeit)

$$Available(n) =$$

$$\begin{cases} T_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigcap \{ (Available(m) \setminus Kill^T_{(m,n)}) \cup Gen^T_{(m,n)} \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte: Sowohl Gleichungssystem 7.10.1.21 als auch die Definition der DFA-Semantik

- $[\![\ ]\!]^T_{av,gks} : E \to (\mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T))$ where

  $\forall e \in E\ \forall T' \in \mathcal{P}(T).\ [\![e]\!]^T_{av,gks}(T') =_{df} (T' \setminus Kill^T_e) \cup Gen^T_e$

legen nahe, Verfügbarkeit als Gen/Kill-Problem anzusehen und zu bezeichnen.

Gen/Kill- (oder Bitvektor-) Probleme

...die Eigenschaften wie

- Verfügbarkeit, große Beschäftigtheit von Termen, Lebendigkeit, erreichende Definitionen von Variablen, etc.

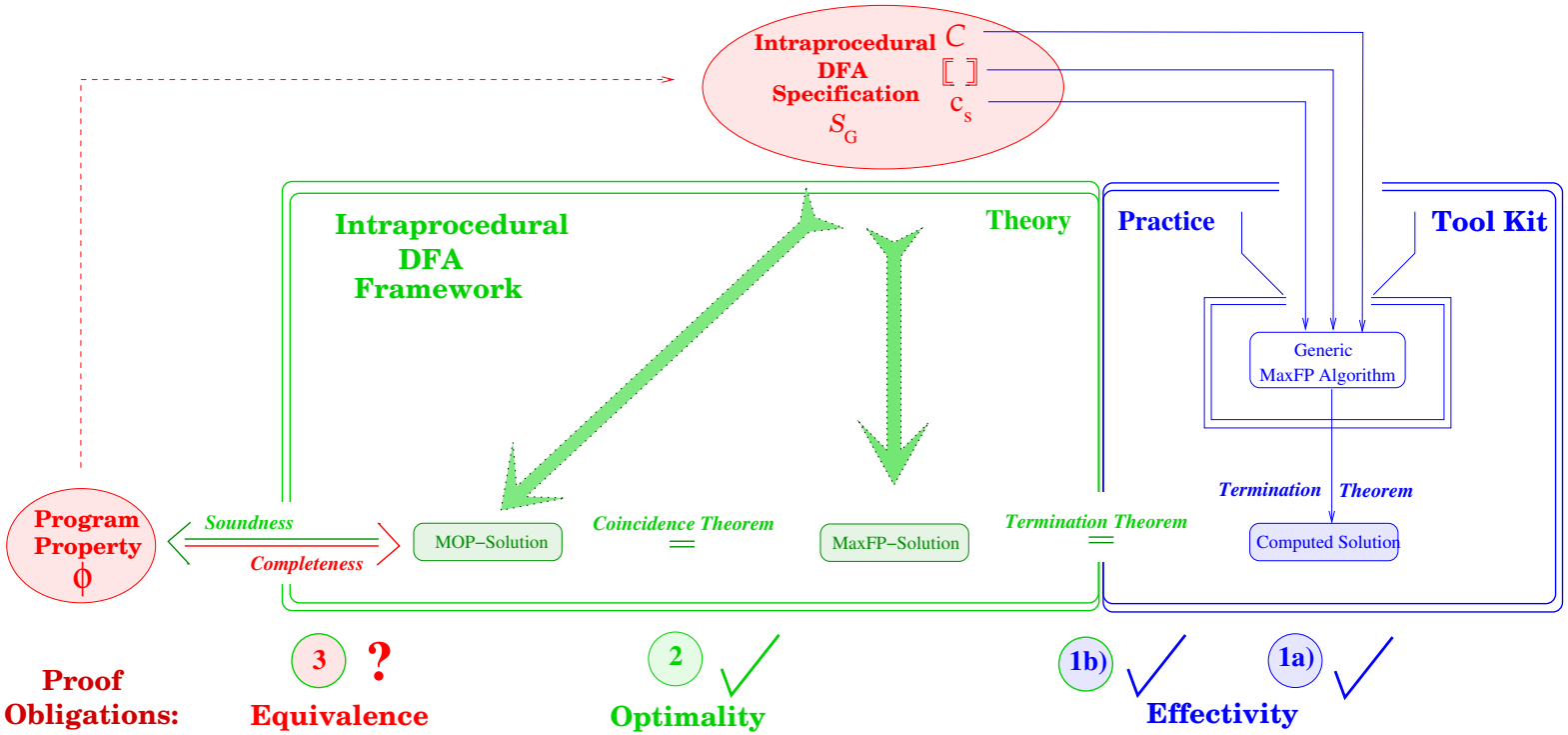
umfassen, bilden trotz ihrer konzeptuellen Einfachheit eine sehr wichtige Klasse von DFA-Problemen, die zahlreiche Anwendungen in der Programmoptimierung hat, darunter für:

- Elimination partiell redundanter Ausdrücke (busy/lazy code motion)
- Reduktion der Operatorstärke (busy/lazy strength reduction)
- Elimination partiell toter Anweisungen
- Elimination partiell redundanter Anweisungen
- Anweisungsschieben
- ...

...siehe LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer für mehr Details.

Variante 1: Schließen der letzten Beweislücke

...am Beispiel des Korrektheits- und Vollständigkeitsbeweises für die *SUP*-Sicht der Verfügbarkeitseigenschaft, $\mathcal{S}_G^{av,t}$ (Variante 1):



Zur Erinnerung

...informell, ein Term ist verfügbar an einem Knoten

- wenn egal auf welchem Pfad vom Programmanfang zu diesem Knoten der Term berechnet wird, ohne dass anschließend eine seiner Operandenvariablen vor Erreichen dieses Knotens einen Wert zugewiesen bekommt.

Beachte

- Wenn Programmanfang durch Prozeduranfang ersetzt wird, trifft die informelle 'Definition' von Verfügbarkeit keine Vorsorge für den Fall, dass ein Ausdruck am Prozeduranfang selbst verfügbar ist.
- Fälle, in denen die Verfügbarkeit am Prozeduranfang durch die Aufrufkontexte der Prozedur sichergestellt werden, sind deshalb nicht erfasst und können nicht behandelt werden.

Hin zu einer formalen Verfügbarkeitsdefinition

...nützliche Schreibweisen.

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Flussgraph und *Predicate* ein für Kanten $e \in E$ definiertes Prädikat.

Für Pfade $p = \langle e_1, \ldots, e_q \rangle \in \mathbf{P}[m, n]$ definieren wir:

- p_i, $1 \leq i \leq q$, bezeichnet die i-te Kante e_i von p.
- $p_{[k,l]}$ bezeichnet den Teilpfad $\langle e_k, \ldots, e_l \rangle$ von p.
- $\lambda_p = q$ bezeichnet die Länge von p, d.h. die Zahl der Kanten von p.

Für Prädikate auf Pfaden definieren wir:

- $Predicate_p^{\forall} \iff_{df} \forall\, 1 \leq i \leq \lambda_p.\ Predicate_{p_i}$
- $Predicate_p^{\exists} \iff_{df} \exists\, 1 \leq i \leq \lambda_p.\ Predicate_{p_i}$

Verfügbarkeit

...formal definiert:

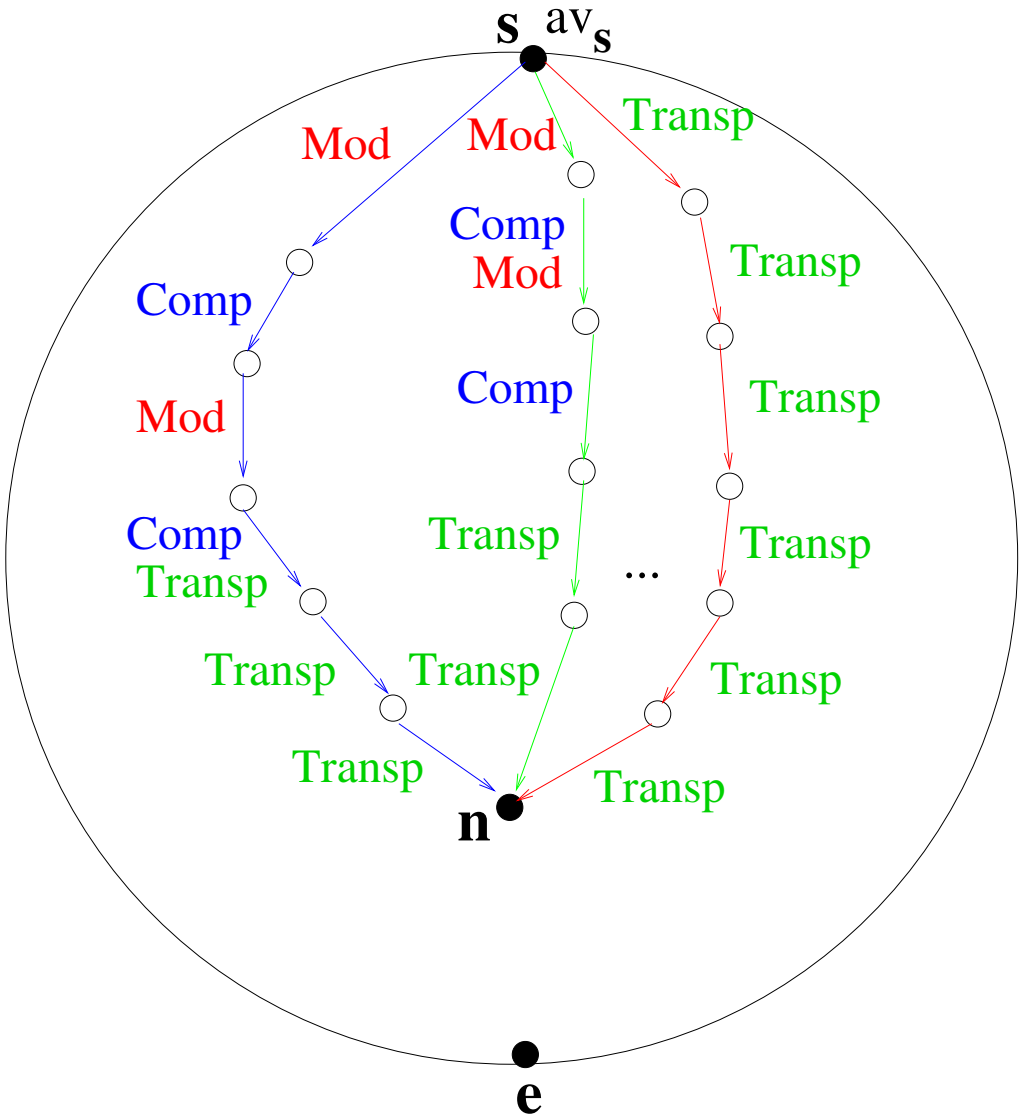
Definition 7.10.1.22 (Verfügbarkeit)

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Flussgraph, t ein Term und $av_{\mathbf{s}} \in \mathbb{B}$ die durch den Aufrufkontext von G für t an $\mathbf{s}$ zugesicherte Anfangsinformation. Dann legen wir fest:

$$Available^t(n) \iff_{df}$$

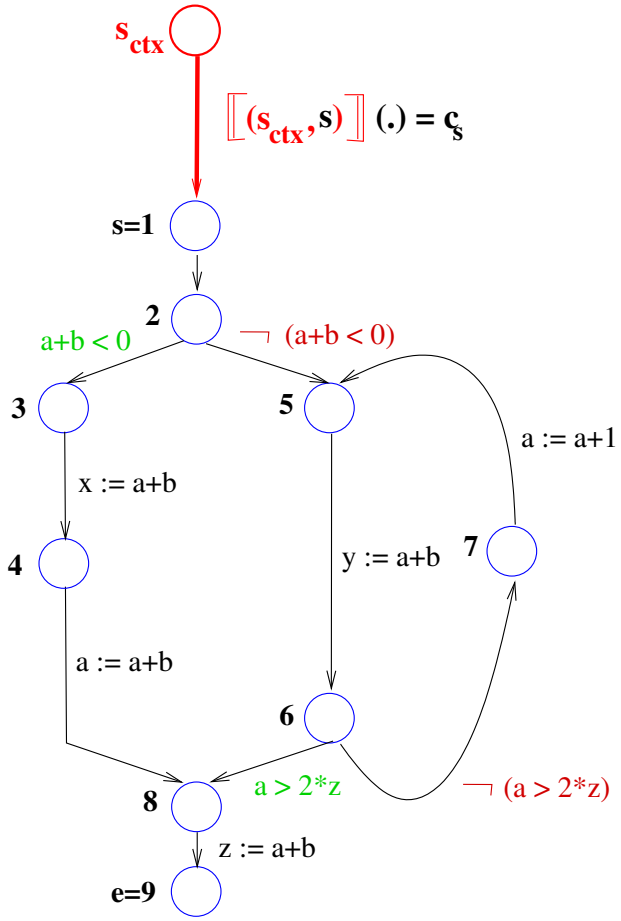
$$\begin{cases} av_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \forall\, p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}, n].\ (av^t_{\mathbf{s}} \wedge Transp^t{}^{\forall}_{p}) \ \vee & \\ \qquad \exists\, i \leq \lambda_p.\ Comp^t_{p_i} \wedge Transp^t{}^{\forall}_{p[i,\lambda_p]} & \text{sonst} \end{cases}$$

Veranschaulichung d. Kerns von Def. 7.10.1.22

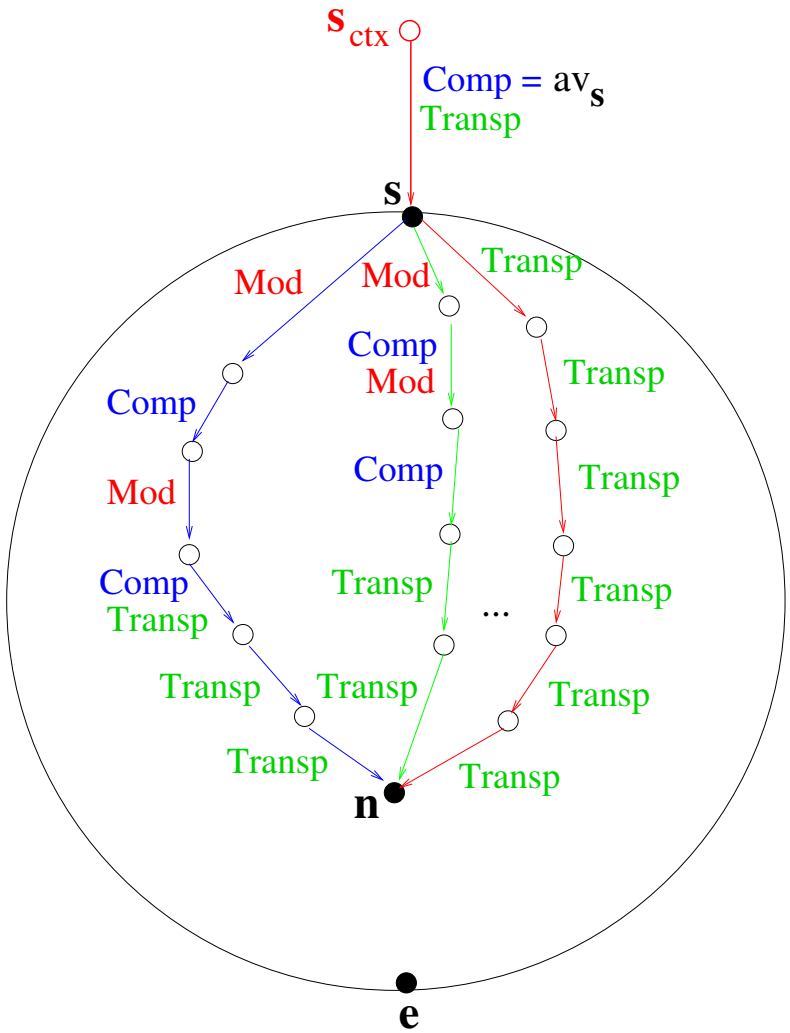


Kontextkanten

...erlauben eine einfachere, fallunterscheidungsfreie Definition von Verfügbarkeit:



Ausnutzung der Kontextkante



...Verfügbarkeit kann fallunterscheidungsfrei definiert werden:

$$\forall\, n \in N \backslash \{\mathbf{s}_{ctx}\}.\ \mathit{Available}^t(n) \iff_{df}$$
$$\forall\, p \in \mathbf{P}[\mathbf{s}_{ctx}, n].\ \exists\, i \leq \lambda_p.\ \mathit{Comp}^t_{p_i} \wedge \mathit{Transp}^{t\,\forall}_{p[i,\lambda_p]}$$

Schließen der letzten Beweislücke

Theorem 7.10.1.23 (Korrektheit und Vollständigkeit)

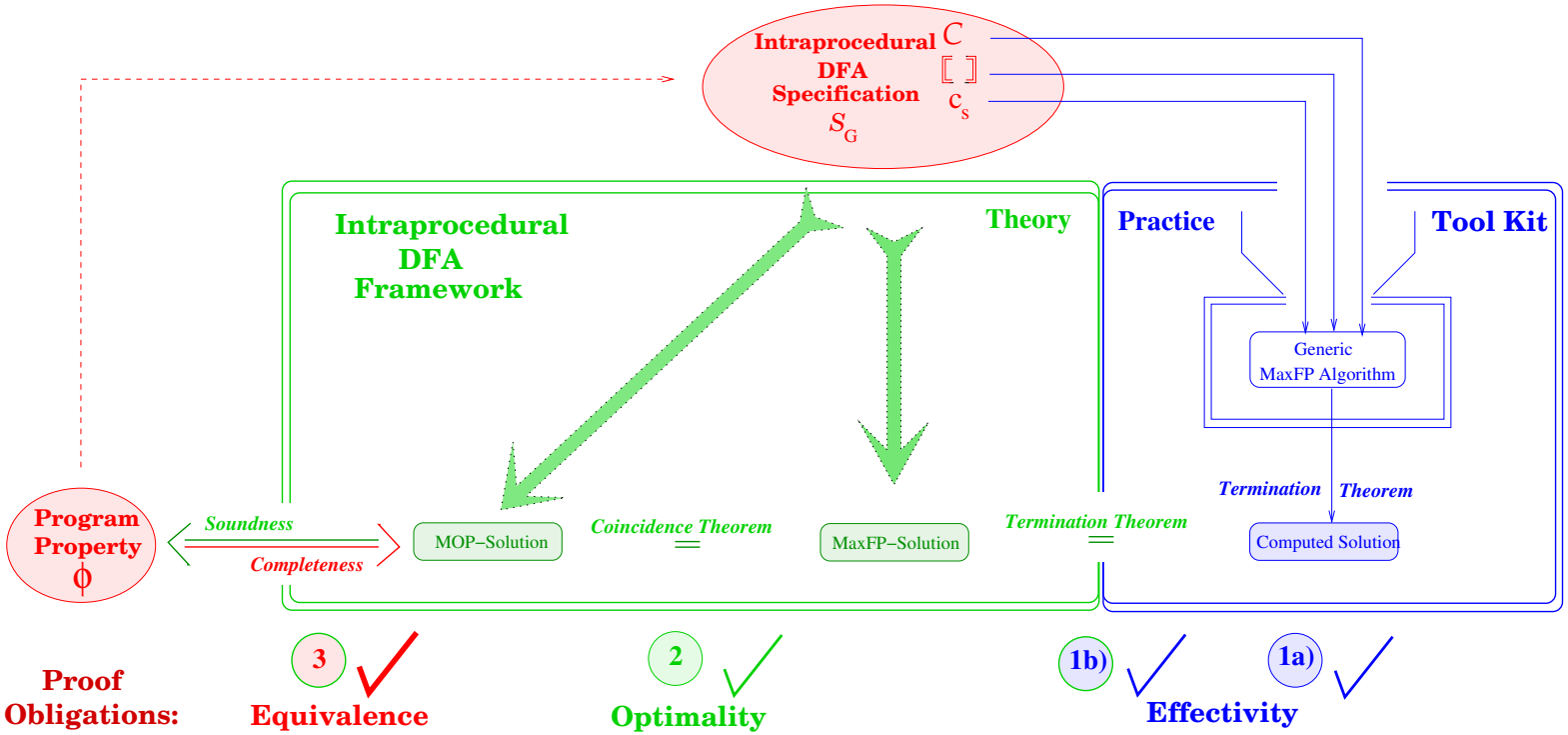
Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Flussgraph, t ein Ausdruck, $av_{\mathbf{s}} \in \mathbb{B}$ die durch die Aufrufkontexte von G zugesicherte Verfügbarkeitsinformation für t am Startknoten $\mathbf{s}$ und sei $[\![\ ]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}^{av,t}_G}$ die SUP-Semantik von G für die DFA-Spezifikation $\mathcal{S}^{av,t}_G = (\widehat{\mathbb{B}}, [\![\ ]\!]^t_{av}, av_{\mathbf{s}}, fw)$.

Dann gilt:

$$\forall\, n \in N.\ Available^t(n) \iff [\![\, n \,]\!]^{SUP}_{\mathcal{S}^{av,t}_G}$$

Lücke geschlossen: Korrektheit/Vollständigkeit

...für die *SUP*-Sicht von $\mathcal{S}_G^{av,t}$ für die Verfügbarkeit eines Terms bewiesen:



Übungsaufgabe 7.10.1.24

1. Was bedeuten Korrektheit und Vollständigkeit
2. Wie könnnen Korrektheit und Vollständigkeit bewiesen werden

...für die *VUP*-Sicht von $\mathcal{S}_G^{av,t}$ für die Verfügbarkeit von Termen?

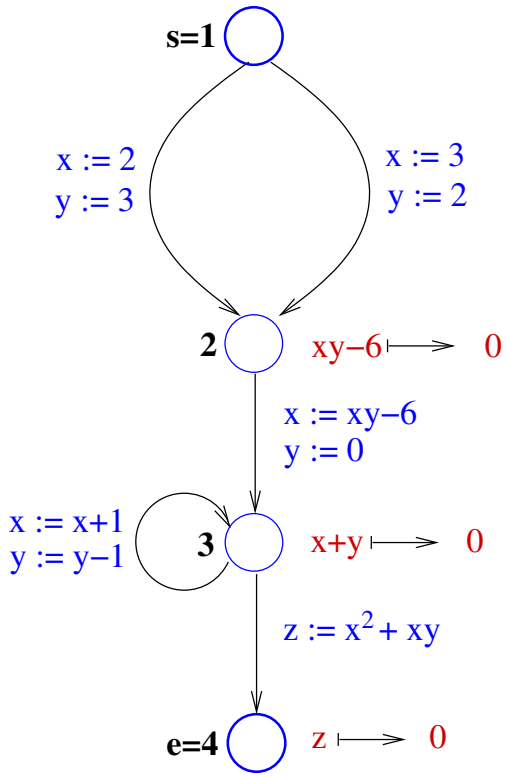
Kapitel 7.10.2

Monotone DFA: Einfache Konstanten

Intuitiv

...ein Term ist eine Konstante mit Wert c an einem Knoten, wenn egal auf welchem Pfad vom Programmanfang bis zu diesem Knoten die Auswertung des Terms an diesem Knoten Wert c liefert.

Veranschaulichung:



Beispiel von Markus Müller-Olm, Helmut Seidl (SAS 2002)

Konstantenausbreitung und -faltung

...Terme mit konstantem Wert können zur Übersetzungszeit durch diesen Wert ersetzt werden, wodurch Berechnungsaufwand zur Laufzeit eines Programms in seine Übersetzungszeit verlagert und die Laufzeitperformanz verbessert wird, eine sog. Programmoptimierung, die als Konstantenausbreitung und -faltung bekannt ist.

Leider gibt es keinen Algorithmus, der stets erfolgreich ist, zu bestimmen, ob ein Term eine Konstante eines bestimmten Werts ist oder nicht.

Unentscheidbarkeit von Konstantenerkennung

Theorem 7.10.2.1 (Unentscheidb., Reif&Lewis 1977)

Das Problem, alle Ausdrücke zu bestimmen, die im Bereich ganzzahliger Arithmetik einen konstanten Wert haben, ist unentscheidbar.

John H. Reif, Harry R. Lewis. Symbolic Evaluation and the Global Value Graph. In Conference Record of the 4th Annual SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77), 104-118, 1977.

Beweisskizze für Theorem 7.10.2.1 (1)

Der Beweis von Theorem 7.10.2.1 besteht darin, Hilberts 10-tes Problem auf das Problem der Konstantenerkennung zu reduzieren:

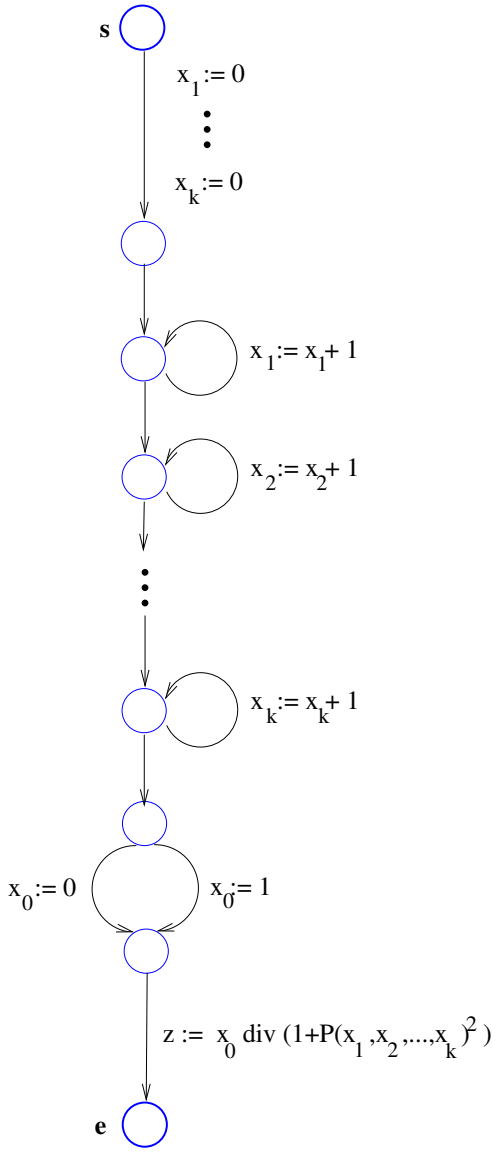
- Hilberts 10-tes Problem

  Sei $\{x_1, \ldots, x_k\}$ eine Menge von Variables, $k > 5$, und sei $P(x_1, \ldots, x_k)$ ein (multivariates) Polynom über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$.

  Es ist nicht entscheidbar, ob $P(x_1, \ldots, x_k)$ eine Wurzel in den natürlichen Zahlen hat (Matijasevič 1970).

Beweisskizze für 7.10.2.1 (2)

...betrachte folgendes durch seinen Flussgraphen gegebene Programm G:



Beweisskizze für Theorem 7.10.2.1 (3)

Zeige:

P hat keine Wurzel in den natürlichen Zahlen gdw

z hat einen konstanten Wert am Knoten **e** von G

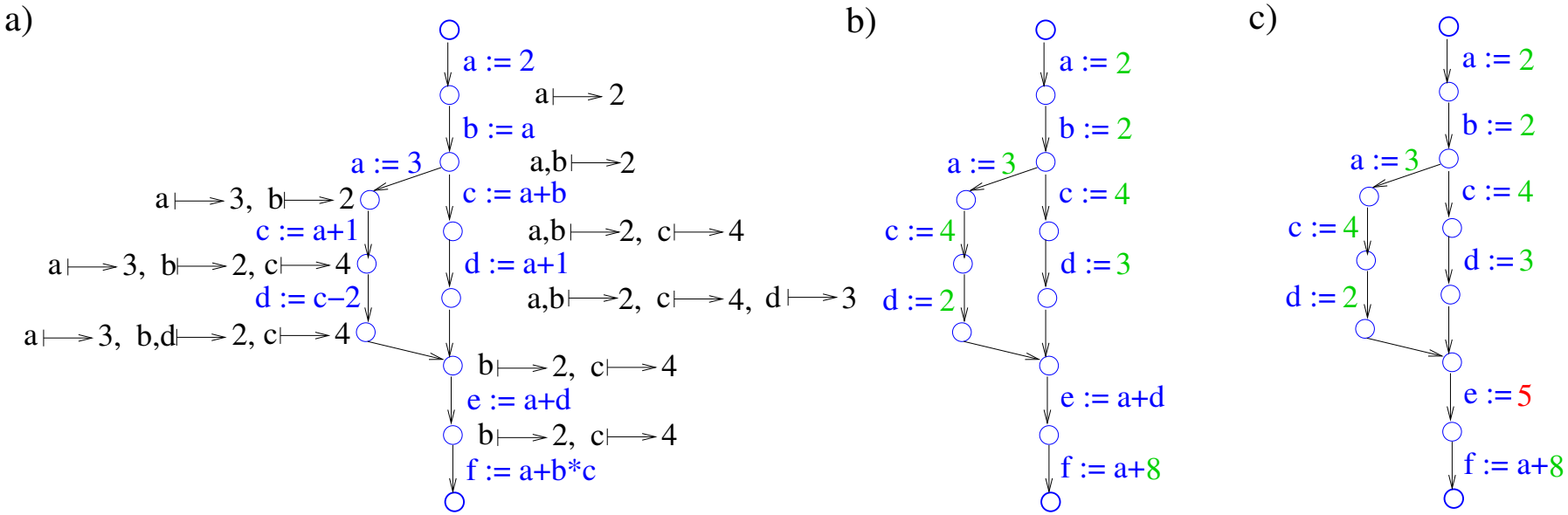
Der Nachweis dieser Äquivalenz erbringt den Beweis von Theorem 7.10.2.1 und schließt ihn ab. □

Einfache Konstanten

...aufgrund dieses negativen Resultats, betrachtet man in der Praxis einfachere entscheidbare Varianten (oder Klassen) des Konstantenausbreitungs- und faltungsproblems, eine davon ist die Klasse der sog. einfache Konstanten.

Informell, ein Term ist eine einfache Konstante (engl. simple constant) an einem Programmpunkt, wenn jeder seiner Operanden einen eindeutigen konstanten Wert an diesem Punkt hat, unabhängig davon, auf welchem Pfad vom Programmanfang aus dieser Punkt erreicht wird.

Veranschaulichung einfacher Konstanten (1)



Beachte:

- Mit Ausnahme von $a + d$ und $a + 8$ sind alle Terme im Beispiel einfache Konstanten (Abbildung b)).
- Der Term $a + d$ ist konstant mit Wert 5, jedoch keine einfache Konstante (Abbildung c)).

Veranschaulichung einfacher Konstanten (2)

- Keiner der (nichttrivialen) Terme im Eingangsbeispiel von Müller-Olm und Seidl ist eine einfache Konstante.
- $a + d$ wie alle Terme im Beispiel von Müller-Olm/Seidl können von ausgefeilteren (und im zweiten Fall wesentlich berechnungsaufwändigeren) Verfahren als Konstanten erkannt werden (s. LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer für Details).

...die Erkennung einfacher Konstanten ist

- kanonisches Beispiel eines monotonen (nichtdistributiven) DFA-Problems.
- Beispiel einer korrekten, unvollständigen Analyse, die viele als Konstanten erkennbare Terme nicht als konstant erkennt, die aber effizient mit noch immer nützlichen Ergebnissen für die Programmoptimierung ist: Aufgabe von Vollständigkeit zugunsten von Effizienz! (engl. trading completeness for efficiency!

Berechnung einf. Konstanten: Vorbereitungen

...von Datenbereichen zu DFA-Verbänden.

Sei $\mathbb{ID}$ ein

- interessierender Datenbereich (engl. data domain) (z.B. die Menge natürlicher Zahlen $\mathbb{N}$, die Menge ganzer Zahlen $\mathbb{Z}$, die Menge der Wahrheitswerte $\mathbb{B}$, etc.) mit einem ausgezeichneten Element $\bot$, das den Wert *undefiniert* darstellt.

Wir erweitern $\mathbb{ID}$ um ein neues

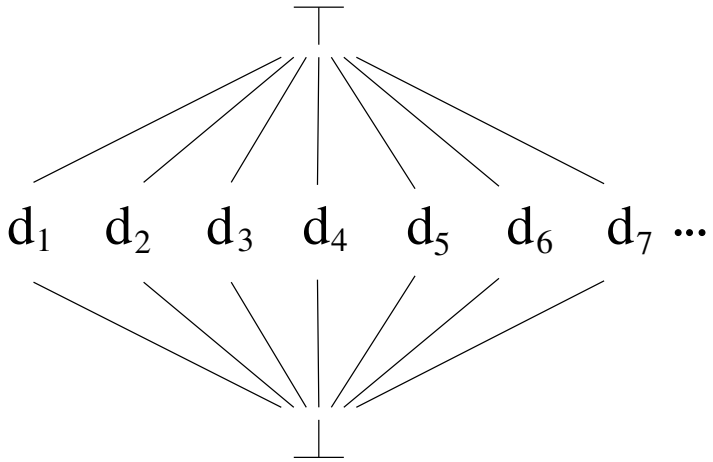
- neues Element $\top$ nicht in $\mathbb{ID}$, d.h. $\top \notin \mathbb{ID}$

und bezeichnen den erweiterten Bereich mit $\mathbb{ID}' =_{df} \mathbb{ID} \cup \{\top\}$.

Bem: $\bot$ als Element des zugrundeliegenden Datenbereichs anzunehmen, $\top$ jedoch nicht, erscheint willkürlich. Der Grund dafür ist, dass Datentypen oft so implementiert sind, dass sie einen speziellen Wert mit der Bedeutung 'undefiniert' enthalten.

Konstruktion von DFA-Verbänden

...ist $\mathbb{ID}'$ ein erweiterter Datenbereich, konstruieren wir den flachen Verband (engl. flat lattice) $\mathcal{FV}_{\mathbb{ID}'}$ (s. Anhang A.4)



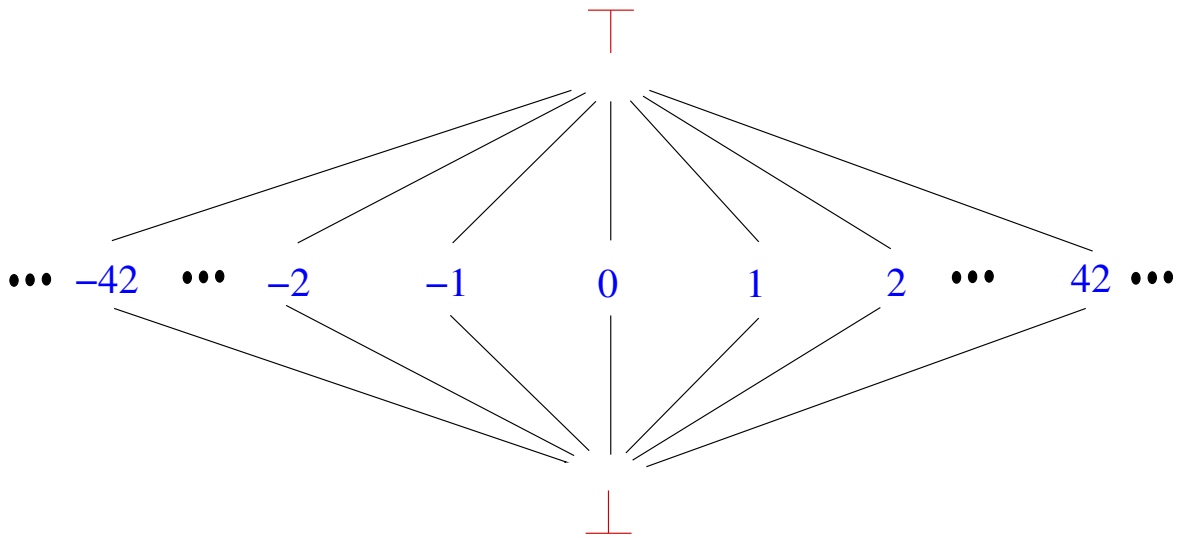
der der basale DFA-Verband der DFA-Analyse für einfache Konstanten ist.

Intuitiv

- $\top$ repräsentiert vollständige, aber inkonsistente Information.
- d_i, $i \geq 1$, repräsentiert akkurate Information.
- $\bot$ repräsentiert keine Information, die 'leere' Information.

Der basale DFA-Verband über $\mathbb{Z}$

...ist gegeben durch den flachen Verband $\mathcal{FV}_{\mathbf{Z}}$:



...der zur Berechnung der Klasse einfacher Konstanten über $\mathbb{Z}$ verwendet wird.

Abstrakte Programmzustände: DFA-Zustände

Definition 7.10.2.2 (DFA-Zustände)

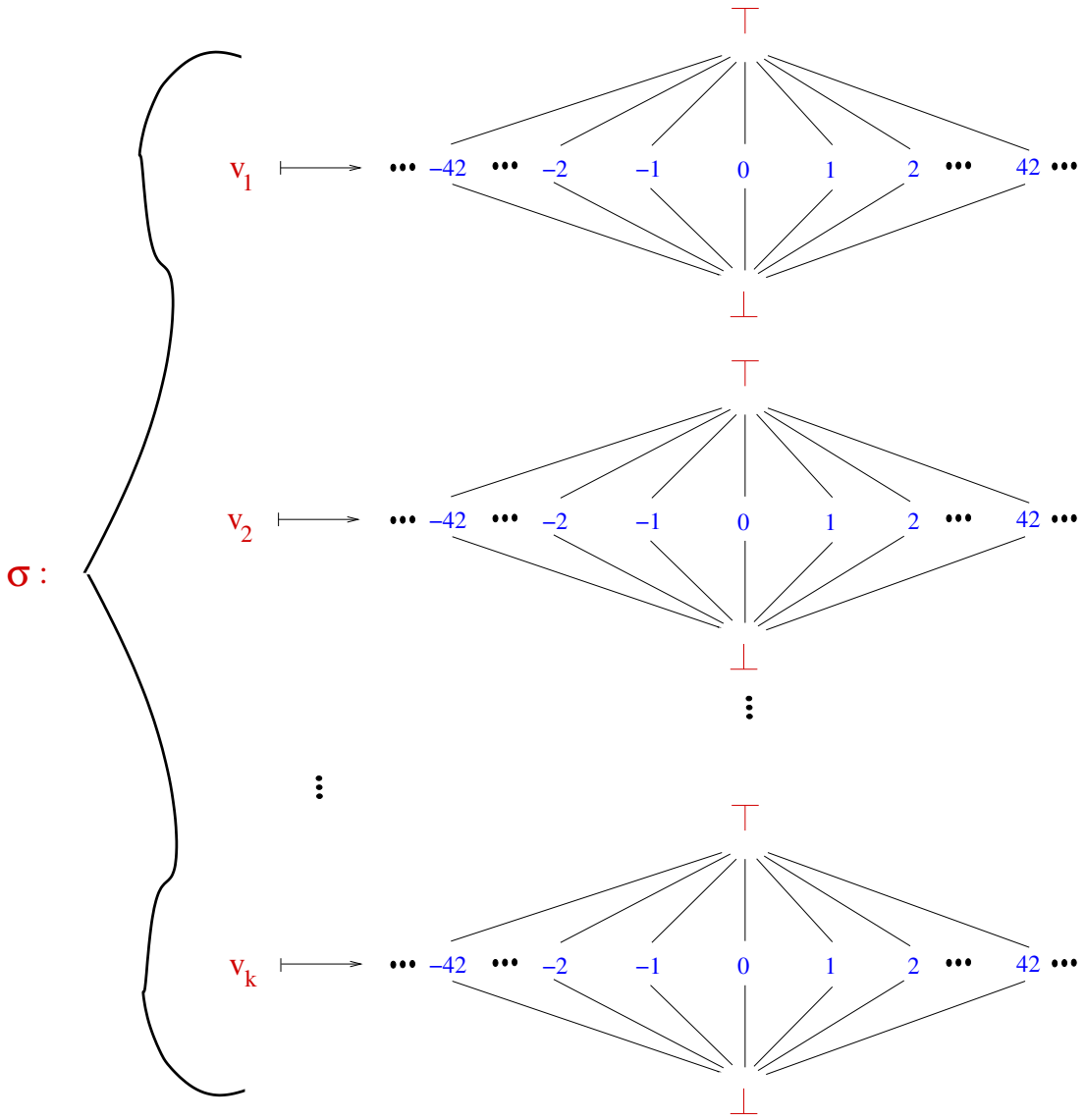
1. Ein DFA-Zustand ist eine totale Abbildung $\sigma : \mathbf{V} \to \mathbb{ID}'$, die jeder Variablen ein Datum $d \in \mathbb{ID}'$ zuweist.
2. Die Menge aller DFA-Zustände ist definiert durch:

$$\Sigma' =_{df} \{ \sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \to \mathbb{ID}' \}.$$

3. $\sigma_\bot$ und $\sigma_\top$ bezeichnen zwei ausgezeichnete DFA-Zustände aus Σ', die folgendermaßen definiert sind:

$$\sigma_\bot = \lambda v. \bot, \ \sigma_\top = \lambda v. \top.$$

Veranschaulichung: DFA-Zustand σ über $\mathbb{Z}$



Initiale DFA-Zustände

...für initiale DFA-Zustände verlangen wir, dass keiner Variablen der besondere Wert $\top$ zugewiesen ist, d.h. wir verlangen entweder akkurate Information über den Wert einer Variablen am Prozeduranfang zu haben oder gar keine. Wir definieren:

Definition 7.10.2.3 (Initiale DFA-Zustände über ID′)

Die Menge initialer DFA-Zustände über ID' ist definiert durch:

$$\Sigma'_{Init} =_{df} \{ \sigma \in \Sigma' \mid \forall\, v \in \mathbf{V}.\ \sigma(v) \neq \top \}$$

Ausdehnung der Interpretation

...für Konstanten- und Operatorsymbole von ID auf ID′.

Definition 7.10.2.4 (Ausdehnung der Interpretation)

Sei $I =_{df} (\mathrm{ID}, I_0)$ eine Interpretation der Konstanten- und Operatorsymbole über dem Datenbereich ID.

Dann ist $I' =_{df} (\mathrm{ID}', I_0')$ diejenige Interpretation über ID′, die I in folgender Weise ausdehnt:

- $I_0'(c) =_{df} I_0(c)$ für jedes Konstantenssymbol $c \in \mathbf{C}$
- $I_0'(op) : \mathrm{ID}'^k \to \mathrm{ID}'$ für jedes k-st. Operatorsymbol $op \in \mathbf{O}$:

$$\forall (d_1, \ldots, d_k) \in \mathrm{ID}'^k.\ I_0'(op)(d_1, \ldots, d_k) =_{df}$$

$$\begin{cases} I_0(op)(d_1, \ldots, d_k) & \text{falls } d_i = \bot \text{ für einige } 1 \leq i \leq k, \\ & \quad \text{oder } d_j \neq \top,\ 1 \leq j \leq k \\ \top & \text{falls } d_i \neq \bot,\ 1 \leq i \leq k, \text{ und} \\ & \quad d_j = \top \text{ for some } 1 \leq j \leq k \end{cases}$$

Die abstrakte Termsemantik über ID′

Definition 7.10.2.5 (AbstrakteTermsemantik)

Die abstrakte Semantik von Termen $t \in \mathbf{T}$ ist durch die Auswertungsfunktion

$$\mathcal{A} : \mathbf{T} \to (\Sigma' \to \mathrm{ID}')$$

gegeben, die folgendermaßen definiert ist:

$$\forall t \in \mathbf{T}\ \forall \sigma \in \Sigma'.\ \mathcal{A}(t)(\sigma) =_{df} \begin{cases} \sigma(x) & \text{falls } t \equiv x \in \mathbf{V} \\ I'_0(c) & \text{falls } t \equiv c \in \mathbf{C} \\ I'_0(op)(\mathcal{A}(t_1)(\sigma), \ldots, \mathcal{A}(t_k)(\sigma)) & \\ & \text{falls } t \equiv (op, t_1, \ldots, t_k) \end{cases}$$

Die abstrakte Instruktionssemantik

Definition 7.10.2.6 (Abstrakte Instruktionssemantik)

Die abstrakte Semantik

- einer Zuweisung $\iota \equiv x := t$ ist durch die Zustandstransformation(sfunktion) (engl. state transformer) $\theta_\iota \colon \Sigma' \to \Sigma'$ gegeben, die definiert ist durch:

$$\forall\, \sigma \in \Sigma'\ \forall\, y \in \mathbf{V}.\ \theta_\iota(\sigma)(y) =_{df} \begin{cases} \mathcal{A}(t)(\sigma) & \text{falls } y = x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

- der leeren Anweisung $\iota \equiv \mathit{skip}$ und einer (Verzweigungs-)Bedingung $\iota \equiv \mathit{cond}$ ist durch die identische Zustandstransformation $\mathit{Id}_{\Sigma'}$ gegeben, d.h.: $\theta_\iota =_{df} \mathit{Id}_{\Sigma'}$ mit $\mathit{Id}_{\Sigma'} =_{df} \lambda\sigma.\,\sigma$.

Bem: Die Ausführung von *skip* und die Auswertung von Bedingungen sind seiteneffektfrei.

Der DFA-Verband für einfache Konstanten

...die Menge der DFA-Zustände bildet zusammen mit der punktweisen Ordnung auf Zuständen, $\sqsubseteq_{\Sigma'}$, einen vollständigen Verband (s. Anhang A.4):

$$\forall\, \sigma, \sigma' \in \Sigma'.\ \sigma \sqsubseteq_{\Sigma'} \sigma' \iff_{df} \forall\, v \in \mathbf{V}.\ \sigma(v) \sqsubseteq_{\mathcal{FV}_{\mathbb{D}'}} \sigma'(v)$$

Lemma 7.10.2.7 (Verband der DFA-Zustände)

$\widehat{\Sigma'} =_{df} (\Sigma', \sqcap_{\Sigma'}, \sqcup_{\Sigma'}, \sqsubseteq_{\Sigma'}, \sigma_\bot, \sigma_\top)$ ist ein vollständiger Verband mit

- kleinstem Element $\sigma_\bot$,
- größtem Element $\sigma_\top$,
- punktweisem Schnitt $\sqcap_{\Sigma'}$ und Vereinigung $\sqcup_{\Sigma'}$ als Schnitt- bzw. Vereinigungsoperation.

Einfache Konstanten: Spezifikation der DFA

DFA-Spezifikation

- DFA-Verband
  $\widehat{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top) =_{df}$
  $(\Sigma', \sqcap_{\Sigma'}, \sqcup_{\Sigma'}, \sqsubseteq_{\Sigma'}, \sigma_\bot, \sigma_\top) = \widehat{\Sigma}'$
  mit Σ' Menge der DFA-Zustände über $\mathbb{Z}$.
- DFA-Semantik
  $[\![\ ]\!]_{eK} : E \to (\Sigma' \to \Sigma')$, wobei $\forall\, e \in E.\ [\![\ e\ ]\!]_{eK} =_{df} \theta'_{\iota_e}$
- Anfangszusicherung: $\sigma_{\mathbf{s}} \in \Sigma'_{Init}$

Einfache-Konstanten-Spezifikation

- Spezifikation: $\mathcal{S}_G^{eK} = (\widehat{\Sigma}', [\![\ ]\!]_{eK}, \sigma_{\mathbf{s}})$

Einf. Konstanten: Erbringen der Beweisverpfl.

Lemma 7.10.2.8 (Kettenbedingungen)

$\widehat{\Sigma}'$ erfüllt die absteigende und die aufsteigende Kettenbedingung.

Beachte: Die Menge der Variablen in einem Programm ist endlich.

Lemma 7.10.2.9 (Monotonie)

$[\![\ ]\!]_{eK}$ ist monoton.

Lemma 7.10.2.10 (Non-Distributivity/Addititivity)

$[\![\ ]\!]_{eK}$ ist (i.a.) nicht distributiv und nicht additiv.

Einf. Konstanten: Einsammeln der Garantien

...für Terminierung, Konservativität.

Theorem 7.10.2.11 (Terminierung)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{eK} = (\widehat{\Sigma}', [\![\ ]\!]_{eK}, \sigma_{\mathbf{s}})$ terminiert Algorithmus 7.6.1.1 mit der *MaxFP*/*MinFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{eK}$.

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.2.8, Lemma 7.10.2.9 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Theorem 7.10.2.12 (Sicherheit, Konservativität)

Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{eK} = (\widehat{\Sigma}', [\![\ ]\!]_{eK}, \sigma_{\mathbf{s}})$ ist Algorithmus 7.6.1.1 *SUP*/*VUP*-konservativ für $\mathcal{S}_G^{eK}$ (d.h. terminiert mit einer unteren (oberen) Approximation der *SUP*/*VUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{eK}$).

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.2.8, Lemma 7.10.2.9, Sicherheitstheorem 7.7.1 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Einfache Konstanten: Negatives Ergebnis

...für Straffheit.

Theorem 7.10.2.13 (Nicht-Straffheit)

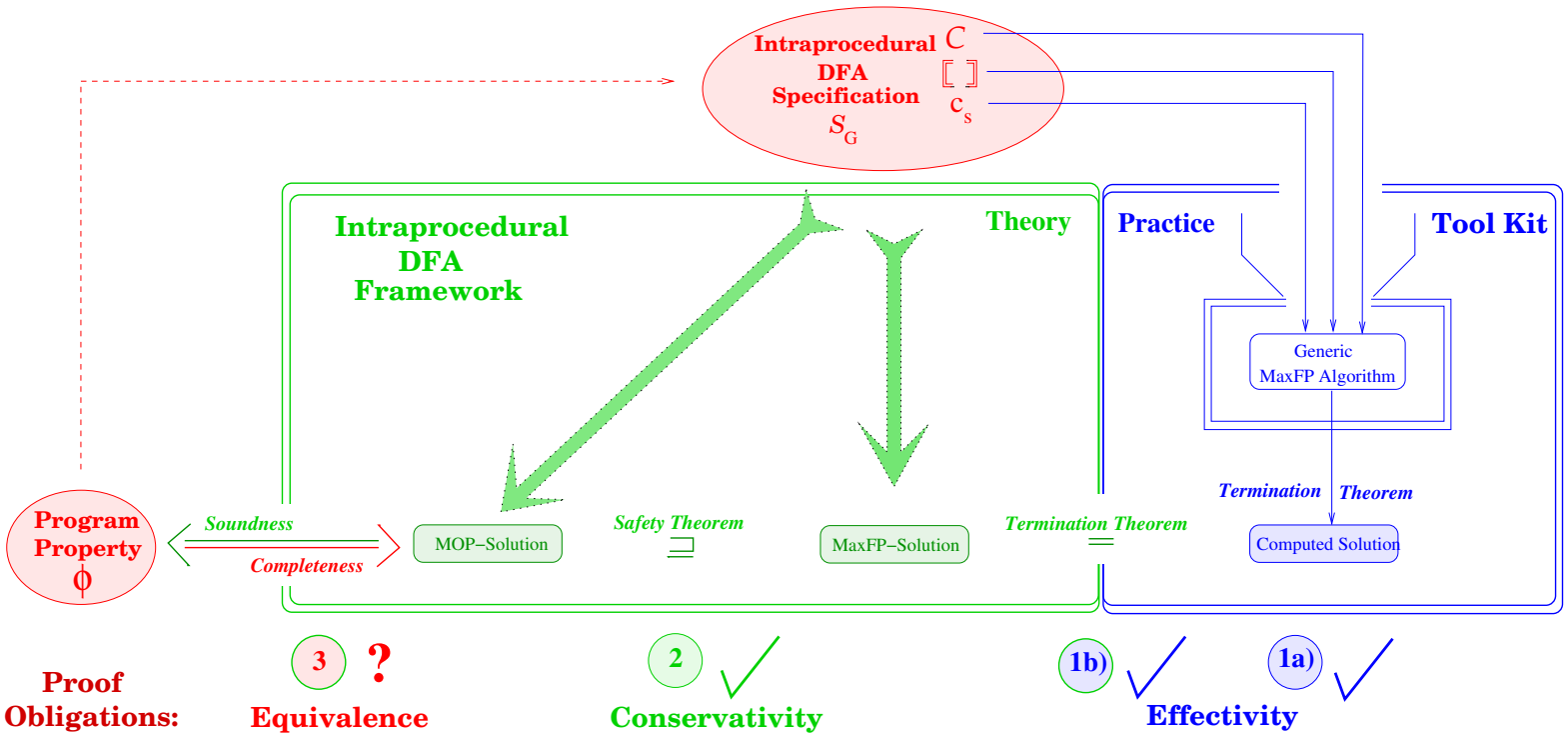
Angewendet auf $\mathcal{S}_G^{eK} = (\widehat{\Sigma}', [\![\ ]\!]_{eK}, \sigma_{\mathbf{s}})$ ist Algorithmus 7.6.1.1 i.a. nicht *SUP*/*VUP*-straff für $\mathcal{S}_G^{eK}$ (d.h. terminiert mit einer echten Approximation der *SUP*/*VUP*-Lösung von $\mathcal{S}_G^{eK}$).

Beweis. Unmittelbar mit Lemma 7.10.2.8, Lemma 7.10.2.9, Lemma 7.10.2.10, Koinzidenztheorem 7.7.2 und Terminierungstheorem 7.6.2.1.

Abschliessend: Die *MaxFP*/*MinFP*-Lösungen von $\mathcal{S}_G^{eK}$ sind stets sichere Approximationen der *SUP*/*VUP*-Lösungen von $\mathcal{S}_G^{eK}$. I.a. stimmen die operationellen *SUP*/*VUP*-Lösungen von $\mathcal{S}_G^{eK}$ nicht mit ihren denotationellen *MaxFP*/*MinFP*-Gegenstücken überein.

Einfache Konstanten: Schließen der letzten Beweislücke

...Korrektheits und Vollständigkeitsbeweisverpflichtungen für die *SUP*-Sicht von $\mathcal{S}_G^{eK}$ für die einfache-Konstanten-Eigenschaft:



Einf. Konstanten: Korrektheit, Vollständigkeit

...für die *SUP*-Semantik.

Theorem 7.10.2.14 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Die *SUP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{eK}$ ist

1. korrekt und vollständig für Variablen.
2. korrekt, aber nicht vollständig für (nichttriviale) Terme (d.h. für Terme mit mindestens einem (nichteinstelligen) Operatorsymbol).

...zu Theorem 7.10.2.14(2): Beachte, dass die *SUP*-Lösung an jedem Knoten als Zustand aufgefasst werden kann, d.h. als Abbildung von Variablen auf Werte, was die Auswertung von Termen gemäß Definition 7.10.2.5 erlaubt.

Einf. Konstanten: Korrektheit, Vollständigkeit

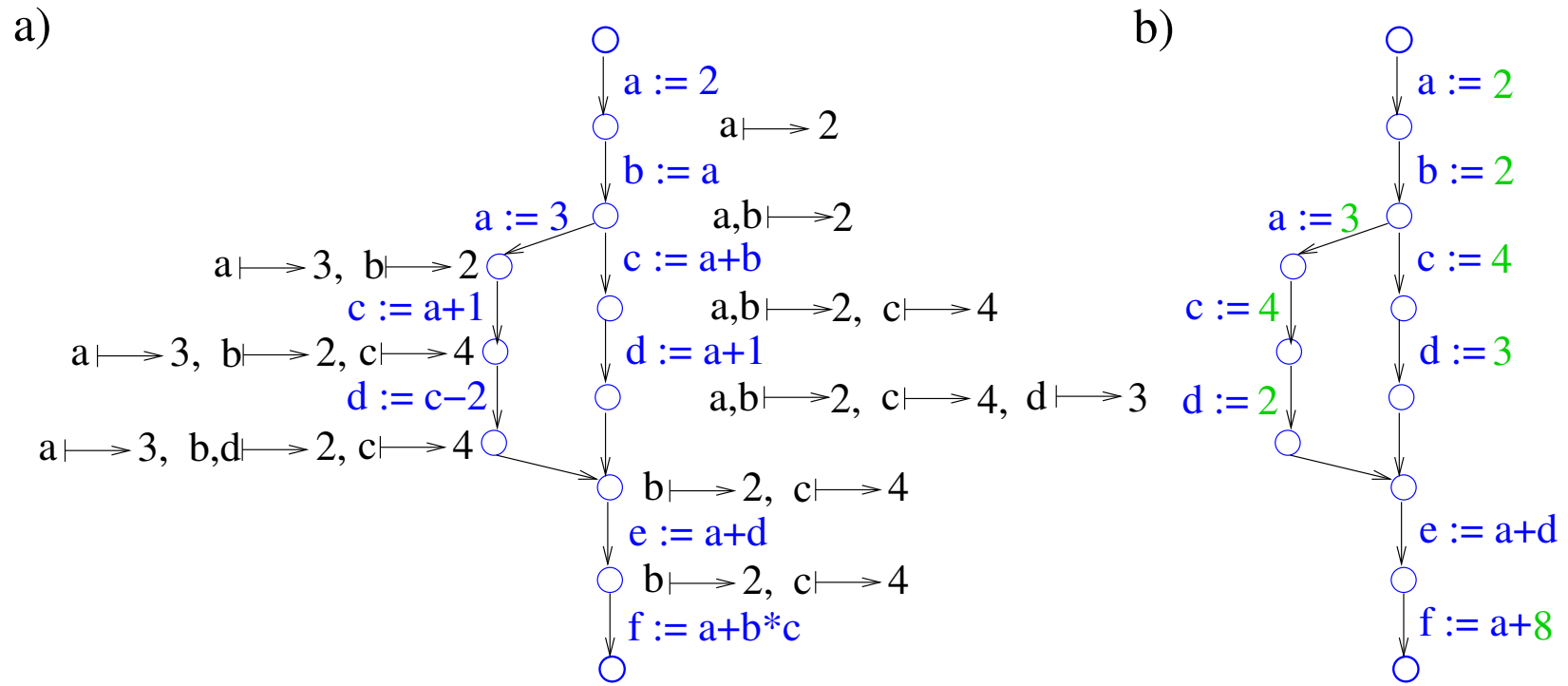
...für die *MaxFP*-Semantik.

Theorem 7.10.2.15 (Korrektheit und Vollständigkeit)

Die *MaxFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^{eK}$ ist korrekt, aber nicht vollständig (sowohl für Terme als auch für Variablen).

...siehe Unterlagen zur LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer für weitere Details.

Einfache Konstanten: Illustrierendes Beispiel

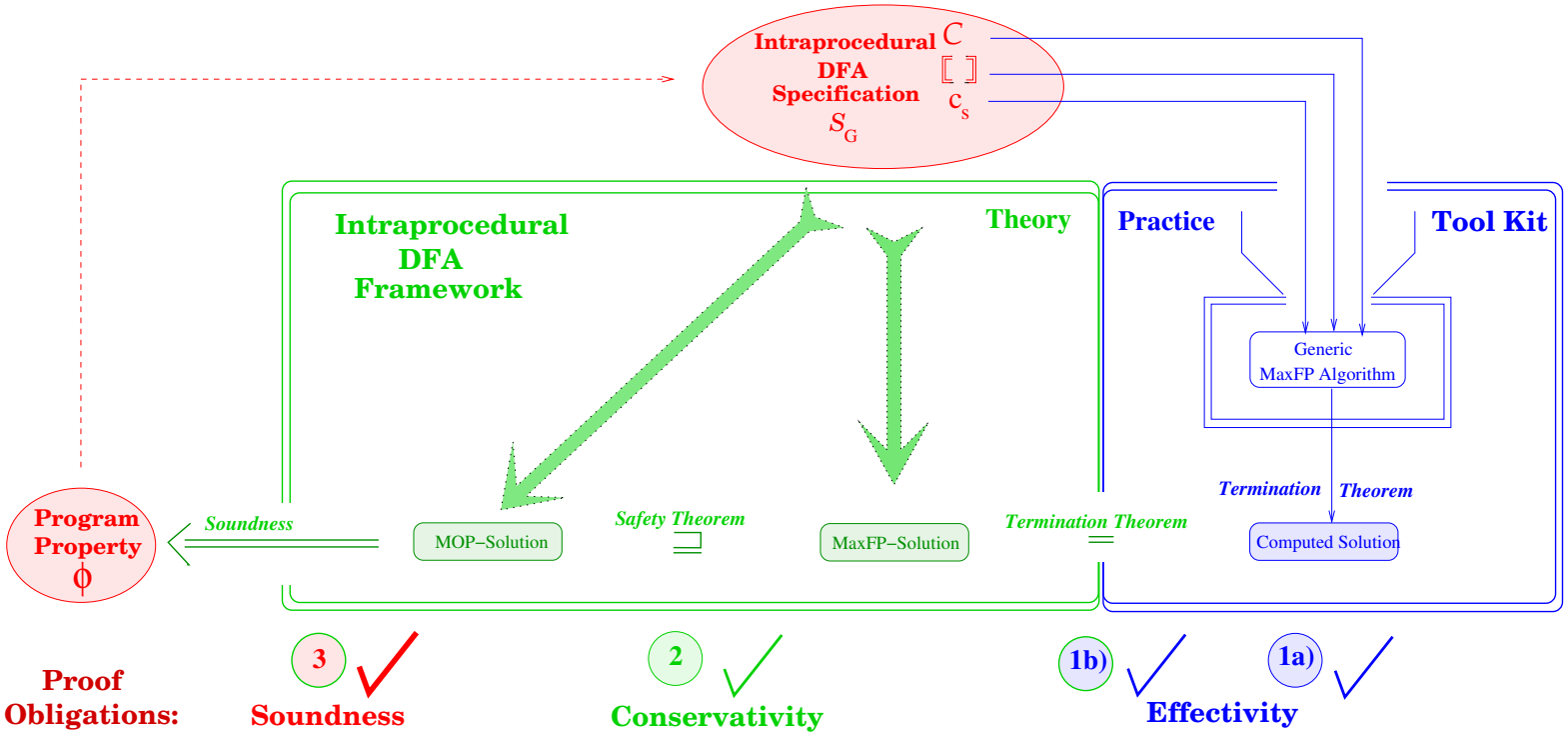


...mit Ausnahme von $a + d$ und $a + 8$ sind alle Terme einfache Konstanten.

Erinnerung: $a + d$ hat den (konstanten) Wert 5, ist aber keine einfache Konstante; $a + 8$ ist überhaupt keine Konstante (bei nichtdeterministischer Interpretation des Kontrollflusses).

Beweislücke partiell geschlossen: Korrektheit

...der *SUP*-Sicht von $\mathcal{S}_G^{eK}$ für die einfache-Konstanten-Eigenschaft bewiesen:



Übungsaufgabe 7.10.2.16

1. Was bedeuten Korrektheit und Vollständigkeit
2. Wie könnnen Korrektheit und Vollständigkeit bewiesen/widerlegt werden

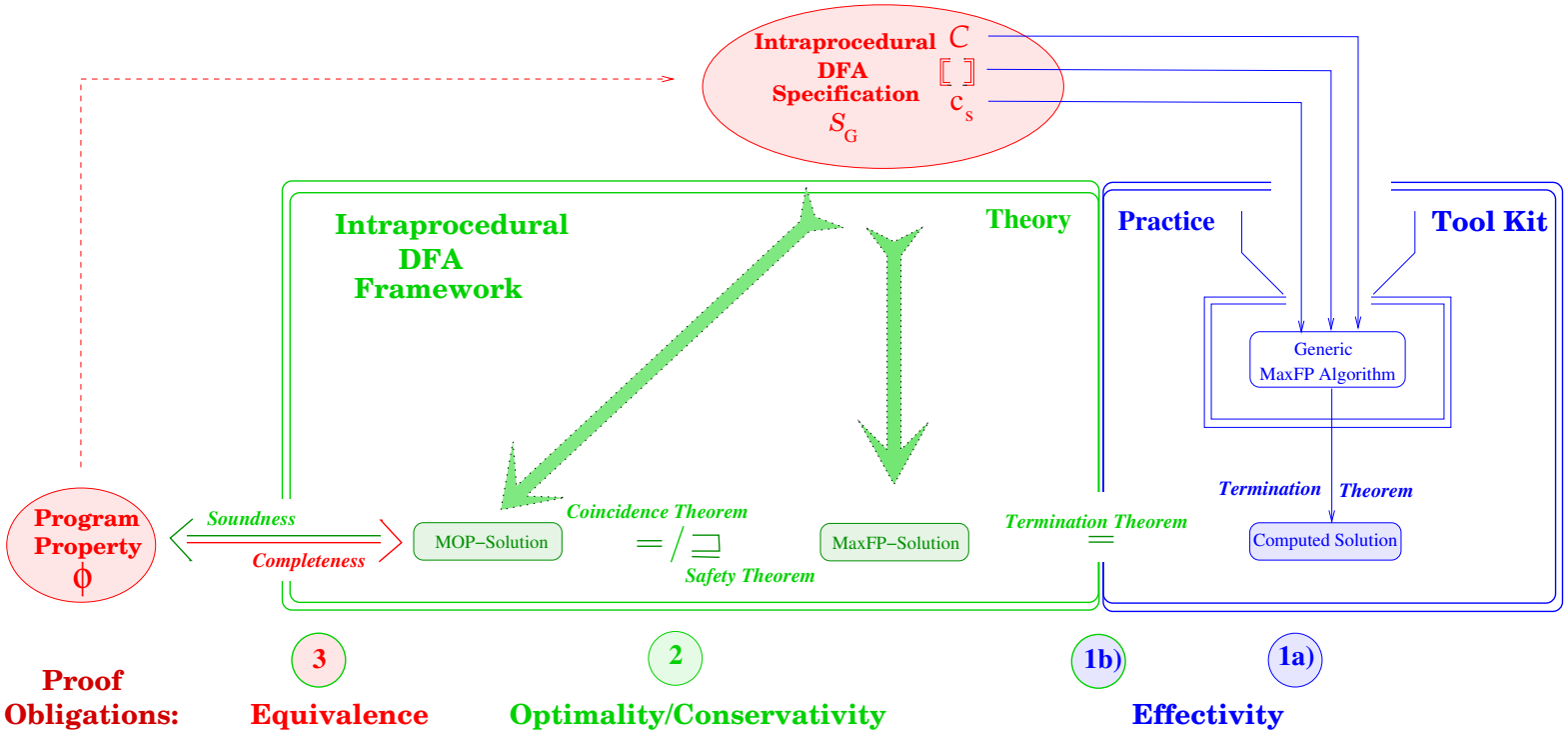
...für die *VUP*-Sicht von $\mathcal{S}_G^{eK,G}$ für die einfache-Konstante-Eigenschaft?

Kapitel 7.11

Zusammenfassung, Ausblick

Die Rahmenwerk/Werkzeugkastensicht

...von Datenflussanalyse:



...unter der Perspektive von Korrektheit, Akkuratheit und der Art von ϕ.

Eigenschaftensarten: Muss vs. kann

...grundsätzlich können wir zwei Arten von Eigenschaften ϕ unterscheiden:

- Universell quantifizierte (oder muss (engl. must)) Eigenschaften $\phi^\forall$: $\phi^\forall$ gilt an einem Knoten n, wenn ϕ entlang aller Pfade von **s** nach n an n gilt.
- Existentiell quantifizierte (oder kann (engl. may)) Eigenschaften $\phi^\exists$: $\phi^\exists$ gilt an einem Knoten n, wenn ϕ entlang einiger Pfade von **s** nach n an n gilt.

Muss-Eigenschaften $\phi^\forall$ sind verbunden mit der

- operationellen *SUP*-Programmsemantik und ihrem berechenb. denotationellen Gegenstück, der *MaxFP*-Sem.

Kann-Eigenschaften $\phi^\exists$ sind verbunden mit der

- operationellen *VUP*-Programmsemantik und ihrem berechenb. denotationellen Gegenstück, der *MinFP*-Sem.

Korrektheit und Vollständigkeit

...es gibt zwei wesentliche Stellen, an denen Korrektheits- und Vollständigkeitsaspekte in der Rahmenwerk/Werkzeugkasten-Sicht von DFA betrachtet werden:

Rahmenwerk/Werkzeugkasten-**intern**: Erfasst durch

- **Sicherheit** $\rightsquigarrow$ Konservativität
- **Koinzidenz** $\rightsquigarrow$ Straffheit

...*MaxFP*/*MinFP*- und *SUP*/*VUP*-Lsg. in Beziehung setzend.

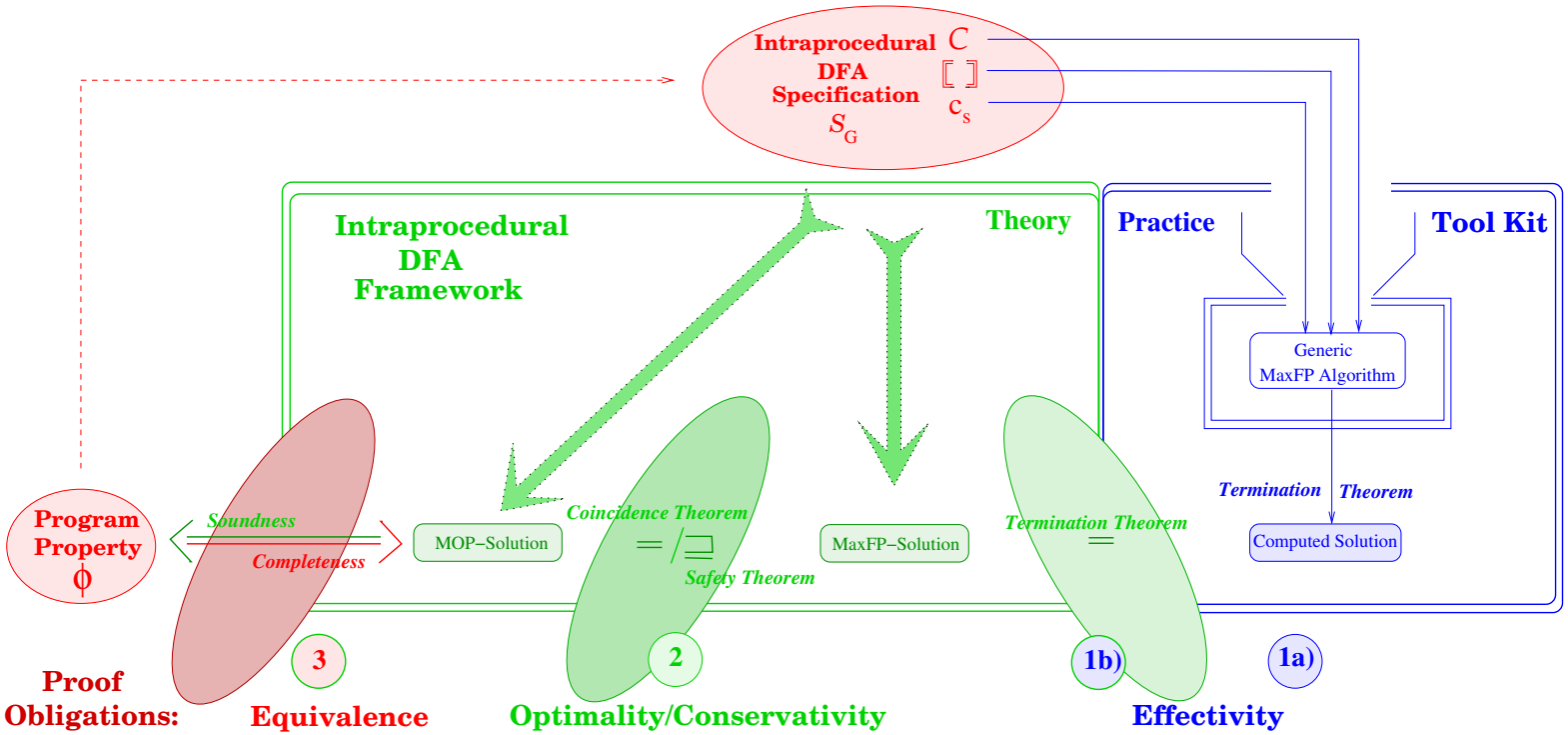
Rahmenwerk/Werkzeugkasten-**extern**: Erfasst durch

- **Korrektheit** $\rightsquigarrow$ Keine falschen Positive
- **Vollständigkeit** $\rightsquigarrow$ Keine falschen Negative

...*SUP*/*VUP*-Lsg. und $\phi^{\forall}/\phi^{\exists}$-Eigensch. in Beziehung setzend.

Veranschaulichung

...der Stellen Rahmenwerk/Werkzeugkasten-interner und -externer Behandlung von Korrektheits- und Vollständigkeitsaspekten:

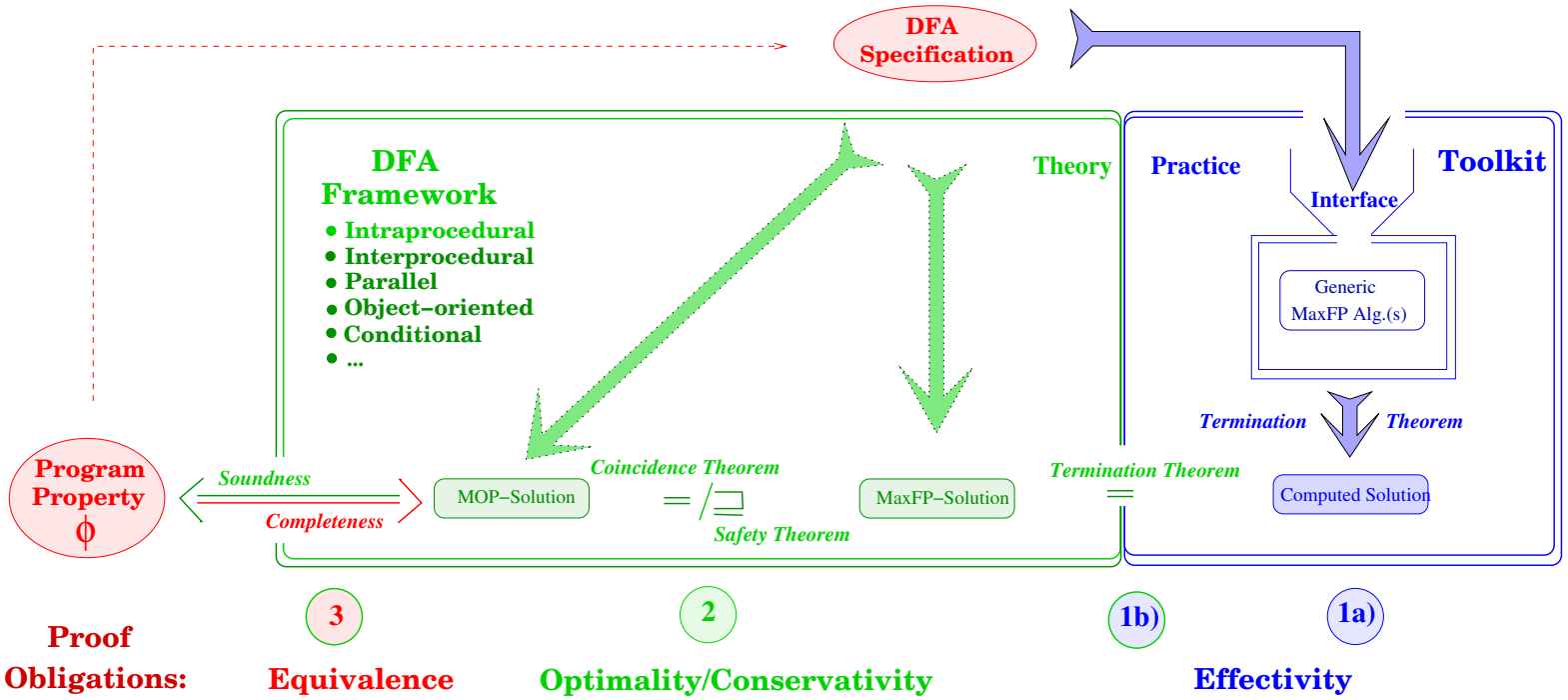


Ausblick: Die einheitliche Sicht auf DFA

...wir werden im Lauf dieser (und auch der Vorlesung LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer) sehen: Die

- Rahmenwerk- und Werkzeugkastensicht auf DFA

ist auch über den Grundfall intraprozeduraler DFA hinaus erreichbar und erlaubt anwendungsszenariounabhängig eine einheitliche Sicht auf DFA:



Kapitel 7.12

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (1)

Lehrbuchdarstellungen

Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi, Jeffrey D. Ullman. *Compilers: Principles, Techniques, & Tools*. Addison-Wesley, 2nd edition, 2007. (Chapter 1.2, The Structure of a Compiler; Chapter 1.4, The Science of Building a Compiler; Chapter 1.4.2, The Science of Code Optimization; Chapter 9.1, The Principal Sources of Program Optimization)

Keith D. Cooper, Linda Torczon. *Engineering a Compiler*. Morgan Kaufman Publishers, 2004. (Appendix B.3.1, Graphical Intermediate Representations)

Matthew S. Hecht. *Flow Analysis of Computer Programs*. Elsevier, North-Holland, 1977.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (2)

Uday P. Khedker, Amitabha Sanyal, Bageshri Karkare. *Data Flow Analysis: Theory and Practice*. CRC Press, 2009. (Chapter 3, Theoretical Abstractions in Data Flow Analysis; Chapter 4, General Data Flow Frameworks; Chapter 5, Complexity of Iterative Data Flow Analysis)

Robert Morgan. *Building an Optimizing Compiler*. Digital Press, 1998. (Chapter 2.3, Building the Flow Graph; Chapter 4.7, Structure of Program Flow Graph)

Stephen S. Muchnick. *Advanced Compiler Design Implementation*. Morgan Kaufman Publishers, 1997. (Chapter 7, Control-Flow Analysis)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (3)

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Chapter 5, Static Program Analysis)

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 7, Program Analysis; Chapter 8, More on Program Analysis; Appendix B, Implementation of Program Analysis)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (4)

Grundlegende, wegweisende Arbeiten


Frances E. Allen, John A. Cocke. *A Program Data Flow Analysis Procedure*. Communications of the ACM 19(3):137-147, 1976.


Susan Horwitz, Alan J. Demers, Tim Teitelbaum. *An Efficient General Iterative Algorithm for Dataflow Analysis*. Acta Informatica 24(6):679-694, 1987.


Gary A. Kildall. *A Unified Approach to Global Program Optimization*. In Conference Record of the 1st Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'73), 194-206, 1973.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (5)

John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Global Data Flow Analysis and Iterative Algorithms*. Journal of the ACM 23:158-171, 1976.

John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Monotone Data Flow Analysis Frameworks*. Acta Informatica 7:305-317, 1977.

Rahmenwerke, Werkzeugkästen

Marion Klein, Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *DFA&OPT-METAFrame: A Toolkit for Program Analysis and Optimization*. In Proceedings of the 2nd International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'96), Springer-V., LNCS 1055, 422-426, 1996.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (6)


Jens Knoop. *From DFA-Frameworks to DFA-Generators: A Unifying Multiparadigm Approach*. In Proceedings of the 5th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99), Springer-V., LNCS 1579, 360-374, 1999.


Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Properties of Data Flow Frameworks*. Acta Informatica 28(2):121-163, 1990.


Stephen P. Masticola, Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Lattice Frameworks for Multisource and Bidirectional Data Flow Problems*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 17(5):777-803, 1995.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (7)

Florian Martin. *PAG - An Efficient Program Analyzer Generator*. Journal of Software Tools for Technology Transfer 2(1):46-67, 1998.

Flemming Nielson. *Semantics-directed Program Analysis: A Tool-maker's Perspective*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 2-21, 1996.

Lösung v. Gleichungssystemen, Fixpunktberechnung

Christian Fecht, Helmut Seidl. *An Even Faster Solver for General Systems of Equations*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 189-204, 1996.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (8)


Christian Fecht, Helmut Seidl. *Propagating Differences: An Efficient New Fixpoint Algorithm for Distributive Constraint Systems*. In Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98), Springer-V., LNCS 1381, 90-104, 1998.


Christian Fecht, Helmut Seidl. *A Faster Solver for General Systems of Equations*. Science of Computer Programming 35(2):137-161, 1999.


Bernhard Steffen, Andreas Claßen, Marion Klein, Jens Knoop, Tiziana Margaria. *The Fixpoint Analysis Machine*. In Proceedings of the 6th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR'95), Springer-V., LNCS 962, 72-87, 1995.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (9)

Flussgraphpragmatik

Larry Carter, Jeanne Ferrante, Clark Thomborson. *Folklore Confirmed: Reducible Flow Graphs are Exponentially Larger*. In Conference Record of the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 106-114, 2003.

Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *Basic-block Graphs: Living Dinosaurs?* In Proceedings of the 7th International Conference on Compiler Construction (CC'98), Springer-V., LNCS 1383, 65-79, 1998.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (10)

Verschiedenes

Stephen M. Blackburn, Amer Diwan, Matthias Hauswirth, Peter F. Sweeny, José Nelson Amaral, Tim Brecht, Lubomír Bulej, Cliff Click, Lieven Eeckhout, Sebastian Fischmeister, Daniel Frampton, Laurie J. Hendren, Michael Hind, Antony L. Hosking, Richard E. Jones, Tomas Kalibera, Nathan Keynes, Nathaniel Nystrom, Andreas Zeller. *The Truth, The Whole Truth, and Nothing But the Truth: A Pragmatic Guide to Assessing Empirical Evaluations*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 38(4), Article 15:1-20, 2016.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (11)

- Martin Davis. *Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable*. American Mathematical Monthly 80:33-269, 1973.
- Martin Davis, Yuri Matijasevič, Julia Robinson. *Hilbert's Tenth Problem. Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution*. In Proceedings of the Symposium on the Hilbert Problems (De Kalb, Illinois), May 1974, American Mathematical Society, Providence, R.I., 323-378, 1976.
- William Landi. *Undecidability of Static Analysis*. ACM Letters on Programming Languages and Systems 1(4):323-337, 1992.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (12)


Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis*. Springer-V., 2009. (Chapter 7, What can one tell about a Program without its Execution: Static Analysis)


Yuri V. Matijasevič. *Enumerable Sets are Diophantine (auf Russisch)*. Doklady Akademii Nauk SSSR 191:279-282, 1970 (englische Übersetzung: Soviet Mathematics Doklady 11:354-357, 1970.


Yuri V. Matijasevič. *On Recursive Unsolvability of Hilbert's Tenth Problem*. In Proceedings of the 4th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science (Bucharest 1971), North-Holland, Amsterdam, 89-110, 1973.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 7 (13)


Yuri V. Matijasevič. *What Should We Do Having Proved a Decision Problem to be Unsolvable?* In Proceedings of Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science, Springer-V., LNCS 122, 441-448, 1979.

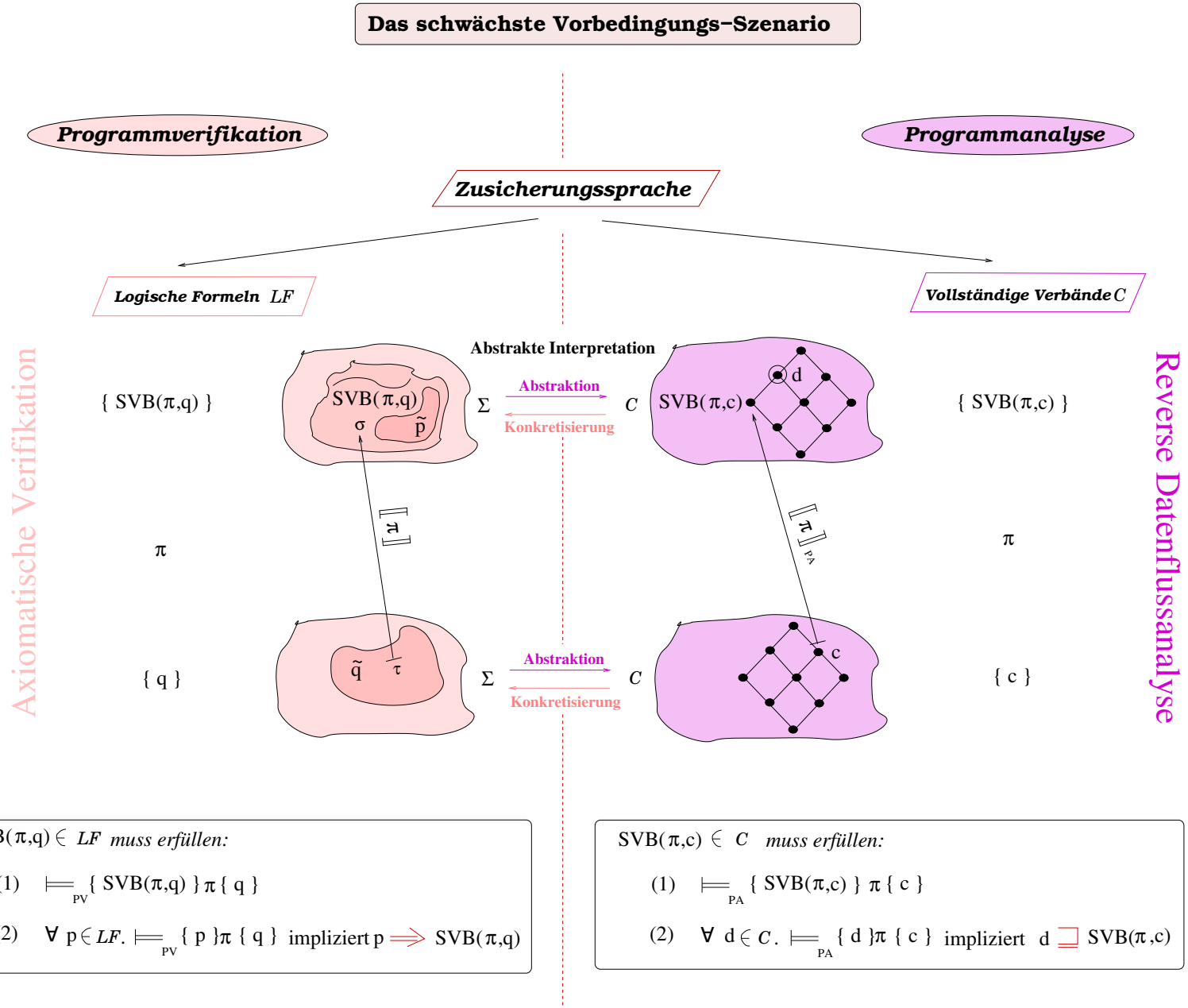

Yuri V. Matijasevič. *Hilbert's Tenth Problem*. MIT Press, 1993.


Markus Müller-Olm, Helmut Seidl. *Polynomial Constants are Decidable*. In Proceedings of the 9th Static Analysis Symposium (SAS 2002), Springer-V., LNCS 2477, 4-19, 2002.

Kapitel 8

Reverse Datenflussanalyse

Motivation: Verifikation vs. reverse DFA



Motivation: DFA vs. reverse DFA (1)

...intuitiv:

Datenflussanalyse zielt

- auf die Berechnung eines stärkst möglichen Datenflussfakts für jede Programmstelle relativ zu einer gegebenen Startzusicherung.

Reverse Datenflussanalyse zielt

- auf die Berechnung eines schwächst möglichen Datenflussfakts für jede Programmstelle relativ zu einem angefragten Datenflussfakt an einer bestimmten Programmstelle, dem sog. Anfrageknoten, so dass der angefragte Datenflussfakt am Anfrageknoten gültig ist.

  Von besonderem Interesse ist dabei der schwächst mögliche Datenflussfakt am Startknoten, der die Gültigkeit des angefragten Datenflussfakts am Anfrageknoten garantiert.

Motivation: DFA vs. reverse DFA (2)

...die reversen Gegenstücke der

- Schnitt/Vereinigung-über-alle-Pfade (*SUP*/*VUP*) Semantiken einer lokalen abstrakten DFA-Semantik $[\![\ ]\!]$

sind daher die

- reversen Vereinigung/Schnitt-über-alle-Pfade (*RVUP*/*RSUP*) Semantiken

der von $[\![\ ]\!]$ induzierten reversen lokalen abstrakten DFA-Semantik $[\![\ ]\!]_R$ sowie die

- berechenbaren denotationellen reversen Entsprechungen der operationellen reversen Vereinigung/Schnitt-über-alle-Pfade Semantiken, die *RMinFP*- und *RMaxFP*-Semantiken.

Kapitel 8.1

Vorbereitung

DFA-Fehlschlagsverbandserweiterung

...sei $(\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_s)$ eine DFA-Spezifikation, *failure* ein neues Element nicht in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}_f =_{df} \mathcal{C} \dot{\cup} \{failure\}$.

Definition 8.1.1 (Fehlschlagserweiterter DFA-Verb.)

Die *failure*-Erweiterung von $\widehat{\mathcal{C}}$ ist der vollständige Verband $\widehat{\mathcal{C}}_f$ definiert durch:

$$\widehat{\mathcal{C}}_f =_{df} (\mathcal{C}_f, \sqsubseteq_f, \sqcap_f, \sqcup_f, \bot, failure)$$

mit *failure* größtes Element in $\widehat{\mathcal{C}}_f$ ist, d.h.:

1. $\forall\, c \in \mathcal{C}_f.\ c \sqsubseteq_f failure$
2. $\forall\, c, c' \in \mathcal{C}.\ c \sqsubseteq_f c'$ gdw $c \sqsubseteq c'$

Beachte:

- Mit $\sqsubseteq_f$ sind auch $\sqcap_f$ und $\sqcup_f$ eindeutig festgelegt.
- Das Element *failure* repräsentiert nicht erfüllbare, nicht zusicherbare DFA-Information.

Fehlschlagserweiterung lokaler DFA-Semantik

Definition 8.1.2 (Fehlschlagserweiterte DFA-Sem.)

Wir legen fest:

$$\forall\, c \in \mathcal{C}_f\ \forall\, e \in E.\ [\![\, e \,]\!]_f(c) =_{df} \begin{cases} [\![\, e \,]\!](c) & \text{falls } c \neq \mathit{failure} \\ \mathit{failure} & \text{sonst} \end{cases}$$

Erste Ergebnisse

Lemma 8.1.3

Der Verband $\widehat{\mathcal{C}_f}$ erfüllt die aufsteigende (absteigende) Kettenbedingung gdw der Verband $\widehat{\mathcal{C}}$ die aufsteigende (absteigende) Kettenbedingung erfüllt.

Lemma 8.1.4

1. $[\![\ ]\!]_f$ monoton gdw $[\![\ ]\!]$ monoton.
2. $[\![\ ]\!]_f$ distributiv gdw $[\![\ ]\!]$ distributiv.
3. $[\![\ ]\!]_f$ additiv gdw $[\![\ ]\!]$ additiv.

Kapitel 8.2

Induzierte reverse lokale DFA-Semantik

Induzierte reverse lokale DFA-Semantik

...sei $(\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_f)$ eine fehlschlagserweiterte DFA-Spezifikation (ohne Startzusicherung).

Definition 8.2.1 (Reverse lokale abstrakte Semantik)

Die von $[\![\ ]\!]_f$ induzierte reverse lokale abstrakte Semantik

$$[\![\ ]\!]_R : E \to (\mathcal{C}_f \to \mathcal{C}_f)$$

ist definiert durch:

$$\forall\, e \in E\ \forall\, c \in \mathcal{C}_f.\ [\![\, e \,]\!]_R(c) =_{df} \bigsqcap \{\, c' \mid [\![\, e \,]\!]_f(c') \sqsupseteq c \,\}$$

Beachte: Die Gültigkeit von $[\![\, e \,]\!]_f(c') \sqsupseteq c$ bedeutet, dass c' am Eingang von e mindestens c oder eine größere DFA-Information am Ausgang von e garantiert.

Eigenschaften von $[\![\ ]\!]$, $[\![\ ]\!]_f$ und $[\![\ ]\!]_R$

...sei $[\![\ ]\!]_f$ die fehlschlagserweiterte lokale abstrakte DFA-Semantik zur lokalen abstrakten DFA-Semantik $[\![\ ]\!]$; $[\![\ ]\!]_R$ die induzierte reverse DFA-Semantik.

Lemma 8.2.2

1. $\forall\, e \in E.\ [\![\ e\ ]\!]_R$ ist wohldefiniert und monoton.
2. $\forall\, e \in E.\ [\![\ e\ ]\!]_R$ ist additiv, falls $[\![\ e\ ]\!]_f$ distributiv ist.

Lemma 8.2.3

1. $\forall\, e \in E.\ [\![\ e\ ]\!]_R \circ [\![\ e\ ]\!]_f \sqsubseteq Id_{\mathcal{C}_f}$, falls $[\![\ e\ ]\!]$ monoton ist.
2. $\forall\, e \in E.\ [\![\ e\ ]\!]_f \circ [\![\ e\ ]\!]_R \sqsupseteq Id_{\mathcal{C}_f}$, falls $[\![\ e\ ]\!]$ distributiv ist.

...in der Sprechweise der Theorie 'Abstrakter Interpretation':

- $[\![\ e\ ]\!]_f$ und $[\![\ e\ ]\!]_R$ bilden eine Galois-Verbindung.

Kapitel 8.3

Reverse DFA-Spezifikation

Sichtbarmachung von DFA-Anfrageknoten

...sei $G' = (N', E', \mathbf{s}', \mathbf{e}')$ ein Flussgraph und $q \in N'$ der Anfrageknoten (engl. query node), für den eine Datenflussfaktanfrage (engl. query) gestellt werden soll.

Für die Formulierung reverser Datenflussanalyse ersetzen wir $G' = (N', E', \mathbf{s}', \mathbf{e}')$ durch einen Graphen $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$, in dem der Anfrageknoten explizit dargestellt ist, wenn modellierungstechnisch nötig.

Wir definieren: Ist q

- gleich $\mathbf{s}'$ oder $\mathbf{e}'$, so sind G und G' identisch.
- verschieden von $\mathbf{s}'$ und $\mathbf{e}'$, so entsteht G aus G' dadurch, dass N' um eine Kopie $\mathbf{q}$ von q erweitert wird, so dass $\mathbf{q}$ dieselben Vorgänger besitzt wie q, aber keine Nachfolger, d.h. $\mathit{pred}(\mathbf{q}) = \mathit{pred}(q)$ und $\mathit{succ}(\mathbf{q}) = \emptyset$.

Es gilt

...die Hinzunahme von $\mathbf{q}$ hat keinen Einfluss auf die

- *MOP*/*MaxFP*-Semantik
- *JOP*/*MinFP*-Semantik

irgendeines der ursprünglichen Knoten von G' (s. Korollar 8.3.2(1)).

Für $\mathbf{q}$ und q stimmen die

- *MOP*-Semantik
- *JOP*-Semantik

jeweils überein (s. Korollar 8.3.2(2)). Für die zugehörigen Fixpunktsemantiken (*MaxFP*, *MinFP*) gilt dies nicht.

Das folgende Lemma und Korollar fassen dies zusammen.

DFA-Zusammenhang von G' und G

Lemma 8.3.1

1. $\forall\, n \in N \backslash \{\mathbf{q}\}.\ \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, n] = \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n]$
2. $\forall\, q \in N' \backslash \{\mathbf{s}, \mathbf{e}\}.\ \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, q] = \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, q] = \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, \mathbf{q}]$

Korollar 8.3.2

1. $\forall\, n \in N \backslash \{\mathbf{q}\}.\ [\![\, n \,]\!]^X_{\mathcal{S}_{G'}} = [\![\, n \,]\!]^X_{\mathcal{S}_G}$
2. $\forall\, q \in N' \backslash \{\mathbf{s}, \mathbf{e}\}.\ [\![\, q \,]\!]^Y_{\mathcal{S}_{G'}} = [\![\, q \,]\!]^Y_{\mathcal{S}_G} = [\![\, \mathbf{q} \,]\!]^Y_{\mathcal{S}_G}$

mit $X \in \{MOP, MaxFP, JOP, MinFP\}$, $Y \in \{MOP, JOP\}$.

...wobei $\mathbf{q} \in N$ die zu einem Anfrageknoten $q \in N'$ gehörige Kopie bezeichnet mit $pred_G(\mathbf{q}) = pred_{G'}(q)$ und $succ_G(\mathbf{q}) = \emptyset$.

Reverse DFA-Spezifikation und -Problem

...mit den vorherigen Festlegungen und Beobachtungen können wir definieren:

Definition 8.3.3 (Reverse DFA-Spezifikation)

Eine reverse DFA-Spezifikation zu einer DFA-Spezifikation $(\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!])$ ist ein Tripel $(\widehat{\mathcal{C}}_f, [\![\ ]\!]_R, c_q)$ mit

- $\widehat{\mathcal{C}}_f =_{df} (\mathcal{C}_f, \sqsubseteq_f, \sqcap_f, \sqcup_f, \bot, \mathit{failure})$ DFA-Verbandserweiterung zu $\widehat{\mathcal{C}}$ (gemäß Definition 8.1.1).
- $[\![\ ]\!]_R : E \to (\mathcal{C}_f \to \mathcal{C}_f)$ induzierte reverse lokale DFA-Semantik (gemäß Definition 8.2.1).
- $c_q \in \mathcal{C}$ eine DFA-Anfrage.

Definition 8.3.4 (Reverses DFA-Problem)

Eine reverse DFA-Spezifikation legt ein reverses DFA-Problem fest.

Kapitel 8.4

Reverse operationelle globale DFA-Semantik

Kapitel 8.4.1

Reverse Aufsammelsemantik

Ausdehnung von $[\![\ ]\!]_R$ von Kanten auf Pfade

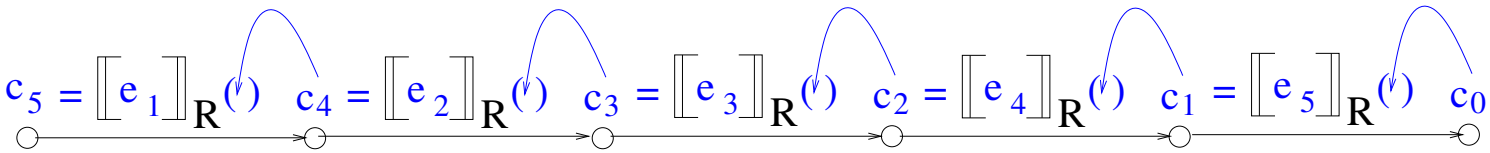
Sei $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_R, c_q)$ eine reverse DFA-Spezifikation.

Definition 8.4.1.1 (Pfadausdehnung von $[\![\ ]\!]_R$)

Die Ausdehnung einer reversen (lokalen) DFA-Semantik auf Pfade $p = \langle e_1, \ldots, e_{q-1}, e_q \rangle$ ist definiert durch:

$$[\![\, p \,]\!]_R =_{df} \begin{cases} Id_{\mathcal{C}} & \text{falls } \lambda_p < 1 \\ [\![\, \langle e_1, \ldots, e_{q-1} \rangle \,]\!]_R \circ [\![\, e_q \,]\!]_R & \text{sonst} \end{cases}$$

Illustrating the extension of $[\![\ ]\!]_R$ from edges to paths:



Beachte: Die obige Ausdehnung bedeutet einen Rückwärtsdurchlauf von Pfad p.

Reverse Aufsammelsemantik

Sei $\mathcal{S}^R_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_R, c_q)$ eine reverse DFA-Spezifikation.

Definition 8.4.1.2 (Reverse Aufsammelsemantik)

Die von $\mathcal{S}^R_G$ induzierte (nichtdeterministische) reverse Aufsammelsemantik (oder globale abstrakte reverse Semantik) ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{CRS}_{\mathcal{S}^R_G} : N \to \mathcal{P}(\mathcal{C}_f)$$

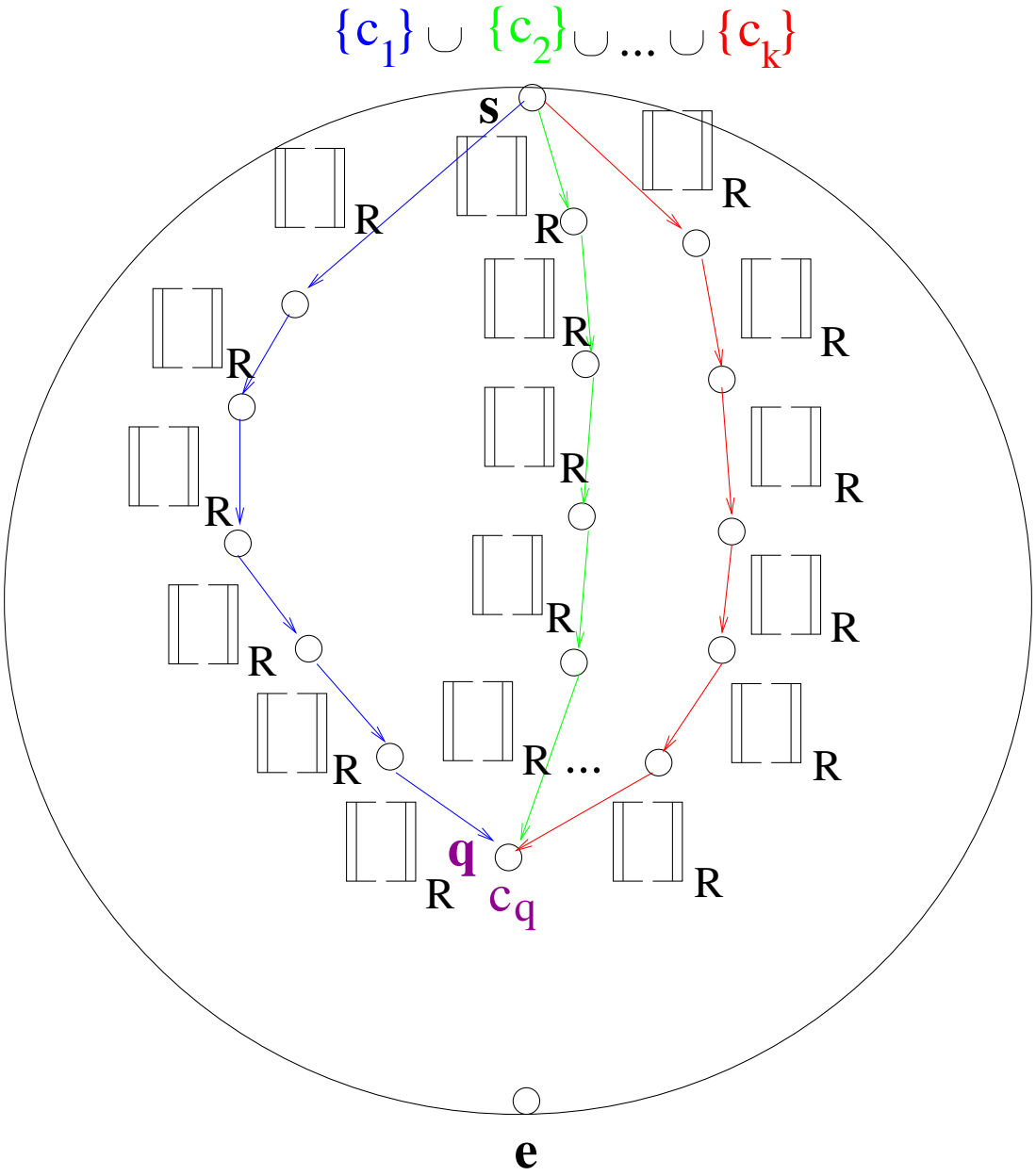
$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{CRS}_{\mathcal{S}^R_G} =_{df} \{\, [\![\, p \,]\!]_R(c_q) \mid p \in \mathbf{P}[n, \mathbf{q}] \,\}$$

wobei $\mathcal{P}$ den Potenzmengenoperator bezeichnet.

Beachte:

$$[\![\, \mathbf{q} \,]\!]^{CRS}_{\mathcal{S}^R_G} = \{c_q\}$$

Illustration der reversen Aufsammelsemantik



Kapitel 8.4.2

Reverse Vereinigung-über-alle-Pfade-Semantik

Die *RJOP*-Semantik

Sei $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_R, c_q)$ eine reverse DFA-Spezifikation.

Definition 8.4.2.1 (*RJOP*-Semantik)

Die (deterministische) *RJOP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^R$ ist definiert durch:

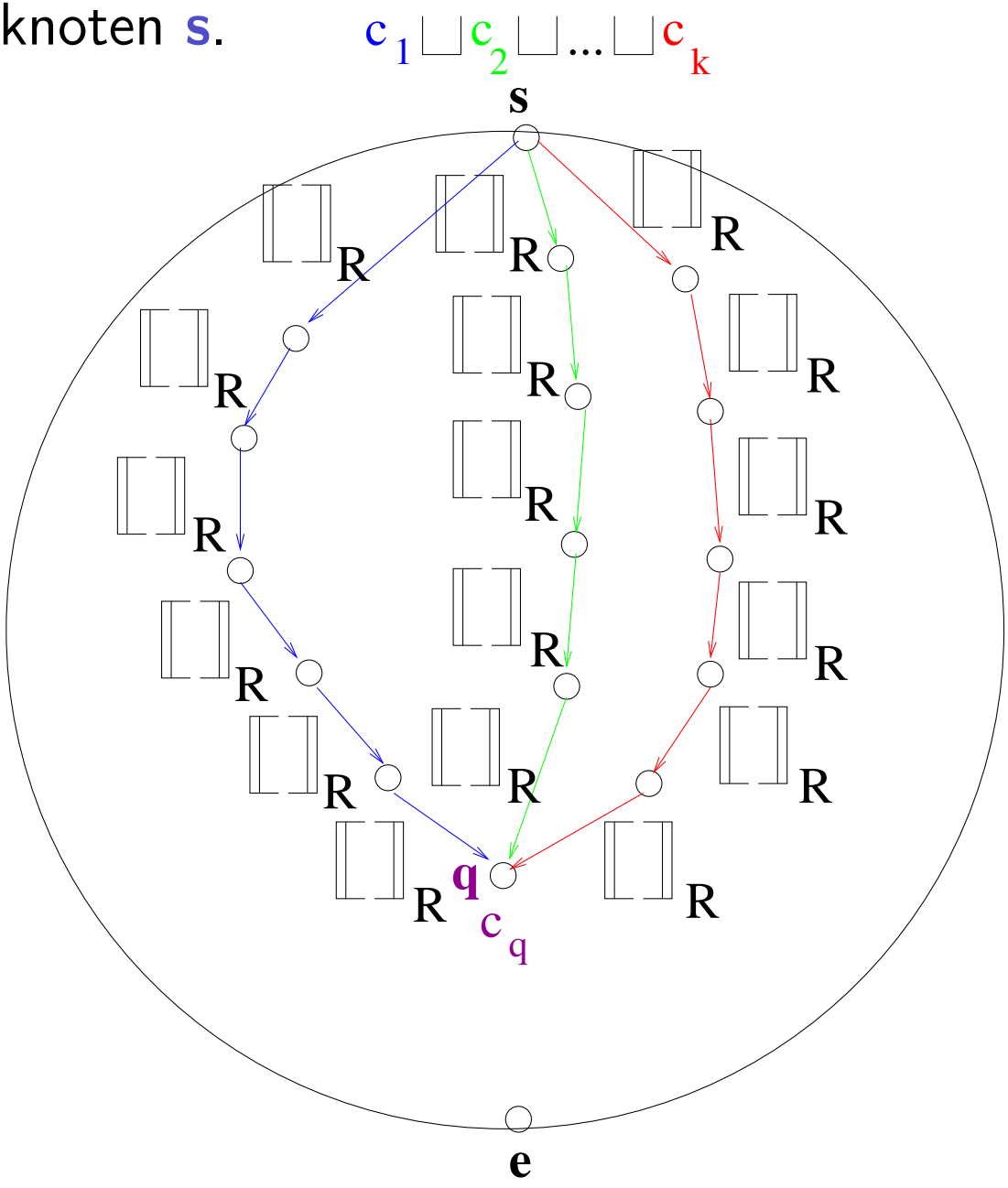
$$[\![\ ]\!]^{RJOP}_{\mathcal{S}_G^R} : N \to \mathcal{C}_f$$

$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{RJOP}_{\mathcal{S}_G^R} =_{df} \bigsqcup [\![\, n \,]\!]^{CRS}_{\mathcal{S}_G^R}$$

$$= \bigsqcup \{\, [\![\, p \,]\!]_R(c_q) \mid p \in \mathbf{P}[n, \mathbf{q}] \,\}$$

Veranschaulichung der *RJOP*-Semantik

...am Startknoten **s**.



Kapitel 8.4.3

Reverse Schnitt-über-alle-Pfade-Semantik

Die *RMOP*-Semantik

Sei $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_R, c_q)$ eine reverse DFA-Spezifikation.

Definition 8.4.3.1 (*RMOP*-Semantik)

Die (deterministische) *RMOP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^R$ ist definiert durch:

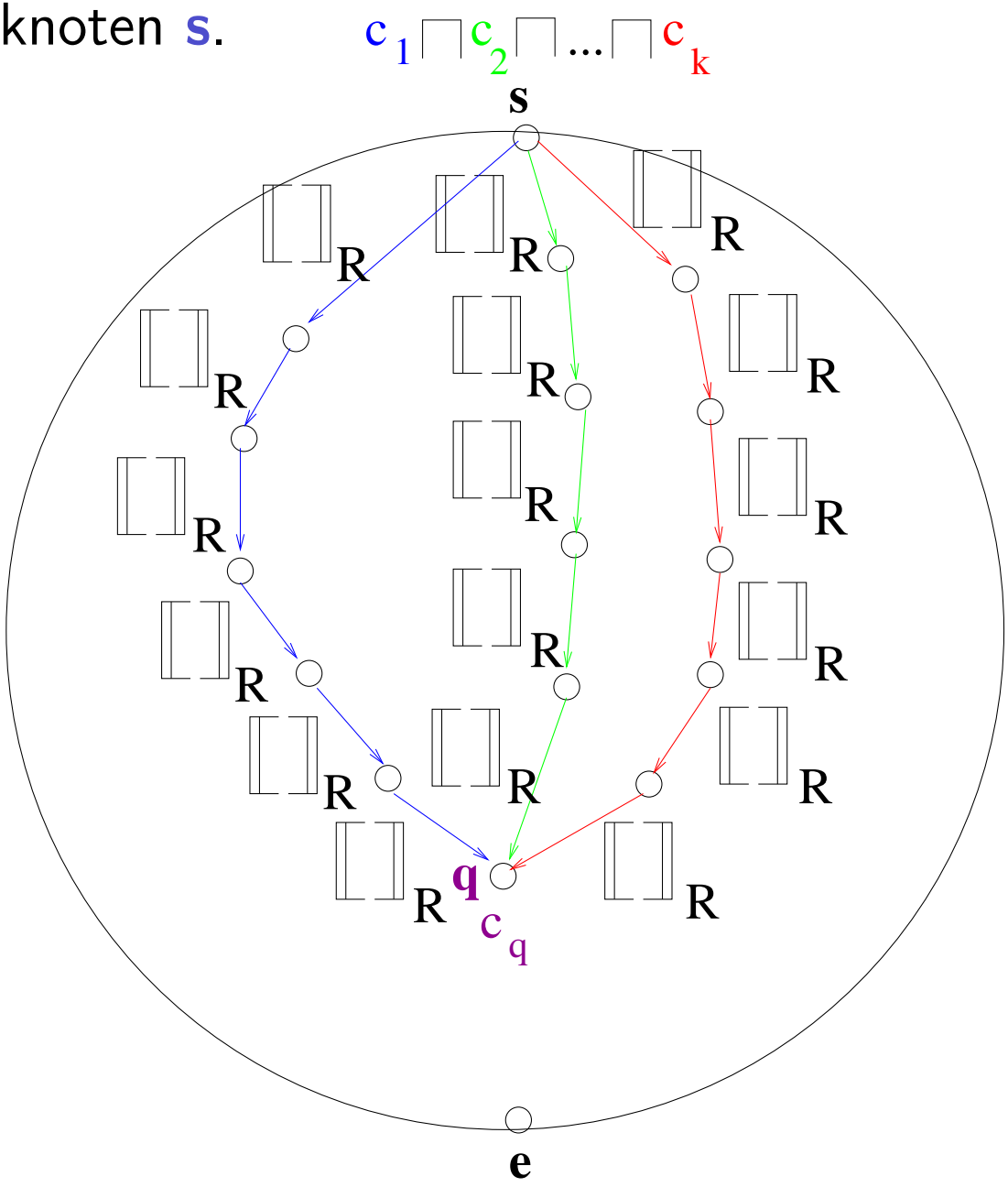
$$[\![\ ]\!]^{RMOP}_{\mathcal{S}_G^R} : N \to \mathcal{C}_f$$

$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{RMOP}_{\mathcal{S}_G^R} =_{df} \bigsqcap [\![\, n \,]\!]^{CRS}_{\mathcal{S}_G^R}$$

$$= \bigsqcap \{\, [\![\, p \,]\!]_R(c_q) \mid p \in \mathbf{P}[n, \mathbf{q}] \,\}$$

Veranschaulichung der *RMOP*-Semantik

...am Startknoten **s**.



Kapitel 8.4.4

RVUP- und *RSUP*-Semantik als spezifizierende Lösungen reverser DFA-Probleme

Spezifizierende Lösungen reverser DFA-Prob.

...nach dem Vorbild der *SUP*- und *VUP*-Semantik für DFA-Probleme definieren wir:

Definition 8.4.4.1 (Spezifizierende Lsg. v. RDFA-P.)

Die *RJOP*- und *RMOP*-Semantik eines Flussgraphen definieren die spezifizierenden Lösungen eines reversen DFA-Problems, seine sog. *RJOP*- und *RMOP*-Lösungen.

Kapitel 8.5

Reverse denotationelle globale DFA-Semantik

Kapitel 8.5.1

Reverse minimale Fixpunktsemantik

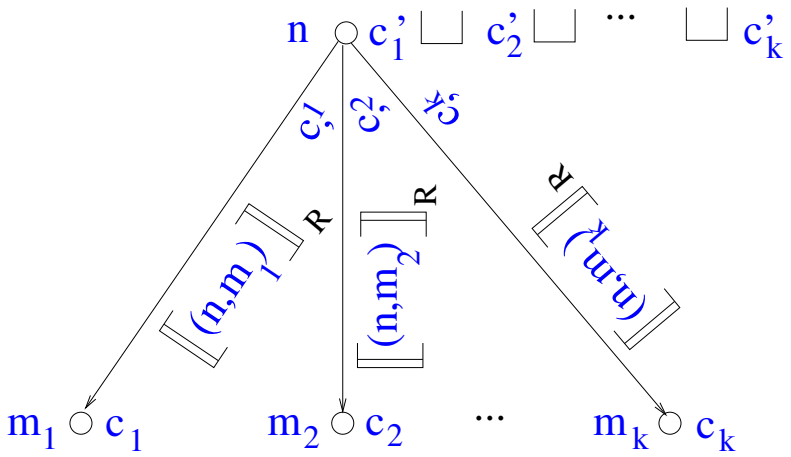
Reverser minimaler (*RMinFP*) Fixpunktansatz

Sei $\mathcal{S}^R_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_R, c_q)$ eine reverse DFA-Spezifikation.

Gleichungssystem 8.5.1.1 (*RMinFP*-Ansatz)

$$reqInf(n) = \begin{cases} c_q & \text{falls } n = \mathbf{q} \\ \bigsqcup \{ [\![(n,m)]\!]_R(reqInf(m)) \mid m \in succ(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Illustration des *RMinFP*-Ansatzes ($n \neq \mathbf{e}$):



The *RMinFP*-Semantik

Bezeichne

- $reqInf^{\star}_{c_q}(n),\ n \in N$

die kleinste Lösung von Gleichungssystem 8.5.1.1.

Definition 8.5.1.2 (*RMinFP*-Semantik)

Die *RMinFP*-Semantik von $\mathcal{S}^R_G$ ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{RMinFP}_{\mathcal{S}^R_G} : N \to \mathcal{C}_f$$

$$\forall\, n \in N.\ [\![\ n\ ]\!]^{RMinFP}_{\mathcal{S}^R_G} =_{df} reqInf^{\star}_{c_q}(n)$$

Beachte:

$$[\![\ \mathbf{q}\ ]\!]^{RMinFP}_{\mathcal{S}^R_G} = c_q$$

Kapitel 8.5.2

Reverse maximale Fixpunktsemantik

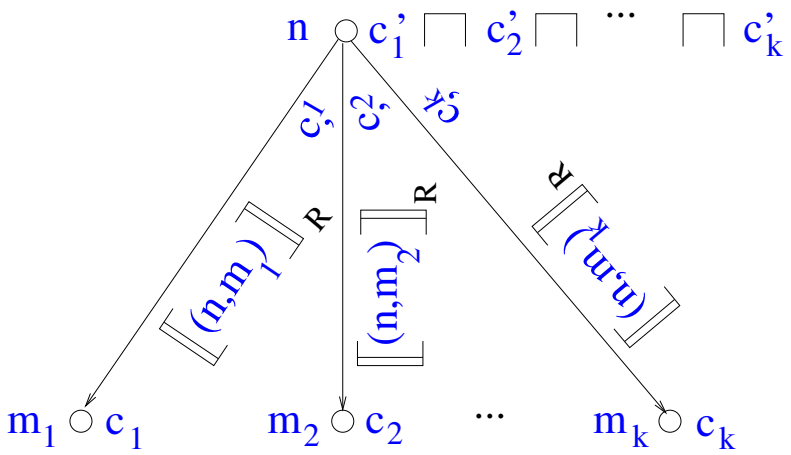
Reverser maximaler (*RMaxFP*) Fixpunktansatz

Sei $\mathcal{S}^R_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_R, c_q)$ eine reverse DFA-Spezifikation.

Gleichungssystem 8.5.2.1 (*RMaxFP*-Ansatz)

$$reqInf(n) = \begin{cases} c_q & \text{falls } n = \mathbf{q} \\ \bigsqcap \{ [\![(n,m)]\!]_R(reqInf(m)) \mid m \in succ(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Illustration des *RMaxFP*-Ansatzes ($n \neq \mathbf{e}$):



The *RMaxFP*-Semantik

Bezeichne

- $reqInf^{\star}_{c_q}(n),\ n \in N$

die größte Lösung von Gleichungssystem 8.5.2.1.

Definition 8.5.2.2 (*RMaxFP*-Semantik)

Die *RMaxFP*-Semantik von $\mathcal{S}^R_G$ ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{RMaxFP}_{\mathcal{S}^R_G} : N \to \mathcal{C}_f$$

$$\forall\, n \in N.\ [\![\ n\ ]\!]^{RMaxFP}_{\mathcal{S}^R_G} =_{df} reqInf^{\star}_{c_q}(n)$$

Beachte:

$$[\![\ \mathbf{q}\ ]\!]^{RMaxFP}_{\mathcal{S}^R_G} = c_q$$

Kapitel 8.6

Generischer reverser Fixpunktalgorithmus

Die *RMinFP*- und *RMaxFP*-Semantik

...sind praktisch relevant, weil das *RMinFP*-Gleichungssystem 8.5.1.1 und das *RMaxFP*-Gleichungssystem 8.5.2.1 ein generisches

- iteratives Berechnungsverfahren (Algorithmus 8.6.1.1)

induzieren, das ihre kleinste und größte Lösung zu approximieren erlaubt, d.h. die *RMinFP*- und *RMaxFP*-Semantik.

Kapitel 8.6.1

Algorithmus

Gen. reverser Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1 (1)

Eingabe: Reverse DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_R, c_q)$.

Ausgabe: Bei Terminierung des Algorithmus (s. Terminierungstheorem 8.6.2.1) enthält die Variable *reqInf*[n] die *RMinFP*-Lösung von $\mathcal{S}_G^R$ am Knoten n.

Zusätzlich (s. Reverses Sicherheitstheorem 8.7.1 und Reverses Koinzidenztheorem 8.7.2) gilt: Wenn $[\![\ ]\!]_R$

- additiv: *reqInf*[**s**] enthält die
- monoton: *reqInf*[**s**] enthält eine obere Approximation der

der *RJOP*-Lösung von $\mathcal{S}_G^R$ am Knoten n.

Bemerkung: Die Variable *workset* steuert die iterative Berechnung. Ihre Elemente sind Flussgraphknoten, deren Annotation jüngst aktualisiert worden ist, was ihrerseits Aktualisierungen und damit verbandsmäßig größere Annotationen an ihren Vorgängerknoten zur Folge haben kann.

Gen. reverser Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1 (2)

(Prolog: Initialisierung von *reqInf* und *workset*)
FORALL $n \in N \backslash \{\mathbf{q}\}$ DO $reqInf[n] := \bot$ OD;
$reqInf[\mathbf{q}] := c_q$;
$workset := \{N\}$;
(Hauptschleife: Iterative Fixpunktberechnung)
WHILE $workset \neq \emptyset$ DO
    CHOOSE $m \in workset$;
        $workset := workset \backslash \{m\}$;
        (Aktualisierung d. Vorgängerumgebung von Knoten m)
        FORALL $n \in pred(m)$ DO
            $join := [\![(n, m)]\!]_R(reqInf[m]) \sqcup_f reqInf[n]$;
            IF $reqInf[n] \sqsubset_f join$
                THEN
                    $reqInf[n] := join$;
                    $workset := workset \cup \{n\}$ FI
        OD ESOOHC OD.

Kapitel 8.6.2

Terminierung

Terminierung

...mit Lemma 8.2.2(1) ("die von einer lokalen DFA-Semantik induzierten reversen Semantikfkt. sind monoton") erhalten wir:

Theorem 8.6.2.1 (Terminierung)

Der generische reverse Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1 terminiert mit der

1. *RMinFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^R$, wenn $\widehat{\mathcal{C}_f}$ die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt.
2. *RMaxFP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^R$, wenn $\widehat{\mathcal{C}_f^{usd}}$ die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt, wobei

$$\widehat{\mathcal{C}_f^{usd}} =_{df} (\mathcal{C}_f, \sqcup_f, \sqcap_f, \sqsupseteq_f, \mathit{failure}, \bot_f)$$

der auf den Kopf gestellte Verband

$$\widehat{\mathcal{C}_f} = (\mathcal{C}_f, \sqcap_f, \sqcup_f, \sqsubseteq_f, \bot_f, \mathit{failure})$$

ist.

Terminierungskorollar

...mit Lemma 8.1.3 ("der fehlschlagserweiterte DFA-Verband $\widehat{\mathcal{C}_f}$ von $\mathcal{S}_G^R$ erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung gdw der zugrundeliegende DFA-Verband $\widehat{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{S}_G$ die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt") können wir die verbleibende Voraussetzung von Theorem 8.6.2.1 auf die entsprechende Eigenschaft des Ursprungsproblems zurückführen:

Korollar 8.6.2.2 (Terminierung)

Der generische reverse Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1 terminiert mit der *RMinFP*-Semantik (*RMaxFP*-Semantik) von $\mathcal{S}_G^R$, wenn $\widehat{\mathcal{C}}$ ($\widehat{\mathcal{C}^{usd}}$) die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt, wobei $\widehat{\mathcal{C}^{usd}}$ der der auf den Kopf gestellte Verband $\widehat{\mathcal{C}}$ ist.

Berechenbare Lösungen eines RDFA-Problems

...zusammen legen der generische reverse Fixpunktalgorithmus 8.6.1.1 und das Terminierungstheorem 8.6.2.1 folgende Definition nahe:

Definition 8.6.2.2 (Berechenbare RDFA-Lösungen)

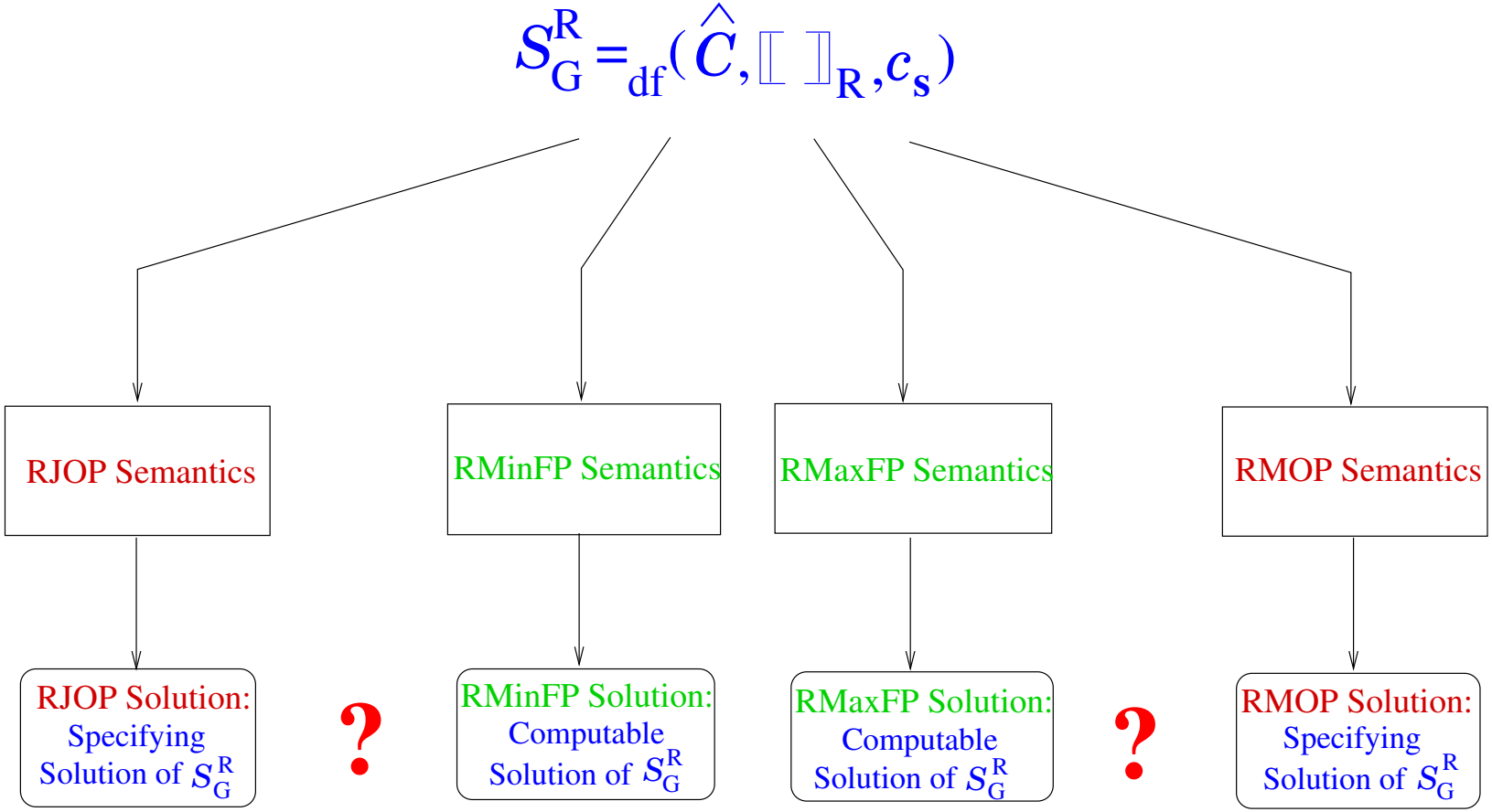
Die *RMinFP-* und *RMaxFP-*Semantik eines Flussgraphen definieren die berechenbaren Lösungen eines reversen DFA-Problems, seine sog. *RMinFP-* und *RMaxFP-*Lösungen.

Kapitel 8.7

Reverse Sicherheit und Koinzidenz

RJOP / *RMinFP*- u. *RMOP* / *RMaxFP*-Semantik

...einer RDFA-Spezifikation und die Frage ihrer Beziehung zueinander:



Reverse Sicherheit

Sei $\mathcal{S}^R_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_R, c_q)$ eine reverse DFA-Spezifikation.

...mit Lemma 8.2.2(1) ("die von einer lokalen DFA-Semantik induzierten reversen Semantikfkt. sind monoton") erhalten wir:

Theorem 8.7.1 (Reverse Sicherheit)

1. Die *RMinFP*-Semantik von $\mathcal{S}^R_G$ ist eine sichere (d.h. obere) Approximation der *RJOP*-Semantik von $\mathcal{S}^R_G$, d.h.,

$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{RMinFP}_{\mathcal{S}^R_G} \sqsupseteq [\![\, n \,]\!]^{RJOP}_{\mathcal{S}^R_G}$$

2. Die *RMaxFP*-Semantik von $\mathcal{S}^R_G$ ist eine sichere (d.h. untere) Approximation der *RMOP*-Semantik von $\mathcal{S}^R_G$, d.h.,

$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{RMaxFP}_{\mathcal{S}^R_G} \sqsubseteq [\![\, n \,]\!]^{RMOP}_{\mathcal{S}^R_G}$$

Reverse Koinzidenz

Sei $\mathcal{S}_G^R =_{df} (\widehat{\mathcal{C}_f}, [\![\ ]\!]_R, c_q)$ eine reverse DFA-Spezifikation.

Theorem 8.7.2 (Reverse Koinzidenz)

1. Die *RMinFP*- und *RJOP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^R$ stimmen überein, d.h.,
$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{RMinFP}_{\mathcal{S}_G^R} = [\![\, n \,]\!]^{RJOP}_{\mathcal{S}_G^R}$$

2. Die *RMaxFP*- und *RMOP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^R$ stimmen überein, d.h.,
$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{RMaxFP}_{\mathcal{S}_G^R} = [\![\, n \,]\!]^{RMOP}_{\mathcal{S}_G^R}$$

wenn die reverse DFA-Semantik $[\![\ ]\!]_R$ additiv bzw. distributiv ist.

Reverses Koinzidenzkorollar

...mit Lemma 7.1.2.7(1) und 8.1.4 ("$[\![\ ]\!]_R$ ist distributiv/additiv, wenn $[\![\ ]\!]$ distributiv ist") können wir die verbleibenden Voraussetzungen von Theorem 8.7.2 auf eine einzelne Eigenschaft des induzierenden Ursprungsproblems zurückführen:

Korollar 8.7.3 (Reverse Koinzidenz)

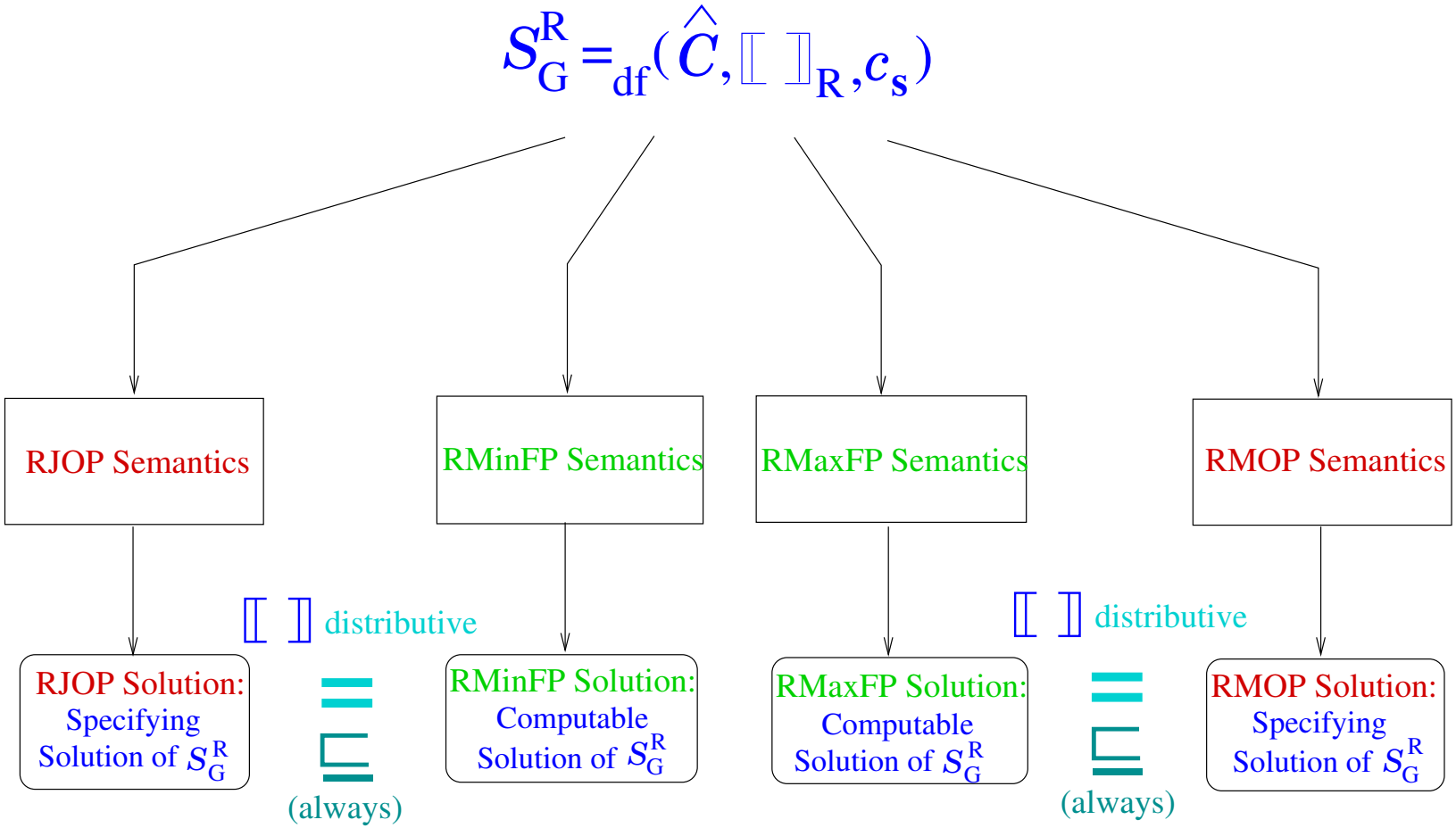
1. Die *RMinFP*- und *RJOP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^R$ stimmen überein, d.h.,
$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{RMinFP}_{\mathcal{S}_G^R} = [\![\, n \,]\!]^{RJOP}_{\mathcal{S}_G^R}$$

2. Die *RMaxFP*- und *RMOP*-Semantik von $\mathcal{S}_G^R$ stimmen überein, d.h.,
$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{RMaxFP}_{\mathcal{S}_G^R} = [\![\, n \,]\!]^{RMOP}_{\mathcal{S}_G^R}$$

wenn die lokale DFA-Semantik $[\![\ ]\!]$ der induzierenden DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G$ distributiv ist.

RJOP / *RMinFP*- u. *RMOP* / *RMaxFP*-Semantik

...einer RDFA-Spezifikation und ihre Beziehung zueinander:



Konservativität von Algorithm 8.6.1.1

...mit Lemma 8.1.3 und Theorem 8.7.1 erhalten wir:

Corollary 8.7.4 (*RJOP*/*RMOP*-Konservativität)

Algorithmus 8.6.1.1 ist

- *RJOP*- (*RMOP*-) konservativ

für $\mathcal{S}_G^R$, d.h. terminiert mit einer oberen (unteren) Approximation der *RJOP*- (*RMOP*-) Semantik von $\mathcal{S}_G^R$, wenn der Verband $\widehat{\mathcal{C}}$ der induzierenden DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G$ (und damit auch $\widehat{\mathcal{C}_f}$) die aufsteigende (absteigende) Kettenbedingung erfüllt.

Straffheit von Algorithm 8.6.1.1

...Straffheit (engl. tightness).

Korollar 8.7.5 (*RJOP*/*RMOP*-Straffheit)

Algorithmus 8.6.1.1 ist

- *RJOP*- (*RMOP*-) straff

für $\mathcal{S}_G^R$, d.h. terminiert mit der *RJOP*- (*RMOP*-) Semantik von $\mathcal{S}_G^R$, wenn für die induzierende DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G$ gilt:

1. $[\![\ ]\!]$ ist distributiv.
2. $\widehat{\mathcal{C}}$ erfüllt die aufsteigende (absteigende) Kettenbedingung.

Beachte: Distributivität von $[\![\ ]\!]$ (und deshalb auch von $[\![\ ]\!]_f$) impliziert Addivität von $[\![\ ]\!]_R$ (siehe Lemma 7.1.2.7(1) und 8.1.4(2)). Somit sind Distributivität und Addivität von $[\![\ ]\!]_R$ implizit in Korollar 8.7.5 gefordert, werden aber auf die Distributivitätseigenschaft des Ursprungsproblems zurückgeführt.

Kapitel 8.8

Zusammenhang, Rückführbarkeit von DFA auf RDFA

Analyse-Szenario

..sei

- ϕ die interessierende Programmeigenschaft (z.B., Verfügbarkeit eines Terms, Lebendigkeit einer Variablen, etc.).
- $\mathcal{S}_G^\phi$ eine DFA-Spezifikation für ϕ.
- $\mathcal{S}_G^{\phi\,R}$ die von $\mathcal{S}_G^\phi$ induzierte reverse DFA-Spezifikation.
- c_s eine Startzusicherung.
- c_q eine DFA-Anfrage.

Kapitel 8.8.1

Korrektheit, Vollständigkeit reverser DFA bzgl. induzierender DFA

Korrektheit und Vollständigkeit

Definition 8.8.1.1 (Korrektheit)

$\mathcal{S}_G^{\phi\,R}$ ist

1. *RJOP*-korrekt für $\mathcal{S}_G^{\phi}$, wenn für alle c_q gilt:
   $[\![\, \mathbf{s} \,]\!]^{RJOP}_{\mathcal{S}_G^R, c_q} \sqsubseteq c \;\Rightarrow\; [\![\, q \,]\!]^{MOP}_{\mathcal{S}_G, c} \sqsupseteq c_q.$
2. *RMOP*-korrekt für $\mathcal{S}_G^{\phi}$, wenn für alle c_q gilt:
   $[\![\, \mathbf{s} \,]\!]^{RMOP}_{\mathcal{S}_G^R, c_q} \sqsubseteq c \;\Rightarrow\; [\![\, q \,]\!]^{JOP}_{\mathcal{S}_G, c} \sqsupseteq c_q.$

Definition 8.8.1.2 (Vollständigkeit)

$\mathcal{S}_G^{\phi\,R}$ ist

1. *RJOP*-vollständig für $\mathcal{S}_G^{\phi}$, wenn für alle $c_{\mathbf{s}}$ gilt:
   $[\![\, q \,]\!]^{MOP}_{\mathcal{S}_G, c_{\mathbf{s}}} \sqsupseteq c \Rightarrow [\![\, \mathbf{s} \,]\!]^{RJOP}_{\mathcal{S}_G^R, c} \sqsubseteq c_{\mathbf{s}}.$
2. *RMOP*-vollständig für $\mathcal{S}_G^{\phi}$, wenn für alle $c_{\mathbf{s}}$ gilt:
   $[\![\, q \,]\!]^{JOP}_{\mathcal{S}_G, c_{\mathbf{s}}} \sqsupseteq c \Rightarrow [\![\, \mathbf{s} \,]\!]^{RMOP}_{\mathcal{S}_G^R, c} \sqsubseteq c_{\mathbf{s}}.$

Kapitel 8.8.2

Distributives Zusammenhangstheorem

Zshg. von reverser DFA u. induzierender DFA

...für distributive DFA-Probleme.

Theorem 8.8.2.1 (Distributives Zusammenhangsth.)

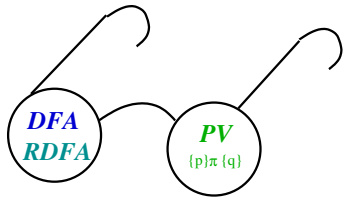
Sei $\mathcal{S}_G$ eine DFA-Spezifikation mit distributiver lokaler DFA-Semantik $[\![\ ]\!]$. Dann gilt für alle Startzusicherungen $c_{\mathbf{s}} \in \mathcal{C}$ und DFA-Anfragen $c_q \in \mathcal{C}$:

$$
\begin{array}{ccccc}
[\![\, q \,]\!]^{MaxFP}_{\mathcal{S}_G, c_{\mathbf{s}}} & = & [\![\, q \,]\!]^{MOP}_{\mathcal{S}_G, c_{\mathbf{s}}} & \sqsupseteq & c_q \\
 & \Longleftrightarrow & & & \\
[\![\, \mathbf{s} \,]\!]^{RMinFP}_{\mathcal{S}^R_G, c_q} & = & [\![\, \mathbf{s} \,]\!]^{RJOP}_{\mathcal{S}^R_G, c_q} & \sqsubseteq & c_{\mathbf{s}}
\end{array}
$$

Informell: Wir wissen am Programmpunkt q bezüglich der Startzusicherung $c_{\mathbf{s}}$ mindestens Datenflussfakt c_q (obere Zeile), wenn wir für die Gültigkeit von Datenflussfakt c_q am Programmpunkt q höchstens die Startzusicherung $c_{\mathbf{s}}$ am Startknoten $\mathbf{s}$ fordern müssen (untere Zeile) und umgekehrt.

Zusammenhangsveranschaulichung

...von reverser und induzierender DFA (distributiver Fall) sowie Analogie zu axiomatischer Programmverifikation:



Data Flow Analysis | **Program Verification**

$\mathrm{MaxFP}_{c_s}(q)$ — *Coincidence Theorem* — $\mathrm{MOP}_{c_s}(q) \sqsupseteq c_q$

Link Theorem

$\mathrm{RJOP}_{c_q}(s) \sqsubseteq c_s$ — *Reverse Coincidence Theorem* — $\mathrm{RMinFP}_{c_q}(s)$

$[\![e]\!] \in \sqsubset C \xrightarrow{\text{distributive}} C \sqsupset$

induces

$[\![e]\!]_R(c) =_{df} \bigsqcap \{c' \mid [\![e]\!](c') \sqsupseteq c\}$

$(\mathrm{SPC}(p,\pi) \Longrightarrow q \quad (\Longleftrightarrow \mathrm{Ch}(\mathrm{SPC}(\pi,p)) \leq \mathrm{Ch}(q))$

$\mathrm{WPC}(\pi,q) \Longleftarrow p \quad (\Longleftrightarrow \mathrm{Ch}(\mathrm{WPC}(\pi,q)) \geq \mathrm{Ch}(p))$

Reverse Data Flow Analysis

$\text{"}\vdash\!\!\!\!- \langle c_s\rangle P[s,q]\langle c_q\rangle\text{"} \Longleftrightarrow \mathrm{MOP}_{c_s}(q) \sqsupseteq c_q \wedge \mathrm{RJOP}_{c_q}(s) \sqsubseteq c_s$

$\vdash\!\!\!\!- \{p\}\,\pi\,\{q\} \Longleftrightarrow (\mathrm{SPC}(p,\pi) \Longrightarrow q \wedge \mathrm{WPC}(\pi,q) \Longleftarrow p$

Zusammenfassung

...für distributive DFA-Probleme $\mathcal{S}_G^\phi$ liefert das Distributive Zusammenhangstheorem 8.8.2.1, dass das induzierte reverse DFA-Problem ${\mathcal{S}_G^\phi}^R$ korrekt und vollständig für $\mathcal{S}_G^\phi$ im Sinn von Definition 8.8.1.1 und 8.8.1.2 ist.

Somit:

...ist $\mathcal{S}_G^\phi$ korrekt und vollständig für ϕ im Sinn von Definition 7.8.1 und 7.8.2 (und somit distributiv), so kann eine *MaxFP*-Analyse auf entsprechende (wiederholte) *RMinFP*-Analysen zurückgeführt und (und für Bitvektorprobleme) dadurch ersetzt werden; darauf beruht die Korrektheit anforderungsgetriebener Datenflussanalyse auf Grundlage reverser Datenflussanalyse (s. Kapitel 8.9.4).

Übungsaufgabe 8.8.2.2

Was gilt für den Zusammenhang von *MinFP-/JOP*-Semantik einer DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G$ mit distributiver lokaler DFA-Semantik $[\![\ ]\!]$ und der von ihr induzierten *RMaxFP-/RMOP*-Semantik des zugehörigen reversen DFA-Problems?

Beweisen Sie Ihre Behauptung(en).

Übungsaufgabe 8.8.2.3

Was gilt für

1. Korrektheit und Vollständigkeit im Sinn von Definition 8.8.1.1 und 8.8.1.2 für das induzierte reverse DFA-Problem $\mathcal{S}_G^{\phi^R}$ eines monotonen, aber nicht distributiven DFA-Problems $\mathcal{S}_G^{\phi}$?
2. Was gilt für die Rückführbarkeit der Datenflussanalyse für monotone, aber nicht distributive DFA-Probleme auf anforderungsgetriebene Datenflussanalyse auf Grundlage reverser Datenflussanalyse?

Beweisen Sie Ihre Behauptung(en).

Kapitel 8.9

RDFA-Anwendungsbeispiele

Reverse Datenflussanalyse

...hat eine Vielzahl von Anwendungen, darunter

- anforderungsgetriebene Datenflussanalyse (engl. demand-driven data-flow analysis)

oder den Bau von

- 'Hot Spot'-Programmanalysatoren und -optimierern
- Fehlersuchern (engl. Debugger)
- ...

Kapitel 8.9.1

Verfügbare Ausdrücke

Verfügbarkeit: Reverse DFA-Spezifikation

...reverse Verfügbarkeit für einen einzelnen Term t.

Reverse DFA-Spezifikation für Verfügbarkeit:

1. DFA-Verband:
   $(\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top) =_{df} (\mathbb{B}_f, \wedge_f, \vee_f, \leq_f, \textbf{falsch}, \textit{failure})$
   mit $\textbf{falsch} \leq_f \textbf{wahr} \leq_f \textit{failure}$

2. Reverse DFA-Semantik:
   $[\![\ ]\!]^t_{av_R} : E \to (\ \mathbb{B}_f \to \mathbb{B}_f\ )$ definiert durch
   $\forall\, e \in E.\ \forall\, b \in \mathbb{B}_f.\ [\![\ e\ ]\!]^t_{av_R}(b) =_{df}$
   $$\bigsqcap \{ b' \in \mathbb{B}_f \mid [\![\ e\ ]\!]^t_{av,f}(b') \geq_f b \}$$
   wobei $[\![\ e\ ]\!]^t_{av,f} : E \to (\ \mathbb{B}_f \to \mathbb{B}_f\ )$ die Ausdehnung der lokalen DFA-Semantik $[\![\ e\ ]\!]^t_{av} : E \to (\ \mathbb{B} \to \mathbb{B}\ )$ von Variante 1 aus Kapitel 7.10.1 von $\mathbb{B}$ auf $\mathbb{B}_f$ gemäß Definition 8.1.2 ist.

Charakterisierung der rev. DFA-Semantikfkt.

...mit Hilfe der Funktionen $Cst^R_{\mathbf{wahr}}$, $Cst^R_{\mathbf{falsch}}$ und $Id^R_{\mathbb{B}_f}$ über $\mathbb{B}_f =_{df} \{\mathbf{falsch}, \mathbf{wahr}, \mathit{failure}\}$, die definiert sind durch:

$$\forall\, b \in \mathbb{B}_f.\ Cst^R_{\mathbf{wahr}}(b) =_{df} \begin{cases} \mathbf{falsch} & \text{falls } b \in \mathbb{B} \\ \mathit{failure} & \text{sonst (d.h. falls } b = \mathit{failure}) \end{cases}$$

$$\forall\, b \in \mathbb{B}_f.\ Cst^R_{\mathbf{falsch}}(b) =_{df} \begin{cases} \mathbf{falsch} & \text{falls } b = \mathbf{falsch} \\ \mathit{failure} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Id^R_{\mathbb{B}_f} =_{df} Id_{\mathbb{B}_f}$$

...können wir die induzierten reversen DFA-Semantikfunktionen $[\![\, e \,]\!]^t_{av_R}(b)$, $e \in E$, direkt charakterisieren.

Charakterisierungslemma

Charakterisierungslemma 8.9.1.1

$$\forall\, e \in E.\ [\![\, e \,]\!]^t_{av_R} = \begin{cases} Cst^R_{\mathbf{wahr}} & \text{falls } [\![\, e \,]\!]^t_{av} = Cst_{\mathbf{wahr}} \\ Id^R_{\mathbb{B}_f} & \text{falls } [\![\, e \,]\!]^t_{av} = Id_{\mathbb{B}} \\ Cst^R_{\mathbf{falsch}} & \text{falls } [\![\, e \,]\!]^t_{av} = Cst_{\mathbf{falsch}} \end{cases}$$

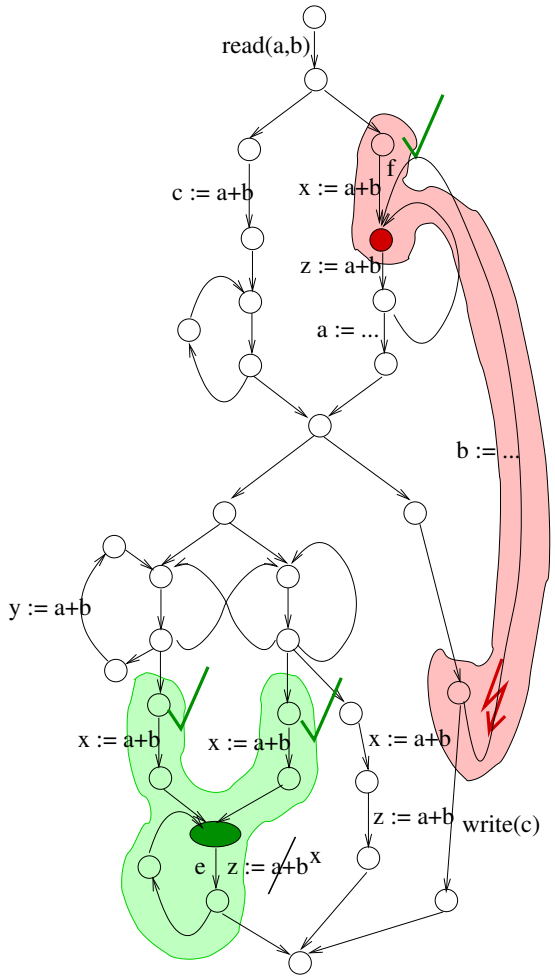
wobei $[\![\, e \,]\!]^t_{av} : E \to (\, \mathbb{B} \to \mathbb{B}\,)$ die lokale DFA-Semantik von Variante 1 aus Kapitel 7.10.1 ist.

Kapitel 8.9.2

‘Hot Spot’-Analysatoren, -optimierer

‘Hot Spot’-Analysatoren und -optimierer

...fokussieren Analyse und Optimierung auf ‘interessante’ Programmstellen:

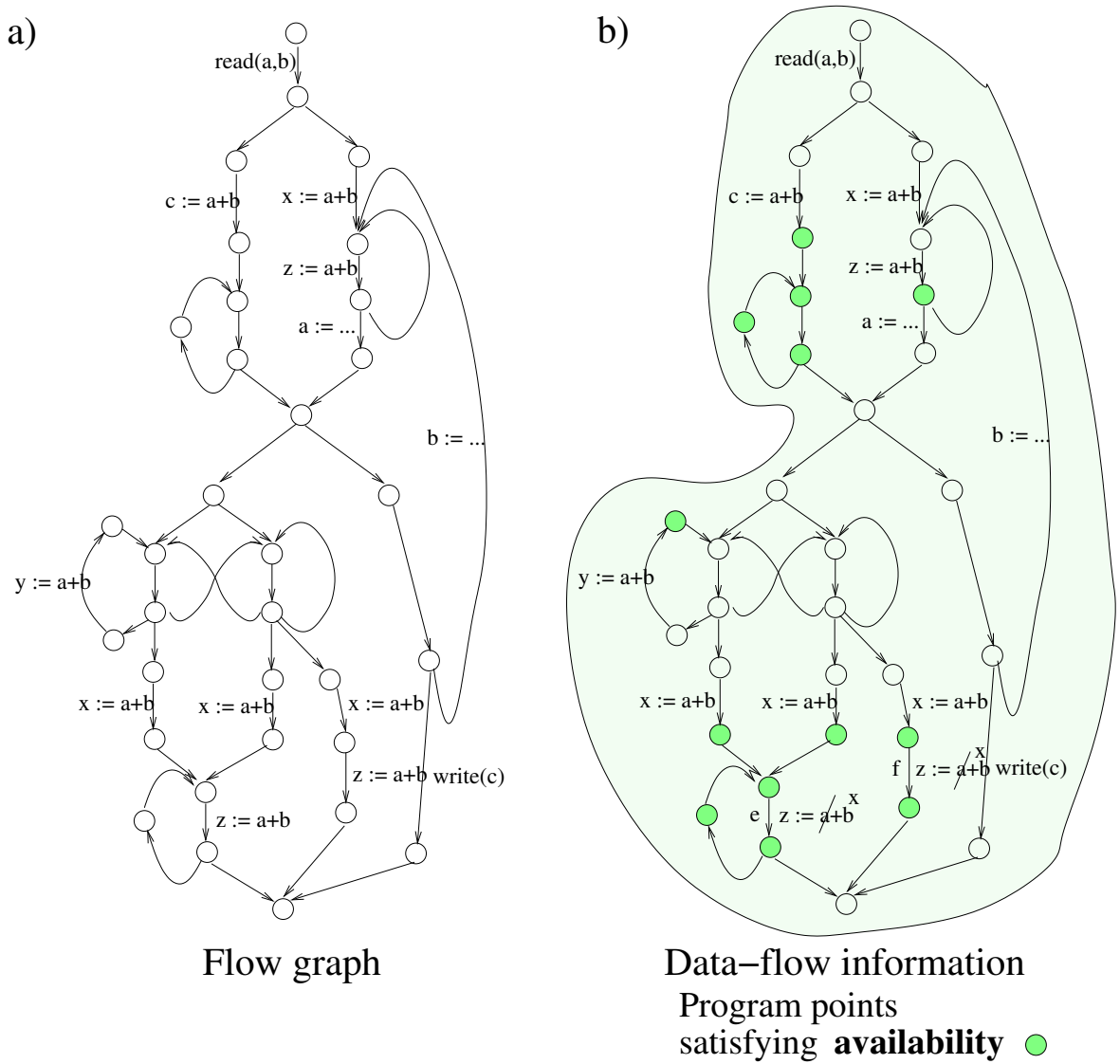


"Hot Spot" Optimizer

Program point ● ✓
satisfies **availability**
while ● does not!

Zum Vergleich: Standardanalysatoren/-opt.

...betrachten stets das ganze Programm, auch 'nicht-interessante' Teile:



Flow graph

Data–flow information

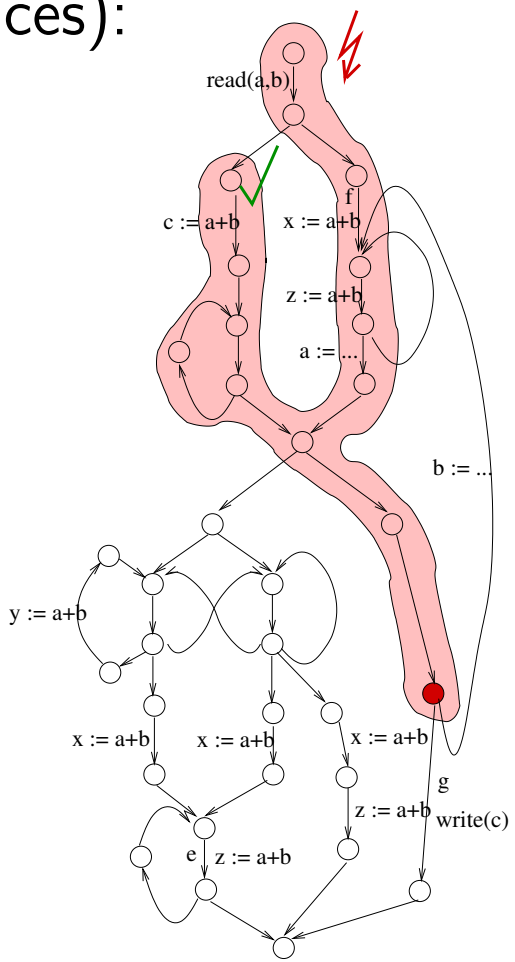
Program points satisfying **availability**

Kapitel 8.9.3

Fehlersucher

Fehlersucher

...e.g., for revealing unitialized variables (practically relevant: null pointer references):



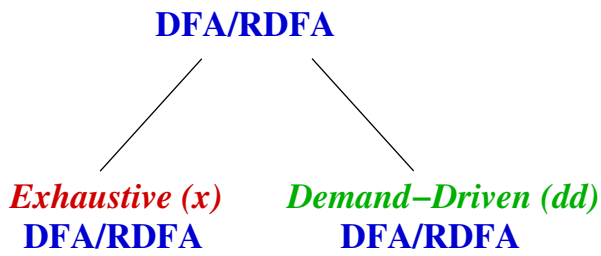
Debugger

Variable c is not initialized along some paths reaching program point ●

Kapitel 8.9.4

Anforderungsgetriebene Datenflussanalyse

Klassifikation von DFA/RDFA-Techniken

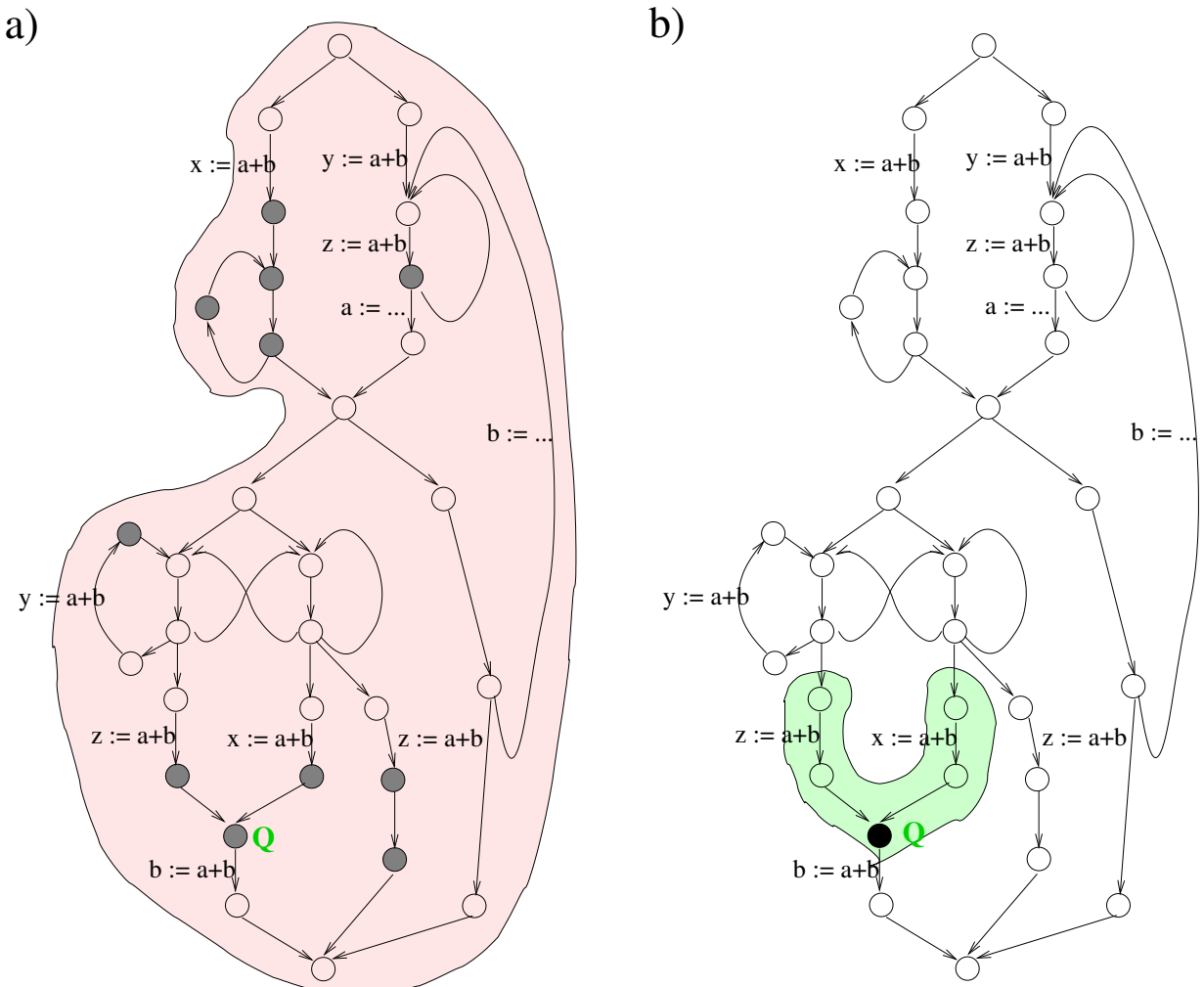


- Erschöpfende DFA (xDFA): Vollständige Berechnung der *MaxFP*/*MinFP*-Lösung bzw. *RMinFP*/*RMaxFP*-Lösung eines DFA- bzw. RDFA-Problems.
- Anforderungsgetriebene DFA (ddDFA): Teilweise Berechnung der *MaxFP*/*MinFP*-Lösung bzw. *RMinFP*/*RMaxFP*-Lösung eines DFA- bzw. RDFA-Problems; vorzeitige Terminierung der Fixpunktiteration sobald das Analyseergebnis für den 'interessanten' Teil feststeht.

  Im engeren Sinn: Lösung des ursprünglichen DFA-Problems mittels anforderungsgetriebener Lösung des induzierten RDFA-Problems.

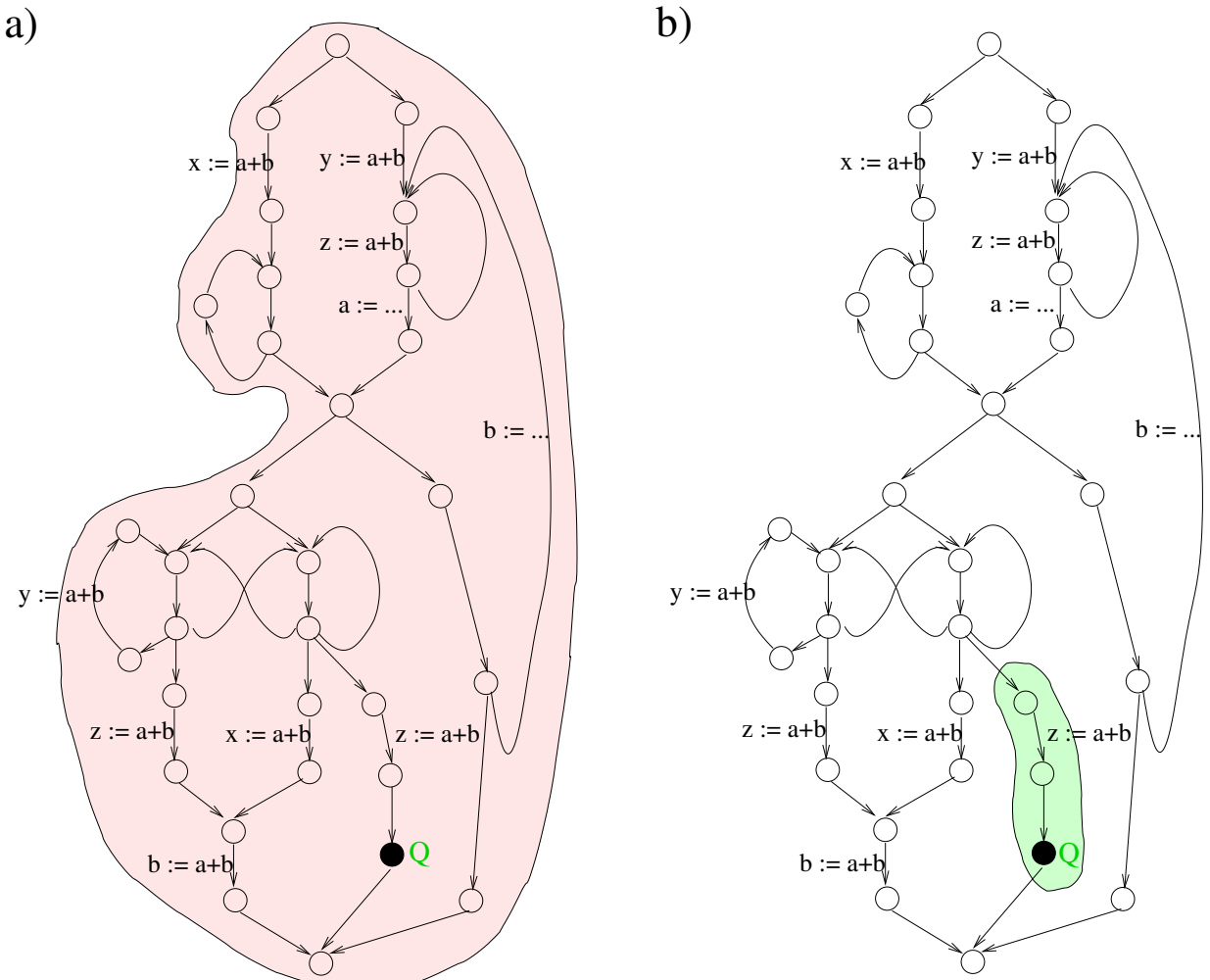
Beispiel: Aufwandsvergleich xDFA, ddDFA (1)

Verfügbarkeit an Programmpunkt Q: Informeller/anekdotischer Vergleich von Berechnungsaufwand erschöpfend (rosa), anforderungsgetrieben (grün):



Beispiel: Aufwandsvergleich xDFA, ddDFA (2)

Verfügbarkeit an Programmpunkt Q: Informeller/anekdotischer Vergleich von Berechnungsaufwand erschöpfend (rosa), anforderungsgetrieben (grün):



Beobachtung

...in günstigen Fällen

- kann der Aufwand anforderungsgetriebener DFA erheblich niedriger sein als für eine entsprechende erschöpfende Analyse.

...in ungünstigen Fällen

- ergibt sich kein Vorteil.

Kapitel 8.10

Zusammenfassung, Ausblick

Aus Sicht (axiomat.) Programmverifikation

...drei Grundprobleme unterscheidbar: Das

1. stärkste Nachbedingungs- (Implementierungs-) Problem

$$\{p\}\pi\{?\}$$

2. schwächste Vorbedingungs- (Spezifikations-) Problem

$$\{?\}\pi\{q\}$$

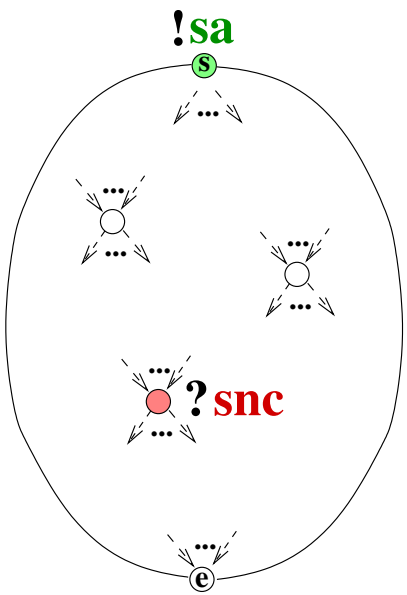
3. Gültigkeits- (Verifikations-) Problem

$$\{p\}\pi\{q\}$$

Implementierungs-, Spezifikations- und Verifikationsproblem

...übertragen auf Programm- bzw. Datenflussanalyse:

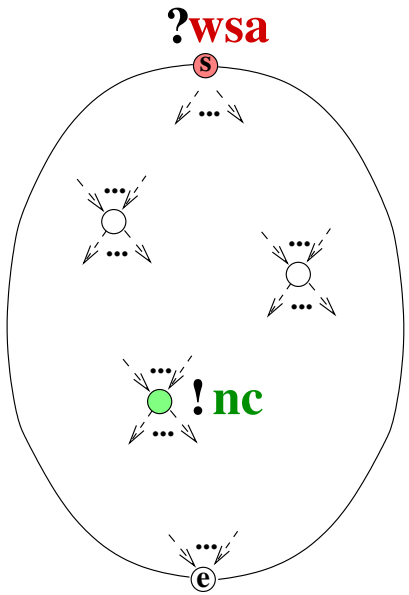
Implementation Problem



! **Given:** Start Assertion **sa**

? **Sought:** Strongest Node Condition **snc**

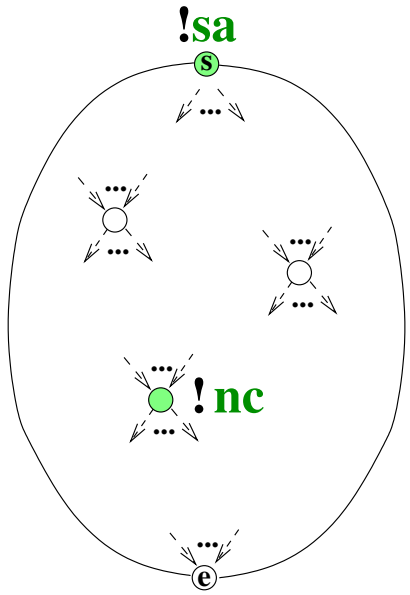
Specification Problem



! **Given:** Node Condition **nc**

? **Sought:** Weakest Start Assertion **wsa**

Verification Problem

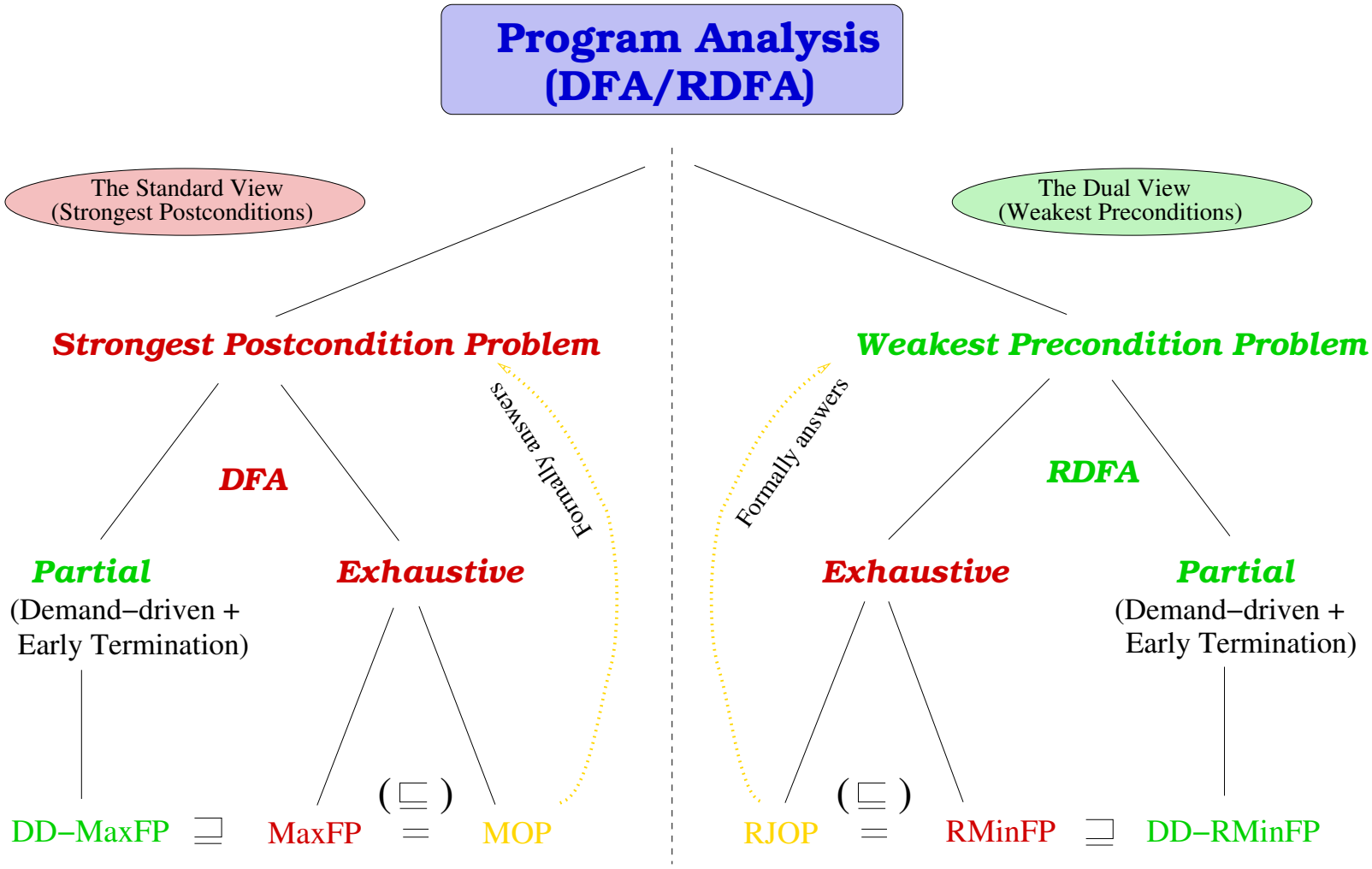


! **Given:** Start Assertion **sa**
Node Condition **nc**

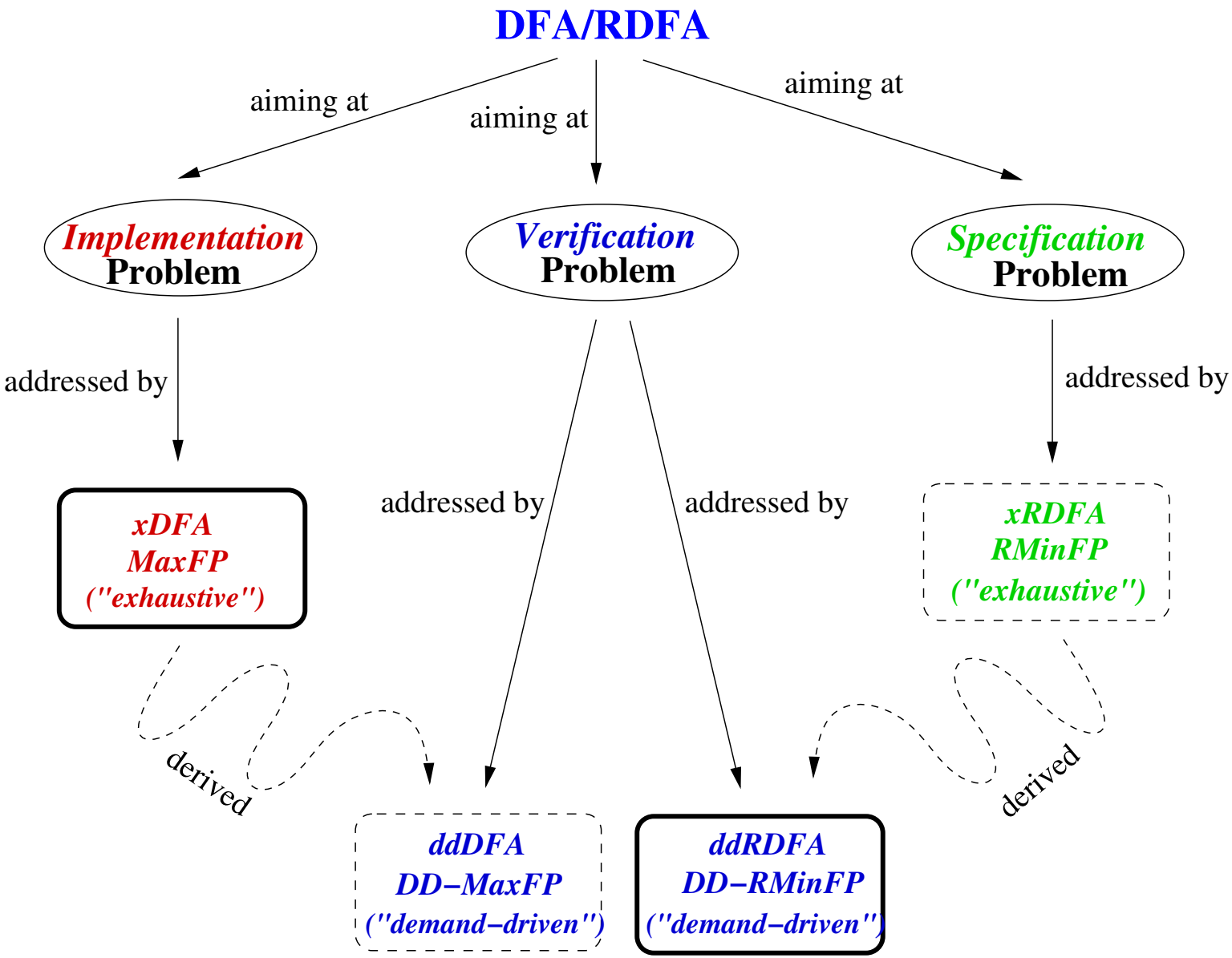
? **Sought:** Validity of **nc** wrt **sa**

Lösungstechniken für die drei Grundprobleme

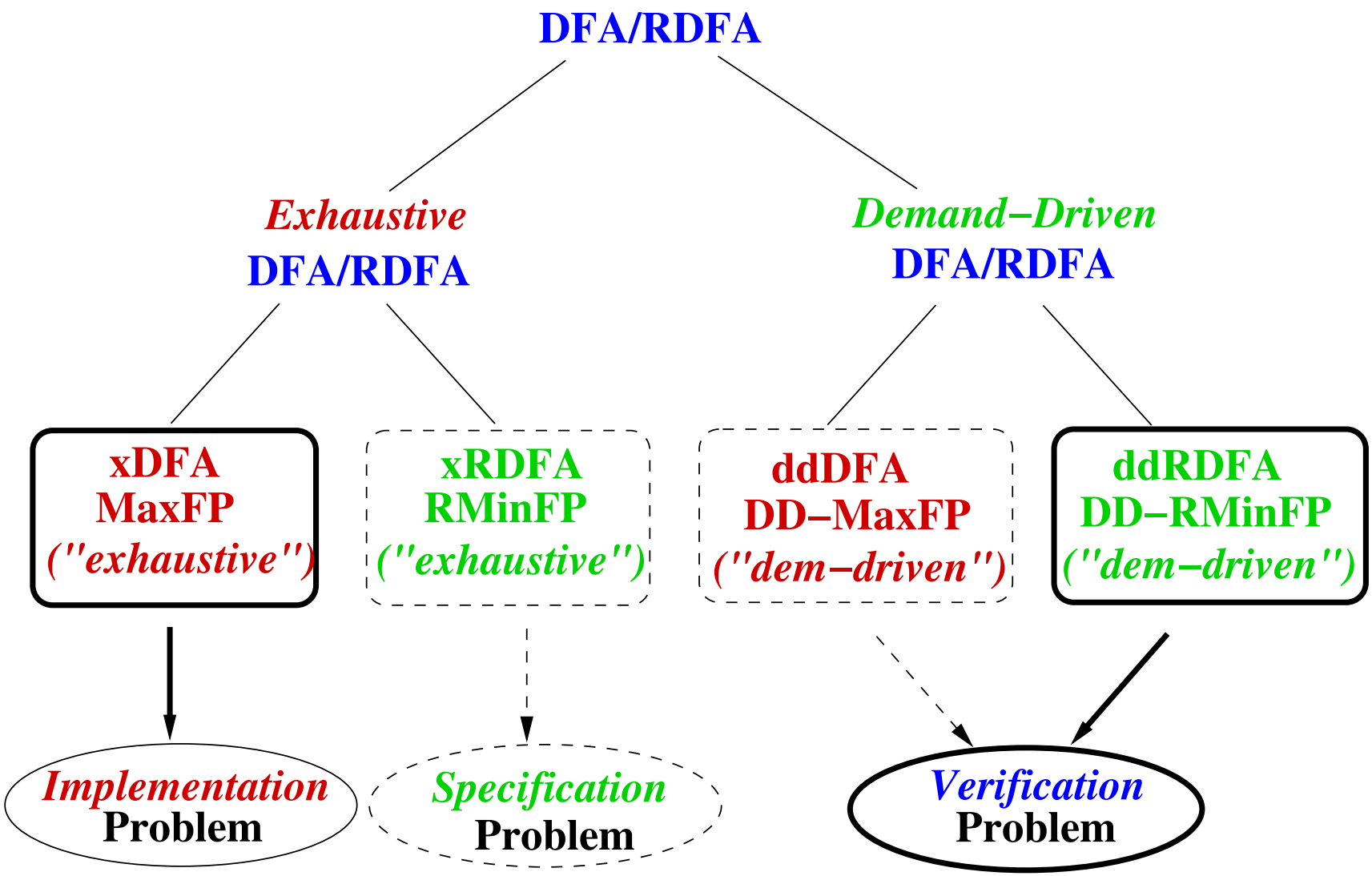
...in Form erschöpfender (xDFA) und anforderungsgetriebener (ddDFA) Datenflussanalyse im Sinn stärkster Nach- und schwächster Vorbedingungen:



Abgeleitete problemgeleitete Klassifikation

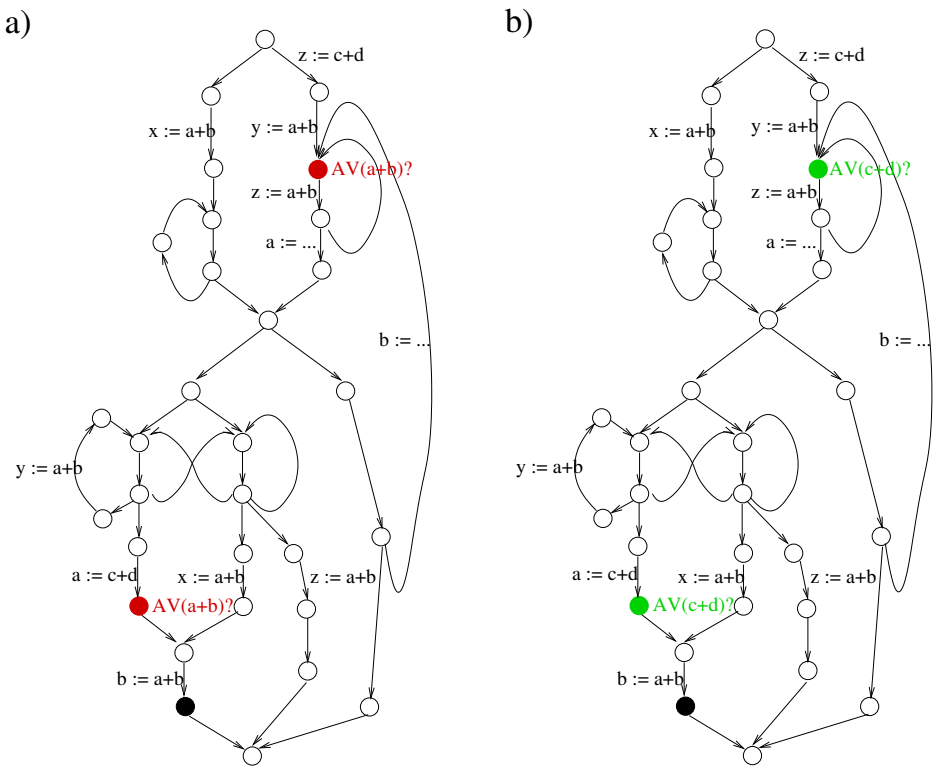


Abgeleitete analysetypgeleitete Klassifikation



Übungsaufgabe 8.10.1

Warum spielt der *DD-MaxFP*-Ansatz keine Rolle im Vergleich zum *DD-RMinFP*-Ansatz? Betrachte dazu, ob $a + b$ und $c + d$ an den farblich hervorgehobenen Programmpunkten verfügbar sind und vergleiche den Berechnungsaufwand von *DD-MaxFP*- und *DD-RMinFP*-Ansatz. Welcher generelle Unterschied zwischen den beiden Ansätzen wird deutlich?



Übungsaufgabe 8.10.2

Vergleiche Aufgaben und Vorgehen von:

- Typprüfung (ein Programmierervorschlag einer gültigen Typisierung wird auf Stichhaltigkeit überprüft):
  $\rightsquigarrow$ Verifikation(sproblem)
- Typinferenz (eine stichhaltigeTypisierung wird ohne vorgegebenen Typisierungsvorschlag generiert bzw. eine Fehlermeldung ausgegeben, wenn dies fehlschlägt):
  $\rightsquigarrow$ Analyse(problem)

Leisten Typprüfung und Typinferenz nicht ähnliches? Ist das Analyseproblem Inferenz nicht sogar schwerer als das Verifikationsproblem Prüfung?

Legt das Beispiel nicht nahe, dass Verifikation nicht notwendig tiefgehender oder konzeptuell oder berechnungsmäßig schwerer sein muss als Analyse, sondern dass Verifikation und Analyse Seiten derselben Münze oder gar Aspekte derselben Seite sind?

Kapitel 8.11

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Reading for Chapter 8 (1)


Gagan Agrawal. *Demand-driven Construction of Call Graphs*. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 125-140, 2000.


Wayne A. Babich, Mehdi Jazayeri. *The Method of Attributes for Data Flow Analysis: Part I - Exhaustive Analysis*. Acta Informatica 10(3):245-264, 1978.


Wayne A. Babich, Mehdi Jazayeri. *The Method of Attributes for Data Flow Analysis: Part II - Demand Analysis*. Acta Informatica 10(3):265-272, 1978.

Reading for Chapter 8 (2)

Ras Bodík, Rajiv Gupta, Vivek Sarkar. *ABCD: Eliminating Array Bounds Check on Demand*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN Conference on Porgramming Language Design and Implementation (PLDI 2000), ACM SIGPLAN Notices 35(5):321-333, 2000.

Evelyn Duesterwald. *A Demand-driven Approach for Efficient Interprocedural Data-Flow Analysis*. PhD thesis, University of Pittsburgh, PA, USA, 1996.

Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *Demand-driven Computation of Interprocedural Data Flow*. In Conference Record of the 22nd ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'95), 37-48, 1995.

Reading for Chapter 8 (3)


Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *A Demand-driven Analyzer for Data Flow Testing at the Integration Level*. In Proceedings of the IEEE Conference on Software Engineering (CoSE'96), 575-586, 1996.


Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *A Practical Framework for Demand-driven Interprocedural Data Flow Analysis*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 19(6):992-1030, 1997.


Susan Horwitz, Thomas Reps, Mooly Sagiv. *Demand Interprocedural Data Flow Analysis*. In Proceedings of the 3rd ACM SIGSOFT Symposium on the Foundations of Software Engineering (FSE-3), 104-115, 1995.

Reading for Chapter 8 (4)


John Hughes, John Launchbury. *Reversing Abstract Interpretations*. In Proceedings of the 4th European Symposium on Programming (ESOP'92), Springer-V., LNCS 582, 269-286, 1992.


John Hughes, John Launchbury. *Reversing Abstract Interpretations*. Science of Computer Programming 22:307-326, 1994.


Jens Knoop. *Demand-driven Analysis of Explicitly Parallel Programs: An Approach based on Reverse Data-Flow Analysis*. In Proceedings of the 9th International Workshop on Compilers for Parallel Computers (CPC 2001), 151-162, 2001.

Reading for Chapter 8 (5)

Jens Knoop. *Data-Flow Analysis for Hot-Spot Program Optimization*. In Proceedings of the 14th Biennial Workshop on 'Programmiersprachen und Grundlagen der Programmierung' (KPS 2007). Bericht A-07-07 der Institute für Mathematik und Informatik, Universität Lübeck, Deutschland, 124-131, 2007.

Yuan Lin, David A. Padua. *Demand-driven Interprocedural Array Property Analysis*. In Proceedings of the 12th International Conference on Languages and Compilers for Parallel Computing (LCPC'99), Springer-V., LNCS 1863, 303-317, 1999.

Reading for Chapter 8 (6)


Thomas Reps. *Solving Demand Versions of Interprocedural Analysis Problems*. In Proceedings of the 5th International Conference on Compiler Construction (CC'95), Springer-V., LNCS 786, 389-403, 1994.


Thomas Reps. *Demand Interprocedural Program Analysis using Logic Databases*. In Applications of Logic Databases, R. Ramakrishnan (Hrsg.), Kluwer Academic Publishers, 1994.


Mary Lou Soffa. *Tutorial: Techniques to improve the Scalability and Precision of Data Flow Analysis*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 355-356, 1999.

Reading for Chapter 8 (7)


Peng Tu, David A. Padua. *Gated SSA-based Demand-driven Symbolic Analysis for Parallelizing Computers*. In Proceedings of the International Conference on Supercomputing (ICS'95), 414-423, 1995.


Xin Yuan, Rajiv Gupta, Rami Melhem. *Demand-driven Data Flow Analysis for Communication Optimization*. Parallel Processing Letters 7(4):359-370, 1997.


Xin Zheng, Radu Rugina. *Demand-driven Alias Analysis for C*. In Proceedings of the 35th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2008), 197-208, 2008.

Kapitel 9

Parallele Datenflussanalyse

Kapitel 9.1

Motivation

Syntax paralleler Programme

..wir erweitern die Menge der Sprachbefehle von WHILE um eine

- Parallelanweisung $||$

und nennen die erweiterte Sprache $\text{WHILE}_{||}$. Dabei treffen wir folgende Annahmen:

- Alle Komponenten einer Parallelanweisung werden parallel auf einem gemeinsamen Speicher (engl. shared memory) ausgeführt.
- Es gibt weder Sprünge von außen in eine Parallelanweisung hinein noch hinaus noch Sprünge von einer in eine andere Komponente einer Parallelanweisung.
- Eine Parallelanweisung terminiert dann und nur dann, wenn alle ihre Komponenten terminiert sind.
- Anweisungen sind atomar.

Semantik paralleler Programme

...die Bedeutung von $\text{While}_{||}$-Programmen ist durch eine Verschränkungs-Semantik (engl. interleaving semantics) gegeben.

Beachte: Mit diesen Festlegungen sind wesentliche Charakteristika paralleler Programme und paralleler Programmausführungen gegeben:

- Verschränkung der Ausführung von Anweisungen.
- Synchronisation von parallelen Komponenten.

Weitere Erweiterungen (z.B. dynamische Prozesserzeugung) sind möglich, werden in der Folge aber nicht betrachtet.

Herausforderung: Zustandsexplosionsproblem

...parallele Programme können als kompakte Darstellung nichtdeterministischer sequentieller Programme als Ergebnis einer

- Produktkonstruktion aus den parallelen Komponenten

aufgefasst werden.

Diese Transformation erlaubte die Analyse paralleler Programme auf die Analyse sequentieller Programme zurückzuführen, jedoch wächst die Grösse des nichtdeterministischen sequentiellen Produktprogramms

- exponentiell mit der Zahl paralleler Komponenten

so dass diese Rückführung nicht praktikabel ist.

Charakterisierendes Schlagwort:

Zustandsexplosionsproblem!

Hauptergebnis

...unidirektionale Bitvektoranalysen lassen sich für

- parallele Programme aus $\text{While}_{||}$

ebenso einfach und effizient durchführen wie für

- sequentielle Programme aus While.

Aufgrund der Vielzahl und hohen praktischen Relevanz unidirektionaler Programmanalysen für Analyse- und Optimierungszwecke ist dieses Resultat von hoher Wichtigkeit, da es Analyse- und Optimierungstechniken sequentieller Programme ohne Effizienzverlust auf

- parallele Programme

auszudehnen und zu übertragen erlaubt.

Kapitel 9.2

Der funktionale denotationelle Semantikansatz

Der funktionale denotat. Semantik-Ansatz

...für sequentielle Programme als punktweise Ausdehnung des *MaxFP*/*MinFP*-Ansatzes auf den Gesamtverband ist der Schlüssel paralleler Datenflussanalyse.

Informell: Der funktionale denotationelle Semantik-Ansatz

- hebt das Niveau des *MaxFP*/*MinFP*-Ansatzes von einzelnen Verbandselementen als Startzusicherung auf das Niveau von Funktionen auf dem Gesamtverband.

In der Folge entwickeln wir den funktionalen denotationellen Semantik-Ansatz für die *MaxFP*-Sicht; die Entsprechung für den *MinFP*-Sicht ergibt sich durch Vertauschen von Schnitt- und Vereinigungsoperation des Verbands in trivialer Weise.

Der funktionale denotat. Semantik-Ansatz

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Programm und $\mathcal{S}_G =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ eine DFA-Spezifikation.

Dann ist durch:

Gleichungssystem 9.2.1 (Funktionales *MaxFP*-GS)

$$f\text{-}inf(n) = \begin{cases} Id_{\mathcal{C}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigsqcap \{ [\![(n,m)]\!] \circ (f\text{-}inf(m)) \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

die punktweise funktionale Ausdehnung der denotationellen *MaxFP*-Semantik von G gegeben (vgl. Kapitel 7.5.1):

Gleichungssystem 9.2.2 (*MaxFP*-Gleichungssystem)

$$inf(n) = \begin{cases} c_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigsqcap \{ [\![(m,n)]\!](inf(m)) \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Äquivalenzresultat

Bezeichnen wir mit

- $\nu\text{-}f\text{-}inf_{\mathcal{C}}(n),\ n \in N$
- $\nu\text{-}inf_{c_s}(n),\ n \in N$

die größten Lösungen der Gleichungssysteme 9.2.1 und 9.2.2, so gilt:

- $\forall\, n \in N.\ \nu\text{-}inf_{c_s}(n) \in \mathcal{C}$
- $\forall\, n \in N.\ \nu\text{-}f\text{-}inf_{\mathcal{C}}(n) \in [\mathcal{C} \to \mathcal{C}]$

und folgendes Äquivalenzresultat:

Theorem 9.2.3 (Äquivalenz)

$$\forall\, n \in N.\ \forall\, c_s \in \mathcal{C}.\ \nu\text{-}f\text{-}inf_{\mathcal{C}}(n)(c_s) = \nu\text{-}inf_{c_s}(n)$$

Hauptergebnis: Korrekth., Sicherh., Koinzidenz

Gemäß Theorem 9.2.3 stimmen die *MaxFP*- und funktionale *MaxFP*-Semantik überein und sind äquivalent.

Mit der weiteren Festlegung $[\![\ ]\!] =_{df} \nu\text{-}f\text{-}inf_{\mathcal{C}}$ erhalten wir die Hauptergebnisse für die funktionale denotationale Semantik als Korollare zu Theorem 9.2.3, Sicherheitstheorem 7.7.1(1) und Koinzidenztheorem 7.7.2(1):

Korollar 9.2.4 (Äquivalenz)

$$\forall\, n \in N.\ \forall\, c_s \in \mathcal{C}.\ [\![\, n \,]\!](c_s) = [\![\, n \,]\!]^{MaxFP}_{(\widehat{\mathcal{C}},[\![\ ]\!],c_s)}(n)$$

Korollar 9.2.5 (Sicherheit und Koinzidenz)

1. Sicherheit: $\forall\, n \in N.\ \forall\, c_s \in \mathcal{C}.\ [\![\, n \,]\!](c_s) \sqsubseteq [\![\, n \,]\!]^{MOP}_{(\widehat{\mathcal{C}},[\![\ ]\!],c_s)}(n)$, wenn $[\![\ ]\!]$ monoton ist.
2. Koinzidenz: $\forall\, n \in N.\ \forall\, c_s \in \mathcal{C}.\ [\![\, n \,]\!](c_s) = [\![\, n \,]\!]^{MOP}_{(\widehat{\mathcal{C}},[\![\ ]\!],c_s)}(n)$, wenn $[\![\ ]\!]$ distributiv ist.

Berechnung der globalen Semantikfunktion $[\![\ ]\!]$

...die Funktion $[\![\ ]\!] : N \to (\mathcal{C} \to \mathcal{C})$ kann offensichtlich

- Argument für Argument mithilfe des Generischen Fixpunktalgorithmus 7.6.1.1 berechnet werden.

In der Folge stellen wir mit Algorithmus 9.2.6 ein weniger naives, direktes Verfahren zur Berechnung von $[\![\ ]\!]$ vor, das sich als Schlüssel zu paralleler Datenflussanalyse herausstellen wird.

Der generische Fixpunktalgorithmus 9.2.6 (1)

Eingabe: Eine DFA-Spezifikation $\mathcal{S}_G = _{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!])$ (alle Startzusicherungen werden simultan betrachtet).

Ausgabe: Nach Terminierung von Algorithmus 9.3.6 (s. Terminationstheorem 9.2.7) speichert Variable $f\text{-}inf[n]$ die funktionale *MaxFP*-Semantik bzgl. $\mathcal{S}_G$ am Knoten n.

Zusätzlich gilt (s. Korollar 9.2.5(1) und 9.2.5(2)): Ist $[\![\ ]\!]$

- distributiv: $f\text{-}inf[n]$ speichert
- monoton: $f\text{-}inf[n]$ speichert eine untere Approximation

der (funktionalen) *MOP*-Semantik bzgl. $\mathcal{S}_G$ am Knoten n.

Bemerkung: Variable *workset* steuert den Ablauf des iterativen Prozesses. Sie speichert vorübergehend eine Menge von Knoten von G, deren Annotationen sich kürzlich geändert haben und damit die Annotationen ihrer Nachfolgerknoten beeinflussen können.

Der generische Fixpunktalgorithmus 9.2.6 (2)

(Prolog: Initialisierung von $f\text{-}inf$ und $workset$)
FORALL $n \in N \backslash \{\mathbf{s}\}$ DO $f\text{-}inf[n] := \lambda c.\ \top$ OD;
$f\text{-}inf[\mathbf{s}] := \lambda c.\ c$;
$workset := N$;
(Hauptprozess: Iterative Fixpunktberechnung)
WHILE $workset \neq \emptyset$ DO
    CHOOSE $m \in workset$;
        $workset := workset \backslash \{ m \}$;
        (Annotationsaktualisierung der Nachfolgerknoten von m)
        FORALL $n \in succ(m)$ DO
            $meet := [\![(m, n)]\!] \circ f\text{-}inf[m] \sqcap f\text{-}inf[n]$;
            IF $f\text{-}inf[n] \sqsupset meet$
                THEN
                    $f\text{-}inf[n] := meet$;
                    $workset := workset \cup \{ n \}$
            FI
        OD ESOOHC OD.

Termination

Theorem 9.2.7 (Termination)

Der Generische Fixpunktalgorithmus 9.2.6 terminiert mit der funktionalen *MaxFP*-Semantik bzgl. $\mathcal{S}_G$, wenn:

1. Das lokale DFA-Semantikfunktional $[\![\ ]\!]$ ist monoton.
2. Der Funktionenverband $[\mathcal{C} \to \mathcal{C}]$ erfüllt die absteigende Kettenbedingung.

Proposition 9.2.8

Erfüllt $[\mathcal{C} \to \mathcal{C}]$ die absteigende Kettenbedingung, so auch $\mathcal{C}$.

Kapitel 9.3

Parallele Flussgraphen

Parallele Flussgraphen

Wir repräsentieren parallele Programme aus $\text{While}_{||}$ in Form

- knotenbenannter paralleler Flussgraphen

$$G^* = (N^*, E^*, \mathbf{s}^*, \mathbf{e}^*)$$

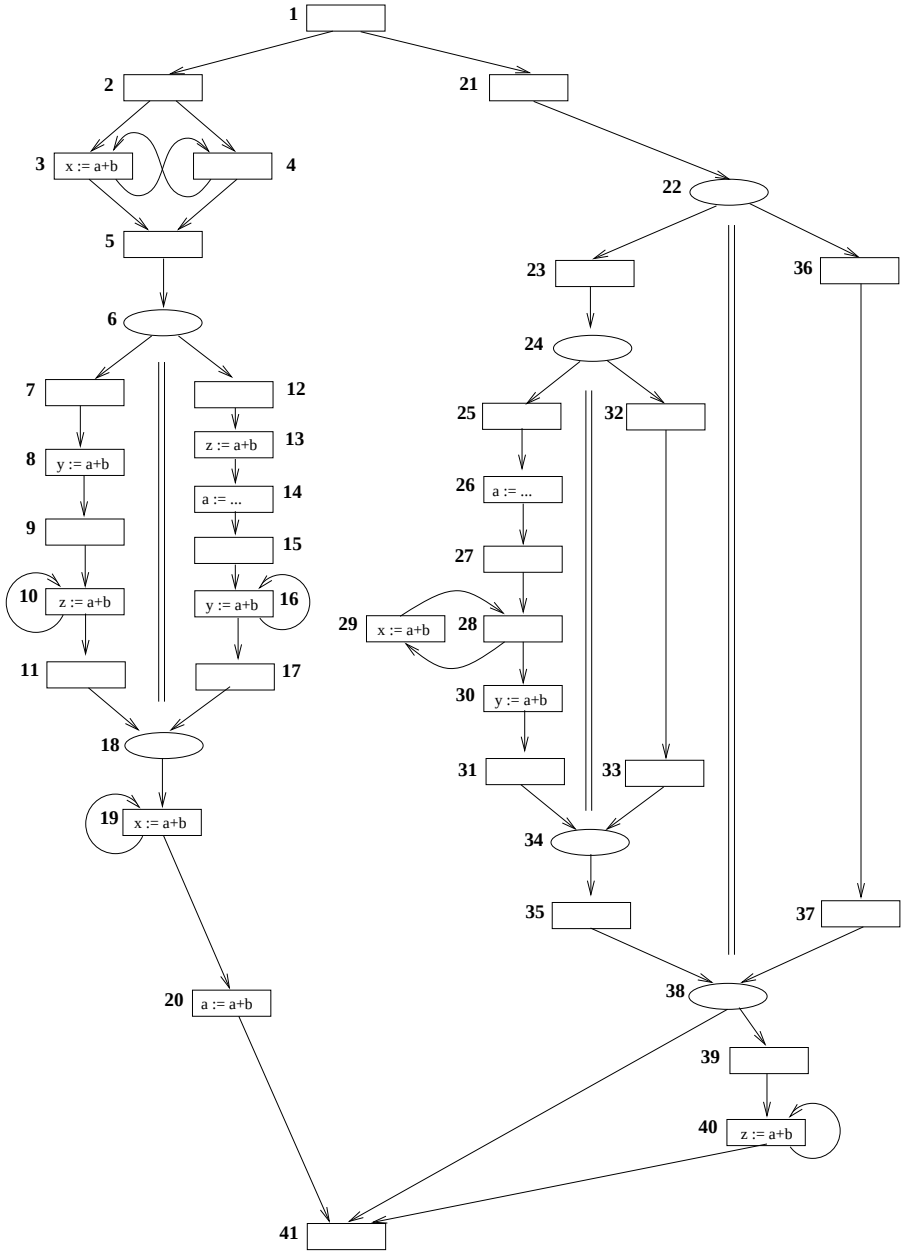
Dabei gilt: Teilgraphen von G^*, die

- parallele Anweisungen oder deren Komponenten

repräsentieren, sind Graphen i.S.v. Kapitel 7 mit je genau einem Eintritts- und Austrittspunkt (engl. single entry/single exit regions), wobei die Ein- bzw. Austrittspunkte paralleler Anweisungen ausschließlich mit den Ein- bzw. Austrittspunkten ihrer Komponentengraphen verbunden sind.

Graphisch stellen wir Ein- und Austrittsknoten paralleler Anweisungen als Ellipsen dar und heben die Zusammengehörigkeit paralleler Komponenten durch zwei Parallelen hervor.

Durchgehendes Beispiel: Paralleler Flussgraph



Kapitel 9.3.1

Vereinbarungen, Bezeichnungen

Vereinbarungen, Bezeichnungen (1)

Sei G^* ein paralleler Flussgraph.

Vereinbarungen:

- Ein- und Austrittsknoten paralleler Anweisungen und ihrer Komponenten sind mit der leeren Anweisung `skip` benannt.

Bezeichnungen:

- $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$: Die Menge aller parallelen Teilgraphen von G^*.
- $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G')$: Die Menge der Komponentengraphen von G', $G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$.
- $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*) =_{df} \bigcup\{\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G') \mid G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)\}$
- $N^N_{\mathcal{P}} =_{df} \{\, start(G) \mid G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \,\}$: Die Menge der Eintrittsknoten paralleler Teilgraphen von G^*.
- $N^X_{\mathcal{P}} =_{df} \{\, end(G) \mid G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \,\}$: Die Menge der Austrittsknoten paralleler Teilgraphen von G^*.

Vereinbarungen, Bezeichnungen (2)

Weiters bezeichnen:

- $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}^{max}(G^*) =_{df}$
  $\{ G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \mid \forall\, G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*).\ G \subseteq G' \Rightarrow G = G' \}$
- $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}^{min}(G^*) =_{df}$
  $\{ G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \mid \forall\, G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*).\ G' \subseteq G \Rightarrow G' = G \}$

die Mengen maximaler (oder äußerster) und minimaler (oder innerster) paralleler Graphen von G^*.

Dabei gilt: $G_1 \subseteq G_2$ gdw $N_1 \subseteq N_2 \ \wedge\ E_1 \subseteq E_2$.

Vereinbarungen, Bezeichnungen (3)

Abbildung *pfg* (*cfg*) ordnet jedem Knoten aus einem Flussgraphen $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$ ($G \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*)$) den kleinsten n enthaltenden Flussgraphen aus $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$ ($G \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*)$) zu:

$$pfg(n) =_{df} \begin{cases} \bigcap\{ G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \mid n \in Nodes(G') \} & \text{falls } n \in Nodes(\mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)) \\ G^* & \text{sonst} \end{cases}$$

$$cfg(n) =_{df} \begin{cases} \bigcap\{ G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*) \mid n \in Nodes(G') \} & \text{falls } n \in Nodes(\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*)) \\ G^* & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir dehnen die Abbildungen *pfg* und *cfg* von Knoten auf Graphen aus, indem wir das Bild von Graphen als Bild ihrer Knoten definieren.

Kapitel 9.3.2

Rang paralleler Graphen

Rang paralleler (Teil-) Graphen

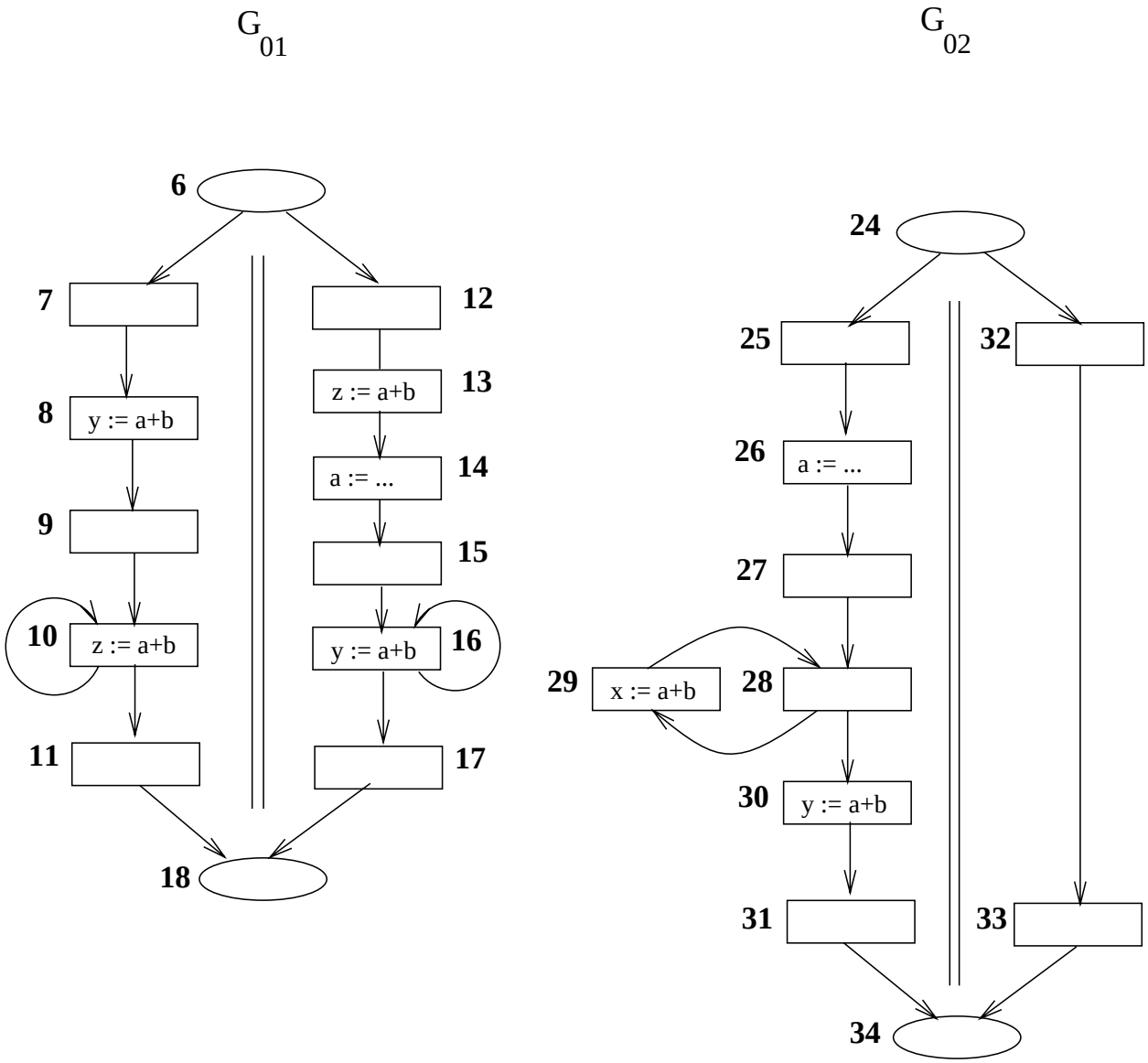
Sei G^* ein paralleles Programm.

Definition 9.3.2.1 (Rang paralleler Graphen)

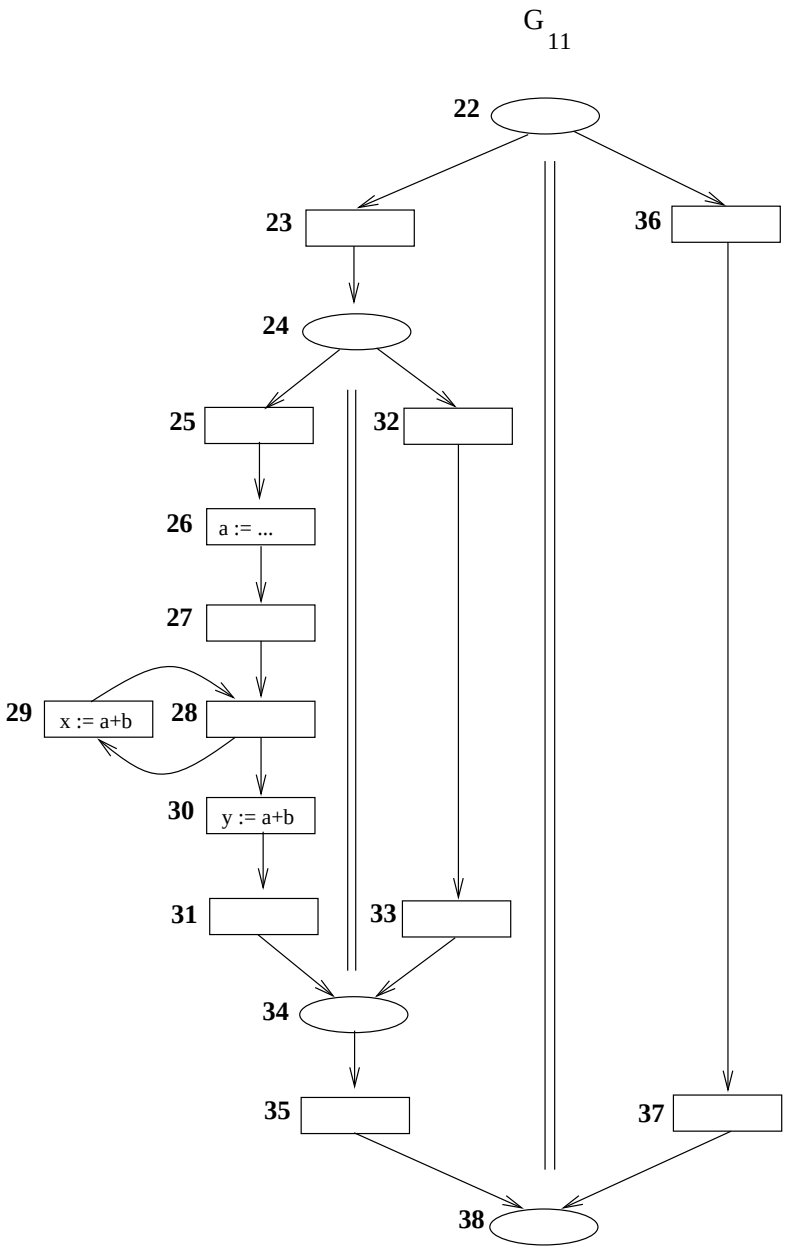
Der Rang (engl. rank) eines parallelen Graphen $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$ ist definiert durch:

$$rank(G) =_{df} \begin{cases} 0 & \text{falls } G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}^{min}(G^*) \\ max\{\, rank(G') \mid G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*) \wedge G' \subset G \,\} + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lfd. Bsp.: Zwei parallele Graphen von Rang 0



Lfd. Bsp.: Ein paralleler Graph von Rang 1



Kapitel 9.3.3

Sequentialisierte Graphen

Sequentialisierte Graphen

...eines parallelen Flussgraphen.

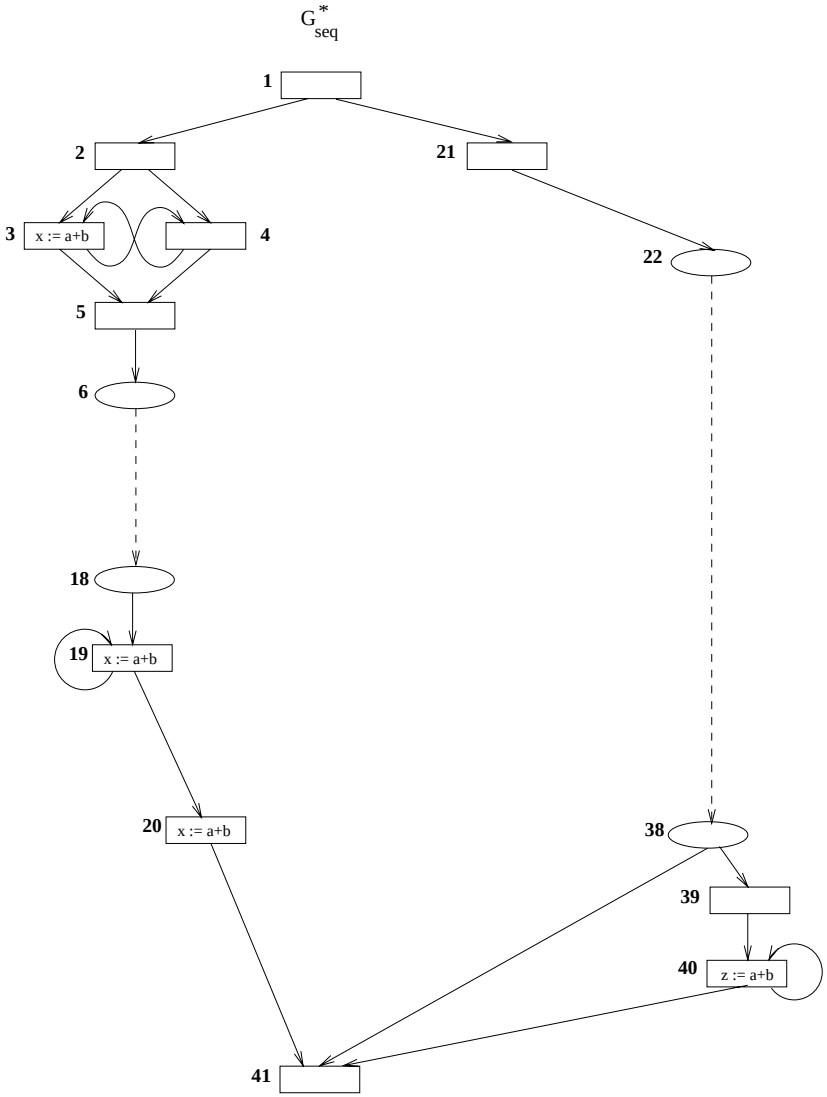
Definition 9.3.3.1 (Sequentialisierter Graph)

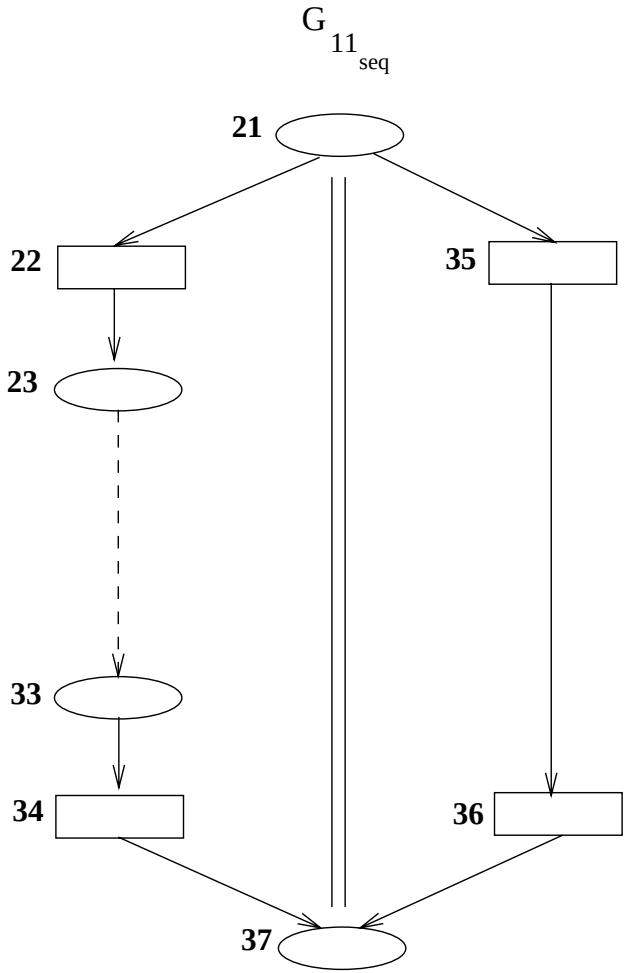
Ist $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$, so ist G_{seq} der G zugeordnete (triviale nicht bedeutungsgleiche) sequentialisierte Flussgraph, in dem alle maximalen parallelen Teilgraphen $G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}^{max}(G)$ durch eine Kante von $start(G')$ nach $end(G')$ ersetzt sind.

Beachte: Sequentialisierte Graphen enthalten keine parallelen Teilgraphen.

Laufendes Beispiel: Sequentialisierte Graphen

...des durchgehenden Beispiels und des maximalen parallelen Teilgraphen G_{11}:





Kapitel 9.3.4

Verschränkte Vorgänger

Parallele Geschwistergraphen

Sei G^* ein paralleles Programm.

Definition 9.3.4.1 (Parallele Geschwistergraphen)

Die Menge der parallelen Geschwistergraphen (engl. parallel brothers and sisters) eines Komponentengraphen $G \in \mathcal{G}_C(G^*)$ einer Parallelanweisung ist gegeben durch:

$$PG_{BaS}(G) =_{df} \mathcal{G}_C(pfg(G)) \setminus G \cup \begin{cases} \emptyset & \text{falls } pfg(G) \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}^{max}(G^*) \\ PG_{BaS}(cfg(pfg(G))) & \text{sonst} \end{cases}$$

Verschränkte Vorgänger

...die Menge der unmittelbar vor einem Knoten in einer Parallelanweisung dynamisch ausführbaren Knoten ist durch die Vereinigung seiner statischen (Komponenten-) Vorgänger i.S.v. Kapitel 7 und seiner sog. verschränkten Vorgänger gegeben:

Definition 9.3.4.2 (Verschränkte Vorgänger)

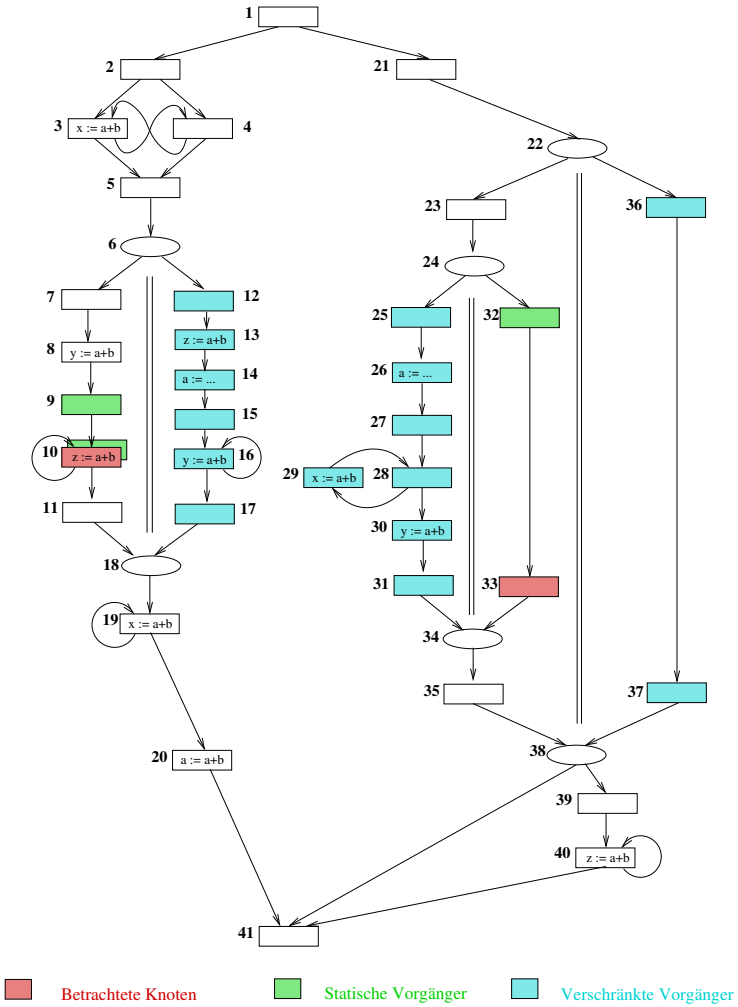
Ist G^* ein paralleles Programm, so ist die Menge der verschränkten Vorgänger (engl. interleaving predecessors) eines Knotens n aus G^* ist gegeben durch:

$$Pred^{Itlvg}_{G^*}(n) =_{df} \begin{cases} Nodes(PG_{BaS}(cfg(n))) & \text{falls } n \in Nodes(\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(G^*)) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Lfd. Bsp: Statische, verschränkte Vorgänger

...der Knoten 9 und 33:

- $pred_{G^*}(10) = \{9, 10\}$, $Pred^{ltlvg}_{G^*}(10) = \{12, ..., 17\}$.
- $pred_{G^*}(33) = \{32\}$, $Pred^{ltlvg}_{G^*}(33) = \{25, ..., 31, 36, 37\}$.



Kapitel 9.3.5

Parallele Pfade

G-wohlgeformte Knotenfolgen

Sei G^* ein paralleles Programm

Definition 9.3.5.1 (G-wohlgeformte Knotenfolge)

Eine Knotenfolge $p = (n_1, \ldots, n_q)$ aus G^* heißt G-wohlgeformt gdw

1. die Projektion $p{\downarrow_{G_{seq}}}$ von p auf G_{seq} ist Element der Pfadmenge $\mathbf{P}_{G_{seq}}[start(G_{seq}), end(G_{seq})]$.
2. für alle Knotenvorkommen $n_i \in N^N_{\mathcal{P}}$ von p gibt es einen Index $j \in \{i+1, \ldots, q\}$ mit der Eigenschaft:
   - 2.1 $n_j \in N^X_{\mathcal{P}}$.
   - 2.2 n_j ist der Nachfolger von n_i auf $p{\downarrow_{G_{seq}}}$.
   - 2.3 $\forall\, G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(pfg(n_i))$. $(n_{i+1}, \ldots, n_{j-1})$ ist G'-wohlgeformt.

Beachte: Bed. 2.3 stellt Synchronisation sicher: Am Austrittsknoten einer Parallelanweisung müssen alle ihre parallelen Komponenten vollständig ausgeführt und terminiert sein.

Parallele Pfade

Sei G^* ein paralleles Programm

Definition 9.3.5.2 (Paralleler Pfad)

Eine Knotenfolge $p = (n_1, \ldots, n_q)$ aus G^* heißt paralleler Pfad von

1. $\mathbf{s}^*$ nach $\mathbf{e}^*$ gdw p ist G^*-wohlgeformt.
2. n_1 nach n_q, wenn p Teilpfad eines parallelen Pfades von $\mathbf{s}^*$ nach $\mathbf{e}^*$ ist.

Wir bezeichnen mit:

- $\mathbf{PP}_{G^*}[m, n]$: Menge aller parallelen Pfade von m nach n.
- $\mathbf{PP}_{G^*}[m, n[$: Menge aller parallelen Pfade von m zu einem (statischen oder verschränkten) Vorgänger von n:

$$\mathbf{PP}_{G^*}[m, n[=_{df} \{(n_1, \ldots, n_q) \mid (n_1, \ldots, n_q, n_{q+1}) \in \mathbf{PP}_{G^*}[m, n]\}$$

Kapitel 9.4

Operationelle globale parallele DFA-Semantik

Kapitel 9.4.1

Parallele Aufsammelsemantik

Die parallele Aufsammelsemantik

Sei $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ eine DFA-Spezifikation.

Definition 9.4.1.1 (Parallele DFA-Aufsammelsem.)

Die von $\mathcal{S}_{G^*}$ induzierte (nichtdeterministische) parallele DFA-Aufsammelsemantik (oder globale abstrakte Semantik) an Knoteneingängen ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{PCS}_{\mathcal{S}_{G^*}} : N \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$$

$$\forall\, n \in N.\ [\![\, n \,]\!]^{PCS}_{\mathcal{S}_{G^*}} =_{df} \{\, [\![\, p \,]\!](c_{\mathbf{s}}) \mid p \in \mathbf{PP}[\mathbf{s}^*, n[\,\}$$

wobei $\mathcal{P}$ den Potenzmengenoperator bezeichnet.

Beachte:

$$[\![\, \mathbf{s}^* \,]\!]^{PCS}_{\mathcal{S}_{G^*}} = \{c_{\mathbf{s}}\}$$

Kapitel 9.4.2

Schnitt-über-alle-parallele-Pfade-Semantik

Die Schnitt-über-alle-par.-Pfade (*SUPP*) Sem.

Sei $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ eine DFA-Spezifikation.

Definition 9.4.2.1 (*SUPP*-Semantik)

Die deterministische *SUPP*-Semantik (engl. *MOPP* semantics) von $\mathcal{S}_{G^*}$ an Knoteneingängen ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} : N^* \to \mathcal{C}$$

$$\begin{aligned} \forall\, n \in N^*.\ [\![\, n \,]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} &=_{df} \bigsqcap [\![\, n \,]\!]^{PCS}_{\mathcal{S}_{G^*}} \\ &= \bigsqcap \{\, [\![\, p \,]\!](c_{\mathbf{s}}) \mid p \in \mathbf{PP}[\mathbf{s}^*, n[\, \} \end{aligned}$$

Beachte: $\bigsqcap [\![\, n \,]\!]^{PCS}_{\mathcal{S}_{G^*}}$ und folglich $[\![\, n \,]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}}$, $n \in N^*$, existieren, da $\widehat{\mathcal{C}}$ ein vollständiger Verband ist.

Kapitel 9.4.3

Vereinigung-über-alle-parallele-Pfade-Semantik

Die Verein.-über-alle-par.-Pfade (*VUPP*) Sem.

Sei $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{C}}, [\![\ ]\!], c_{\mathbf{s}})$ eine DFA-Spezifikation.

Definition 9.4.3.1 (*VUPP*-Semantik)

Die deterministische *VUPP*-Semantik (engl. *JOPP* semantics) von $\mathcal{S}_{G^*}$ an Knoteneingängen ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} : N^* \to \mathcal{C}$$

$$\begin{aligned} \forall\, n \in N^*.\ [\![\, n \,]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} &=_{df} \bigsqcup [\![\, n \,]\!]^{PCS}_{\mathcal{S}_{G^*}} \\ &= \bigsqcup \{\, [\![\, p \,]\!](c_{\mathbf{s}}) \mid p \in \mathbf{PP}[\mathbf{s}^*, n[\,\} \end{aligned}$$

Beachte: $\bigsqcup [\![\, n \,]\!]^{PCS}_{\mathcal{S}_{G^*}}$ und folglich $[\![\, n \,]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}}$, $n \in N^*$, existieren, da $\widehat{\mathcal{C}}$ ein vollständiger Verband ist.

Kapitel 9.5

Denotationelle globale parallele DFA-Semantik

Kapitel 9.5.1

Unidirektionale Bitvektoranalysen

Lokale DFA-Semantikfunktionen

...unidirektionaler Bitvektoranalysen sind stets Element der Menge

$$\mathcal{F}_{\mathbb{B}} =_{df} \{Cst_{\mathbf{wahr}}, Id_{\mathbb{B}}, Cst_{\mathbf{falsch}}\} \subseteq [\mathbb{B} \to \mathbb{B}]$$

mit

- $Cst_{\mathbf{wahr}} =_{df} \lambda b \in \mathbb{B}.\ \mathbf{wahr}$
- $Id_{\mathbb{B}} =_{df} \lambda b \in \mathbb{B}.\ b$
- $Cst_{\mathbf{falsch}} =_{df} \lambda b \in \mathbb{B}.\ \mathbf{falsch}$

Beachte: Die Negation als vierte Funktion auf $\mathbb{B}$:

$$Neg_{\mathbb{B}} =_{df} \lambda b \in \mathbb{B}.\ \neg b$$

ist wegen fehlender Monotonie für DFA-Zwecke uninteressant.

Wichtige Resultate

... für unidirektionale Bitvektoranalysen.

Proposition 9.5.1.1

1. Alle Funktionen aus $\mathcal{F}_{\mathbb{IB}}$ sind distributiv und additiv.
2. $\mathcal{F}_{\mathbb{IB}}$ bildet mit der punktweisen Ordnung auf Funktionen einen vollständigen Verband mit kleinstem Element $Cst_{\mathbf{falsch}}$ und größtem Element $Cst_{\mathbf{wahr}}$, der unter Funktionskomposition abgeschlossen ist.

Hauptlemma 9.5.1.2

Seien $f_i : \mathcal{F}_{\mathbb{IB}} \to \mathcal{F}_{\mathbb{IB}}$, $1 \leq i \leq q$, $q \in \mathbb{N}$, Funktionen von $\mathcal{F}_{\mathbb{IB}}$ nach $\mathcal{F}_{\mathbb{IB}}$. Dann gilt:

$$\exists\, k \in \{1, ..., q\}.\ f_q \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1 = f_k \ \wedge\ \forall\, j \in \{k+1, ..., q\}.\ f_j = Id_{\mathbb{IB}}$$

Kapitel 9.5.2

Interferenz und Synchronisation

Interferenz paralleler Komponenten

...sei $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{F}_{\mathbb{IB}}}, [\![\ ]\!])$ DFA-Spezifikation eines unidirektionalen Bitvektorproblems, n ein Knoten in einer Parallelanweisung und E die durch $\mathcal{S}_{G^*}$ spezifizierte Eigenschaft.

Definition 9.5.2.1 (Interferenzfest, interferenzlabil)

Eigenschaft E heißt

1. *SUPP*-interferenzfest (engl. interference-proof) am Knoten n (in Zeichen: $\mathit{Interf\text{-}proof}_n^{SUPP}$) gdw E kann nicht durch einen Verschränkungsvorgänger von n zerstört werden.
2. *VUPP*-interferenzfest am Knoten n (in Zeichen: $\mathit{Interf\text{-}proof}_n^{VUPP}$) gdw E kann nicht durch einen Verschränkungsvorgänger von n erzeugt werden.

E heißt interferenzlabil (in Zeichen: $\mathit{Interf\text{-}labile}_n^{SUPP}$) gdw E ist nicht interferenzfest.

Interferenzkorrektheit (1)

...als Folgerung aus Hauptlemma 9.5.1.2, wonach für unidirektionale Bitvektorprobleme der Effekt eines ganzen Pfads vom Effekt einer einzelnen Anweisung abhängt, erhalten wir:

Lemma 9.5.2.2 (Interferenzfest-Lemma)

Für alle $\forall\, n \in N^*$ gilt:

1. $$Interf\text{-}proof_n^{SUPP} \iff \neg Interf\text{-}labile_n^{SUPP} \iff \forall\, m \in Pred_{G^*}^{ltlvg}(n).\ [\![\, m \,]\!] \in \{Cst_{\mathbf{wahr}}, Id_{\mathbb{B}}\}$$
2. $$Interf\text{-}proof_n^{VUPP} \iff \neg Interf\text{-}labile_n^{VUPP} \iff \forall\, m \in Pred_{G^*}^{ltlvg}(n).\ [\![\, m \,]\!] \in \{Cst_{\mathbf{falsch}}, Id_{\mathbb{B}}\}$$

Interferenzkorrektheit (2)

Lemma 9.5.2.3 (Interferenzlabil-Lemma)

Für alle $\forall\, n \in N^*$ gilt:

1. $Interf\text{-}labile_n^{SUPP} \iff \neg Interf\text{-}proof_n^{SUPP} \iff$
   $\exists\, m \in Pred_{G^*}^{ltlvg}(n).\ [\![\, m \,]\!] = Cst_{\mathbf{falsch}}$
2. $Interf\text{-}labile_n^{VUPP} \iff \neg Interf\text{-}proof_n^{VUPP} \iff$
   $\exists\, m \in Pred_{G^*}^{ltlvg}(n).\ [\![\, m \,]\!] = Cst_{\mathbf{wahr}}$

Synchronisation paralleler Komponenten (1)

...ein 4-stufiges Verfahren:

1. Fortschritts- und Abbruchssteuerung: Enthält G keine parallelen Anweisungen, terminiere. Anderenfalls fahre mit Schritt 2 fort.
2. Vorbereitung des Synchronisationsschritts: Berechne für alle maximalen Teilgraphen G' parallelanweisungsfreier (d.h. minimaler) Graphen aus $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G)$ die *SUPP*- bzw. *VUPP*-Semantik $[\![G']\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}}$ bzw. $[\![G']\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}}$ dieser (rein sequentiellen) Graphen mittels Algorithmus 9.2.6.

Synchronisation paralleler Komponenten (2)

3. Synchronisationsschritt: Berechne für alle innersten parallelen Anweisungen $\bar{G}$ von G die *SUPP*- bzw. *VUPP*-Semantik gemäß:

$$[\![\bar{G}]\!]^{*\text{-}SUPP}_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}} =$$

$$\begin{cases} Cst_{\mathbf{falsch}} & \text{falls } \exists\, G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\bar{G}).\ [\![end(G')]\!] = Cst_{\mathbf{falsch}} \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{falls } \forall\, G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\bar{G}).\ [\![end(G')]\!] = Id_{\mathbb{B}} \\ Cst_{\mathbf{wahr}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![\bar{G}]\!]^{*\text{-}VUPP}_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}} =$$

$$\begin{cases} Cst_{\mathbf{wahr}} & \text{falls } \exists\, G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\bar{G}).\ [\![end(G')]\!] = Cst_{\mathbf{wahr}} \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{falls } \forall\, G' \in \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(\bar{G}).\ [\![end(G')]\!] = Id_{\mathbb{B}} \\ Cst_{\mathbf{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Synchronisation paralleler Komponenten (3)

4. Vorbereitung der nächsten Iterationsstufe: Ersetze alle innersten parallelen Anweisungen

$$\bar{G} = (\bar{N}, \bar{E}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{e}})$$

in G durch die trivialen sequentiellen Graphen

$$\bar{\bar{G}} = (\{\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{e}}\}, \{(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{e}})\}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{e}})$$

mit lokaler *SUPP*- bzw. *VUPP*-Semantik:

- $[\![\bar{\mathbf{s}}]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}} = Id_{\mathbb{B}} \sqcap \bigsqcap\{ [\![n]\!] \mid n \in \bar{N}\}$, $[\![\bar{\mathbf{e}}]\!] = [\![\bar{G}]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}}$
- $[\![\bar{\mathbf{s}}]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}} = Id_{\mathbb{B}} \sqcup \bigsqcup\{ [\![n]\!] \mid n \in \bar{N}\}$, $[\![\bar{\mathbf{e}}]\!] = [\![\bar{G}]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{\mathcal{G}^*}}$

Fahre mit Schritt 1 fort.

Synchronisationskorrektheit (1)

...Basis für die Korrektheit des Synchronisationsschritts ist Lemma 9.5.2.4 für innerste parallele Anweisungen, das wie die Interferenzkorrektheit eine Konsequenz aus Hauptlemma 9.5.1.2 ist, wonach für unidirektionale Bitvektorprobleme der Effekt eines ganzen Pfads vom Effekt einer einzelnen Anweisung abhängt.

Das heißt, ausgedrückt in Lemma 9.5.2.4:

- Der Effekt eines vollständigen Pfads durch den Graphen einer Parallelanweisung ist durch den Effekt der Projektion des Pfads auf die Knoten desjenigen Komponentengraphen gegeben, der diese effektbestimmende Anweisung enthält.
- Der Effekt einer Parallelanweisung ergibt sich daher aus der Effektkomposition der komponentenlokalen Pfade.

Synchronisationskorrektheit (2)

Lemma 9.5.2.4 (Synchronisationskorrektheit: Basis)

Ist $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$ eine Parallelanweisung mit ausschließlich rein sequentiellen Komponenten $G_1, \ldots, G_k$, so gilt:

1. Die *SUPP*-Semantik von G ist gegeben durch:

$$[\![end(G)]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = [\![G]\!]^{*\text{-}SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}}$$

$$\begin{cases} Cst_{\mathbf{falsch}} & \text{if } \exists\, 1 \leq i \leq k.\ [\![end(G_i)]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = Cst_{\mathbf{falsch}} \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{if } \forall\, 1 \leq i \leq k.\ [\![end(G_i)]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = Id_{\mathbb{B}} \\ Cst_{\mathbf{wahr}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2. Die *VUPP*-Semantik von G ist gegeben durch:

$$[\![end(G)]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = [\![G]\!]^{*\text{-}VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}}$$

$$\begin{cases} Cst_{\mathbf{wahr}} & \text{if } \exists\, 1 \leq i \leq k.\ [\![end(G_i)]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = Cst_{\mathbf{wahr}} \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{if } \forall\, 1 \leq i \leq k.\ [\![end(G_i)]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = Id_{\mathbb{B}} \\ Cst_{\mathbf{falsch}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Synchronisationskorrektheit (3)

...als induktive Erweiterung (der funktionalen Variante) des sequentiellen Koinzidenztheorems 7.7.2 für unidirektionale Bitvektorprobleme erhalten wir zusammen mit Lemma 9.5.2.4 die Korrektheit hierarchisch erfolgender Synchronisation(s-schritte):

Hierarchisches Koinzidenztheorem 9.5.2.5

Sei $G \in \mathcal{G}_{\mathcal{P}}(G^*)$ der Graph einer Parallelanweisung und sei $\mathcal{S}_{G^*} = (G^*, [\![\ ]\!])$ eine DFA-Spezifikation mit $[\![\ ]\!] : N^* \to \mathcal{F}_{\mathsf{IB}}$ lokales Semantikfunktional eines unidirektionalen Bitvektor-problems. Dann gilt:

1. $[\![\, end(G) \,]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = [\![\, G \,]\!]^{*\text{-}SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}}$
2. $[\![\, end(G) \,]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = [\![\, G \,]\!]^{*\text{-}VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}}$

Kapitel 9.5.3

Maximale parallele Fixpunktsemantik

Das $PMaxFP_{UBV}$-Gleichungssystem

...sei $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{F}_{\mathbb{B}}}, [\![\ ]\!])$ die DFA-Spezifikation eines unidirektionaen Bitvektorproblems.

Gleichungssystem 9.5.3.1 ($PMaxFP_{UBV}$-GS)

$$[\![n]\!]^S_{\mathcal{S}_{G^*}} =$$

$$\begin{cases} Id_{\mathbb{B}} & \text{falls } n = \mathbf{s}^* \\ [\![pfg(n)]\!]^{*-SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} \circ [\![start(pfg(n))]\!]^S_{\mathcal{S}_{G^*}} \sqcap Cst_{Interf\text{-}proof_n^{SUPP}} & \text{falls } n \in N^*_X \\ \bigsqcap \{ [\![m]\!] \circ [\![m]\!]^S_{\mathcal{S}_{G^*}} \mid m \in pred_{G^*}(n) \} \sqcap Cst_{Interf\text{-}proof_n^{SUPP}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte: Gleichungssystem 9.5.3.1 ist die natürliche Erweiterung von Gleichungssystems 9.2.1 auf parallele Programme.

Die $PMaxFP_{UBV}$-Semantik

Sei $[\![\ ]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} : N^* \to \mathcal{F}_{\mathbb{B}}$ die eindeutig bestimmte größte Lösung von Gleichungssystem 9.5.3.1. Dann gilt:

Definition 9.5.3.2 ($PMaxFP_{UBV}$ -Semantik)

Die $PMaxFP_{UBV}$-Semantik für das von $\mathcal{S}_{G^*}$ spezifizierte unidirektionale Bitvektorproblem ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{PMaxFP_{UBV}}_{\mathcal{S}_{G^*}} : N^* \to \mathcal{F}_{\mathbb{B}}$$

$$\forall\, n \in N^*.\ [\![\, n \,]\!]^{PMaxFP_{UBV}}_{\mathcal{S}_{G^*}} = [\![\, n \,]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}}$$

Kapitel 9.5.4

Minimale parallele Fixpunktsemantik

Das $PMinFP_{UBV}$-Gleichungssystem

...sei $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{F}_{\mathbb{B}}}, [\![\ ]\!])$ die DFA-Spezifikation eines unidirektionalen Bitvektorproblems.

Gleichungssystem 9.5.4.1 ($PMinFP_{UBV}$-GS)

$$[\![n]\!]^V_{\mathcal{S}_{G^*}} =$$

$$\begin{cases} Id_{\mathbb{B}} & \text{falls } n = \mathbf{s}^* \\ [\![pfg(n)]\!]^{*\text{-}VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} \circ [\![start(pfg(n))]\!]^V_{\mathcal{S}_{G^*}} \sqcup Cst_{Interf\text{-}proof_n^{VUPP}} & \\ & \text{falls } n \in N^*_X \\ \bigsqcup\{ [\![m]\!] \circ [\![m]\!]^S_{\mathcal{S}_{G^*}} \mid m \in pred_{G^*}(n)\} \sqcup Cst_{Interf\text{-}proof_n^{VUPP}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die $PMinFP_{UBV}$-Semantik

Sei $[\![\ ]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} : N^* \to \mathcal{F}_{\mathbb{B}}$ die eindeutig bestimmte kleinste Lösung von Gleichungssystem 9.5.4.1. Dann gilt:

Definition 9.5.2.2 ($PMinFP_{UBV}$ -Semantik)

Die $PMinFP_{UBV}$-Semantik für das von $\mathcal{S}_{G^*}$ spezifizierte unidirektionale Bitvektorproblem ist definiert durch:

$$[\![\ ]\!]^{PMinFP_{UBV}}_{\mathcal{S}_{G^*}} : N^* \to \mathcal{F}_{\mathbb{B}}$$

$$\forall\, n \in N^*.\ [\![\, n \,]\!]^{PMinFP_{UBV}}_{\mathcal{S}_{G^*}} \ = \ [\![\, n \,]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}}$$

Kapitel 9.6

Unidirektionale Bitvektoranalysen: Koinzidenz

Hauptergebnis: Korrektheit und Vollständigkeit

...für unidirektionale Bitvektorprobleme stimmen die

- parallelen operationellen Schnitt- und Vereinigung-über-alle-Pfade-Semantiken

mit ihren

- parallelen denotationellen Fixpunktgegenstücken

überein: Paralleles Bitvektorkoinzidenztheorem 9.6.1.

Paralleles Bitvektorkoinzidenztheorem

...sei $G^* = (N^*, E^*, \mathbf{s}^*, \mathbf{e}^*)$ ein paralleles Programm und $\mathcal{S}_{G^*} =_{df} (\widehat{\mathcal{F}_{\mathbb{B}}}, [\![\ ]\!])$ die DFA-Spezifikation eines unidirektionalen Bitvektorproblems.

Paralleles Bitvektorkoinzidenztheorem 9.6.1

1. Die *SUPP*-Semantik (engl. *MOPP* semantics) und die $PMaxFP_{UBV}$-Semantik stimmen überein, d.h.:

$$\forall\, n \in N^*.\ [\![\, n \,]\!]^{SUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = [\![\, n \,]\!]^{PMaxFP_{UBV}}_{\mathcal{S}_{G^*}}$$

2. Die *VUPP*-Semantik (engl. *JOPP* semantics) und die $PMinFP_{UBV}$-Semantik stimmen überein, d.h.:

$$\forall\, n \in N^*.\ [\![\, n \,]\!]^{VUPP}_{\mathcal{S}_{G^*}} = [\![\, n \,]\!]^{PMinFP_{UBV}}_{\mathcal{S}_{G^*}}$$

Kapitel 9.7

Anwendungen

Verfügbarkeit v. Ausdrücken, tote Zuweisungen

Die lokalen Semantikfunktionen der unidirektionalen Bitvektorprobleme verfügbarer Ausdrücke (Vorwärtsproblem) und toter Zuweisungen (Rückwärtsproblem) auf dem Verband der Wahrheitswerte können wie folgt spezifiziert werden:

Verfügbarkeit von Ausdruck t (vgl. Kap. 7.10.1):

$$\forall\, n \in N^*.\ [\![\, n \,]\!]^t_{av} \quad =_{df} \quad \begin{cases} Const_{\mathbf{wahr}} & \text{falls } Transp^t_n \wedge Comp^t_n \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{falls } Transp^t_n \wedge \neg Comp^t_n \\ Const_{\mathbf{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Tote Zuweisungen an Variable x (vgl. Kap. 12.3):

$$\forall\, n \in N^*.\ [\![\, n \,]\!]^x_{dead} \quad =_{df} \quad \begin{cases} Const_{\mathbf{wahr}} & \text{falls } \neg Used^x_n \wedge Mod^x_n \\ Id_{\mathbb{B}} & \text{falls } \neg(Used^x_n \vee Mod^x_n \\ Const_{\mathbf{falsch}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Globalisierung der lokalen Semantiken

...die lokalen Semantiken $[\![n]\!]^t_{av}$ und $[\![n]\!]^x_{dead}$ können durch den Übergang auf Bitvektoren auf die Mengen aller Ausdrücke T bzw. Variablen V eines Programms ausgedehnt werden:

$$[\![\cdot]\!]^T_{av} \text{ und } [\![\cdot]\!]^V_{dead}$$

und im Sinn der

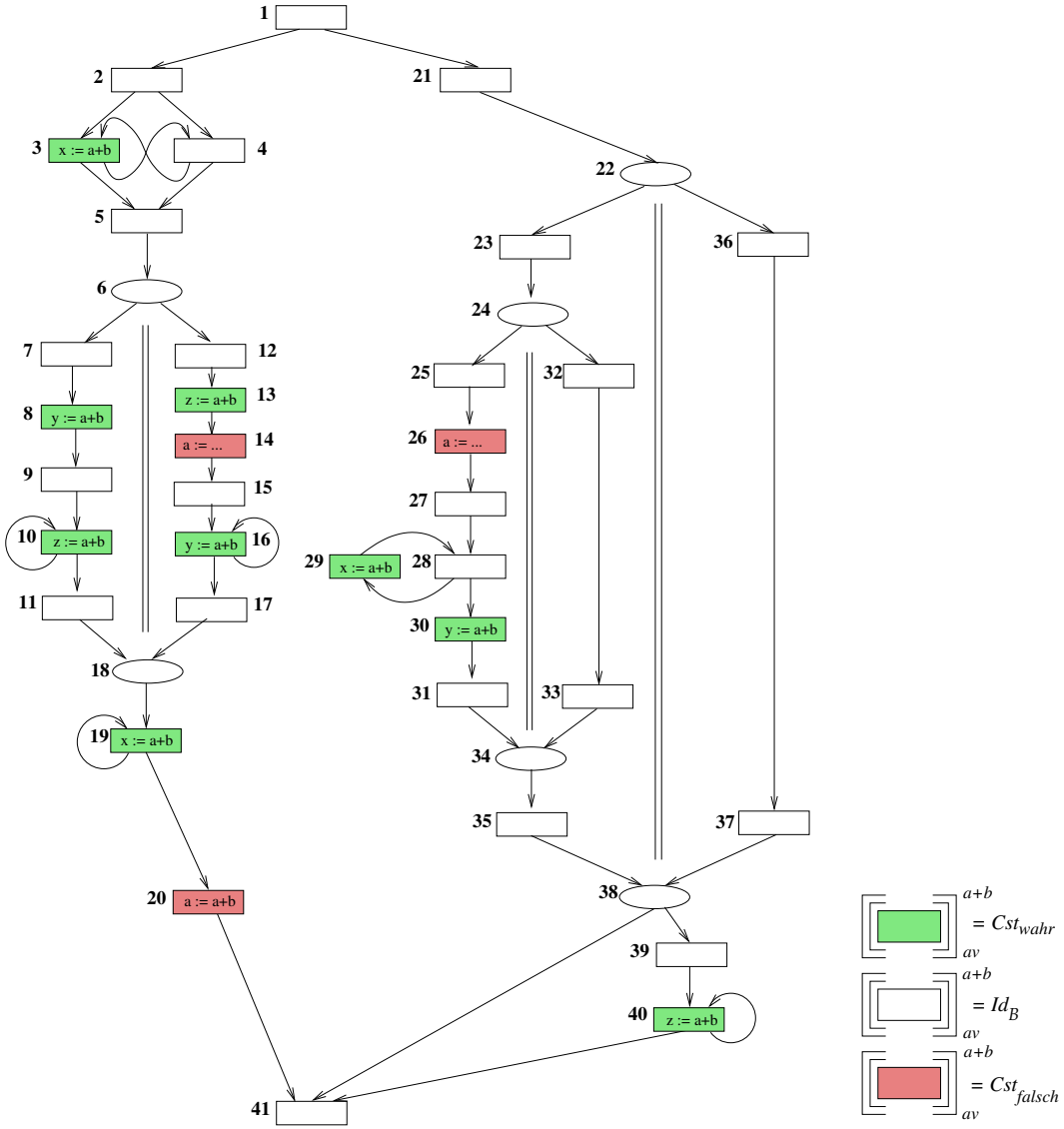
- *SUPP* - bzw. VUPP-Semantik

globalisiert werden, was zur Berechnung folgender Eigenschaften führt:

- *SUPP* -Globalisierung: (Total) verfügbare Ausdrücke bzw. (total) tote Zuweisungen.
- *VUPP* -Globalisierung: Partiell verfügbare Ausdrücke bzw. partiell tote Zuweisungen.

Lokale Semantik: Verfügbarkeitsanalyse

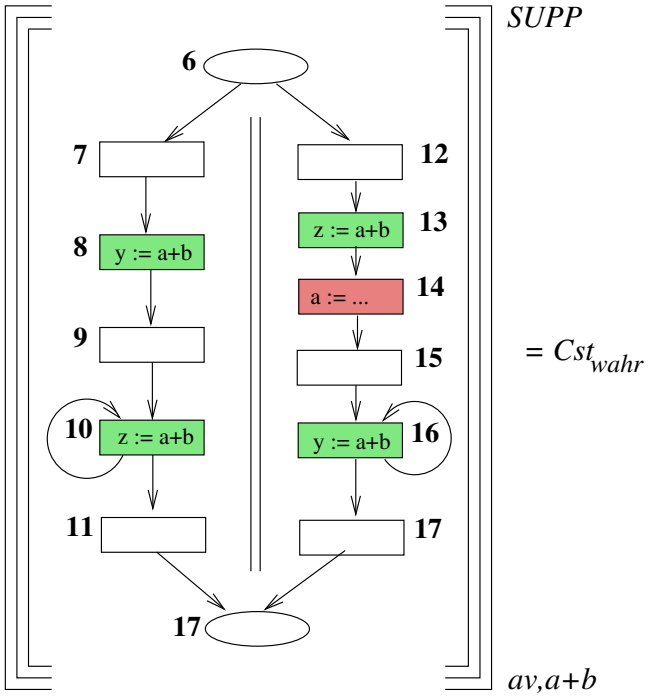
...für Ausdruck a+b:



SUPP -Semantikglobalisierung: 1. Iteration

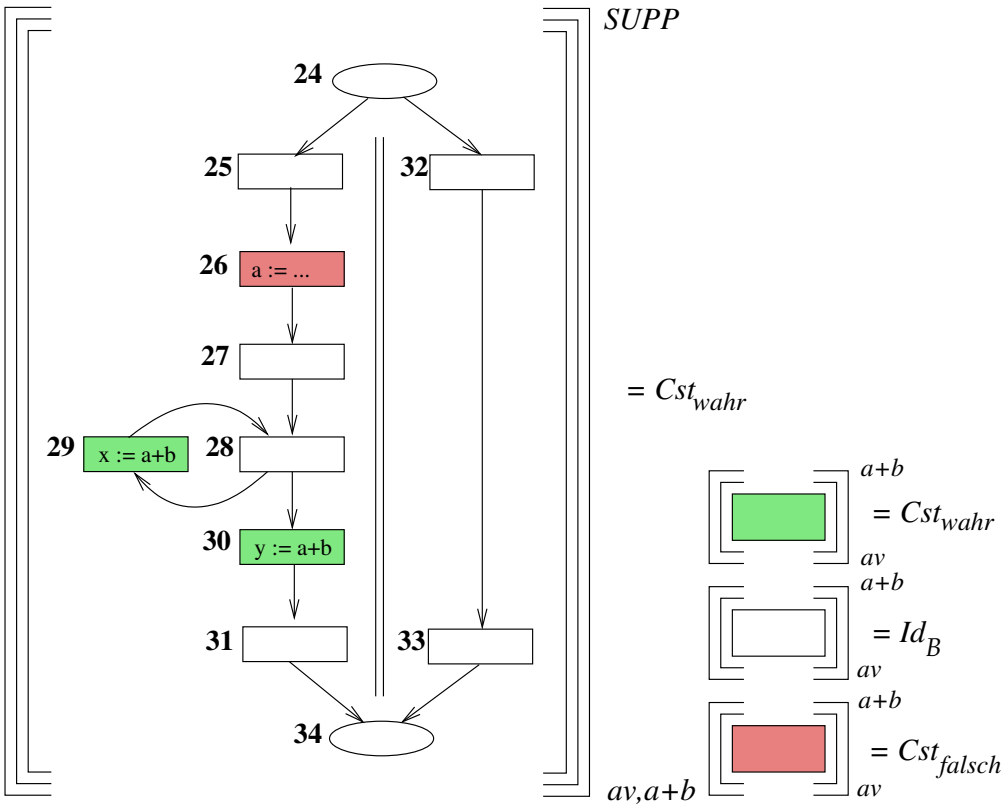
...entsprechend des 4-stufigen Verfahrens aus Kapitel 9.5.2:

$G_{01} = G_{01_{seq}}$



destructive(G_{01}) = wahr

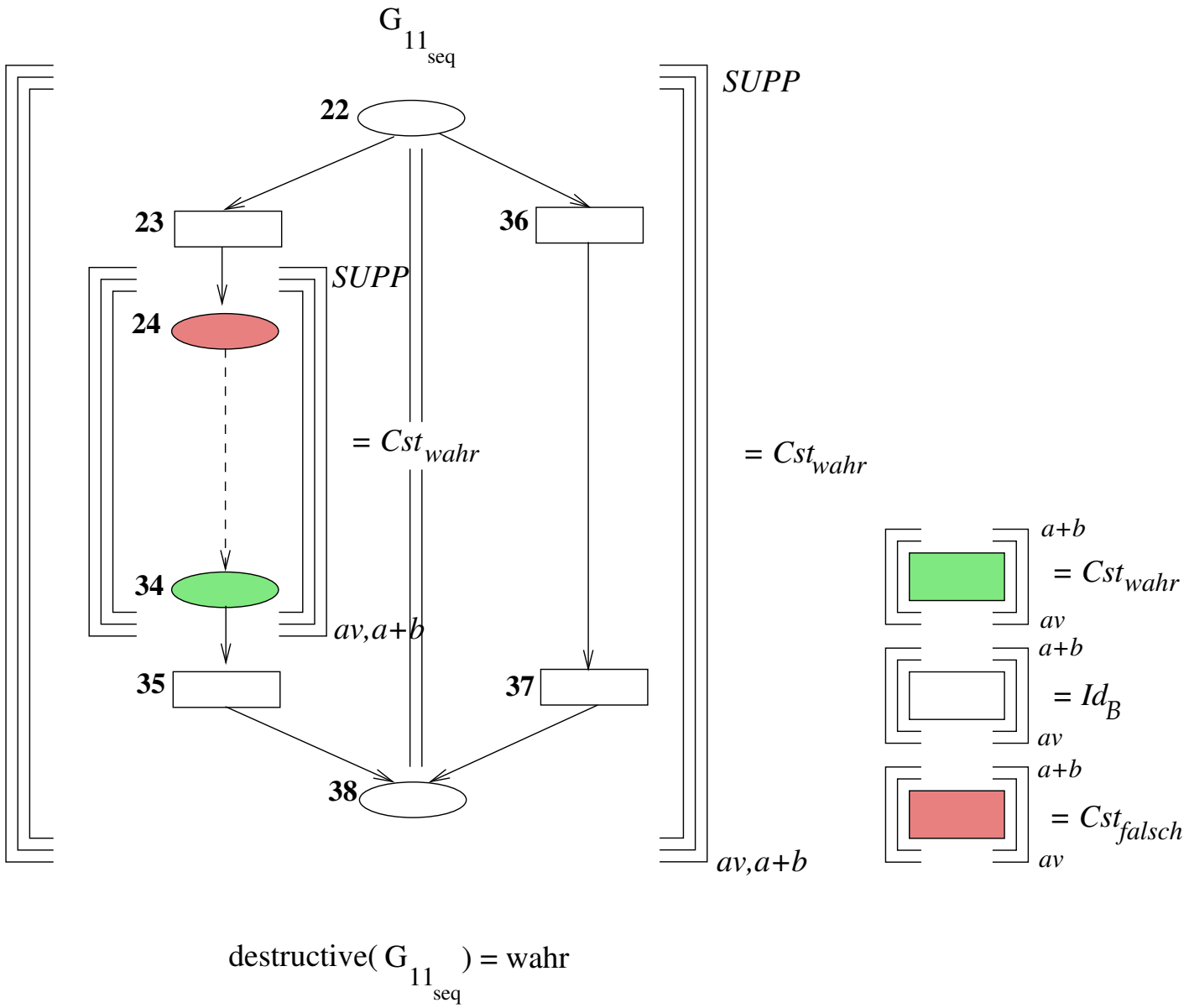
$G_{02} = G_{02_{seq}}$



destructive(G_{02}) = wahr

SUPP -Semantikglobalisierung: 2. Iteration

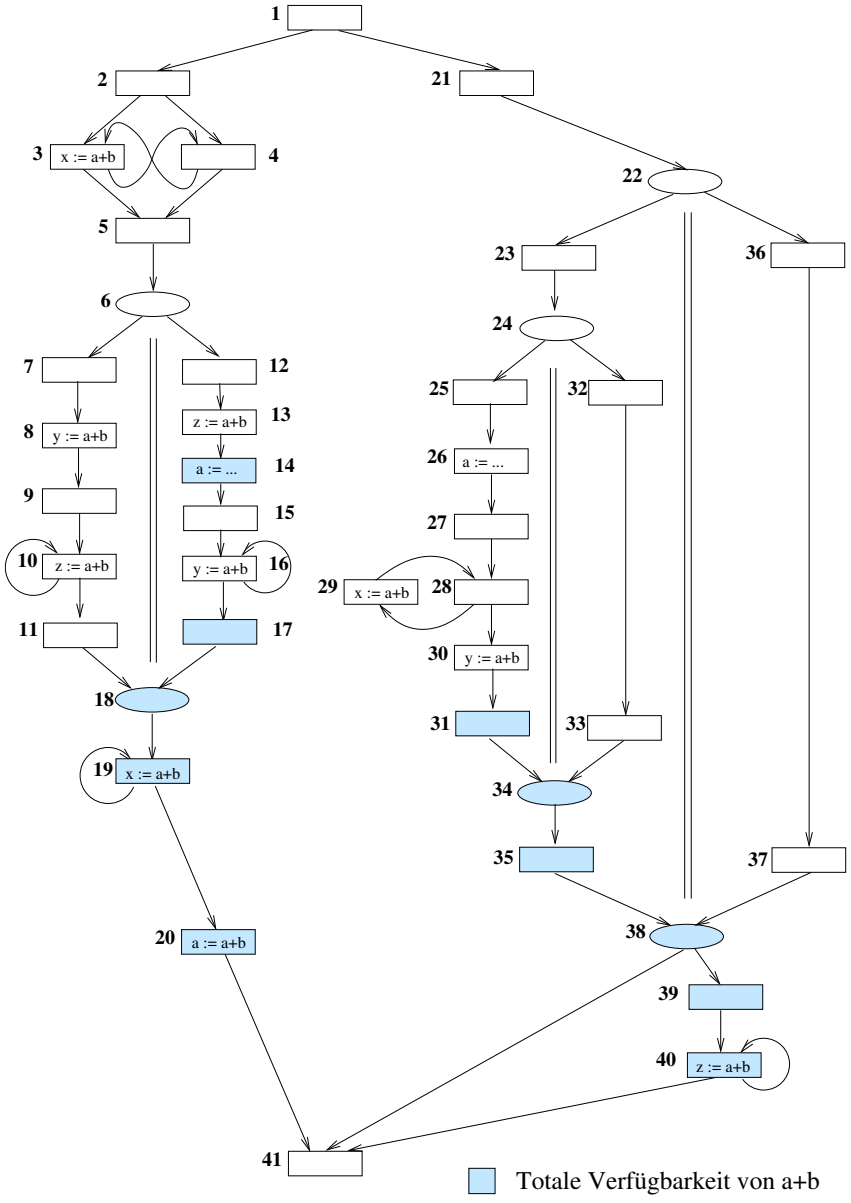
...entsprechend des 4-stufigen Verfahrens aus Kapitel 9.5.2:



destructive($G_{11_{seq}}$) = wahr

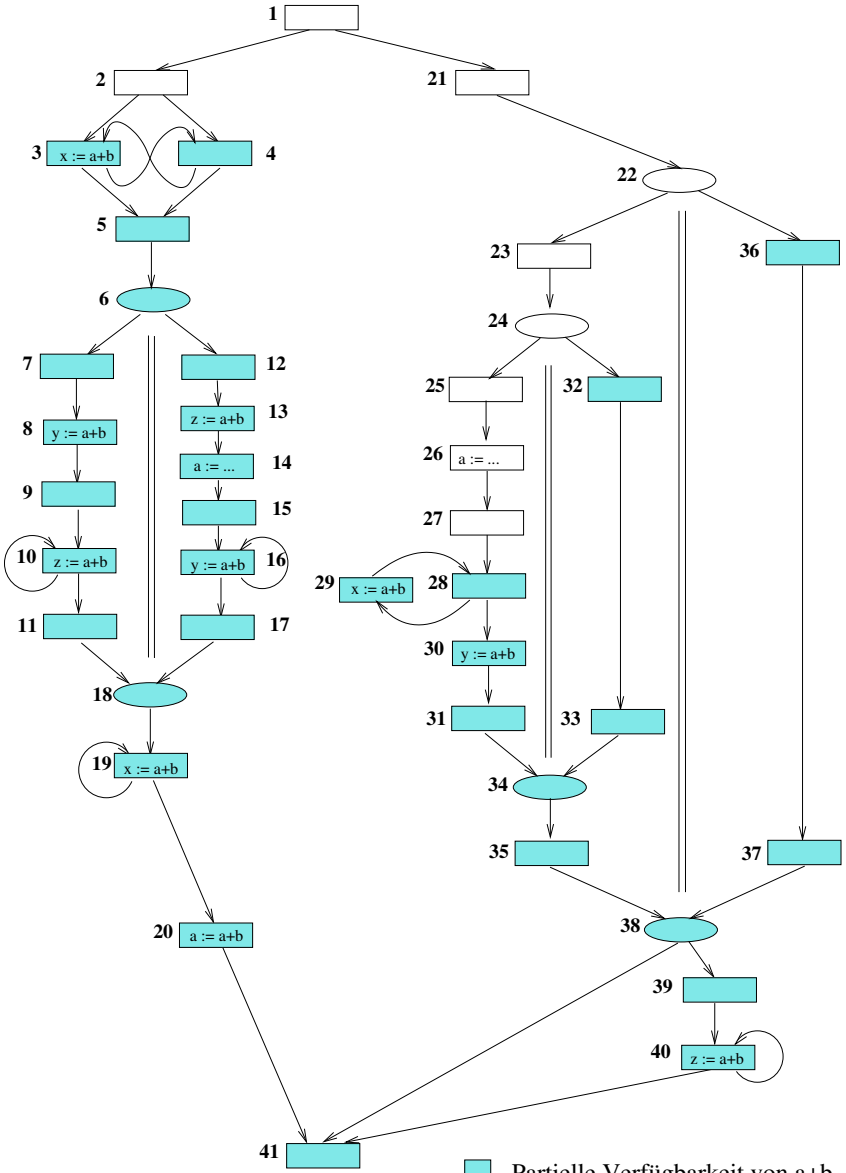
Ergebnis der totalen Verfügbarkeitsanalyse

...für a+b an Knoteneingängen:



Ergebnis der partiellen Verfügbarkeitsanalyse

...für a+b an Knoteneingängen:



Übungsaufgabe

Partielle Verfügbarkeitsanalyse für a+b:

- Gib die *VUPP*-Semantikglobalisierung für das durchgehende Beispiel nach dem 1. und 2. Iterationsschritt des 4-stufigen Verfahrens aus Kapitel 9.5.2 an.

Tote-Zuweisungenanalyse für a:

- Gib die *SUPP*- und *VUPP*-Semantikglobalisierungen für das durchgehende Beispiel nach dem 1. und 2. Iterationsschritt des 4-stufigen Verfahrens aus Kapitel 9.5.2 an.
- An welchen Knotenausgängen ist Variable a total tot, an welchen partiell tot? Gib die entsprechend markierten Graphen nach dem Vorbild der totalen und partiellen Verfügbarkeitsanalyse für a+b an.

Beachte: Die Tote-Zuweisungenanalyse ist anders als die Verfügbarkeitsanalyse eine Rückwärtsanalyse.

Kapitel 9.8

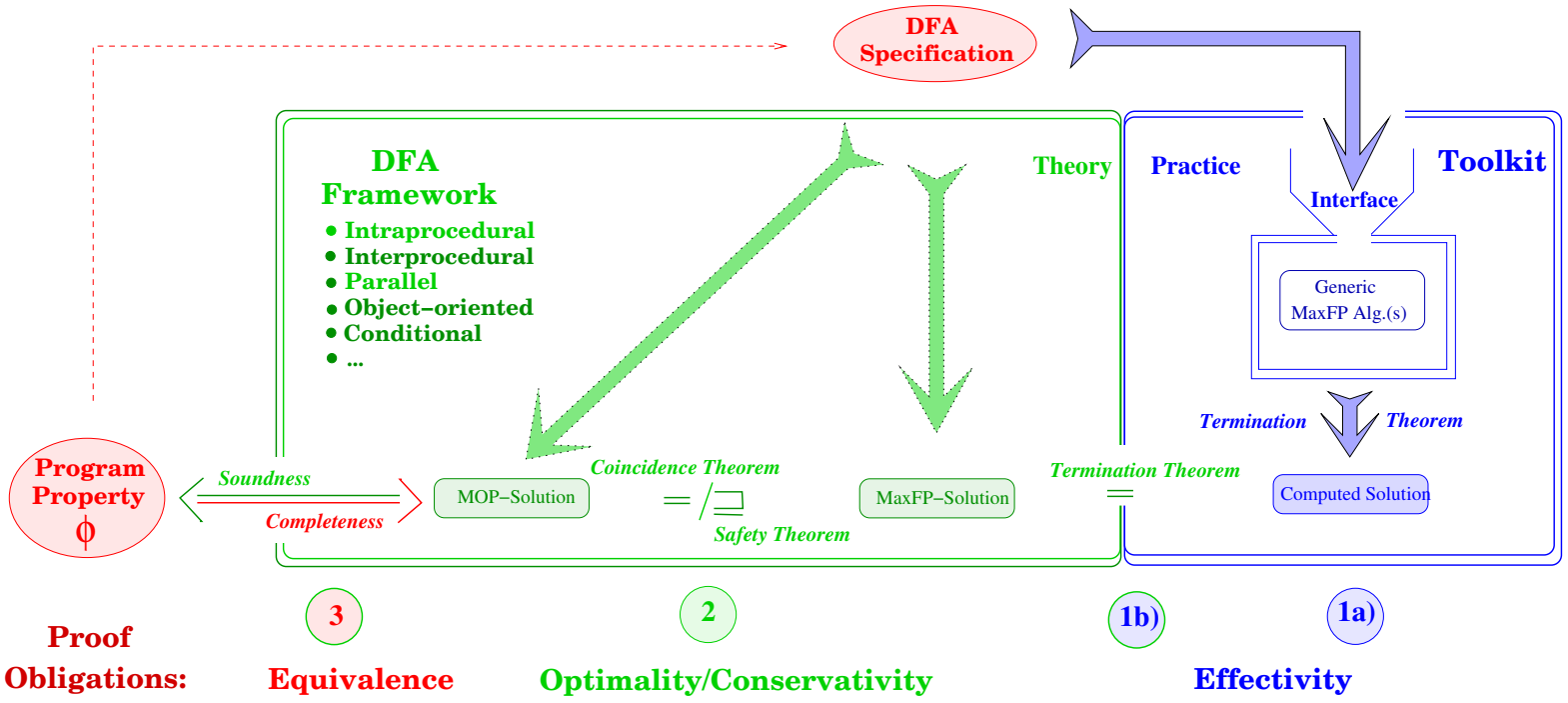
Zusammenfassung

Zusammenfassung

...mit dem Parallelen Koinzidenztheorem 9.6.1 für unidirektionale Bitvektorverfahren ist das Versprechen aus Kapitel 7.11 eingelöst, dass die

- einheitliche Rahmen- und Werkzeugkistensicht für DFA

über den Fall sequentieller intraprozeduraler DFA hinaus (s.a. LVA 185.A04 Optimierende Übersetzer) erreichbar ist:



Nur Mut!

...maßgeblich für die erfolgreiche Ausdehnung auf den Fall paralleler DFA ist die Beschränkung auf

- unidirektionale Bitvektorverfahren

für die sich die Probleme von Interferenz und Synchronisation paralleler Komponenten unter vollständiger Vermeidung des Zustandsexplosionsproblems ohne merklichen Mehraufwand im Vergleich zur DFA sequentieller Programme meistern lassen.

Verantwortlich dafür ist die Existenz lediglich von 3 Funktionen in $\mathcal{F}_{\mathbb{B}}$, deren äußere Semantik oft wie folgt beschrieben werden kann:

- *Mod*: Modifikation
- *Use*: Benutzung (engl. Use)
- *Transp*: Transparenz

Deshalb: Nur MUT! Nur MUT zur DFA paralleler Programme!

Kapitel 9.9

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (1)

Jyh-Herng Chow, William L. Harrison. *Compile Time Analysis of Parallel Programs that share Memory*. In Conference Record of the 19th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 130-141, 1992.

Jyh-Herng Chow, William L. Harrison. *State Space Reduction in Abstract Interpretation of Parallel Programs*. In Proceedings of the International Conference on Computer Languages (ICCL'94), 277-288, 1994.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (2)

Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Invariance Proof Methods and Analysis Techniques for Parallel Programs*. In Automatic Program Construction Techniques, A. W. Biermann, G. Guiho, Y. Kodratoff (Hrsg.), Macmillan Publishing Company, Kapitel 12, 243-271, 1984.

Matthew B. Dwyer, Lori A. Clarke. *Data Flow Analysis for Verifying Properties of Concurrent Programs*. In Proceedings of the 2nd ACM SIGSOFT Symposium on Foundations of Software Engineering (SFSE'94), Software Engineering Notes 19(5):62-75, 1994.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (3)


Matthew B. Dwyer, Lori A. Clarke, Jamieson M. Cobleigh, Gleb Naumovich. *Flow Analysis for Verifying Properties of Concurrent Software Systems*. ACM Transactions on Software Engineering Methodology 13(4):359-430, 2004.


Jeanne Ferrante, Dirk Grunwald, Harini Srinivasan. *Compile-time Analysis and Optimization of Explicitly Parallel Programs*. Parallel Algorithms and Applications 12(1-3):21-56, 1997.


Dirk Grunwald, Harini Srinivasan. *Data Flow Equations for Explicitely Parallel Programs*. In Proceedings of the 4th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPOPP'93), ACM SIGPLAN Notices 28(7):159-168, 1993.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (4)


Jens Knoop. *Parallel Constant Propagation*. In Proceedings of the 4th European Conference on Parallel Processing (Europar'98), Springer-V., LNCS 1470, 445-455, 1998.


Jens Knoop. *Demand-driven Analysis of Explicitly Parallel Programs: An Approach based on Reverse Data-Flow Analysis*. In Proceedings of the 9th International Workshop on Compilers for Parallel Computers (CPC 2001), 151-162, 2001.


Jens Knoop, Bernhard Steffen. *Code Motion for Explicitly Parallel Programs*. In Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPoPP'99), ACM SIGPLAN Notices 34(8):13-24, 1999.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (5)

Jens Knoop, Bernhard Steffen, Jürgen Vollmer. *Parallelism for Free: Bitvector Analyses $\rightarrow$ No State Explosion!* In Proceedings of the 1st International Workshop on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'95), Springer-V., LNCS 1019, 264-289, 1995.

Jens Knoop, Bernhard Steffen, Jürgen Vollmer. *Parallelism for Free: Efficient and Optimal Bitvector Analyses for Parallel Programs*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 18(3):268-299, 1996.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (6)


Samuel P. Midkiff, José E. Moreira, Marc Snir. *A Constant Propagation Algorithm for Explicitly Parallel Programs*. International Journal of Computer Science 26(5):563-589, 1998.


Samuel P. Midkiff, David A. Padua. *Issues in the Optimization of Parallel Programs*. In Proceedings of the 18th International Conference on Parallel Processing (ICPP'90), Vol. II., 105-113, 1990.


Harini Srinivasan, Michael Wolfe. *Analyzing Programs with Explicit Parallelism*. In Proceedings of the 4th International Conference on Languages and Compilers for Parallel Computing (LCPC'91), Springer-V., LNCS 589, 405-419, 1991.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 9 (7)

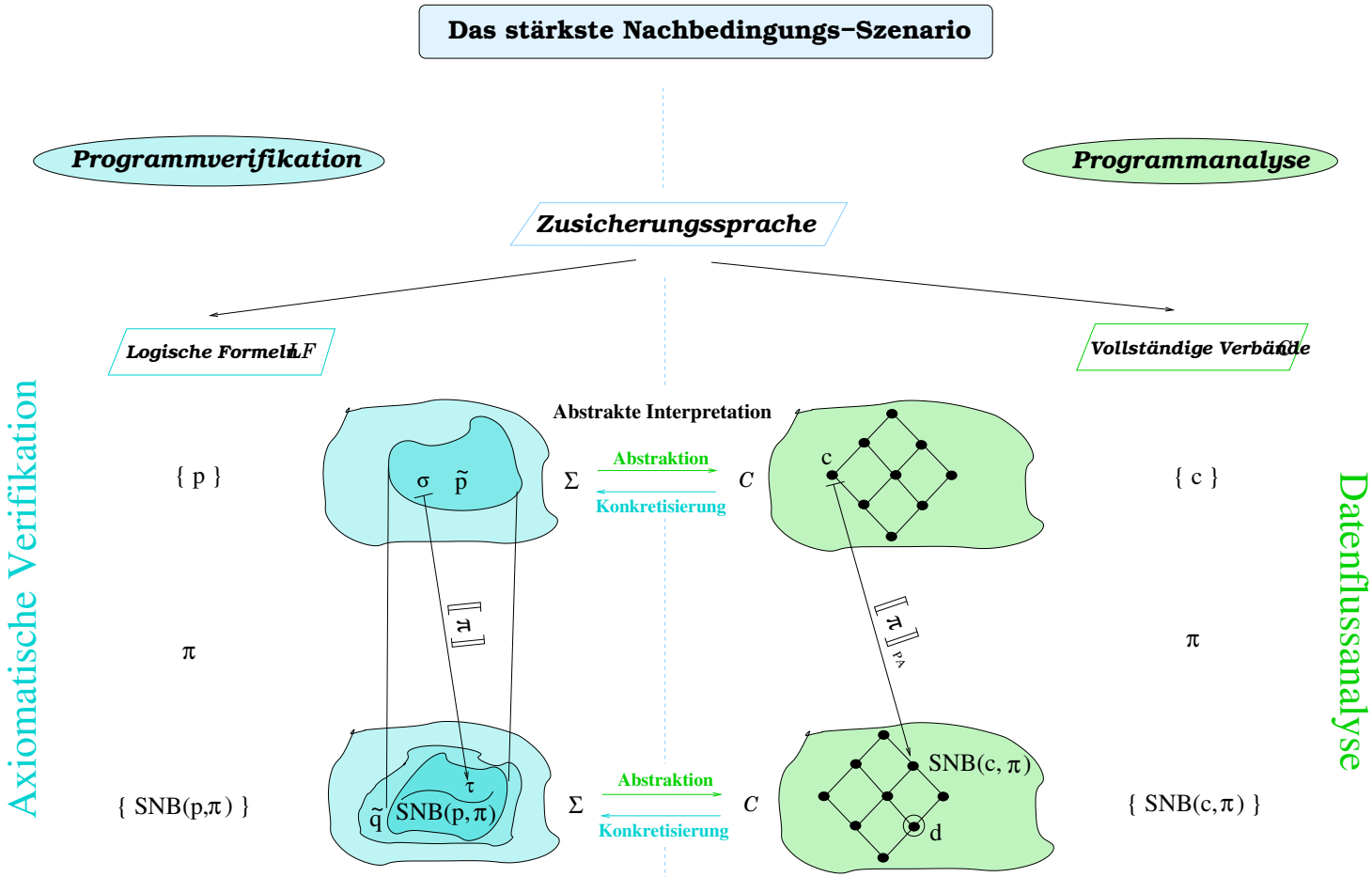
Jürgen Vollmer. *Data Flow Analysis of Parallel Programs*. In Proceedings of the IFIP WG 10.3 Working Conference on Parallel Architectures and Compilation Techniques (PACT'95), 168-177, 1995.

Michael Wolfe, Harini Srinivasan. *Data Structures for Optimizing Programs with Explicit Parallelism*. In Proceedings of the 1st International Conference of the Austrian Center for Parallel Computation, Springer-V., LNCS 591, 139-156, 1991.

Kapitel 10

Programmverifikation vs. Programmanalyse: Axiomatische Verifikation, Datenfluss-analyse im Vergleich

Stärkste Nachbedingungssichten im Vergleich



SNB(p, π) ∈ *LF* *muss erfüllen:*

(1) $\models_{PV} \{ p \}\, \pi\, \{ SNB(p,\pi) \}$

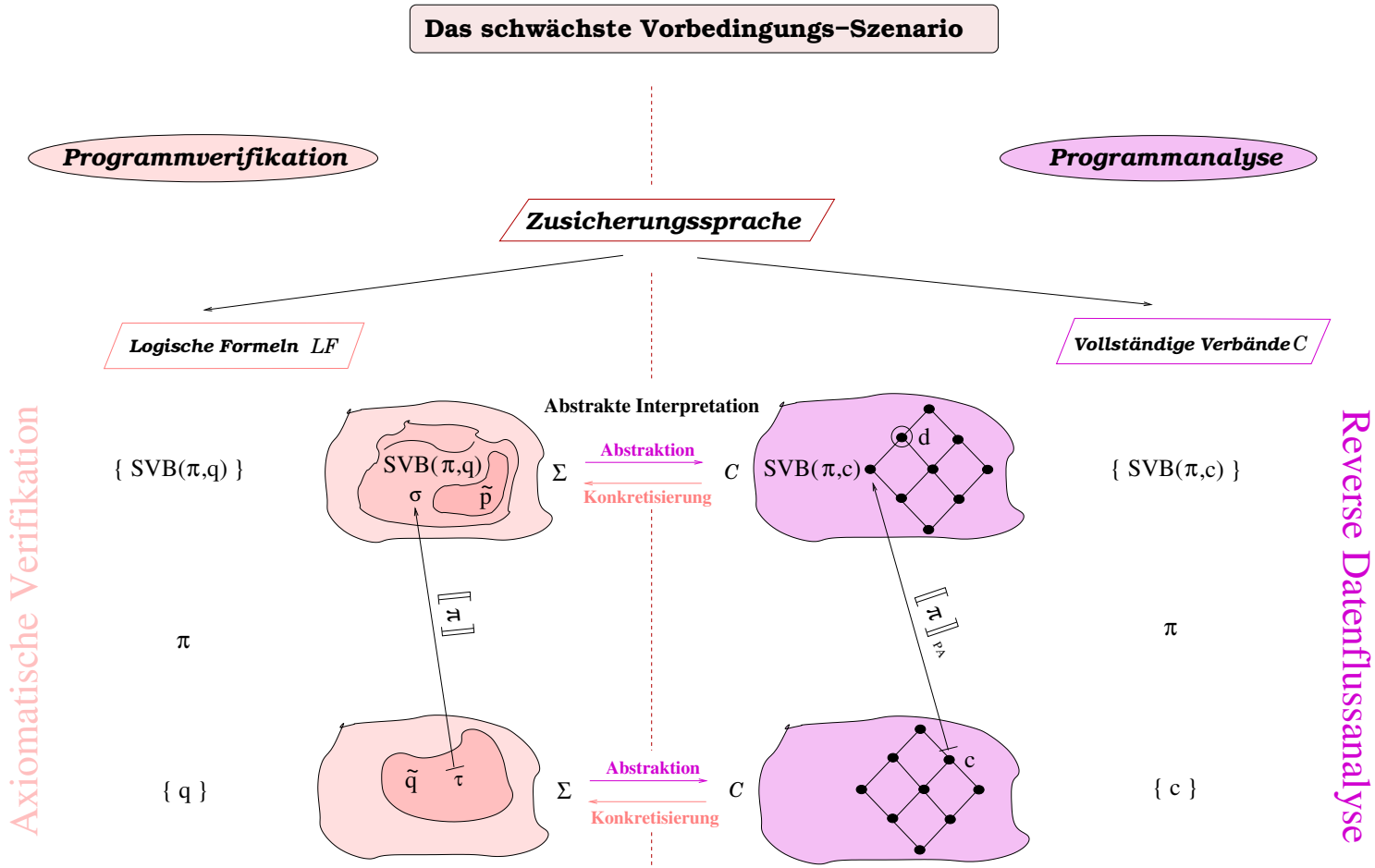
(2) $\forall\, q \in LF.\ \models_{PV} \{ p \}\, \pi\, \{ q \}$ impliziert $SNB(p,\pi) \Longrightarrow q$

SNB(c, π) ∈ *C* *muss erfüllen:*

(1) $\models_{PA} \{ c \}\, \pi\, \{ SNB(c,\pi) \}$

(2) $\forall\, d \in C.\ \models_{PA} \{ c \}\, \pi\, \{ d \}$ impliziert $SNB(c,\pi) \sqsupseteq d$

Schwächste Vorbedingungssichten im Vergleich



SVB(π,q) ∈ *LF* *muss erfüllen:*

(1) $\models_{PV} \{ SVB(\pi,q) \}\, \pi\, \{ q \}$

(2) $\forall\, p \in LF.\ \models_{PV} \{ p \}\pi \{ q \}$ impliziert $p \Longrightarrow SVB(\pi,q)$

SVB(π,c) ∈ *C* *muss erfüllen:*

(1) $\models_{PA} \{ SVB(\pi,c) \}\, \pi\, \{ c \}$

(2) $\forall\, d \in C.\ \models_{PA} \{ d \}\pi \{ c \}$ impliziert $d \sqsupseteq SVB(\pi,c)$

Teil IV

Fixpunkte, Transformation und Optimalität

Informell

$$\text{Optimalität} = \text{Korrektheit} + \text{Vollständigkeit}$$

Kapitel 11

Chaotische Fixpunktiteration

Kapitel 11.1

Motivation

Motivation

...viele praktisch relevante Probleme in der Informatik lassen sich durch die

- kleinste (größte) Lösung

eines Systems rekursiver Gleichungen beschreiben.

Einige Beispiele aus dieser Vorlesung:

- Denotationelle Semantik von WHILE
- Maximale/minimale DFA-Fixpunktsemantik
- Minimale/maximale RDFA-Fixpunktsemantik

Beispiele aus der Vorlesung

- Gleichungssystem zur denotationellen WHILE-Semantik:

$$[\![\mathit{skip}]\!]_{ds} = \mathit{id}$$
$$[\![x := t]\!]_{ds}(\sigma) = \sigma[[\![t]\!]_A(\sigma)/x]$$
$$[\![\pi_1; \pi_2]\!]_{ds} = [\![\pi_2]\!]_{ds} \circ [\![\pi_1]\!]_{ds}$$
$$[\![\text{if } b \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi}]\!]_{ds} = \mathit{cond}\,([\![b]\!]_B, [\![\pi_1]\!]_{ds}, [\![\pi_2]\!]_{ds})$$
$$[\![\text{while } b \text{ do } \pi \text{ od}]\!]_{ds} = \mathit{FIX}\ F$$
$$\text{mit } F\ g = \mathit{cond}\,([\![b]\!]_B, g \circ [\![\pi]\!]_{ds}, \mathit{id})$$

- Gleichungssystem zur maximalen DFA-Fixpunktsemantik:

$$\mathit{inf}(n) = \begin{cases} c_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigsqcap \{ [\![(m,n)]\!](\mathit{inf}(m)) \mid m \in \mathit{pred}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

- Gleichungssystem zur minimalen RDFA-Fixpunktsemantik:

$$\mathit{reqInf}(n) = \begin{cases} c_q & \text{falls } n = \mathbf{q} \\ \bigsqcup \{ [\![(n,m)]\!]_R(\mathit{reqInf}(m)) \mid m \in \mathit{succ}(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Allgemein(er)

...gesucht ist eine extreme (d.h., kleinste/größte) Lösung

$$\begin{aligned} x &= f_1(x) \\ x &= f_2(x) \\ &\vdots \\ x &= f_n(x) \end{aligned}$$

eines Systems rekursiver Gleichungen über einer Familie

$$\mathcal{F} =_{df} \{f_k : D \to D \mid 1 \leq k \leq n\}$$

monotoner Funktionen auf einer wohlfundierten partiellen Ordnung $(D, \sqsubseteq)$.

Ziel

...Gegenüberstellung des Lösens von Gleichungssystemen und des Berechnens von Fixpunkten von (Familien von) Funktionen:

- Lösen eines Systems rekursiver Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= f_1(x) \\ x &= f_2(x) \\ &\vdots \\ x &= f_n(x) \end{aligned}$$

- Berechnen eines gemeinsamen Fixpunktes einer Famile $\mathcal{F}$ von Funktionen, d.h. eines gemeinsamen Fixpunkts x mit $x = f_k(x)$ für alle $1 \leq k \leq n$

entsprechen einander.

Lösungs- und Fixpunktberechnung

...mittels iterativer Algorithmen und chaotischer Iteration.

Iterative Algorithmen zur Lösungs- bzw. Fixpunktberechnung

- beginnen üblicherweise mit $\bot$, dem kleinsten Element von D, als initialer Approximation von x und aktualisieren den jeweiligen Approximationswert durch Anwendung der Funktionen f_i $\mathcal{F}$ in einer beliebigen Reihenfolge, um so den kleinsten gemeinsamen Fixpunkt der Funktionen aus $\mathcal{F}$ Schritt für Schritt besser und besser zu approximieren

und im Terminierungsfall exakt zu erreichen.

Diese Vorgehensweise wird als chaotische Iteration bezeichnet.

Wichtige Fixpunktresultate aus der Literatur

...möglicherweise das bekannteste und wichtigste Fixpunktresultat:

- Das Fixpunkttheorem von Tarski [1955]
  - Garantiert die Existenz kleinster Fixpunkte für monotone Funktionen auf vollständigen partiellen Ordnungen.
  - Iterationsschema: $\vec{x}_0 = \vec{\bot}, \vec{x}_1 = \vec{f}(\vec{x}_0), \vec{x}_2 = \vec{f}(\vec{x}_1), \ldots,$ wobei $\vec{x}_i$ den Wert von $\vec{x}$ nach der i-ten Iteration bezeichnet.
  - Vielfach anwendbar, dennoch oft noch zu speziell.

Verallgemeinerungen, Variationen des Tarskischen Iterationsschemas:

- Vektor-Iterationen: Robert [1976]
- Asynchrone Iterationen: Baudet [1978], Cousot [1977], Üresin/Dubois [1989], Wei [1993]
- ...

Vektor-Iterationen, asynchrone Iterationen

Vektor-Iterationen (Robert [1976])

- Gegeben:
  Eine monotone Vektorfunktion $\vec{f} = (f^1, \ldots, f^m)$.
- Gesucht:
  Kleinster Fixpunkt $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^m) \in D^m$ von $\vec{f}$.
- Iterationsschema:
  $\vec{x}_0 = \vec{\bot}, \vec{x}_1 = \vec{f}_{J_0}(\vec{x}_0), \vec{x}_2 = \vec{f}_{J_1}(\vec{x}_1), \ldots$, wobei
  $J_i \subseteq \{1, \ldots, m\}$ und die k-te Komponente $\vec{f}_{J_i}(\vec{x}_i)^k$ von $\vec{f}_{J_i}(\vec{x}_i)$ ist $f^k(\vec{x}_i)$, falls $k \in J_i$, und $\vec{x}_i^k$ sonst.

Asynchrone Iterationen (Baudet [1978], Cousot [1977], Üresin/Dubois [1989], Wei [1993])

- $\vec{f}_{J_i}$ kann auf Komponenten früherer Vektoren der Iterationsfolge zurückgreifen $\vec{x}_j$, $j \leq i$.

Klassiker zum Nachschlagen und Nachlesen

DER Klassiker mit DEM Fixpunkttheorem schlechthin:

- Alfred Tarski. *A Lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):285-309, 1955.

Zu chaotischer Iteration:

- F. Robert. *Convergence locale d'itérations chaotiques non linéaires*. Technical Report 58, Laboratoire d'Informatique, U.S.M.G., Grenoble, Frankreich, Dez. 1976.

Umfassender historischer Abriss zu Fixpunktresultaten:

- Jean-Louis Lassez, V.L. Nguyen, Elizabeth A. Sonenberg. *Fixed Point Theorems and Semantics: A Folk Tale*. Information Processing Letters 14(3):112-116, 1982.

In der Folge

...Vorstellung eines weiteren Fixpunkttheorems, das ohne die übliche Monotonieforderung auskommt:

- Alfons Geser, Jens Knoop, Gerald Lüttgen, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Non-monotone Fixpoint Iterations to Resolve Second Order Effects*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 106-120, 1996.

...mit Anwendungen in Kapitel 11.3, 12 und 13.

Weitere Fixpunktresultate:

- Siehe Anhang A5.

Kapitel 11.2

Chaotisches Fixpunktiterationstheorem

Vorbereitungen (1)

Definition 11.2.1 (Partielle Ordnung, wohlfund. PO)

Eine partielle Ordnung

- ist ein Paar $(D, \sqsubseteq)$ aus einer Menge D und einer reflexiven, antisymmetrischen und transitiven zweistelligen Relation $\sqsubseteq$ über D, d.h. $\sqsubseteq \subseteq D \times D$.
- heißt wohlfundiert, falls jede Kette stationär ist.

Definition 11.2.2 (Kette, stationäre Kette)

Eine aufsteigende Kette

- in einer partiellen Ordnung $(D, \sqsubseteq)$ ist eine Folge $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus D, $d_i \in D$, mit $\forall\, i \in \mathbb{N}.\ d_i \sqsubseteq d_{i+1}$.
- heißt stationär, falls $\{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ endlich ist.

Vorbereitungen (2)

Definition 11.2.3 (Monotonie, Inflationärität)

Eine Funktion $f : D \to D$ auf einer partiellen Ordnung $(D, \sqsubseteq)$ heißt

- monoton, falls $\forall\, d, d' \in D.\ d \sqsubseteq d' \Rightarrow f(d) \sqsubseteq f(d')$.
- inflationär (oder vergrößernd), falls $\forall\, d \in D.\ d \sqsubseteq f(d)$.

Definition 11.2.4 (Funktionssequenzen)

Für eine Familie von Funktionen $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und ein Wort $s =_{df} (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}^*$ über $\mathbb{N}$, s also eine Folge natürlicher Zahlen, bezeichnet f_s die Funktionssequenz der Funktionen f_i, $1 \leq i \leq n$, gegeben durch ihre sequentielle Komposition:

- $f_s =_{df} f_{s_n} \circ \cdots \circ f_{s_1}$.

Strategien, Iterationsfolgen, faire Strategien

Sei $(D, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Familie inflationärer Funktionen $f_k : D \to D$.

Definition 11.2.5 (Strategie, chaotische Iterationsfolge, faire Strategie)

1. Eine Strategie ist eine beliebige Funktion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
2. Eine Strategie γ und ein Element $d \in D$ induzieren eine induktiv definierte chaotische Iterationsfolge $f_\gamma(d) = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $d_i \in D$, mit $d_0 = d$ und $d_{i+1} = f_{\gamma(i)}(d_i)$.
3. Eine Strategie γ heißt fair gdw

$$\forall\, i, k \in \mathbb{N}.\, (f_k(d_i) \neq d_i \;\Rightarrow\; \exists\, j > i.\, d_j \neq d_i)$$

Familien-Monotonie

...ein abgeschwächter Monotoniebegriff.

Sei $(D, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung.

Definition 11.2.6 (Familien-Monotonie)

Eine Familie $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_k : D \to D$ heißt familien-monoton, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d \sqsubseteq d' \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}^*. f_k(d) \sqsubseteq f_s(d')$$

Es gilt:

Lemma 11.2.7

Eine Familie $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen ist familien-monoton, wenn alle Funktionen f_k, $k \in \mathbb{N}$, (im üblichen Sinn) monoton sind.

Beispiel: Familien-Monotonie (1)

...betrachte:

- $(\mathbb{N}_1, \leq)$: die durch die Relation kleiner oder gleich partiell geordnete Menge der natürlichen Zahlen mit 1 als kleinstem Element:

$$1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 6 \leq 7 \leq \ldots$$

- $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ definiert durch:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_1.\ f(n) = \begin{cases} 4 & \text{falls } n = 1 \\ 3 & \text{falls } n = 2 \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

- $g : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ definiert durch: $\forall\, n \in \mathbb{N}_1.\ g(n) = n + 1$
- $\mathcal{F} = \{f, g\}$ Familie von Funktionen.

Beispiel: Familien-Monotonie (2)

Proposition 11.2.8

1. Abbildungen f und g sind inflationär.
2. Abbildung g ist monoton.
3. Abbildung f ist nicht monoton.
4. Funktionenfamilie $\mathcal{F} = \{f, g\}$ ist familien-monoton.

Beweis. Zu 1) und 2): Offensichtlich erfüllt.

Zu 3) Es gilt:

- $1 \leq 2$, aber $f(1) = 4 \not\leq 3 = f(2)$ $(= f^i(2), i \in \mathbb{N}_1)$
- $1 \leq 3$, aber $f(1) = 4 \not\leq 3 = f(3)$ $(= f^i(3), i \in \mathbb{N}_1)$
- $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(1, 2), (1, 3)\}.\ m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$

Zu 4): Wegen 3) reicht:

- $1 \leq 2 \wedge f(1) \not\leq f(2)$, aber $f(1) = 4 \leq 4 = g(g(2)) = g(f(2))$
- $1 \leq 3 \wedge f(1) \not\leq f(3)$, aber $f(1) = 4 \leq 4 = g(3)$

Das 'monotoniefreie' chaot. Fixpunkttheorem

Theorem 11.2.9 (Chaotisches Fixpunkiterationsth.)

Sei $(D, \sqsubseteq)$ eine wohlfundierte partielle Ordnung mit kleinstem Element $\bot$, $\mathcal{F} =_{df} (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine familien-monotone Familie inflationärer Funktionen und $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine faire Strategie.

Dann gilt:

1. Die Funktionsfamilie $\mathcal{F}$ hat einen kleinsten gemeinsamen Fixpunkt $\mu\mathcal{F}$ mit $\mu\mathcal{F} = \bigsqcup f_\gamma(\bot)$.
2. $\mu\mathcal{F}$ wird stets in einer endlichen Zahl von Iterationsschritten erreicht.

Generischer Fixpunktalgorithmus

...als nichtdeterministischer 'Rumpf'-Algorithmus.

Generischer Fixpunktalgorithmus 11.2.10

$d := \bot$;
while $\exists\, k \in \mathbb{N}.\ d \neq f_k(d)$ **do**
  choose $k \in \mathbb{N}$ **with** $d \sqsubset f_k(d)$
    $d := f_k(d)$
od

Anmerkung: Wegen f_k, $k \in \mathbb{N}$, inflationär, folgt aus $d \neq f_k(d)$ unmittelbar $d \sqsubset f_k(d)$.

Kapitel 11.3

Anwendungen

Kapitel 11.3.1

Vektor-Iterationen

Vorbereitung

Sei

- $(C, \sqsubseteq_C)$ wohlfundierte partielle Ordnung
- $D =_{df} C^n$, $n \in \mathbb{N}$, partiell geordnet durch die punktweise Ausdehnung von $\sqsubseteq_C$ auf D
- $f : D \to D$ monotone Funktion auf D

Anstelle der Iterationsfolge

$$d_0 = \bot,\ d_1 = f(\bot),\ d_2 = f(d_1),\ \ldots$$

nach dem Schema aus Tarskis Fixpunkttheorem, können wir zu einer Zerlegung von f in seine Komponenten f^k übergehen mit

$$f(d) = (f^1(d), \ldots, f^n(d))$$

und zu selektiven Aktualisierungen durch ausgewählte Komponentenfunktionen, wobei wir mit oberen Indizes i die i-te Komponente eines Vektors der Länge n bezeichnen.

Vektor-Iterationen (1)

Definition 11.3.1.1 (Vektor-Iteration)

Eine Vektor-Iteration ist eine Iterationsfolge der Form

$$d_0 = \bot,\ d_1 = f_{J_0}(\bot),\ d_2 = f_{J_1}(d_1),\ \ldots$$

mit $J_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und wo

$$f_J(d)^i =_{df} \begin{cases} f^i(d) & \text{falls } i \in J \\ d^i & \text{sonst} \end{cases}$$

selektiv die durch J spezifizierten Komponentenfunktionen anwendet und die entsprechenden Komponentenwerte aktualisiert.

Vektor-Iterationen (2)

Beachte:

- Die Menge der gemeinsamen Fixpunkte der Funktionenfamilie $\mathcal{F} =_{df} \{f_J \mid J \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ ist gleich der Menge der Fixpunkte von $f : D \to D$.
- Jede Funktion f_J is monoton, da f monoton ist.

Anwendung von Fixpunkttheorem 11.2.4

...zur Modellierung der Vektor-Iteration.

Erforderlich: Verallgemeinerung des Strategiebegriffs auf einen Strategiebegriff für Mengen.

Definition 11.3.1.2 (Faire Mengenstrategie)

1. Eine Mengenstrategie ist eine (beliebige) Funktion

$$\gamma : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}).$$

   Intuition: $\gamma(i)$ liefert eine Menge J_i von Indizes aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$, deren zugehörige Komponenten im i-ten Schritt der Iteration aktualisiert werden sollen.

2. Eine Mengenstrategie heißt fair gdw

$$\forall\, i \in \mathbb{N},\, J \subseteq \mathbb{N}.\ (f_J(d_i) \neq d_i \ \Rightarrow\ \exists j > i.\, d_j \neq d_i)$$

Modellierungsresultate (1)

Sei

- $(C, \sqsubseteq_C)$ wohlfundierte partielle Ordnung mit kleinstem Element $\bot_C$.
- $D =_{df} C^n$, $n \in \mathbb{N}$, partiell geordnet durch die punktweise Ausdehnung von $\sqsubseteq_C$ auf D.

Lemma 11.3.1.3 (Ketten durch Vektor-Iteration)

Sei $f = (f^1, \ldots, f^n)$ eine monotone Funktion auf D, sei $\mathcal{F} =_{df} \{f_J \mid J \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ eine Familie von Funktionen $f_J : D \to D$ im Sinn von Definition 11.3.1.1 und sei $\gamma : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ eine Mengenstrategie.

Dann gilt: $f_\gamma(\bot)$ liefert eine Kette.

Das heißt: Jede chaotische Iterationsfolge liefert eine Kette.

Modellierungsresultate (2)

Theorem 11.3.1.4 (Chaotische Vektor-Iteration)

Sei $f = (f^1, \ldots, f^n)$ eine monotone Funktion auf D, sei $\mathcal{F} =_{df} \{f_J \mid J \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ eine Familie von Funktionen $f_J : D \to D$ gemäß Definition 11.3.1.1 und sei γ eine faire Mengenstrategie.

Dann gilt:

1. $\bigsqcup f_\gamma(\bot)$ ist der kleinste Fixpunkt $\mu\mathcal{F}$ der Familie von Funktionen $\mathcal{F}$.
2. $\mu\mathcal{F}$ wird stets in einer endlichen Zahl von Iterationsschritten erreicht.
3. Die kleinsten Fixpunkte von f und $\mathcal{F}$ stimmen überein, d.h.:
$$\mu\mathcal{F} = \mu f$$

Anmerkungen

Die Aussage von Theorem 11.3.1.4

- ist ein Spezialfall des Chaotischen Fixpunktiterationstheorems 11.2.9 für Vektor-Iterationen und folgt zusammen mit Lemma 11.3.1.3.

Für $|\mathcal{F}| = 1$ reduziert sich

- die Aussage von Theorem 11.3.1.4 auf Tarskis Fixpunkttheorem für den Fall wohlfundierter partieller Ordnungen.

Kapitel 11.3.2

Datenflussanalyse

Anwendung von Fixpunkttheorem 11.2.4

...am Beispiel intraprozeduraler DFA und der Gleichungssysteme für die *MaxFP*- und *MinFP*-Semantik.

Das Gleichungssystem der *MaxFP*-Semantik:

$$inf(n) = \begin{cases} c_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigsqcap \{ [\![(m,n)]\!](inf(m)) \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die *MaxFP*-Semantik:

...definiert als die größte Lösung des *MaxFP*-Gleichungssystems, bezeichnet mit:

$$\nu\text{-}inf^*_{c_{\mathbf{s}}} : N \to \mathcal{C}$$

Dual zur *MaxFP*-Semantik

...die *MinFP*-Semantik.

Das Gleichungssystem der *MinFP*-Semantik:

$$inf(n) = \begin{cases} c_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = \mathbf{s} \\ \bigsqcup \{ [\![(m,n)]\!](inf(m)) \mid m \in pred(n) \} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die *MinFP*-Semantik:

...definiert als die kleinste Lösung des *MinFP*-Gleichungssystems, bezeichnet mit:

$$\mu\text{-}inf^*_{c_{\mathbf{s}}} : N \to \mathcal{C}$$

Generischer *MinFP*-Fixpunktalgorithmus

Generischer *MinFP*-Fixpunktalgorithmus 11.3.2.1

$inf[\mathbf{s}] := c_{\mathbf{s}}$;
forall $n \in N \backslash \{\mathbf{s}\}$ **do** $inf[n] := \bot$ **od**;
$workset := N$;
while $workset \neq \emptyset$ **do**
  choose $k \in workset$
    $workset := workset \backslash \{ k \}$;
    $new := inf[k] \sqcup \bigsqcup \{ [\![(m,k)]\!](inf[m]) \mid m \in pred_G(k) \}$;
    if $new \sqsupset inf[k]$ **then**
      $inf[k] := new$;
      $workset := workset \cup succ_G(k)$
    fi
od

Zur Fixpunktcharakt. der *MinFP*-Lösung (1)

Vorbereitung:

Sei

- $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein beliebiger, fest gewählter Flussgraph.
- $\mathtt{n} =_{df} |N|$ die Zahl der Knoten in N.
- $\widehat{\mathcal{C}} =_{df} (\mathcal{C}, \sqcap, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top)$ ein vollständiger Verband.
- $[\![\ ]\!] : E \to (\mathcal{C} \to \mathcal{C})$ eine monotone lokale DFA-Semantik für G.

Die Knoten der Menge N von G werde mit der Menge

- der natürlichen Zahlen $\{1, \ldots, \mathtt{n}\}$ als Ordnungsnummern identifiziert.

Zur Fixpunktcharakt. der *MinFP*-Lösung (2)

Sei $D =_{df} \mathcal{C}^{\mathtt{n}}$ versehen mit der punktweisen Ausdehnung der Ordnungsrelation $\sqsubseteq_{\widehat{\mathcal{C}}}$ von $\widehat{\mathcal{C}}$ auf D.

Mit dieser Festlegung gilt:

- $(D, \sqsubseteq)$ ist eine wohlfundierte partielle Ordnung.
- Ein Element $d = (d^1, \ldots, d^{\mathtt{n}}) \in D$ stellt eine Annotation des Flussgraphen dar, wobei der Knoten mit der Ordnungsnummer k mit dem Verbandselement $d^k \in \mathcal{C}$ als Wert benannt ist.

Zur Fixpunktcharakt. der *MinFP*-Lösung (3)

Für jeden Knoten des Flussgraphen definieren wir jetzt die knotenspezische Funktion $f^k : D \to C$ durch

$$f^k(d^1, \ldots, d^n) =_{df} d'^k$$

mit

$$d'^k = d^k \sqcup \bigsqcup \{ [\![(m,k)]\!](d^m) \mid m \in pred_G(k) \}$$

wobei k die Ordnungsnummer des Knotens ist.

Intuitiv: f^k beschreibt den Effekt der Aktualisierung der DFA-Information am Knoten mit der Ordnungsnummer k entsprechend des Vorgehens im Gen. Fixpunktalgorithmus 11.4.2.1:

$$new := inf[k] \sqcup \bigsqcup \{ [\![(m,k)]\!](inf[m]) \mid m \in pred_G(k) \}$$

entspricht:

$$d'^k = d^k \sqcup \bigsqcup \{ [\![(m,k)]\!](d^m) \mid m \in pred_G(k) \}$$

Charakterisierungsresultate

Lemma 11.3.2.2 (Lösung gdw. Fixpunkt)

Für alle Elemente $d \in D$ gilt:

d ist eine Lösung des *MinFP*-Gleichungssystems gdw d ist ein Fixpunkt der Funktion $f =_{df} (f^1, \ldots, f^n)$.

Theorem 11.3.2.3 (Korrektheit und Terminierung)

Jeder Lauf des generischen *MinFP*-Fixpunktalgorithmus 11.3.2.1 terminiert mit der *MinFP*-Semantik von G für die lokale DFA-Semantik $[\![\ ]\!]$ und die Startzusicherung c_s.

Anmerkungen

...zum Beweis von Theorem 11.3.2.3:

- Der *MinFP*-Fixpunktalgorithmus 11.3.2.1 folgt dem Muster von Rumpfalgorithmus 11.2.10 mit $\mathcal{F} = \{f_{\{k\}} \mid 1 \leq k \leq \mathtt{n}\}$.
- Die Verwendung von Variable *workset*, die die Invariante $\mathit{workset} \supseteq \{k \mid f_{\{k\}}(d) \neq d\}$ erfüllt, trägt zu höherer Effizienz bei.
- Offensichtlich gilt: f ist monoton.

Damit sind insgesamt die Voraussetzungen von Theorem 11.3.1.4 erfüllt, womit Theorem 11.3.2.4 folgt.

Ausblick

...weitere Anwendungen des 'monotoniefreien' chaotischen Fixpunktiterationstheorems 11.2.9 in Kapitel 12 und 13 zum Beweis der Optimalität der Transformation für die

- Elimination partiell toten Codes
- Elimination partiell redundanter Anweisungen

Klassische Fixpunkttheoreme sind dafür nicht anwendbar.

Kapitel 11.4

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 11 (1)


Nicolas Bourbaki. *Sur la théorème de Zorn*. Archiv der Mathematik 2:434-437, 1949/50.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Constructive Versions of Tarski's Fixed Point Theorems*. Pacific Journal of Mathematics 82(1):43-57, 1979.


Alfons Geser, Jens Knoop, Gerald Lüttgen, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Non-monotone Fixpoint Iterations to Resolve Second Order Effects*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 106-120, 1996.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 11 (2)


Jean-Louis Lassez, V.L. Nguyen, Elizabeth A. Sonenberg. *Fixed Point Theorems and Semantics: A Folk Tale*. Information Processing Letters 14(3):112-116, 1982.


F. Robert. *Convergence locale d'itérations chaotiques non linéaires*. Technical Report 58, Laboratoire d'Informatique, U.S.M.G., Grenoble, Frankreich, Dez. 1976.


Alfred Tarski. *A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its Applications*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):285-309, 1955.


Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008. (Kapitel 5, Fixed Points)

Kapitel 12

Unnötige Anweisungen

Kapitel 12.1

Motivation

Informell

...Anweisungen sind unnötig, wenn sich durch Streichen das 'beobachtbare' Programmverhalten, die Programmsemantik nicht ändern und erhalten bleiben.

In diesem Sinn unnötige Anweisungen treten in vielerlei Form auf, darunter als:

- Unerreichbare Anweisungen (Kapitel 12.2)
- Partiell tote/geisterhafte Anweisungen (Kapitel 12.3)
- Partiell redundante Anweisungen (Kapitel 12.4)
- ...

Transformationen

...zur Beseitigung (oder Elimination) unnötiger Anweisungen zielen darauf, die Performanz eines Programms zu verbessern, ohne dadurch das beobachtbare Verhalten oder die Semantik zu verändern.

Um dies handhabbar zu machen, ist es erforderlich, die Begriffe

- beobachtbares Verhalten
- zu erhaltende Semantik

zu präzisieren und exakt zu fassen.

Transformationen: Korrektheit, Vollständigkeit

...ohne diese Präzisierungen ist es weder möglich für Transformationen

- Korrektheit

zu definieren und nachzuweisen, noch für Optimierungstransformationen, ob, wann und in welchem Sinn sie

- vollständig (oder optimal) sind.

Die Wahl der Präzisierung beeinflusst Korrektheits- und Vollständigkeits- (oder Optimalitäts-) Begriff maßgeblich.

Am Beispiel von Transformationen

..zur Elimination unnötiger Anweisungen:

Die Wahl der Präzisierung beeinflusst maßgeblich, ob, wann und in welchem Sinn eine

- Anweisung als unnötig

angesehen werden kann.

Erst die Präzisierung auch dieses Begriffs erlaubt es, entsprechende (Eliminations-) Transformationen zu definieren und ihre Vollständigkeit (oder Optimalität) in einem wohldefinierten Sinn zu definieren und nachzuweisen.

Korrektheit und Vollständigkeit informell

Eine (Programm-) Transformation ist

- korrekt, wenn sie das beobachtbare Verhalten, die Semantik eines Programms erhält.

Eine Transformation für die Beseitigung unnötiger Anweisungen ist

- vollständig (oder optimal), wenn sie alle in einem wohldefinierten Sinn unnötigen Anweisungen in einem Programm beseitigt.

Relativität von Korrektheit und Vollständigkeit

...Korrektheit und Vollständigkeit (oder Optimalität) von Transformationen sind keine absoluten, sondern relative Eigenschaften:

- Korrekt relativ zum beobachtbaren Verhalten, der Programmsemantik.
- Vollständig (oder optimal) relativ zu einem (oder mehreren) Optimierungsziel(en).

Wichtig: Beide Definitionen erlauben triviale Lösungen: Die

- identische Programmtransformation `tunix` ist korrekt.
- alles streichende Programmtransformation `streichalles` ist vollständig.

Offenbar

...sind weder `tunix` noch `streichalles` sinnvoll oder gewollt:

- `tunix`: Stets korrekt, selten vollständig.
- `streichalles`: Stets vollständig, selten korrekt.

Mit der Suche nach Transformationen, die

- korrekt und vollständig

sind, aber auch

- wirksam (nicht nur in der Theorie, auch in der Praxis)
- effizient (in der Theorie)
- performant und skalierbar (in der Praxis)
- elegant und einfach (in Theorie und Praxis)
- ...

beginnt Informatik!

Für die Entwicklung von Transformationen

...zur Beseitigung unnötiger Anweisungen sind somit Antworten zentral auf:

- Beobachtbares Verhalten, zu erhaltende Semantik: Wie definiert?
- Anwendungsbereich: Wie ist Unnötigkeit definiert?
- Korrektheit: Werden höchstens in diesem Sinn unnötige Anweisungen gestrichen?
- Vollständigkeit (oder Optimalität): Werden alle in diesem diesem Sinn unnötige Anweisungen gestrichen?

...was wir für verschiedene Präzisierungen von:

- Beobachtbares Verhalten, zu erhaltende Semantik
- Unnötigkeit von Anweisungen

untersuchen und beantworten werden.

Vereinbarungen zu Flussgraphen

...in Kapitel 12 gehen wir davon aus, dass Flussgraphen

- knotenbenannt

sind und dass

- $\mathcal{G}$ die Menge aller Flussgraphen (oder Programme) G
- $\mathcal{AM}$ die Menge aller Anweisungsmuster α, α' der Form $\alpha \equiv x := t$, $\alpha' \equiv x' := t'$

bezeichnen.

Kapitel 12.2

Unerreichbare Anweisungen

Zusatzvereinbarungen für Flussgraphen

...für Kapitel 12.2.

Für jeden Flussgraphen $G = (N, E, \mathbf{s}) \in \mathcal{G}$ gilt:

- $\mathbf{s} \in N$ hat keine Vorgänger: $pred(\mathbf{s}) = \emptyset$

und bezeichnet einen als Startknoten ausgezeichneten Knoten in G.

Wichtig: Anders als bisher verlangen wir nicht, dass es einen als Endknoten ausgezeichneten Knoten (ohne Nachfolger) in G gibt und jeder Knoten $n \in N$ auf einem Pfad von $\mathbf{s}$ nach $\mathbf{e}$ liegt.

Bezeichnung:

- $src(e)$, $dst(e)$: Anfangs- bzw. Endknoten der Kante e.

Kapitel 12.2.1

Statisch unerreichbare Anweisungen

Statisch unerreichbare Knoten und Kanten

...sei $G = (N, E, \mathbf{s})$ ein (knotenbenannter) Flussgraph.

Definition 12.2.1.1 (Stat. unerr. Knoten/Kanten)

1. Ein Knoten $n \in N$ ist statisch unerreichbar gdw n auf keinem Pfad vom Startknoten des Flussgraphen aus erreichbar ist, d.h., wenn:

$$\mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n] = \emptyset$$

2. Eine Kante $e \in E$ ist statisch unerreichbar gdw der Anfangsknoten von e statisch unerreichbar ist, d.h., wenn:

$$\mathbf{P}_G[\mathbf{s}, src(e)] = \emptyset$$

3. Knoten oder Kanten, die nicht statisch unerreichbar sind, heißen statisch erreichbar.

Statisch unerreichbare Anweisungen

...eine 'syntaktische' Eigenschaft.

Definition 12.2.1.2 (Statisch unerreichbare Anw.)

Eine Anweisung α am Knoten $n \in N$ in G ist statisch unerreichbar gdw n (und damit α) statisch unerreichbar ist.

Ziel

...Elimination statisch unerreichbarer Knoten und Kanten als Optimierungstransformation OT zur

- Elimination statisch unerreichbarer Anweisungen als spezieller Klasse $\mathcal{K}$ unnötiger Anweisungen

zusammen mit dem Nachweis, dass OT

- Programmsemantik und beobachtbares Verhalten

in einem bestimmten Sinn erhält und für die Elimination unnötiger Anweisungen aus $\mathcal{K}$

- korrekt, vollständig und optimal ist.

Beobachtb. Verhalten, zu erhaltende Semantik

Beobachtbares Verhalten:

- Mengen von Programmzuständen an Programmpunkten.

Definition 12.2.1.3 (Semantische Äquivalenz)

Zwei Programme $G = (N, E, \mathbf{s})$ und $G' = (N', E', \mathbf{s}')$ heißen semantisch äquivalent bzgl. der nichtdeterministischen Aufsammelsemantik (oder streichäquivalent) (in Zeichen: $G \approx_{[\![\ ]\!]} G'$) gdw:

1. $N' \subseteq N$, $E' \subseteq E$, $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$
2. $\forall\, n \in N'.\ [\![\, n \,]\!]^{CS}_{G'} = [\![\, n \,]\!]^{CS}_{G} \quad (\subseteq \Sigma)$
3. $\forall\, n \in N \backslash N'.\ [\![\, n \,]\!]^{CS}_{G} = \emptyset$

Beobachtungsäquivalenz

Definition 12.2.1.4 (Beobachtungsäquivalenz)

Zwei Programme G und G' heißen beobachtungsäquivalent (in Zeichen: $G \approx_{\mathcal{B}} G'$) gdw G und G' sind streichäquivalent: $G \approx_{[\![\,]\!]} G'$.

Lemma 12.2.1.5 (Beobachtungsäquivalenz)

Seien $G = (N, E, \mathbf{s})$ und $G' = (N', E', \mathbf{s}')$ zwei Programme. Dann sind äquivalent:

1. G und G' sind beobachtungsäquivalent ($G \approx_{\mathcal{B}} G'$).
2. G und G' sind streichäquivalent ($G \approx_{[\![\,]\!]} G'$).
3. $(\forall\, n \in N \cap N'.\ \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}', n] = \mathbf{P}_{G}[\mathbf{s}, n]) \wedge$
   $(\forall\, n \in N \backslash (N \cap N').\ \mathbf{P}_{G}[\mathbf{s}, n] = \emptyset) \wedge$
   $(\forall\, n \in N' \backslash (N \cap N').\ \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, n] = \emptyset)$

Unnötige Anweisungen, Knoten und Kanten

Definition 12.2.1.6 (Unnötig)

Seien $G = (N, E, \mathbf{s})$ und $G' = (N', E', \mathbf{s}')$ zwei beobachtungsäquivalente Programme mit $N' \subseteq N$, $E' \subseteq E$ und $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$.

Dann heißt

1. eine Anweisung in G unnötig, wenn sie einen Knoten $n \in N \backslash N'$ benennt.
2. ein Knoten $n \in N$ unnötig, wenn er mit einer unnötigen Anweisung benannt ist.
3. eine Kante $e \in E$ unnötig, wenn ihr Anfangsknoten unnötig ist.

Klasse $\mathcal{K}$ unnötiger Anweisungen

Definition 12.2.1.7 (Klasse $\mathcal{K}$ unnötiger Anw.)

1. $\mathcal{K}$ ist die Klasse von Anweisungen, Knoten und Kanten von Programmen, die unnötig sind im Sinn von Definition 12.2.1.6.
2. Eine Anweisung, Knoten oder Kante aus $\mathcal{K}$ heißt $\mathcal{K}$-unnötige Anweisung, $\mathcal{K}$-unnötiger Knoten oder $\mathcal{K}$-unnötige Kante (oder $\mathcal{K}$-unnötig).

Bezeichne für ein Programm $G \in \mathcal{G}$:

- $\mathcal{U}_G^A$: Die Menge $\mathcal{K}$-unnötiger Anweisungen in G.
- $\mathcal{U}_G^N$: Die Menge $\mathcal{K}$-unnötiger Knoten in G.
- $\mathcal{U}_G^E$: Die Menge $\mathcal{K}$-unnötiger Kanten in G.

$\mathcal{K}$-Korrektheitstheorem

Theorem 12.2.1.8 ($\mathcal{K}$-Korrektheit)

Seien $G = (N, E, \mathbf{s})$ und $G' = (N', E\,\mathbf{s}')$ zwei Programme mit:

- $N' \subseteq N$, $E' \subseteq E$, $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$
- $\forall\, n \in N \backslash N'.\ n \in \mathcal{U}_G^N$
- $\forall\, e \in E \backslash E'.\ n \in \mathcal{U}_G^E$

Dann gilt:

1. G und G' sind streich- und beobachtungsäquivalent:

$$G \approx_{[\![\ ]\!]} G' \ \wedge\ G \approx_{\mathcal{B}} G$$

2. G' enthält höchstens so viele $\mathcal{K}$-unnötige Anweisungen wie G:

$$\mathcal{U}_{G'}^A \subseteq \mathcal{U}_G^A$$

Eliminationstransformationen

Definition 12.2.1.9 (Eliminationstransformation)

1. Eine Programmtransformation, die angewendet auf ein Programm $G = (N, E, \mathbf{s})$ ein Programm $G' = (N', E', \mathbf{s}')$ liefert mit $N' \subseteq N$, $E' \subseteq E$ und $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$ heißt Eliminationstransformation.
2. Ist ET eine Eliminationstransformation und G ein Programm, so bezeichnet G_{ET} dasjenige Programm, das aus der Anwendung von ET auf G entsteht.
3. Die Menge aller Eliminationstransformationen wird mit $\mathcal{ET}$ bezeichnet.

Korrekte Eliminationstransformationen

...korrekte Transformationen erzeugen beobachtungsäquivalente Programme.

Definition 12.2.1.10 (Korrekte Eliminationstransf.)

1. Eine Eliminationstransformation $ET \in \mathcal{ET}$ heißt korrekt gdw für alle Programme G gilt, dass G und G_{ET} beobachtungsäquivalent sind:

$$G \approx_{\mathcal{B}} G_{ET} \ (\Leftrightarrow G \approx_{[\![\ ]\!]} G_{ET})$$

2. Die Menge aller korrekten Eliminationstransformationen wird mit $\mathcal{ET}_{korr}$ bezeichnet.

$\mathcal{K}$-vollständige Eliminationstransformationen

...$\mathcal{K}$-vollständige Transformationen eliminieren alle $\mathcal{K}$-unnötigen Anweisungen.

Definition 12.2.1.11 ($\mathcal{K}$-vollst. Eliminationstransf.)

1. Eine Eliminationstransformation $ET \in \mathcal{ET}$ heißt $\mathcal{K}$-vollständig gdw für alle Programme G gilt, dass G_{ET} frei von $\mathcal{K}$-unnötigen Anweisungen ist:

$$\mathcal{U}^A_{G_{ET}} = \emptyset$$

2. Die Menge aller $\mathcal{K}$-vollständigen Eliminationstransformationen wird mit $\mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-vollst}}$ bezeichnet.

$\mathcal{K}$-optimale Eliminationstransformationen

...$\mathcal{K}$-optimale Transformationen eliminieren alle und ausschließlich $\mathcal{K}$-unnötige Anweisungen.

Definition 12.2.1.12 ($\mathcal{K}$-optimale Eliminationstr.)

1. Eine Eliminationstransformation $ET \in \mathcal{ET}$ heißt $\mathcal{K}$-optimal gdw ET ist korrekt und $\mathcal{K}$-vollständig:

$$\forall\, G \in \mathcal{G}.\ G \approx_{\mathcal{B}} G_{ET} \ \wedge\ \mathcal{U}^{A}_{G_{ET}} = \emptyset$$

2. Die Menge aller $\mathcal{K}$-optimalen Eliminationstransformationen wird mit $\mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-}opt}$ bezeichnet.

Besser als, best

Definition 12.2.1.13 (Bessere Eliminationstransf.)

Seien $ET, ET' \in \mathcal{ET}_{korr}$ zwei korrekte Eliminationstransformationen. Dann heißt ET mindestens so gut wie (oder besser als) ET' gdw für alle Programme G gilt: $N_{G_{ET}} \subseteq N_{G_{ET'}}$ und $E_{G_{ET}} \subseteq E_{G_{ET'}}$

Definition 12.2.1.14 (Beste Eliminationstransf.)

1. Eine korrekte Eliminationstransformation $ET \in \mathcal{ET}_{korr}$ heißt best gdw ET ist besser als jede andere zulässige Eliminationstransformation $ET' \in \mathcal{ET}_{korr}$.
2. Die Menge aller besten Eliminationstransformationen wird mit $\mathcal{ET}_{best}$ bezeichnet.

Best impliziert $\mathcal{K}$-optimal und umgekehrt

Lemma 12.2.1.15 ($\mathcal{K}$-Unnötigkeitsfreiheit)

Sei $ET \in \mathcal{ET}_{best}$ eine beste Eliminationstransformation. Dann gilt für alle Programme G, dass G_{ET} frei von $\mathcal{K}$-unnötigen Anweisungen ist:

$$\mathcal{U}^A_{G_{ET}} = \emptyset$$

Korollar 12.2.1.16 ($\mathcal{K}$-Optimalität)

Beste Eliminationstransformationen sind $\mathcal{K}$-optimal und umgekehrt:

$$\forall\, ET \in \mathcal{ET}.\; ET \in \mathcal{ET}_{best} \;\Leftrightarrow\; ET \in \mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-}opt}$$

Noch zu tun

...konkrete Angabe einer (Eliminations-) Transformation

$$OT : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

und der Nachweis:

$$OT \in \mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-}opt}$$

Arbeitsplan:

- Statische Erreichbarkeitsanalysen induzieren Eliminationstransformationen.
- Korrekte und vollständige Erreichbarkeitsanalysen induzieren $\mathcal{K}$-optimale Eliminationstransformationen.

Charakterisierung stat. unerreichbarer Knoten

Proposition 12.2.1.17 (Äquivalenz)

Sei $n \in N \backslash \{\mathbf{s}, \mathbf{e}\}$ ein Knoten. Dann sind äquivalent:

1. n ist statisch unerreichbar.
2. Alle in n eingehenden Kanten sind statisch unerreichbar.
3. Alle von n ausgehenden Kanten sind statisch unerreichbar.

Proposition 12.2.1.18 (Implikation)

Sei $n \in N$ ein Knoten. Dann gilt:

1. Ist n statisch unerreichbar, dann gilt $n \neq \mathbf{s}$.
2. Die Umkehrung von Teil 1) gilt nicht.

Proposition 12.2.1.19 (Speziell)

s ist statisch erreichbar.

Charakterisierung stat. unerreichbarer Kanten

Proposition 12.2.1.20 (Äquivalenz)

Sei $e \in E$ eine Kante. Dann sind äquivalent:

1. e ist statisch unerreichbar.
2. Der Anfangsknoten von e ist statisch unerreichbar.

Proposition 12.2.1.21 (Implikation)

Sei $e \in E$ eine Kante. Dann gilt:

1. Ist der Endknoten von e statisch unerreichbar, dann ist e statisch unerreichbar.
2. Die Umkehrung von Teil 1) gilt nicht.

Proposition 12.2.1.22 (Speziell)

Gilt $src(e) = \mathbf{s}$, so ist e statisch erreichbar.

Charakterisierung von Unnötigkeit

...durch statische Unerreichbarkeit.

Lemma 12.2.1.23 (Äquivalenz)

Seien $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Programm. Dann gilt:

1. Eine Anweisung α in G ist unnötig gdw α ist statisch unerreichbar.
2. Ein Knoten $n \in N$ ist unnötig gdw n ist statisch unerreichbar.
3. Eine Kante $e \in E$ ist unnötig gdw e ist statisch unerreichbar.

Korollar 12.2.1.24 (Unnötige Knoten, Kanten)

1. Ein statisch unerreichbarer Knoten ist unnötig.
2. Eine statisch unerreichbare Kante ist unnötig.

Korrekte, vollständige Erreichbarkeitsanalysen

Definition 12.2.1.25 (Erreichbarkeitsanalyse)

Eine Analyse, die angewendet auf ein Programm $G = (N, E, \mathbf{s})$ einige Knoten und Kanten als erreichbar markiert, heißt Erreichbarkeitsanalyse.

Definition 12.2.1.26 (Korrekte Erreichb.-Analyse)

Eine Erreichbarkeitsanalyse *EA* heißt korrekt gdw ein Knoten oder eine Kante von *EA* als erreichbar gekennzeichnet worden ist, dann ist dieser Knoten oder Kante statisch erreichbar.

Definition 12.2.1.27 (Vollständige Erreichb.-Analyse)

Eine Erreichbarkeitsanalyse *EA* heißt vollständig gdw ein Knoten oder eine Kante statisch erreichbar ist, dann ist dieser Knoten oder Kante von *EA* als erreichbar gekennzeichnet worden.

Optimale Erreichbarkeitsanalysen

Definition 12.2.1.28 (Optimale Erreichb.-Analyse)

Eine Erreichbarkeitsanalyse *EA* heißt optimal gdw *EA* korrekt und vollständig ist.

Korollar 12.2.1.29 (Statische Unerreichbarkeit)

Sei *EA* eine optimale Erreichbarkeitsanalyse. Dann gilt: Ein Knoten oder eine Kante ist statisch unerreichbar gdw dieser Knoten bzw. Kante von *EA* nicht als erreichbar markiert worden ist.

Induzierte Eliminationstransformation

...einer Erreichbarkeitsanalyse.

Definition 12.2.1.30 (Induzierte Eliminationstransf.)

Eine Erreichbarkeitsanalyse EA induziert eine Eliminationstransformation ET_{EA}, die angewendet auf ein Programm G alle Knoten und Kanten in G streicht, die von EA nicht als erreichbar markiert worden sind.

Optimale Erreichbarkeitsanalyse O_{EA}

...ohne die Analyse im Detail auszuführen, ist offensichtlich, dass wir eine Erreichbarkeitsanalyse O_{EA} so realisieren können, dass für O_{EA} gilt:

Lemma 12.2.1.31 (Optimalität von O_{EA})

O_{EA} ist optimal, d.h. O_{EA} ist korrekt und vollständig.

Optimierungstransformation OT

...zur Elimination unnötiger Anweisungen.

Definition 12.2.1.32 (Optimierung)

Das Optimierungsverfahren zur Elimination $\mathcal{K}$-unnötiger Anweisungen besteht aus zwei Stufen:

- Analysestufe: Erreichbarkeitsanalyse in Graphen mittels einer Erreichbarkeitsanalyse O_{EA}, O_{EA} optimal.
- Transformationsstufe: Die von O_{EA} induzierte Eliminationstransformation $ET_{O_{EA}}$, die alle von O_{EA} nicht als erreichbar erkannten Knoten und Kanten streicht.

Die Optimierung aus Analyse- und Transformationsstufe werde mit

$$OT =_{df} ET_{O_{EA}}$$

bezeichnet.

Korrektheit, Vollständigkeit, Optimalität

...von OT zur Elimination $\mathcal{K}$-unnötiger Anweisungen.

Lemma 12.2.1.33 (Korrektheit)

OT ist

1. korrekt ($OT \in \mathcal{ET}_{korr}$).
2. vollständig ($OT \in \mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-}vollst}$).
3. best ($OT \in \mathcal{ET}_{best}$ $(= \mathcal{ET}_{korr} \cap \mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-}vollst})$).

Korollar 12.2.1.34 (Optimalität)

OT ist $\mathcal{K}$-optimal ($OT \in \mathcal{ET}_{\mathcal{K}\text{-}opt}$ $(= \mathcal{ET}_{best})$).

Übungsaufgabe

...Beobachtungs- und äquivalent dazu Streichäquivalenz erhalten die Semantik nicht nur im Aufsammelsinn, sondern pfadweise (oder pfadgenau).

Zeige: Zwei Programme G und G' sind streichäquivalent gdw G und G' beschreiben pfadweise dieselbe Zustandstransformation:

$$G \approx_{[\![\,]\!]} G' \text{ gdw}$$

1. $\forall \in N_G \cap N_{G'}.\ \forall\, p \in \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n) \cup \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n]\, \forall \sigma \in \Sigma.$
$$[\![\, p \,]\!]_G(\sigma) = [\![\, p' \,]\!]_{G'}(\sigma)$$
2. $\forall \in N_G \setminus N_{G'}.\ \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n) = \emptyset = \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n]$
3. $\forall \in N_{G'} \setminus N_G.\ \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, n) = \emptyset = \mathbf{P}_{G'}[\mathbf{s}, n]$

wobei p und p' sich entsprechende Pfade in G und G' sind.

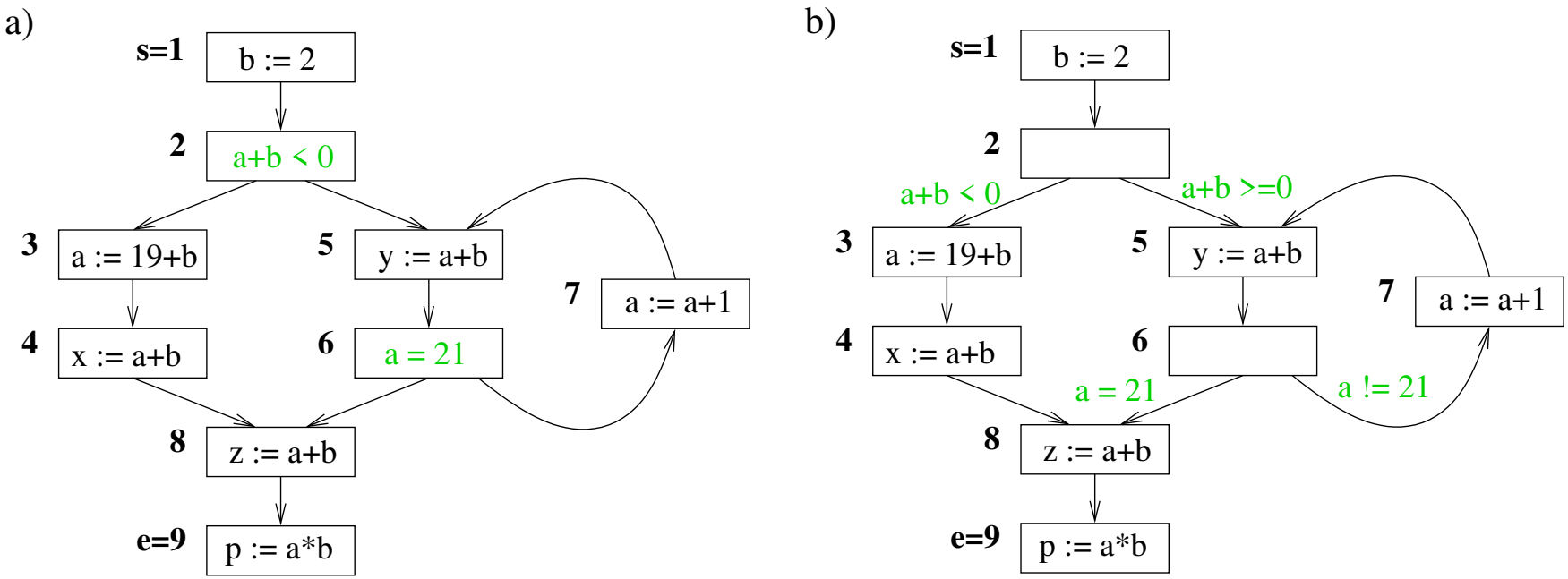
Kapitel 12.2.2

Dynamisch unerreichbare Anweisungen

Informell

...ein Knoten $n \in N$ ist dynamisch unerreichbar gdw n von einer mit einer Bedingung $b \in \mathbf{Bexpr}$ benannten Kante $e \in E$ dominiert wird, die nie erfüllt ist, d.h. für 'keinen an e möglichen Programmzustand wahr' ist, d.h.:

$$\forall \sigma \in \Sigma.\ [\![b]\!]_B([\![src(e)]\!]_{\text{WHILE}}(\sigma)) = \mathbf{falsch}$$



Dynamisch unerreichbare Anweisungen

...eine 'semantische' Eigenschaft.

Definition 12.2.2.1 (Dynamisch unerreichbare Anw.)

Eine Anweisung α am Knoten $n \in N$ in G ist dynamisch unerreichbar gdw n (und damit α) dynamisch unerreichbar ist.

Aus der Unentscheidbarkeit des Konstantenproblems (s. Kapitel 7.10.2, `if x=0 then ... else ... fi`) folgt unmittelbar:

Lemma 12.2.2.2 (Unentscheidbarkeit)

Dynamische Unerreichbarkeit von Anweisungen ist unentscheidbar.

Entscheidbare Teilklassen dyn. Unerreichbark.

...Lemma 12.2.2.2 erfordert es eingeschränkte entscheidbare Klassen $\mathcal{K}$ dynamisch unerreichbarer Anweisungen α zu identifizieren, für die gilt:

> Ist α $\mathcal{K}$-unerreichbar, dann ist α dynamisch unerreichbar.

Die Identifikation möglicher Kandidaten für entscheidbare Klassen $\mathcal{K}$ kann an entscheidbaren Teilklassen des Konstantenproblems ansetzen:

Eine Anweisung α am Knoten n mit einer mit b benannten dominierenden Bedingungskante e ist

- $\mathcal{K}_{einfK}$-unerreichbar, wenn b eine einfache Konstante
- $\mathcal{K}_{endlK}$-unerreichbar, wenn b eine endliche Konstante
- $\mathcal{K}_{polyK}$-unerreichbar, wenn b eine polynomiale Konstante
- ...

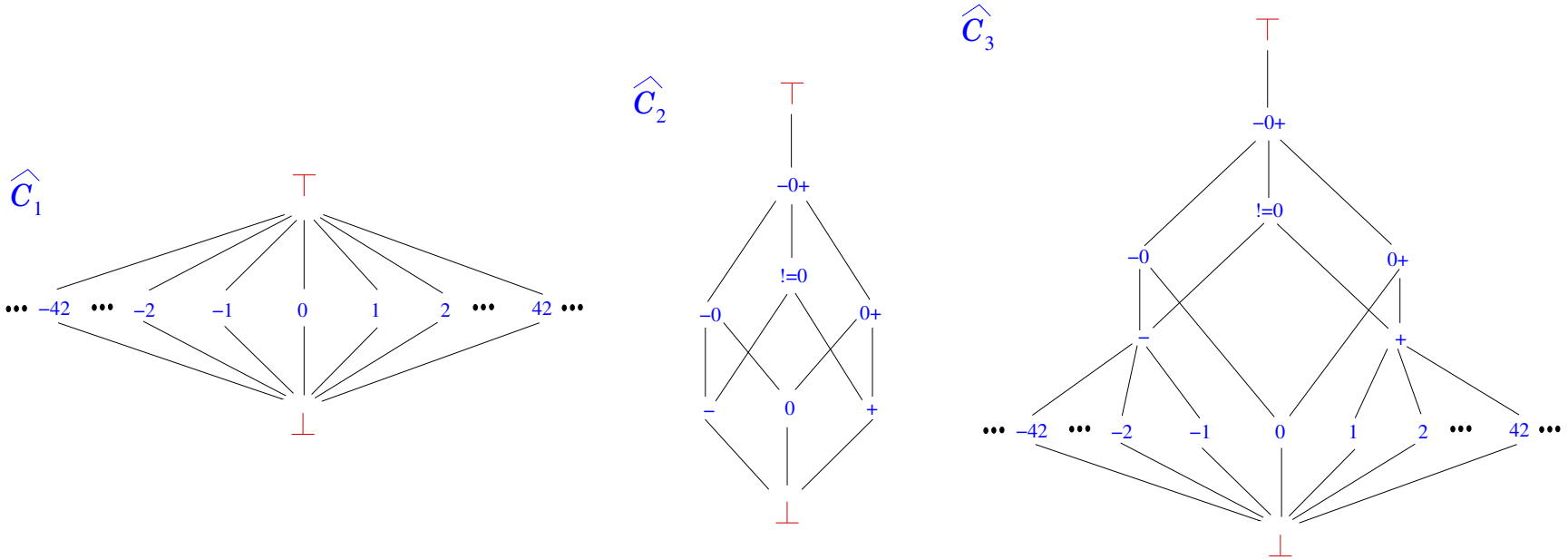
vom Wert **wahr** ist.

Übungsaufgabe

Führe die Idee der $\mathcal{K}$-Unerreichbarkeit von Anweisungen nach dem Vorbild statisch unerreichbarer Anweisungen aus Kapitel 12.2.1 im Detail für Konstanten- oder/und Vorzeichenanalysen über folgenden (Grund-) Verbänden und Zustandsmengen

$$\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \to \mathcal{C}_i\},\ i \in \{1,2,3\}$$

aus:



Kapitel 12.2.3

Senken, Sackgassen und schwarze Löcher

Senken, Sackgassen, schwarze Löcher (1)

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Programm.

Definition 12.2.3.1 (Statisch liegen in)

Ein Knoten $n \in N$ liegt statisch in

- einer Senke gdw $\mathbf{e}$ ist auf keinem Pfad von n aus erreichbar, d.h. wenn: $\mathbf{P}_G[n, \mathbf{e}] = \emptyset$.
- einem schwarzen Loch gdw n liegt statisch in einer Senke und es gilt: $\bigcup_{m \in N} \{\mathbf{P}_G[n, m]\}$ ist unendlich.
- einer Sackgasse gdw n liegt statisch in einer Senke und es gilt: $\bigcup_{m \in N} \{\mathbf{P}_G[n, m]\}$ ist endlich.

Senken, Sackgassen, schwarze Löcher (2)

Definition 12.2.3.2 (Statische Senken, etc.)

- Eine statische Senke ist eine Menge von Knoten, die statisch in einer Senke liegen.
- Ein statisches schwarzes Loch ist eine Menge von Knoten, die statisch in einem schwarzen Loch liegen.
- Eine statische Sackgasse ist eine Menge von Knoten, die statisch in einer Sackgasse liegen.

Wir bezeichen mit N_G^{st-S}, N_G^{st-sL} und N_G^{st-Sg} die Mengen aller Knoten eines Programms G, die in einer statischen Senke, einem statischen schwarzen Loch bzw. einer statischen Sackgasse von G liegen.

Eigensch. v. Senken, Sackg., schw. Löchern (1)

Es ist leicht einzusehen:

Proposition 12.2.3.3

Liegt $n \in N$ in

1. einer statischen Senke, so kann n statisch erreichbar sein oder nicht.
2. einem statischen schwarzen Loch, so
   - 2.1 ist von n aus ein Knoten m erreichbar, der in einer Schleife liegt, d.h.: $\mathbf{P}_G[n, m] \neq \emptyset$ und $\mathbf{P}_G[m, m]$ unendlich.
   - 2.2 sind fast alle (d.h. bis auf endlich viele) von n ausgehenden Pfade unendlich lang.
3. einer statischen Sackgasse, so ist jeder von n ausgehende Pfad endlich lang.

Eigensch. v. Senken, Sackg., schw. Löchern (2)

Proposition 12.2.3.4

Die Knotenmengen statischer schwarzer Löcher und Sackgassen $N_G^{st\text{-}sL}$ und $N_G^{st\text{-}Sg}$ partitionieren die Knotenmenge $N_G^{st\text{-}S}$ statischer Senken eines Programms G, d.h.:

$$N_G^{st\text{-}S} = N_G^{stsL} \dot{\cup} N_G^{st\text{-}Sg}$$

Rückbetrachtung

...unserer Generalvereinbarung (oder Generalvoraussetzung) für Programme $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ aus Kapitel 7:

- Jeder Knoten $n \in N$ liegt auf einem Pfad von **s** nach **e**

unter den Aspekten

- Erhaltung von Semantik
- Gewährleistung von Beobachtungsäquivalenz

bezüglich des möglicherweise nötigen Streichens von Knoten und Kanten zur Etablierung der Generalvoraussetzung für ein Programm.

Zerlegung der Generalvorauss. für Programme

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Programm. Dann gilt:

Proposition 12.2.3.5

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. G erfüllt die Generalvoraussetzung.
2. $\forall\, n \in N.\ \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, n] \neq \emptyset \wedge \mathbf{P}_G[n, \mathbf{e}] \neq \emptyset$

D.h.: Für Programme gemäß der Generalvoraussetzung gilt:

Korollar 12.2.3.6

G erfüllt die Generalvoraussetzung gdw:

1. Alle Knoten in G sind statisch erreichbar.
2. Kein Knoten von G liegt in einer statischen Senke.

Zusicherbarkeit der Generalvoraussetzung

...offenbar ist es leicht möglich, jedes Programm (oder Flussgraphen) $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ so zu transformieren, dass die Generalvoraussetzung erfüllt ist:

Elimination

- statisch unerreichbarer Knoten: Siehe Kapitel 12.2.1.
- der Knoten statischer Senken: Anwendung des Konzepts statischer Unerreichbarkeit aus Kapitel 12.2.1 auf den reversen Flussgraphen $G_{rev} = (N, E_{rev}, \mathbf{e}, \mathbf{s})$ von G mit

$$E_{rev} =_{df} \{(n, m) \mid (m, n) \in E\}$$

OBdA kann deshalb angenommen werden, dass die Generalvoraussetzung von allen Programmen erfüllt ist.

Allerdings

...die Konzepte statisch unerreichbarer Knoten und von Knoten statischer Senken addressieren unterschiedliche Konzepte von Unnötigkeit von Anweisungen:

1. Unnötig, weil statisch nicht erreichbar (und damit definitiv unausführbar zur Laufzeit des Programms).
2. Unnötig, weil in statischer Sackgasse oder schwarzem Loch gefangen (und damit definitiv unausführbar zur Laufzeit des Programms im Zuge einer regulär am Endknoten terminierenden Ausführung).

Daraus folgt

...die Elimination von Anweisungen

- statisch unerreichbarer Knoten erhält jede (vernünftige) Form von Programmsemantik und gewährleistet jede (vernünftige) Form von Beobachtungsäquivalenz bei Streichen solcher Knoten und inzidierender Kanten.

Für die Elimination von Anweisungen

- in statischen Senken gilt dies nur für Laufzeitausführungen des Programms entlang von Pfaden in $\mathbf{P}_G[\mathbf{s}, \mathbf{e}]$.

Sackgassen und schwarze Löcher

...können 'Licht' emittieren.

Enthalten Knoten in dynamisch erreichbaren statischen Senken Ausgabeanweisungen, so terminieren entsprechende Laufzeitausführungen zwar nie regulär am Endknoten des Programms, aber erzeugen (möglicherweise sogar unendlich viel)

- beobachtbares Verhalten.

Das Streichen von Knoten (und damit Anweisungen) in statischen Senken ist damit anders als das Streichen statisch unerreichbarer Knoten (und damit Anweisungen)

- willkürlich

und eine (hoffentlich)

- bewusste Designentscheidung.

Ob die Designentscheidung

...für das Streichen von Senken und damit die Außerachtlassung nicht regulär terminierender Ausführungen zur Sicherstellung des zweiten Teils der Generalvoraussetzung für Programme aus Kapitel 7 unter den Aspekten Erhaltung von Semantik und Beobachtungsäquivalenz gerechtfertigt ist, kann einzig im Anwendungskontext begründet sein. Vergleiche z.B.:

- Semi-Entscheidungsverfahren (möglicherweise gerechtfertigt).

und

- Steuerungsprogramme reaktiver Systeme (vermutlich nicht oder nie gerechtfertigt).

Zu guter Letzt: In Programmen ohne goto-Anweisung ist die Existenz statischer Senken ein Indikator fehlerhafter Flussgraphkonstruktion und sollte Anlass einer Fehlermeldung sein.

Übungsaufgabe

Analog zu dynamisch unerreichbaren Anweisungen gibt es dynamisch unerreichbare Sackgassen und schwarze Löcher.

1. Übertrage die Konzepte und Überlegungen für statisch unerreichbare Sackgassen und schwarze Löcher auf ihre dynamischen Gegenstücke und arbeite sie aus. Was gilt weiterhin? Was stellt sich möglicherweise anders dar?
2. Was gilt für die Entscheidbarkeit dynamischer Sackgassen und schwarzer Löcher?
3. Welches Vorgehen oder welche Methoden bieten sich zur korrekten approximativen Berechnung dynamischer Sackgassen und schwarzer Löcher an?
4. Arbeite eine dieser Methoden in größerem Detail aus.

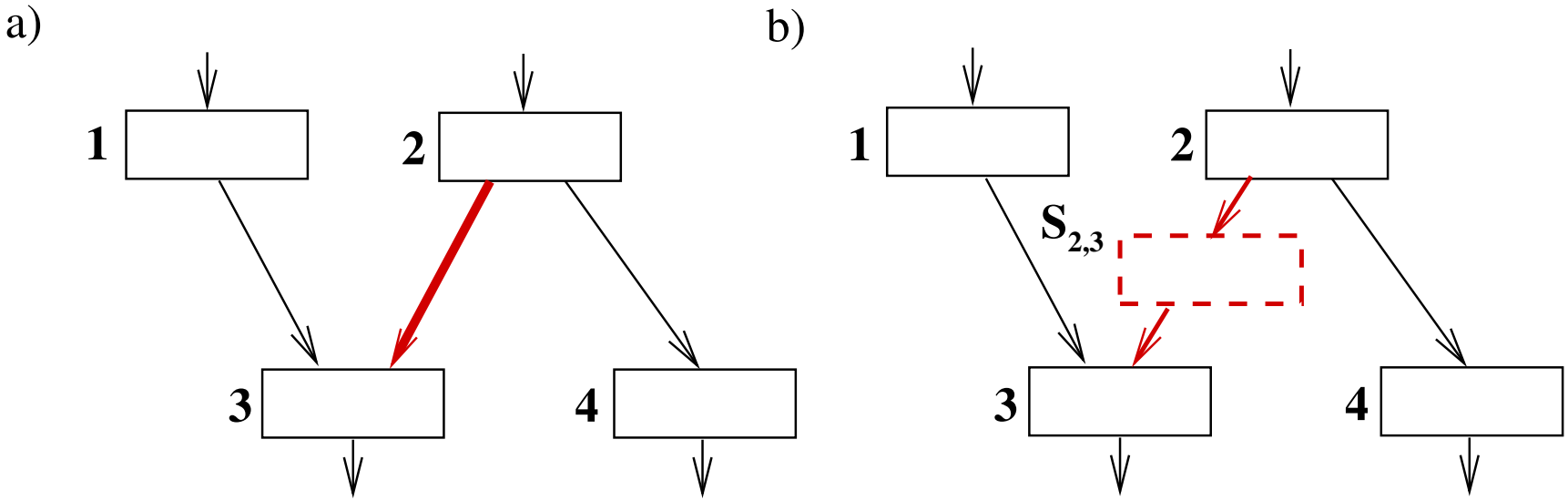
Kapitel 12.3

Partiell tote und geisterhafte Anweisungen

Kritische Kanten

Definition 12.3.1 (Kritische Kanten)

Eine Kante heißt kritisch gdw sie von einem Knoten mit mehr als einem Nachfolger zu einem Knoten mit mehr als einem Vorgänger führt (s. Abb. a)).



...kritische Kanten können durch Spalten und Einfügen eines sog. synthetischen Knotens beseitigt werden (s. Abb. b)).

Illustration: Kritische Kanten (1)

...können die Elimination unnötiger Anweisungen verhindern:

- Abb. a): Der Wert von x aus der Zuweisung in Knoten 2 wird nur für Programmfortsetzungen über Knoten 3 benötigt, nicht über Knoten 4.
- Abb. b) und c): Beide Transformationen verändern das beobachtbare Verhalten und sind daher nicht korrekt.

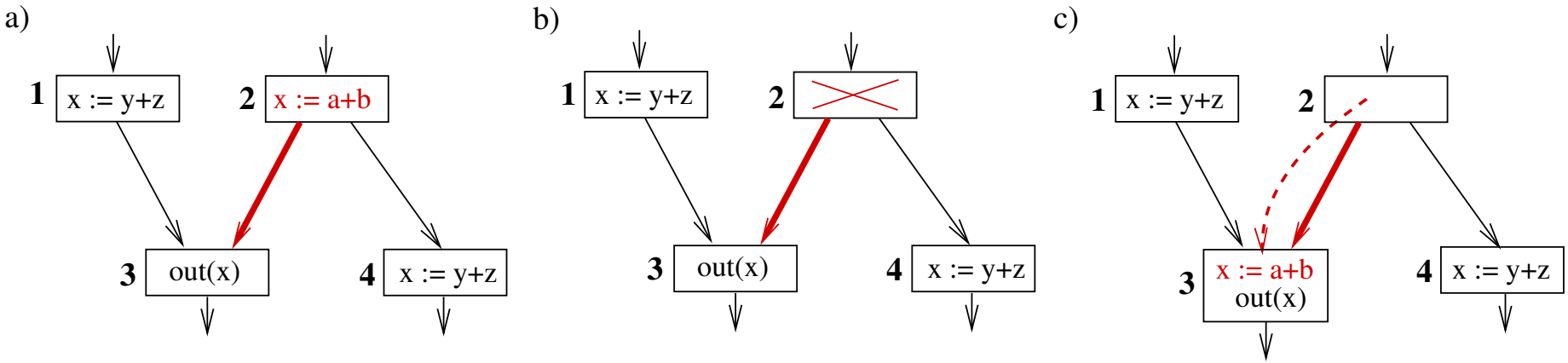
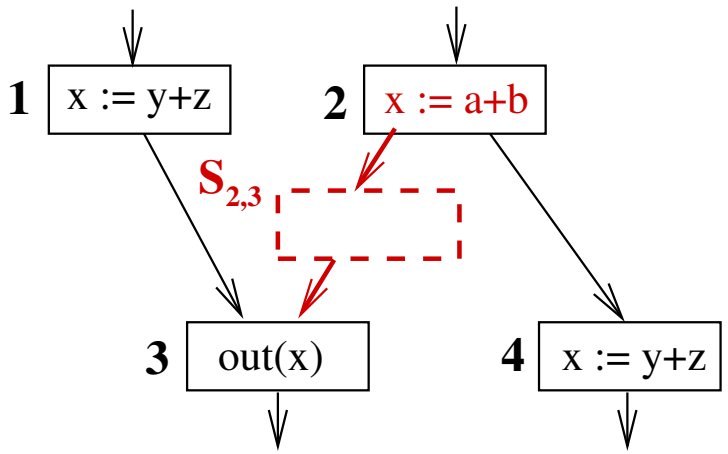


Illustration: Kritische Kanten (2)

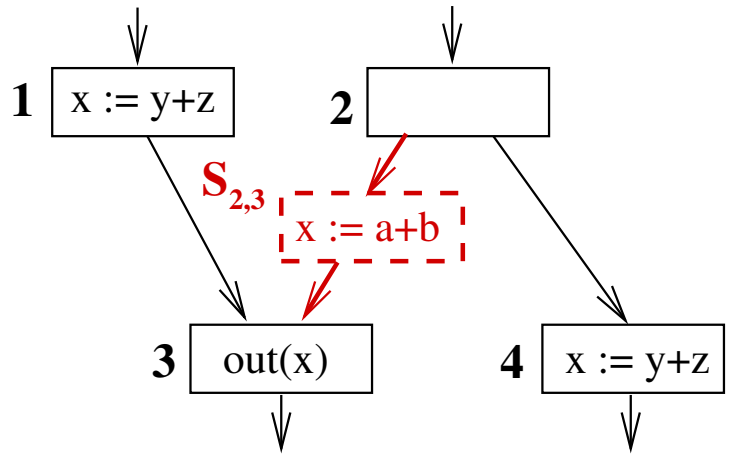
Spalten kritischer Kanten:

- Abb. a): Die kritische Kante wird durch Einfügen des synthetischen Knotens $S_{2,3}$ gespalten und beseitigt.
- Abb. b): Die Transformation verbessert die Performanz, ohne das beobachtbare Verhalten zu verändern.

a)

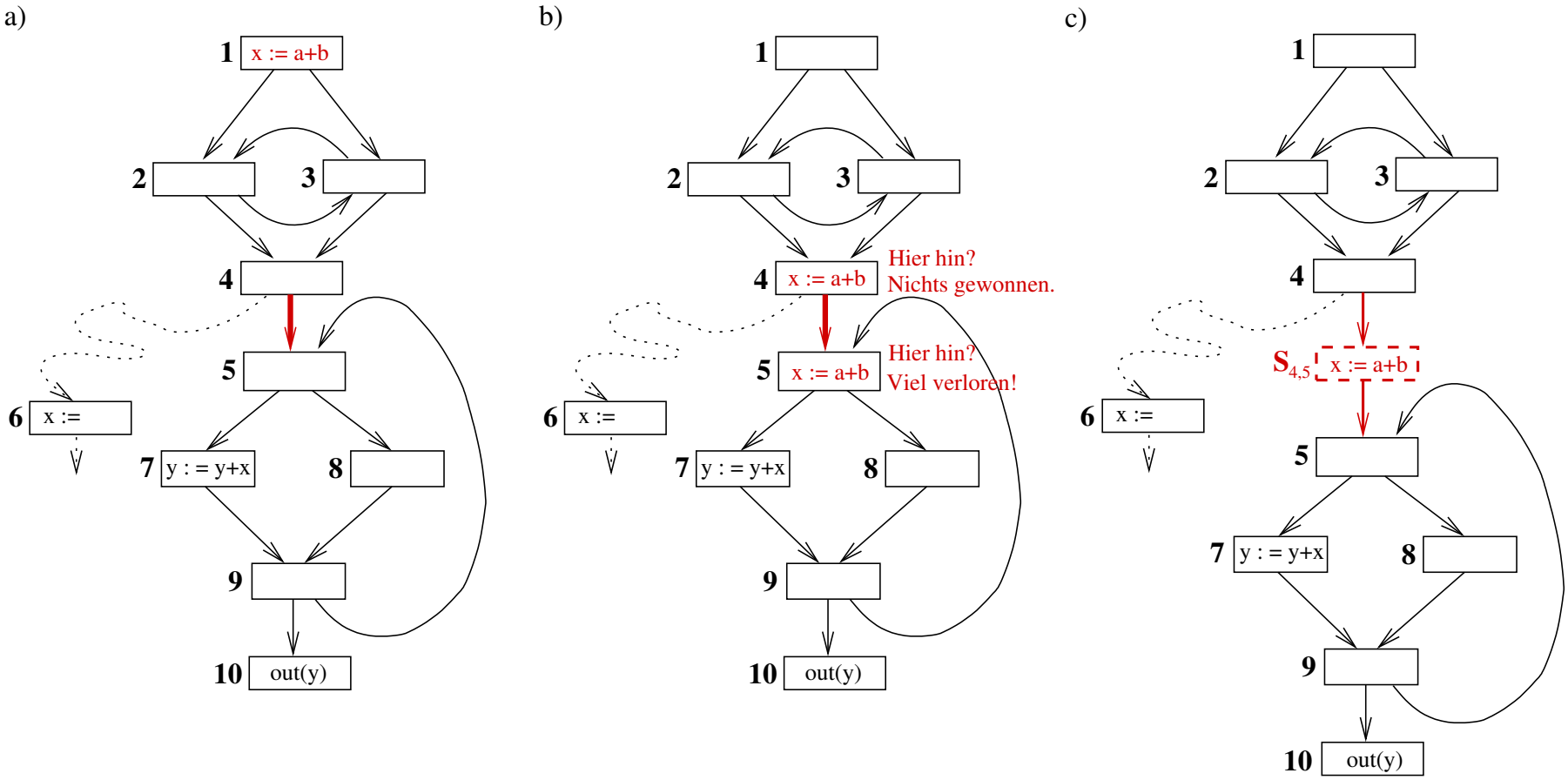


b)



Beachte: Die performanzverbessernde Transformation wird erst durch das Spalten der kritischen Kante möglich.

Kritische Kanten in einem größeren Beispiel



...auch hier ist performanzverbessernde Transformation erst durch das Spalten der kritischen Kante möglich.

Vereinbarung zu kritischen Kanten

...um bestmögliche Transformationsresultate zu ermöglichen, insbesondere garantieren zu können, niemals Anweisungen in Schleifen zu verschieben, nehmen wir an, dass jede

- kritische Kante

in einem Flussgraphen durch Einfügen eines (synthetischen) Knotens gespalten und dadurch beseitigt ist.

Zusatzvereinbarungen für Flussgraphen

...für Kapitel 12.3 (und 12.4).

Für jeden Flussgraphen $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e}) \in \mathcal{G}$ gilt:

- $\mathbf{s} \in N$ hat keine Vorgänger: $pred(\mathbf{s}) = \emptyset$
- $\mathbf{e} \in N$ hat keine Nachfolger: $succ(\mathbf{e}) = \emptyset$
- Jeder Knoten $n \in N$
  - liegt auf einem Pfad von $\mathbf{s}$ nach $\mathbf{e}$.
  - ist mit einer Instruktion (Zuweisung, Schreibanweisung, Bedingung) benannt (keine Basisblöcke).
- Keine Kante ist kritisch.

$\mathbf{s}$ und $\mathbf{e}$ bezeichnen als Start- und Endknoten ausgezeichnete Knoten in G.

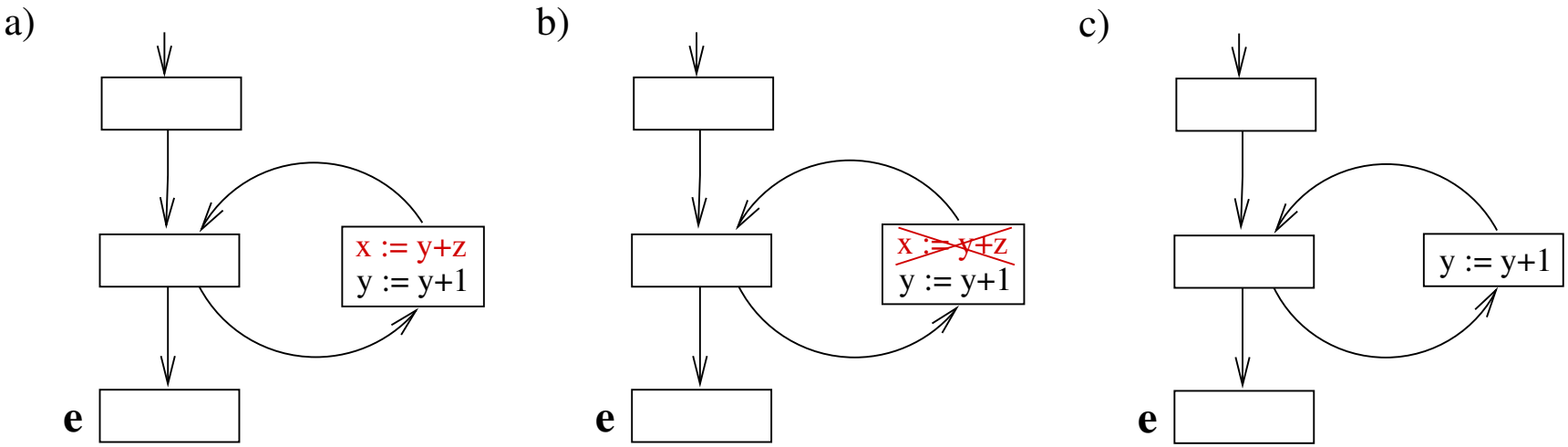
Kapitel 12.3.1

Motivation

Tote Anweisungen

...und ihre Elimination.

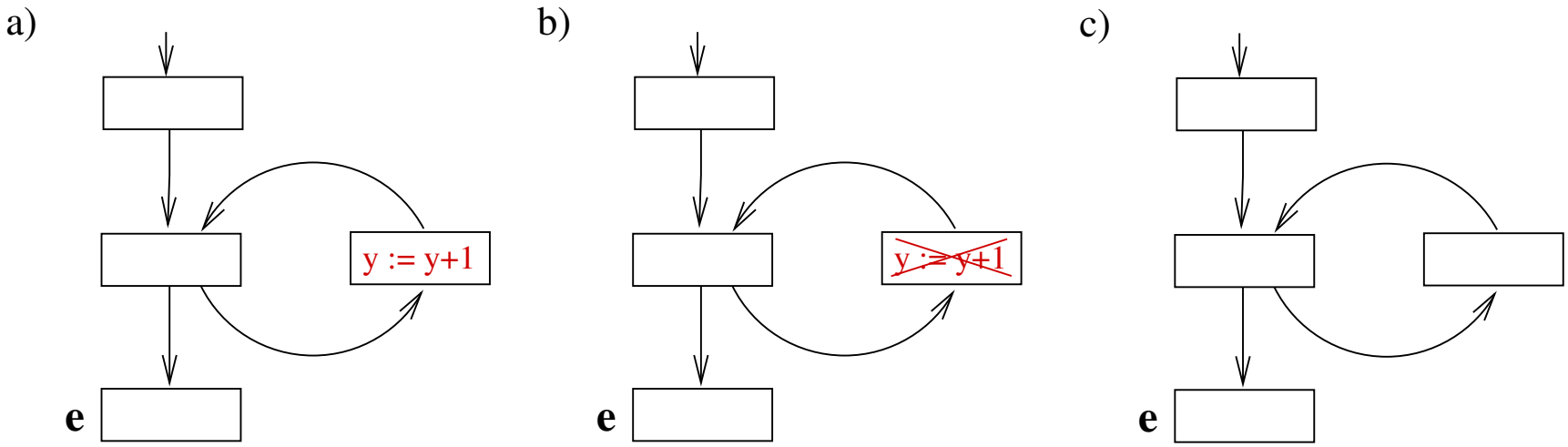
Das Grundmuster: Die Anweisung `x := y+z` ist tot (oder total tot) (engl. (totally) dead): `x` zugewiesene Werte werden an keiner Stelle im Programm gelesen.



Geisterhafte Anweisungen

.....und ihre Elimination.

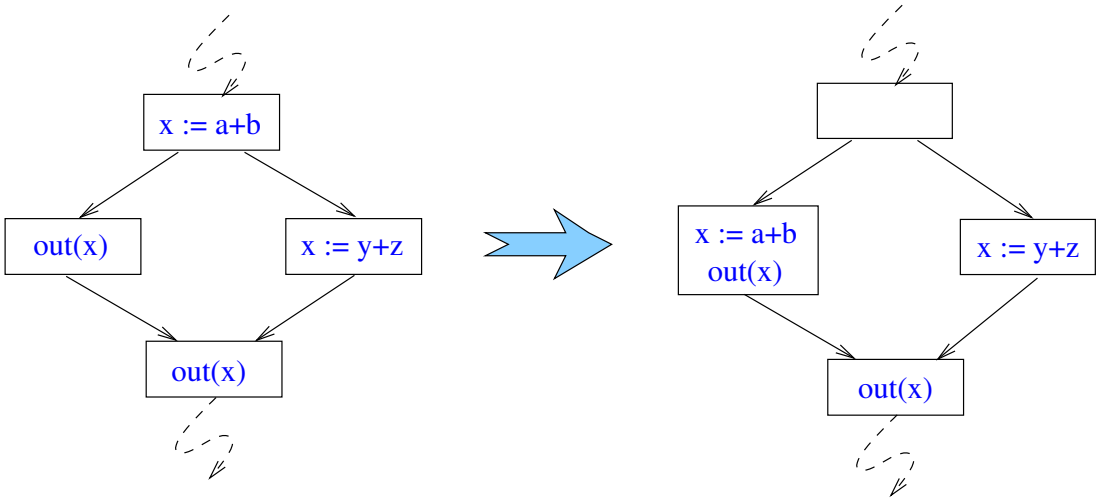
Das Grundmuster: Die Anweisung y := y+1 ist nicht tot, sondern lebendig (engl. live), aber geisterhaft (engl. faint): y zugewiesene Werte beeinflussen weder direkt noch indirekt Ausgabe- oder Bedingungswerte (und damit das beobachtbare Programmverhalten).



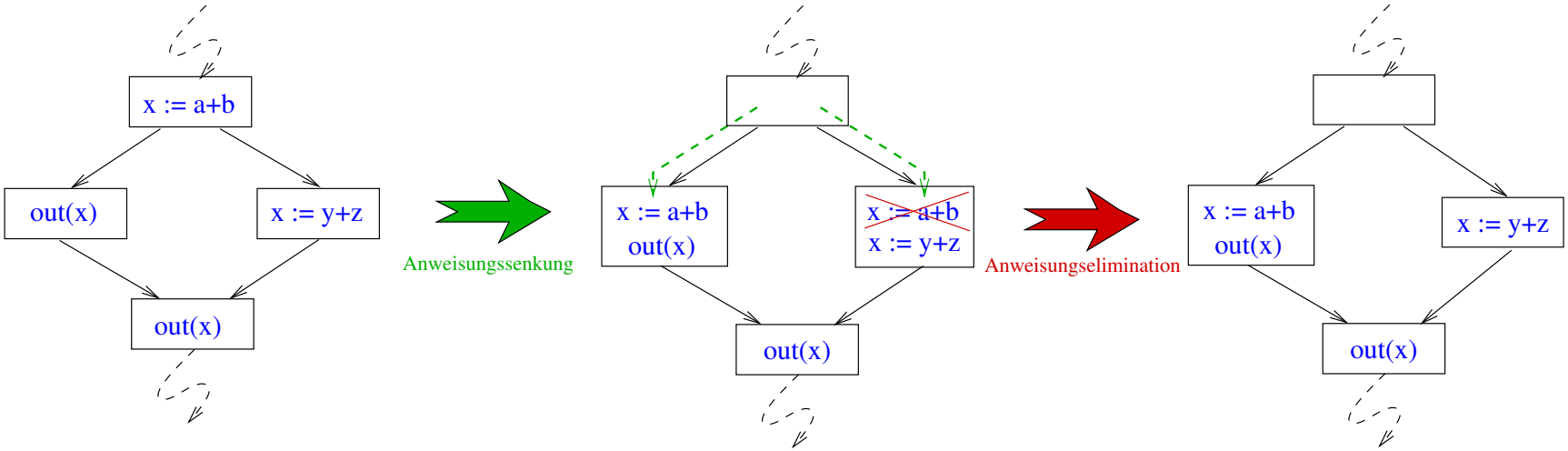
Partiell tote Anweisungen

...und ihre Elimination.

Das Grundmuster:



Die konzeptuelle Verfahrensidee:

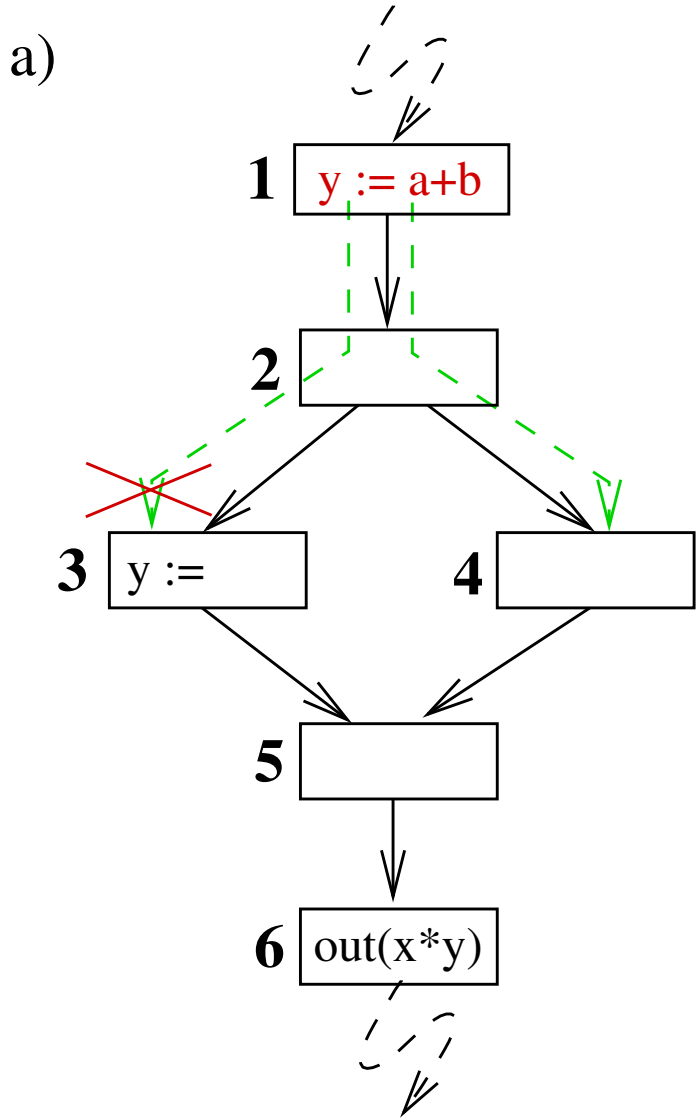


Kapitel 12.3.2

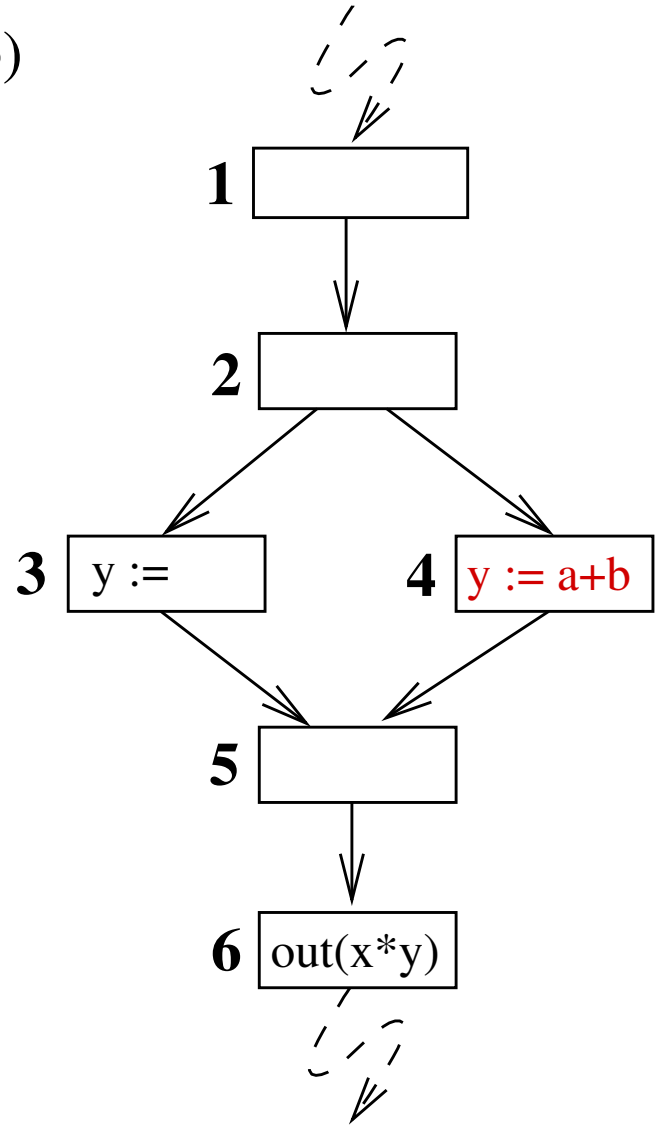
Beispiele

Bsp. 1: Elimination partiell toter Anweisungen

Ausgangsprogramm:

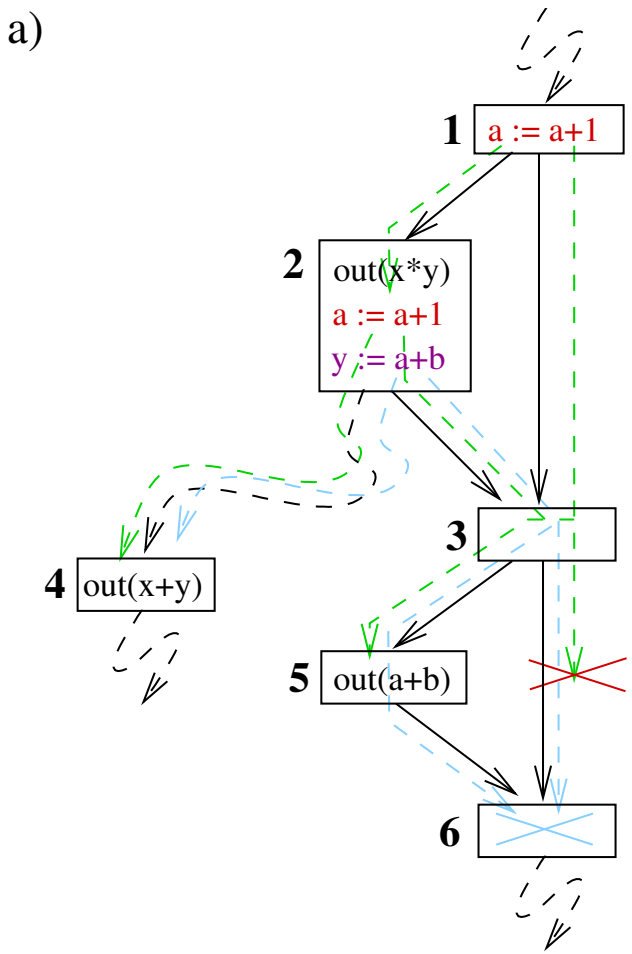


Optimiertes Programm:

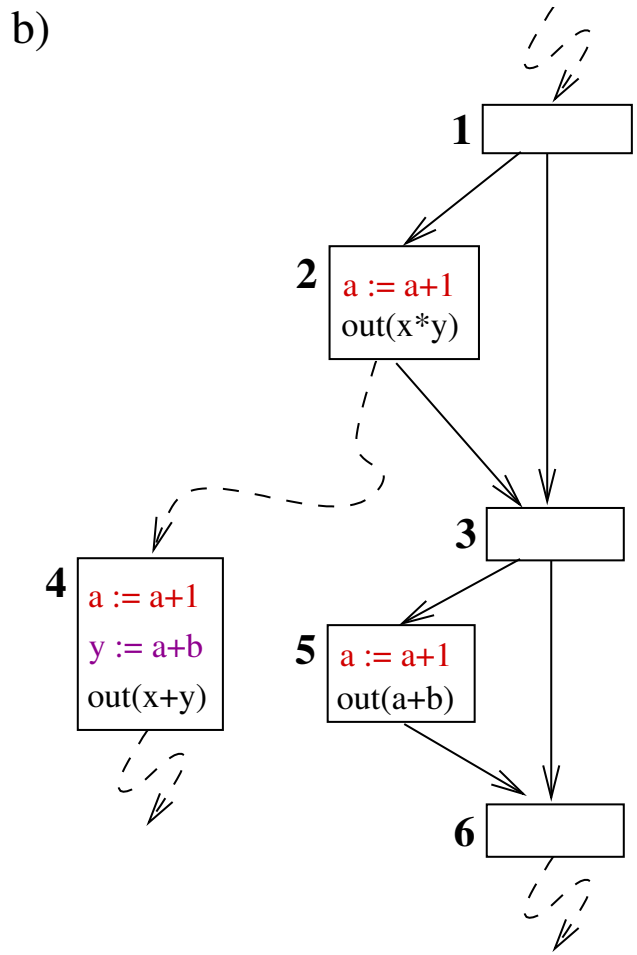


Bsp. 2: Elimination partiell toter Anweisungen

Ausgangsprogramm:



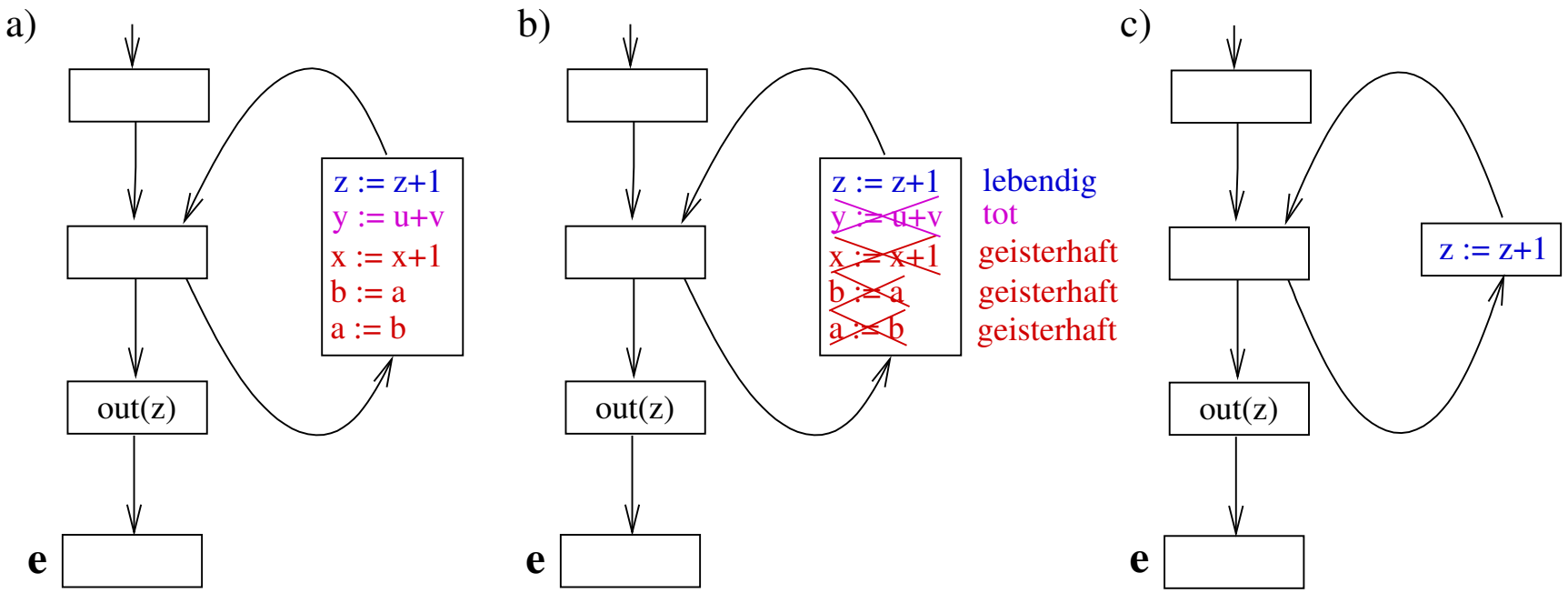
Optimiertes Programm:



...ist i.a. eine 'm2n'-Transformation (hier für $\alpha \equiv a := a + 1$).

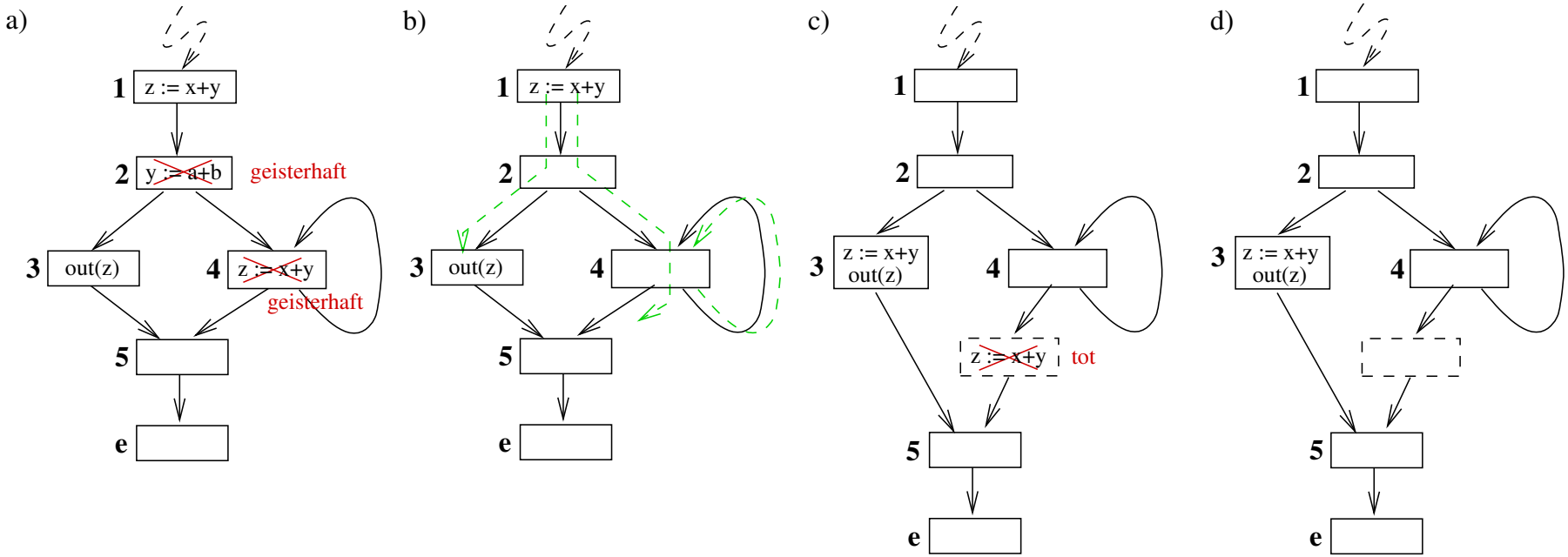
Bsp. 3: Elimination geisterhafter Anweisungen

Ausgangsprogramm:



Bsp. 4: Elimination geisterhafter Anweisungen

Ausgangs-Prg.: Geisteranw.-Elim.: Anw.-Senkung: Elim. toter Anw.:



Anmerkung

...'echt' partiell geisterhafte Anweisungen gibt es nicht:

Anweisungen, die auf

- jeder Programmfortsetzung geisterhaft oder tot sind, sind geisterhaft.
- mindestens einer Programmfortsetzung weder geisterhaft noch tot sind, sind lebendig (nicht 'partiell geisterhaft').

Die Elimination geisterhafter Anweisungen

- kann aber durch die Beseitigung von Senkungsblockaden die Elimination weiterer partiell toter Anweisungen ermöglichen.

In diesem Sinne ist hier

- Elimination partiell geisterhafter Anweisungen

zu verstehen (s. Bsp. 3)).

Elimination partiell toter/geisterhafter Anw.

...zwei verschiedene (Optimierungs-) Transformationen:

- EPTA: Elimination partiell toter Anweisungen
  $\rightsquigarrow$ Partial Dead-Code Elimination (PDCE)
- EPGA: Elimination partiell geisterhafter Anweisungen
  $\rightsquigarrow$ Partial Faint-Code Elimination (PFCE)

als Wiederholung von 3 Elementartransformationen:

- ETA: Elimination toter Anweisungen
  $\rightsquigarrow$ Dead-Code Elimination (DCE)
- EGA: Elimination geisterhafter Anweisungen
  $\rightsquigarrow$ Faint-Code Elimination (FCE)
- AS: Anweisungssenkungen
  $\rightsquigarrow$ Assignment Sinking (AS)

wobei AS-Schritte (immer wieder) Potential für E-Schritte schaffen (sog. Effekte 2. Ordnung).

Kapitel 12.3.3

Elementartransformationen

Tote und geisterhafte Anweisungen

Definition 12.3.3.1 (Tote Anweisung)

Eine Anweisung $x := t$ am Knoten n ist tot gdw auf jeder Programmfortsetzung bis zum Endknoten gilt:

- x wird nicht gelesen oder
- dem ersten Lesen von x geht ein Schreiben von x voraus.

Definition 12.3.3.2 (Geisterhafte Anweisung)

Eine Anweisung $x := t$ am Knoten n ist geisterhaft gdw auf jeder Programmfortsetzung bis zum Endknoten gilt:

- x wird nicht gelesen oder
- dem ersten Lesen von x geht ein Schreiben von x voraus oder
- x wird rechtsseitig in einer selbst geisterhaften Anweisung gelesen.

Tot impliziert geisterhaft

Proposition 12.3.3.3

Tote Anweisungen sind geisterhaft.

Beachte: Die Umkehrung von Proposition 12.3.3.3 gilt i.a. nicht.

Anweisungseliminationen

Definition 12.3.3.4 (Anweisungselimination)

Eine Programmtransformation, die einige Anweisungen aus dem Programm streicht, heißt Anweisungselimination (engl. code elimination).

Definition 12.3.3.5 (t/g-Anweisungselimination)

Eine Anweisungselimination, die einige

1. tote Anweisungen aus dem Programm streicht, heißt t-Anweisungselimination (engl. dead-code elimination).
2. geisterhafte Anweisungen aus dem Programm streicht, heißt g-Anweisungselimination (engl. faint-code elimination).

Definition 12.3.3.6 (Korrekte Anweisungselim.)

Eine Anweisungselimination ist korrekt, wenn sie eine t- oder g-Anweisungselimination ist.

Anweisungssenkungen

Definition 12.3.3.7 (Anweisungssenkung)

Eine Anweisungssenkung für ein Anweisungsmuster $\alpha \equiv x := t$ (oder α-Anweisungssenkung) ist das simultane stetige Verschieben eines oder mehrerer Vorkommen von α in Richtung des Kontrollflusses zu einem oder mehreren anderen Knoten.

Definition 12.3.3.8 (Korrekte Anweisungssenkung)

Eine α-Anweisungssenkung, $\alpha \equiv x := t$, ist korrekt, wenn während des Schiebens zu jedem Zeitpunkt gilt:

- Kein α-Vorkommen wird über eine Anweisung hinweggeschoben, die x liest oder modifiziert oder einen Operanden von t modifiziert (und α dadurch blockiert).
- Kein α-Vorkommen wird in einen Zusammenflussknoten geschoben, wenn dies nicht von jedem Vorgänger des Zusammenflussknotens aus geschieht.

Sprechweisen und Bezeichnungen

Definition 12.3.3.9 (Blockiert)

Ein Anweisung α der Form $x := t$ ist von einer Anweisung α' senkungsblockiert (oder blockiert), wenn α'

- Variable x
  - liest ($\alpha' \equiv \ldots := \ldots x \ldots$) oder
  - modifiziert ($\alpha' \equiv x := \ldots$) oder einen
- Operanden von t modifiziert ($\alpha' \equiv y := \ldots$, $t \equiv \ldots y \ldots$).

Kapitel 12.3.4

Effekte zweiter Ordnung

Effekte zweiter Ordnung

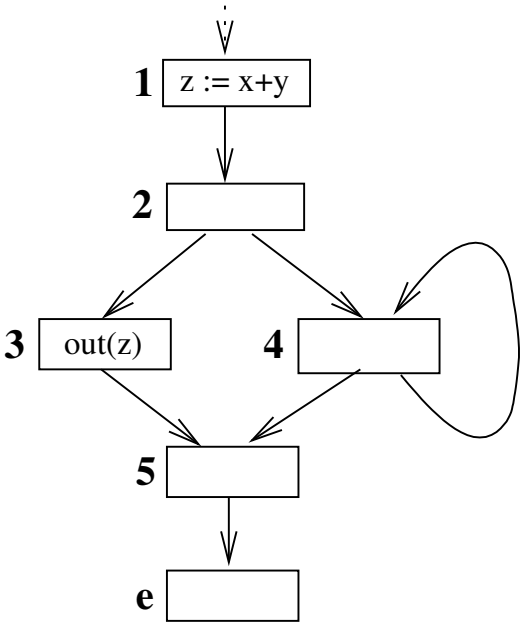
...(engl. second-order effects) treten in 4 Formen auf und sind essentiell für die kombinierte Wirkung der Elementartransformationen von EPTA und EPGA:

1. Senkungs-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)
   $\rightsquigarrow$ Sinking-elimination effects
2. Senkungs-Senkungs-Effekte (Potentialeffekt)
   $\rightsquigarrow$ Sinking-sinking effects
3. Eliminations-Senkungs-Effekte (Potentialeffekt)
   $\rightsquigarrow$ Elimination-sinking effects
4. Eliminations-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)
   $\rightsquigarrow$ Elimination-elimination effects

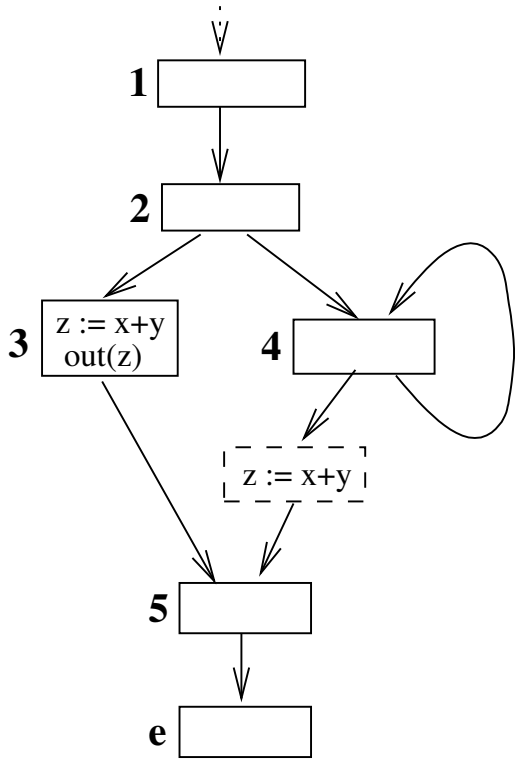
1) Senkungs-Eliminations-Effekt

...Zieleffekt: Eine Elementartransformation (hier: Senkung) ermöglicht anschließend eine Elimination (die erneut Senkungs- oder Eliminationspotential schaffen kann).

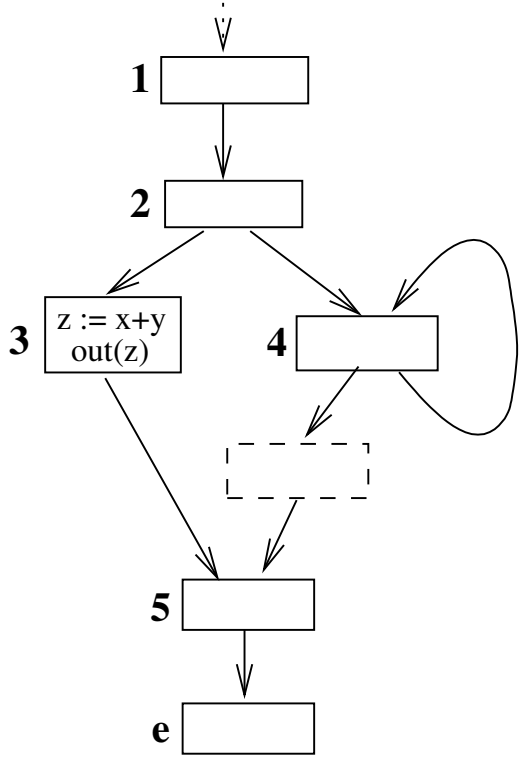
Ausgangsprogramm



Senkung 1. Ord.



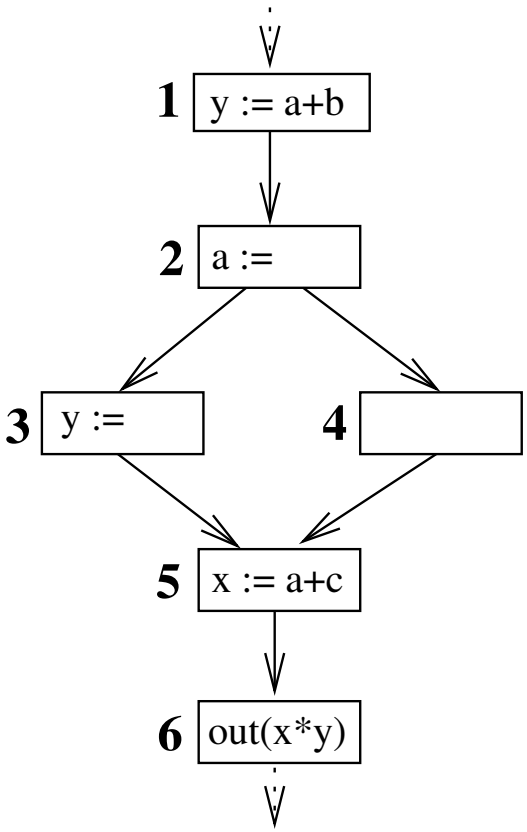
Elimination 2. Ord.



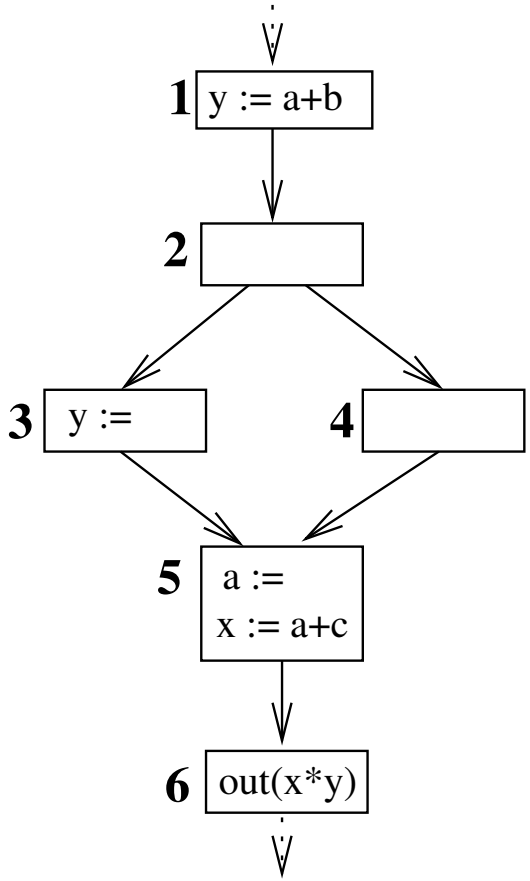
2) Senkungs-Senkungs-Effekt

...Potentialeffekt: Eine Elementartransformation (hier: Senkung) ermöglicht anschließend eine (weitere) Senkung, die erneut Senkungs- oder Eliminationspotential schaffen kann.

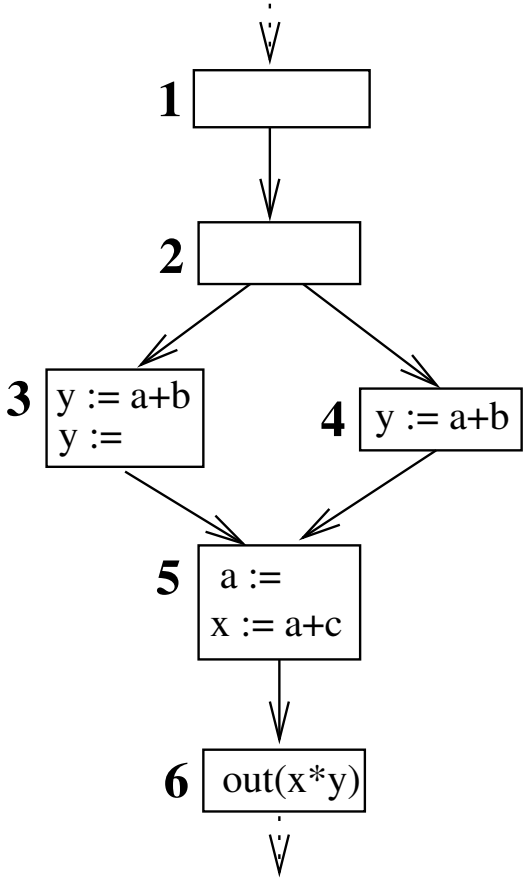
Ausgangsprogramm



Senkung 1. Ord.



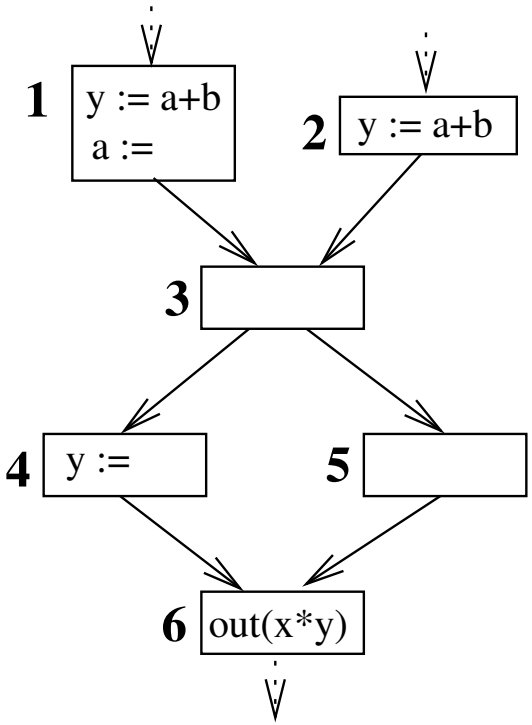
Senkung 2. Ord.



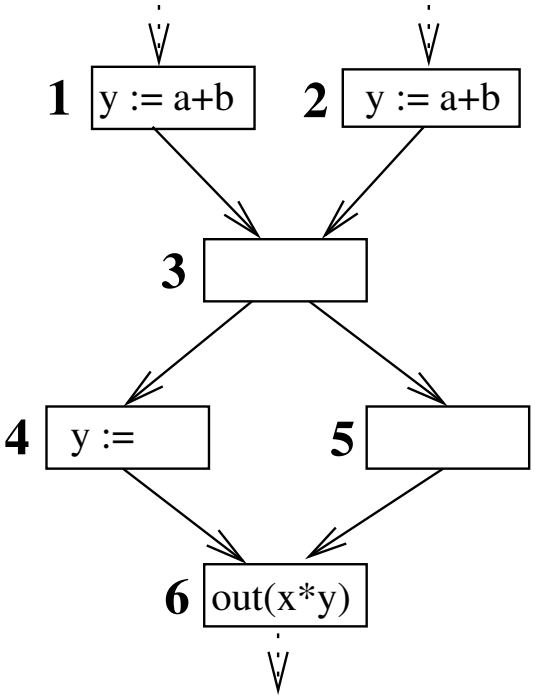
3) Eliminations-Senkungs-Effekt

...Potentialeffekt: Eine Elementartransformation (hier: Elimination) ermöglicht anschließend eine Senkung, die erneut Senkungs- oder Eliminationspotential schaffen kann.

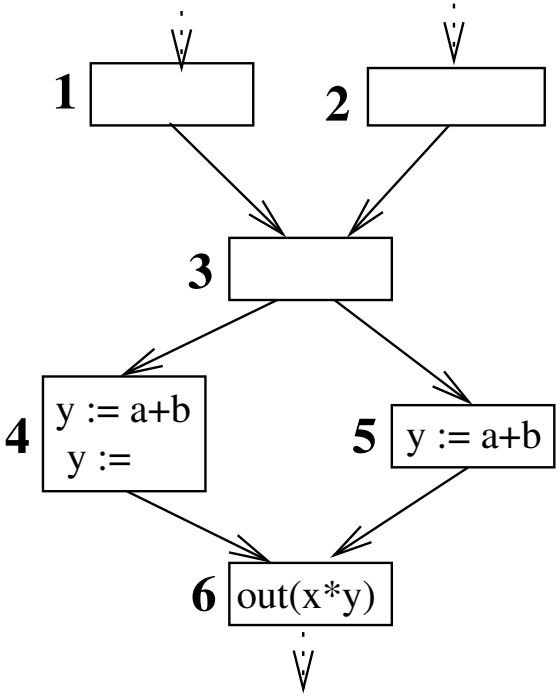
Ausgangsprogramm



Elimination 1. Ord.



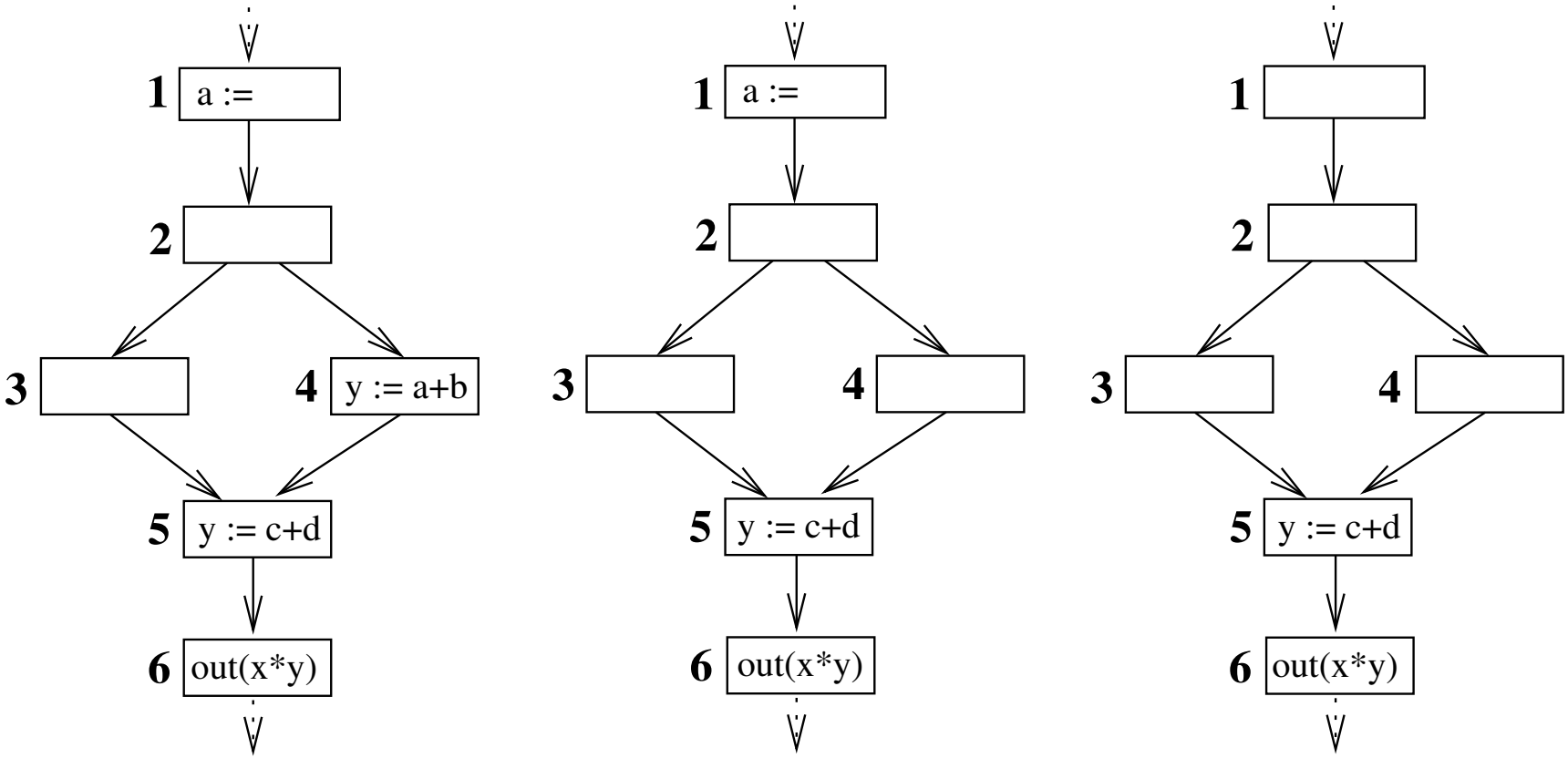
Senkung 2. Ord.



4) Eliminations-Eliminations-Effekt

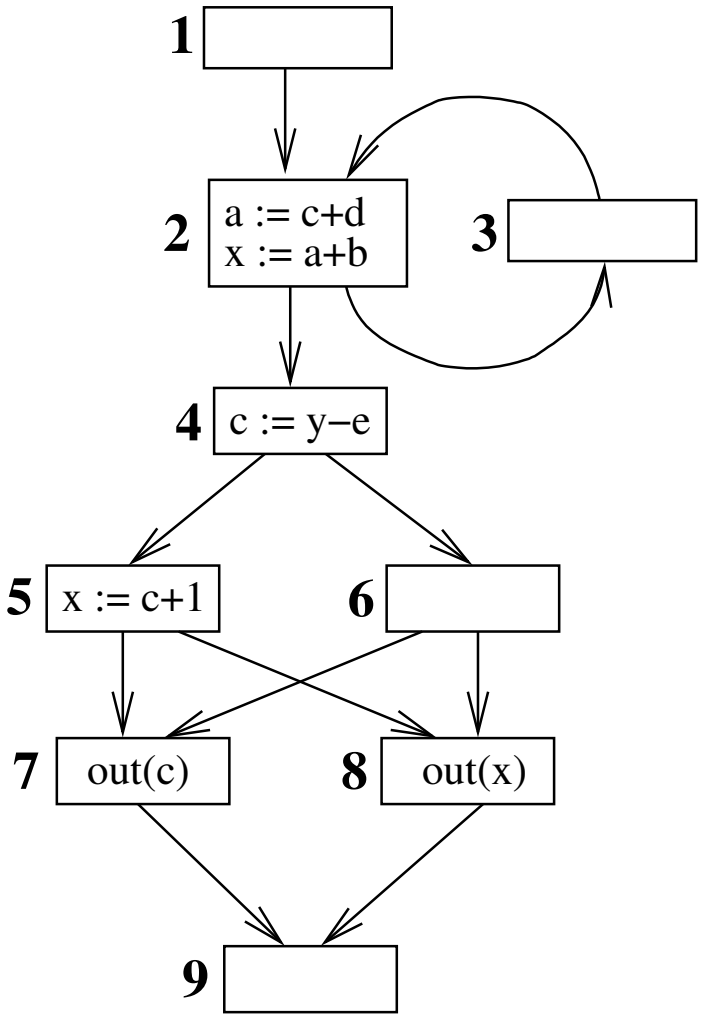
...Zieleffekt: Eine Elementartransformation (hier: Elimination) ermöglicht anschließend eine (weitere) Elimination (die erneut Senkungs- oder Eliminationspotential schaffen kann).

Ausgangsprogramm Elimination 1. Ord. Elimination 2. Ord.

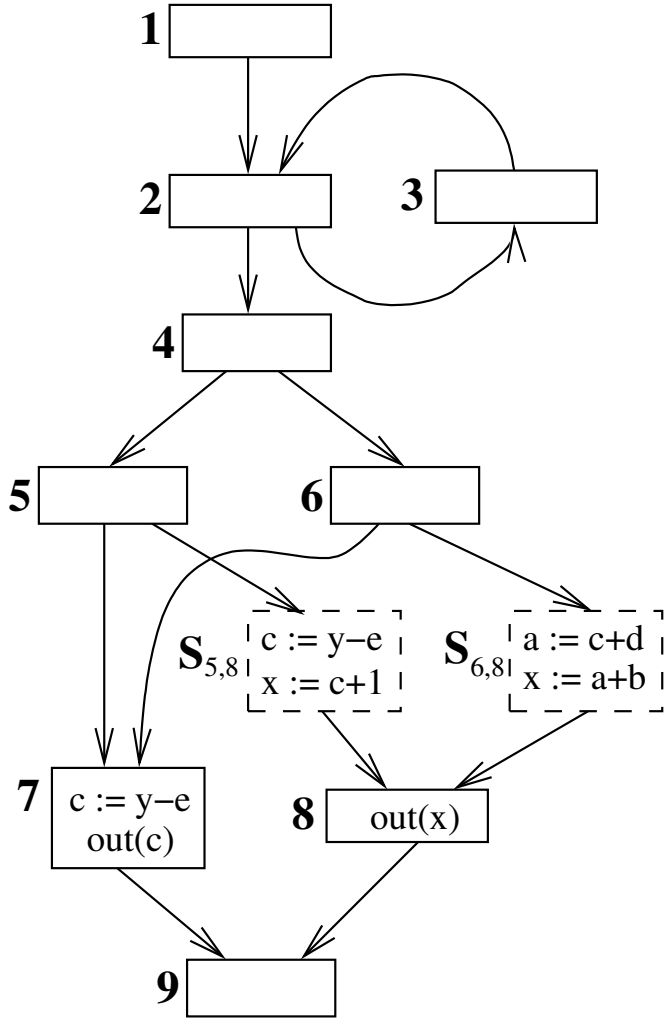


Sequenzwirkung von Effekten 2. Ordnung

Ausgangsprogramm



Optimiertes Programm



Kapitel 12.3.5

EPTA/EPGA: Transformationen

Unnötige Anweisungen

Sei G ein Programm.

Definition 12.3.5.1 (t-unnötige Anweisung)

Eine Anweisung α am Knoten n in G heißt t-unnötig gdw α ist tot am Knoten n.

Definition 12.3.5.2 (g-unnötige Anweisung)

Eine Anweisung α am Knoten n in G heißt g-unnötig gdw α ist geisterhaft am Knoten n.

Sprechweisen und Bezeichnungen (1)

Wir bezeichnen informell mit

- $AS \quad =_{df} \bigcup \{AS_\alpha^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$
- $ETA =_{df} \bigcup \{ETA_\alpha^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$
- $EGA =_{df} \bigcup \{EGA_\alpha^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$

die Mengen aller zulässigen Anweisungssenkungen und -eliminationen (für beliebige Programme und Anweisungsmuster).

Wir bezeichnen ebenso informell mit Wörtern der von den regulär-artigen Ausdrücken

$$(AS + ETA)^*,\ (AS + EGA)^*,\ (AS + ETA + EGA)^*$$

erzeugten Sprachen

$$\mathcal{L}((AS + ETA)^*),\ \mathcal{L}((AS + EGA)^*),\ \mathcal{L}((AS + ETA + EGA)^*)$$

Folgen zulässiger AS-, ETA- und EGA-Transformationen (für beliebige Programme und Anweisungsmuster).

Sprechweisen und Bezeichnungen (2)

Mit diesen Schreibweisen bezeichne:

- $T^G_{AS,ETA} = \{\tau \,|\, \tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS + ETA)^*)\}$
- $T^G_{AS,EGA} = \{\tau \,|\, \tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS + EGA)^*)\}$

die Menge aller Transformationsfolgen aus zulässigen AS- und ETA- bzw. EGA-Transformationen für ein Programm G.

Geht G aus dem Kontext hervor, schreiben wir statt $T^G_{AS,ETA}$ und $T^G_{AS,EGA}$ einfacher $T_{AS,ETA}$ und $T_{AS,EGA}$.

Ist $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Transformationsfolge, so bezeichne:

- $(\tau_i)_{i\leq k}$ das Anfangsstück von τ bis zum Index k einschließlich.
- τ_j die Elementartransformation mit Index j von τ .
- G_τ, $G_{(\tau_i)_{i\leq k}}$ und $G_{(\tau_j)}$ diejenigen Programme, die aus G durch Anwendung von τ, $(\tau_i)_{i\leq k}$, auf G entstehen.

EPTA- und EPGA-Transformationen

Sei G ein Programm.

Definition 12.3.5.3 (EPTA/EPGA-Transf.)

1. Eine EPTA-Transformation (EPGA-Transformation) ist eine beliebige Abfolge zulässiger Anweisungssenkungen und Eliminationen toter (geisterhafter) Anweisungen.
2. T^G_{EPTA} und T^G_{EPGA} bezeichnen die Mengen aller EPTA- und EPGA-Transformationen für G, in Zeichen:
   - $T^G_{EPTA} =_{df} T^G_{AS,ETA}$
   - $T^G_{EPGA} =_{df} T^G_{AS,EGA}$
3. Ist $\tau \in T^G_{EPTA} \cup T^G_{EPGA}$, so bezeichnet G_τ das Programm, das τ angewendet auf G liefert.

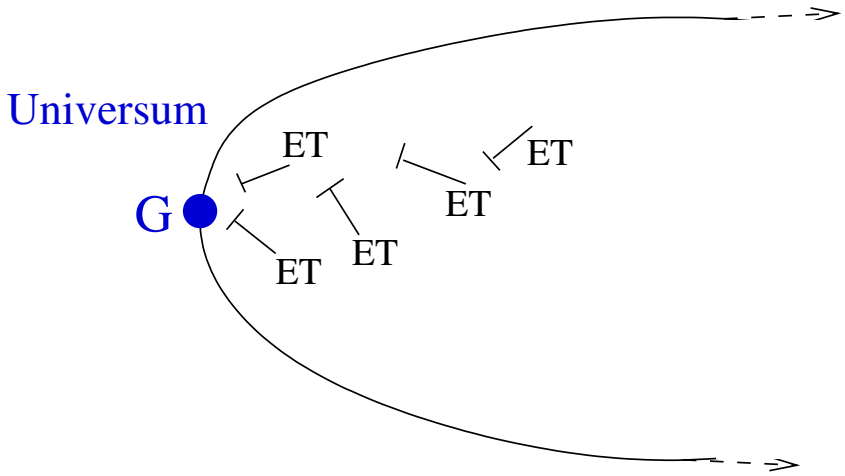
Transformationsrelation, Programmuniversum

- Transformationsrelation:

  $G \vdash_\tau G'$, $\tau \in AS \cup ETA \cup EGA$: G' resultiert aus G durch Anwendung von τ mit τ zulässige Senkungs- oder Eliminationstransformation toter/geisterhafter Anweisungen.

- Induziertes Programmuniversum:

  $\mathcal{U}_T^G =_{df} \{G' \mid G \vdash_{(\tau_i)_{i \le k}} G',\ \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T, k \in \mathbb{N}\}$, $T = T^G_{EPTA}$ oder $T = T^G_{EPGA}$: Das von G durch die Präfixe der Transformationsfolgen $\tau \in T$ aufgespannte Universum.



Kapitel 12.3.6

EPTA/EPGA: Besser, best, optimal

Vergleichsrelation 'besser' für Programme

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Programm und seien $G', G'' \in \mathcal{U}_T^G$ mit $T = T_{EPTA}^G$ oder $T = T_{EPGA}^G$.

Definition 12.3.6.1 (Besser)

G' heißt besser als G'' (in Zeichen: $G'' \sqsubseteq\!\!\!\sim G'$) gdw:

$$\forall\, p \in \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, \mathbf{e}]\ \forall\, \alpha \in \mathcal{AM}.\ \#_\alpha(p_{G'}) \leq \#_\alpha(p_{G''})$$

wobei $\#_\alpha(p_{G'})$ und $\#_\alpha(p_{G''})$ die Anzahl von Anweisungen des Anweisungsmusters α auf p in G' bzw. G'' bezeichnen.

Beachte: Anweisungssenkungen und -eliminationen erhalten die Verzweigungs- und Knotenstruktur eines Programms G. Die einem Pfad in G eineindeutig in G' und G'' entsprechenden Pfade können deshalb einfach identifiziert werden.

Eigenschaften der Relation 'besser'

Lemma 12.3.6.2 (Quasiordnung)

Die Programmvergleichsrelation besser $\sqsubseteq_{\sim}$ ist eine Quasiordnung (d.h. reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch).

Lemma 12.3.6.3 (Verbesserung, Verb.-Neutralität)

Seien G und G' zwei Programme mit $G \vdash_\tau G'$ und $\tau \in AS \cup ETA \cup EGA$. Dann gilt:

1. $G \sim G'$, falls τ eine zulässige Anweisungssenkung ist.
2. $G \sqsubset_{\not\sim} G'$, falls τ eine nichttriviale ($\neq Id$) zulässige Elimination toter oder geisterhafter Anweisungen ist.

...das heißt: Eliminationen bewirken umittelbar echte Verbesserungen, während Senkungen verbesserungsneutral sind, aber durch spätere Eliminationen als Effekte zweiter Ordnung mittelbar Verbesserungen ermöglichen können.

Global beste (oder optimale) Programme

Sei G ein Programm und $T = T^G_{EPTA}$ oder $T = T^G_{EPGA}$.

Definition 12.3.6.4 (Global beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm $G^* \in \mathcal{U}^G_T$ heißt global T-best (oder global T-optimal) gdw G^* ist besser als jedes andere Programm aus $\mathcal{U}^G_T$:
$$\forall\, G' \in \mathcal{U}^G_T.\ G' \sqsubseteq_{\approx} G^*$$
2. Bezeichne $\mathcal{G}^{opt}_T(G)$ die Menge der global T-besten (oder global T-optimalen) Programme in $\mathcal{U}^G_T$.

Lokal beste (oder optimale) Programme

Sei G ein Programm und $T = T^G_{EPTA}$ oder $T = T^G_{EPGA}$.

Definition 12.3.6.5 (Lokal beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm $G^* \in \mathcal{U}^G_T$ heißt lokal T-best gdw:

$$\forall\, G' \in \mathcal{U}^{G^*}_T .\ G^* \ \approx\ G'$$

2. Bezeichne $\mathcal{G}^{lokopt}_T(G)$ die Menge der lokal T-besten (oder lokal T-optimalen) Programme in $\mathcal{U}^G_T$.

Intuitiv: Ein Programm ist lokal optimal, wenn beliebige weitere (Folgen von) Elementartransformationen nicht mehr zu einer echten Verbesserung führen, sondern höchstens noch Anweisungen durch Senkungen an anderen Programmstellen platzieren.

Vergleichsrelation 'besser' für Transf.-Folgen

Sei G ein Programm und $T = T^G_{EPTA}$ oder $T = T^G_{EPGA}$.

Definition 12.3.6.6 (EPTA/EPGA-bessere Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)

1. $\tau \in \mathsf{T}^G_{EPTA}$ heißt EPTA-besser für G als $\tau' \in T^G_{EPTA}$ gdw: $G_{\tau'} \sqsubseteq\!\!\!\!\sim\; G_\tau$.
2. $\tau \in \mathsf{T}^G_{EPGA}$ heißt EPGA-besser für G als $\tau' \in T^G_{EPGA}$ gdw: $G_{\tau'} \sqsubseteq\!\!\!\!\sim\; G_\tau$.

Global, lokal beste Transformationsfolgen

Definition 12.3.6.7 (Global EPTA/EPGA-beste T.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)

1. $\tau \in T^G_{EPTA}$ heißt global EPTA-best für G gdw τ ist EPTA-besser für G als jede andere Transformation in T^G_{EPTA}.
2. $\tau \in T^G_{EPGA}$ heißt global EPGA-best für G gdw τ ist EPGA-besser für G als jede andere Transformation in T^G_{EPGA}.

Definition 12.3.6.8 (Lokal EPTA/EPGA-beste T.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation)

1. $\tau \in T^G_{EPTA}$ heißt lokal EPTA-best für G gdw keine EPTA-Verlängerung von τ ist echt EPTA-besser als τ
2. $\tau \in T^G_{EPGA}$ heißt lokal EPGA-best für G gdw keine EPGA-Verlängerung von τ ist echt EPGA-besser als τ

d.h. τ ist genauso gut wie jede Verlängerung von τ.

Mengen bester (oder optimaler) Transf.-Folgen

Definition 12.3.6.9 (Beste (oder optimale) Transf.)

Wir bezeichnen mit:

1. $T^{opt}_{EPTA}(G)/T^{lokopt}_{EPTA}(G)$ die Menge der global/lokal EPTA-besten (oder EPTA-optimalen) Transformationen für G.
2. $T^{opt}_{EPGA}(G)/T^{lokopt}_{EPGA}(G)$ die Menge der global/lokal EPGA-besten (oder EPGA-optimalen) Transformationen für G.

Globale Optimalität

...von Programmen und Transformationen impliziert ihre lokale Optimalität.

Proposition 12.3.6.10

1. Global EPTA/EPGA-optimale Programme sind lokal EPTA/EPGA-optimal.
2. Global EPTA/EPGA-optimale Transformationen sind lokal EPTA/EPGA-optimal.

Universumskorrekt, universumsoptimal

Sei G ein Programm.

Lemma 12.3.6.11 (Universumskorrekt)

1. Ist $\tau \in T^G_{EPTA}$, so ist $G_\tau \in \mathcal{U}^G_{T_{EPTA}}$.
2. Ist $\tau \in T^G_{EPGA}$, so ist $G_\tau \in \mathcal{U}^G_{T_{EPGA}}$.

Lemma 12.3.6.12 (Universumsoptimal)

1. Ist $\tau \in T =_{df} T^G_{EPTA}$ global EPTA-best für G, so ist $G_\tau \in \mathcal{G}^{opt}_T(G)$ global T-best.
2. Ist $\tau \in \ =_{df} T^G_{EPGA}$ global EPGA-best für G, so ist $G_\tau \in \mathcal{G}^{opt}_T(G)$ global T-best.

Kapitel 12.3.7

EPTA/EPGA: Optimalität

Maximale Transformationsfolgen

Sei G ein Programm und $T = T^G_{EPGA}$ oder $T = T^G_{EPGA}$.

Definition 12.3.7.1 (Maximale Transf.-Folge)

Eine unendliche oder endliche Transformationsfolge τ für G mit $\tau \in T$ und

- $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ oder
- $\tau = (\tau_i)_{i \leq k}$, $k \in \mathbb{N}$

heißt maximal, wenn τ lokal optimal ist (d.h. weitere Eliminationstransformationen lassen das Programm G_τ unverändert, weitere Senkungstransformationen platzieren lediglich Anweisungen an anderen Programmstellen ohne dadurch neue Eliminationsmöglichkeiten zu eröffnen).

Faire Transformationsfolgen

Sei G ein Programm und $T = T^G_{EPGA}$ oder $T = T^G_{EPGA}$.

Definition 12.3.7.2 (Faire Transf.-Folge)

Eine Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau \in T$, für G heißt fair, wenn

$$\forall\, k \in \mathbb{N}.\ (\tau_i)_{i \leq k} \text{ nicht maximal } \Rightarrow\ \exists k' > k.\ G_{(\tau_i)_{i \leq k}} \stackrel{\sqsubset}{\not\sim} G_{(\tau_i)_{i \leq k'}}$$

Lemma 12.3.7.3 (Maximale Transf.-Folge fair)

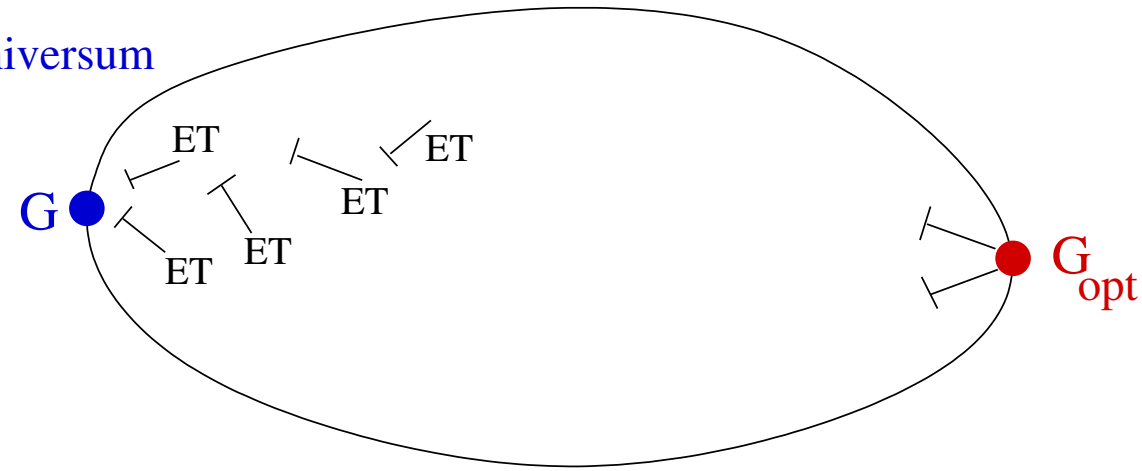
Maximale Transformationsfolgen für G sind fair.

Globale EPTA/EPGA-Optimalität

Sei G ein Programm und $T = T^G_{EPTA}$ oder $T = T^G_{EPGA}$.

Theorem 12.3.7.4 (Glob. EPTA/EPGA-Optimalität)

1. Jede faire Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau \in T$, für G ist global optimal, d.h. endet in einem bis auf irrelevante ($\widehat{=}$ bedeutungsgleiche) Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programm $G_{opt} \in \mathcal{G}^{opt}_T(G)$.
2. Jede faire Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau \in T$, hat ein endliches Anfangsstück $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$ mit $G_{opt} \sim G_\tau \sim G_{\tau'}$.



Beweisskizze von Theorem 12.3.7.4

...für zwei Beweisvarianten: Über

- Monotonie, Dominanz und Fixpunkttheorem 11.2.9 (Variante 1).
- Konfluenz und Termination der Transformationsrelation, s. Theorem 12.3.7.5 (Variante 2).

Variante 1: Monotonie, Dominanz, FP-Theor.

Zeige: Die Menge der EPTA- und EPGA-Elementartransformationen bildet für $\vec{\sqsubseteq}_\tau =_{df} (\sqsubseteq \cap \sim \cap \vdash_\tau)^*$ eine Familie $\mathcal{F}_\tau$ von Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{F}_\tau \subseteq \{f \mid f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}\}$ ist endliche Familie von Funktionen mit
  1. Monotonie:
     $\forall\, G', G'' \in \mathcal{G}\ \forall\, f \in \mathcal{F}_\tau.\ \ G' \vec{\sqsubseteq}_\tau G'' \Rightarrow f(G') \vec{\sqsubseteq}_\tau f(G'')$
  2. Dominanz:
     $\forall\, G', G'' \in \mathcal{G}.\ G' \vdash_\tau G'' \Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{F}_\tau.\ G'' \vec{\sqsubseteq}_\tau f(G')$

Zusammen mit dem Fixpunkttheorem 11.2.9 folgt daraus die

- Korrektheit und Optimalität

fairer EPTA- und EPGA-Transformationsfolgen.

Variante 2: Konfluenz, Terminierung

Zeige: Die ETPA- und EPGA-Transformationsrelationen

- $\cdot \vdash_\tau \cdot, \tau \in AS \cup ETA$ (EPTA)
- $\cdot \vdash_\tau \cdot, \tau \in AS \cup EGA$ (EPGA)

sind (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken) konfluent und terminierend.

Beide Eigenschaften zusammen liefern die

- Korrektheit und globale Optimalität

fairer EPTA- und EPGA-Transformationsfolgen.

EPTA, EPGA: Konfluenz, Terminierung

Theorem 12.3.7.5 (Konfluenz, Terminierung)

Die EPTA- und EPGA-Transformationsrelationen

1. $\cdot \vdash_\tau \cdot, \tau \in AS \cup ETA$ (EPTA)
2. $\cdot \vdash_\tau \cdot, \tau \in AS \cup EGA$ (EPGA)

sind (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken) konfluent und terminierend.

Determiniertheit maximaler Transformationen

Sei G ein Programm und $T = T^G_{EPTA}$ oder $T = T^G_{EPGA}$.

Korollar 12.3.7.6 (Determiniertheit max. Transf.-F.)

Sind $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau' = (\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\tau, \tau' \in T$, maximal (und damit fair) für G, so stimmen G_τ und $G_{\tau'}$ bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken überein, d.h. das finale Programm maximaler Transformationsfolgen ist determiniert

Korollar 12.3.7.7 (Maximale endl. Transf.-Folge)

Ist $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau \in T$, fair für G, so hat τ ein endliches Anfangsstück, das maximal für G ist, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$ maximal für G.

Endliche faire Transformationsfolgen

Theorem 12.3.7.8 (Endliche faire Transf.-Folge)

1. Eine Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau \in T$, für G, die für jedes Anweisungsmuster Senkungs- und Eliminationstransformation nach höchstens endlich vielen Eliminations- und Senkungstransformationen für andere Anweisungsmuster wieder anwendet, ist fair.
2. Eine endliche Transformationsfolge für G ist maximal (und damit fair), wenn ein voller Zyklus von Senkungs- und Eliminationstransformationen für alle Anweisungsmuster keine echte Verbesserung mehr erbracht hat.

Korollar 12.3.7.9 (Existenz global opt. Transf.)

1. $\forall\, G \in \mathcal{G}.\ T^{opt}_{EPTA}(G) \neq \emptyset$.
2. $\forall\, G \in \mathcal{G}.\ T^{opt}_{EPGA}(G) \neq \emptyset$.

Existenz und Konstruktion

...global optimaler Programme und Transformationen.

Korollar 12.3.7.10 (Existenz global opt. Programme)

1. $\forall\, G \in \mathcal{G}.\ \mathcal{G}^{opt}_{T_{EPTA}}(G) \neq \emptyset$.
2. $\forall\, G \in \mathcal{G}.\ \mathcal{G}^{opt}_{T_{EPGA}}(G) \neq \emptyset$.

Korollar 12.3.7.11 (Determiniertheit)

Bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen gilt:

1. $|\mathcal{G}^{opt}_{T_{EPTA}}(G)| = 1$.
2. $|\mathcal{G}^{opt}_{T_{EPGA}}(G)| = 1$.

Korollar 12.3.7.12

Theorem 12.3.7.8 beschreibt konstruktiv und effektiv die Bildung endlicher maximaler (und damit fairer und optimaler) EPTA/EPGA-Transformationsfolgen.

EPGA wirkmächtiger als EPTA

...jede tote Anweisung ist eine Geisteranweisung.

Für die bis auf irrelevante Umsortierungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programme

$$G^{opt}_{EPTA} \in \mathcal{G}^{opt}_{T_{EPTA}}(G) \text{ und } G^{opt}_{EPGA} \in \mathcal{G}^{opt}_{T_{EPGA}}(G)$$

gilt deshalb: G^{EPGA}_{opt} ist besser (i.S.v. Definition 12.3.6.1) als G^{opt}_{EPTA}:

Lemma 12.3.7.13 (EPGA besser als EPTA)

$$\forall\, G \in \mathcal{G}.\ G^{opt}_{EPTA} \sqsubseteq_{\sim} G^{opt}_{EPGA}$$

Übungsaufgabe

Gemäß Lemma 12.3.7.13 ist EPGA wirkmächtiger als EPTA. Wie oft allerdings müssen durch Eliminationstransformationen Geisteranweisungen in einer maximalen Transformationsfolge zu G^{opt}_{EPGA} eliminiert werden? Mehrfach? Stets? Reicht einmal?

Betrachte folgende Transformationsmengen:

- $T_1 =_{df} T^G_{AS,EGA} = \{\tau \,|\, \tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS + EGA)^*)\}$
- $T_2 =_{df} T^G_{EGA\circ(AS,ETA)} = \{\tau \,|\, \tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(EGA_{\mathcal{AM}} * (AS + ETA)^*)\}$
- $T_3 =_{df} T^G_{(AS,ETA)\circ EGA\circ(AS,ETA)} = \{\tau \,|\, \tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS+ETA)^* * EGA_{\mathcal{AM}} * (AS+ETA)^*)\}$

wobei T_2 und T_3 genau eine EGA-Transformation simultan für alle Anweisungsmuster zu Anfang oder an beliebiger Stelle in einer Transformationsfolge vorsehen.

Übungsaufgabe (fgs.)

Untersuche die Gültigkeit folgender Behauptung:

Die bis auf irrelevante Umsortierungen eindeutig bestimmten global optimalen Programme $G_1^{opt} \in \mathcal{G}_{T_1}^{opt}(G) = \mathcal{G}_{T_{EPGA}}^{opt}(G)$, $G_2^{opt} \in \mathcal{G}_{T_2}^{opt}(G)$ und $G_3^{opt} \in \mathcal{G}_{T_3}^{opt}(G)$ sind gleich gut bzgl. der Relation besser (aus Definition 12.3.6.1):

$$G_1^{opt} \sim G_2^{opt} \sim G_3^{opt}$$

Beweis oder Gegenbeispiel.

Kapitel 12.3.8

EPTA/EPGA: Implementierung

Beobachtung

...um die Elementartransformationen von EPTA und EPGA und diese selbst implementieren zu können, ist die Angabe von DFAs für folgende Aufgaben nötig (und ausreichend):

Datenflussanalyseverfahren zur Berechnung

- toter Anweisungen
- schattenhafter Anweisungen
- der Endpunkte von Anweisungssenkungen

Tote Variablenanalyse (1)

...für knotenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionsknoten):

- Mod_n^v: Die Anweisung von Knoten n modifiziert Variable v.
- $\mathrm{Use}_\varepsilon^v$: Variable v wird von der Anweisung von Knoten n gelesen. (z.B. rechtsseitig in einer Zuweisung, in einer Ausgabeanweisung, Verzweigungsbedingung oder Schleifenabbruchbedingung).
- $LhsVar_n$: Bezeichnet die linksseitige Variable der Zuweisung von Knoten n.

Tote Variablenanalyse (2)

Das TVA-Gleichungssystem für knotenbenannte Instruktionsgraphen (simultan für alle Variablen v):

$$\text{N-DEAD}_n^v = \overline{\text{Use}_n^v} * (\text{X-DEAD}_n^v + \text{Mod}_n^v)$$

$$\text{X-DEAD}_n^v = \prod_{m \in succ(n)} \text{N-DEAD}_m^v$$

Größte Lösung: $\nu\text{-}N\text{-}DEAD_n^v$, $\nu\text{-}X\text{-}DEAD_n^v$.

Lemma 12.3.8.1 (Tote Anweisungen)

Eine Anweisung α am Knoten n ist tot gdw die linksseitige Variable von α ist geisterhaft am Ausgang von Knoten n, d.h. $\nu\text{-}X\text{-}DEAD_n^{LhsVar_n} = \textbf{wahr}$.

Intuitiv

...eine Variable v ist tot am Eingang des Knotens n, wenn v

- von der Anweisung am Knoten n nicht durch lesen 'zu leben gezwungen' wird (1-tes Konjunktionsglied).
- am Ausgang des Knotens n bereits tot ist oder durch die Anweisung am Knoten n modifiziert und dadurch das Leben verliert und zu Tode kommt, tot wird (2-tes Konjunktionsglied).

...eine Variable v ist tot am Ausgang des Knotens n, wenn v

- am Eingang aller Nachfolgeknoten tot ist.

Geistervariablenanalyse (1)

...für knotenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionsknoten):

- Mod_n^v: Die Anweisung von Knoten n modifiziert Variable v.
- AssUse_n^v: Die Anweisung von Knoten n ist eine Zuweisung und liest Variable v.
- $\mathrm{LifeEnforcingUse}_n^v$: Variable v wird von der Anweisung am Knoten n gelesen und dadurch 'zu leben gezwungen' (z.B. wenn die Anweisung eine Ausgabeanweisung, Verzweigungsbedingung oder Schleifenabbruchbedingung ist).
- LhsVar_n: Bezeichnet die linksseitige Variable der Zuweisung von Knoten n.

Geistervariablenanalyse (2)

Das GVA-Gleichungssystem für knotenbenannte Instruktionsgraphen (simultan für alle Variablen v):

$$\begin{aligned}
\text{N-FAINT}_n^v &= \overline{\text{LifeEnforcingUse}_n^v} \ * \\
&\quad (\text{X-FAINT}_n^v \ + \ \text{Mod}_n^v) \ * \\
&\quad (\text{X-FAINT}_n^{LhsVar_n} + \overline{\text{AssUse}_{n)}^v}) \\
\text{X-FAINT}_n^v &= \prod_{m \in succ(n)} \text{N-FAINT}_m^v
\end{aligned}$$

Größte Lösung: $\nu\text{-}N\text{-}FAINT_n^v$, $\nu\text{-}X\text{-}FAINT_n^v$.

Lemma 12.3.8.2 (Geisterhafte Anweisungen)

Eine Anweisung α am Knoten n ist geisterhaft gdw die linksseitige Variable von α ist geisterhaft am Ausgang von Knoten n, d.h. $\nu\text{-}X\text{-}FAINT_n^{LhsVar_n} = \textbf{wahr}$.

Intuitiv

...eine Variable v ist geisterhaft am Eingang des Knotens n, wenn v

- von der Anweisung am Knoten n nicht 'zu leben gezwungen' wird (1-tes Konjunktionsglied).
- am Ausgang des Knotens n bereits geisterhaft ist oder durch die Anweisung am Knoten n modifiziert und dadurch geisterhaft wird (2-tes Konjunktionsglied).
- von der Anweisung am Knoten n nicht benutzt wird oder höchstens der Wertzuweisung an eine andere geisterhafte Variable dient (3-tes Konjunktionsglied).

...eine Variable v ist geisterhaft am Ausgang des Knotens n, wenn v

- am Eingang aller Nachfolgeknoten geisterhaft ist.

Anweisungssenkungsanalyse

...für knotenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionsknoten):

- Sinkable_n^α: Die Anweisung von Knoten n ist vom Anweisungsmuster α (und steht deshalb bereits am Ende von n).
- Blocked_n^α: Die Senkung (oder Verschiebung) von α über die Anweisung am Knoten n hinweg wird von dieser n blockiert.

Die Anweisungssenkungsanalyse

Das ASA-Gleichungssystem für knotenbenannte Instruktionsgraphen (simultan für alle Anweisungsmuster α):

$$\text{N-SINK}_n^\alpha = \begin{cases} \textbf{falsch} & \text{falls } n = \textbf{s} \\ \prod_{m \in pred(n)} \text{X-SINK}_m^\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{X-SINK}_n^\alpha = \text{Sinkable}_n^\alpha + \text{N-SINK}_n^\alpha * \overline{\text{Blocked}_n^\alpha}$$

Größte Lösung: $\nu\text{-}N\text{-}SINK_n^\alpha$, $\nu\text{-}X\text{-}SINK_n^\alpha$.

Endpunkte der Anweisungssenkung

Die sich aus der AS-Analyse ergebenden Einsetzungspunkte:

$$\text{N-Insert}_n^\alpha \quad =_{df} \quad \nu\text{-N-SINK}_n^\alpha * \text{Blocked}_n^\alpha$$

$$\text{X-Insert}_n^\alpha \quad =_{df} \quad \nu\text{-X-SINK}_n^\alpha * \sum_{m \in succ(n)} \overline{\nu\text{-N-SINK}_m^\alpha}$$

Wichtig: Die Berechnung der Einsetzungspunkte (d.h. der Endpunkte der Schiebung) erfordert keine iterative globale DFA, sondern kann lokal an jedem Knoten berechnet werden mithilfe des lokalen Prädikats Blocked und der größten Lösung des AS-Gleichungssystems.

Übungsaufgabe

Wie lauten die Spezifikationen der Analysen zur

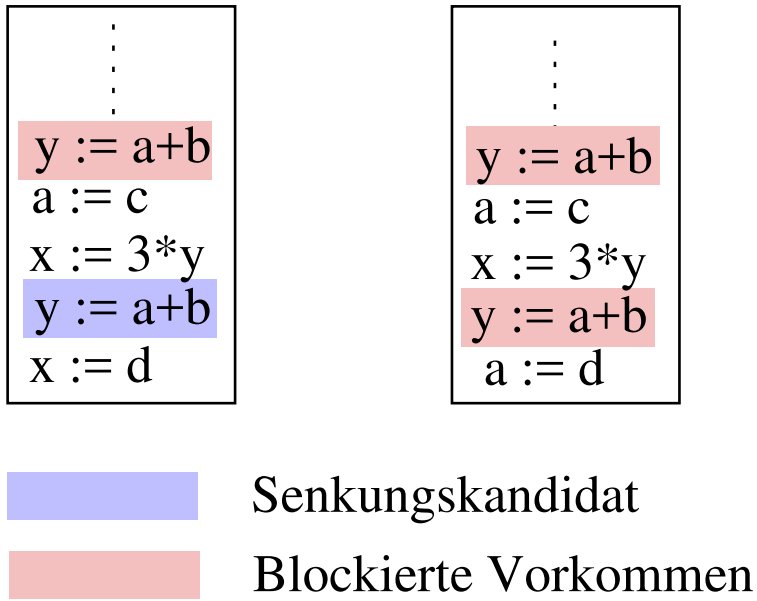
- Erkennung toter Anweisungen
- Erkennung geisterhafter Anweisungen
- Senkung von Anweisungen

im Stil von Kapitel 7?

Gib die entsprechenden Spezifikationstupel an.

Anmerkung zu Basisblock-Graphen (1)

...wenn sie existieren, sind Senkungskandidaten in Basisblöcken eindeutig bestimmt:



Nur das blau markierte Vorkommen von `y := a+b` ist ein Senkungskandidat; die pink markierten Vorkommen von `y := a+b` sind lokal in den Basisblöcken blockiert.

Anmerkung zu Basisblock-Graphen (2)

Senkungsanalyse

- Die Eindeutigkeit von Senkungskandidaten erlaubt die Senkungsanalyse unmittelbar (ohne Änderungen oder Anpassungen) von Instruktions- auf Basisblockgraphen zu übertragen.

Tote Variablenanalyse

- Anpassungen zur Übertragung der Analyse von Instruktions- auf Basisblockgraphen sind erforderlich; siehe Anhang B für Details.

Geistervariablenanalyse

- Als sog. nicht-separates Analyseproblem keine Übertragung auf Basisblockgraphen möglich; siehe Anhang B für Details.

Kapitel 12.4

Partiell redundante Anweisungen

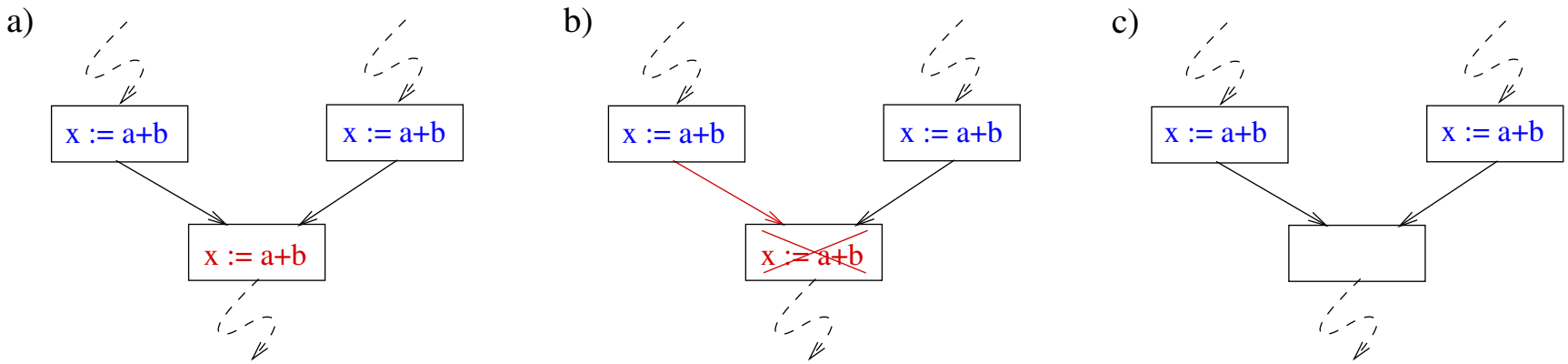
Kapitel 12.4.1

Motivation

Redundante Anweisungen

...und ihre Elimination.

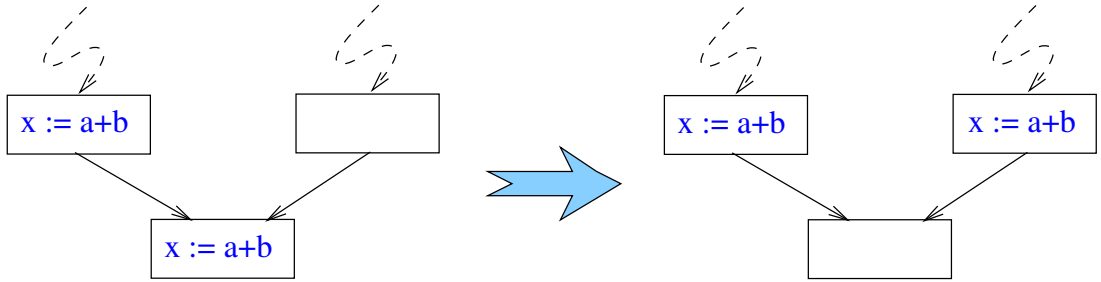
Das Grundmuster: Das rote Vorkommen der Anweisung `x := a+b` ist redundant (oder total redundant) (engl. (totally) redundant) gegenüber den beiden blauen, da weder `x` noch `a` oder `b` zwischen den Vorkommen geschrieben werden.



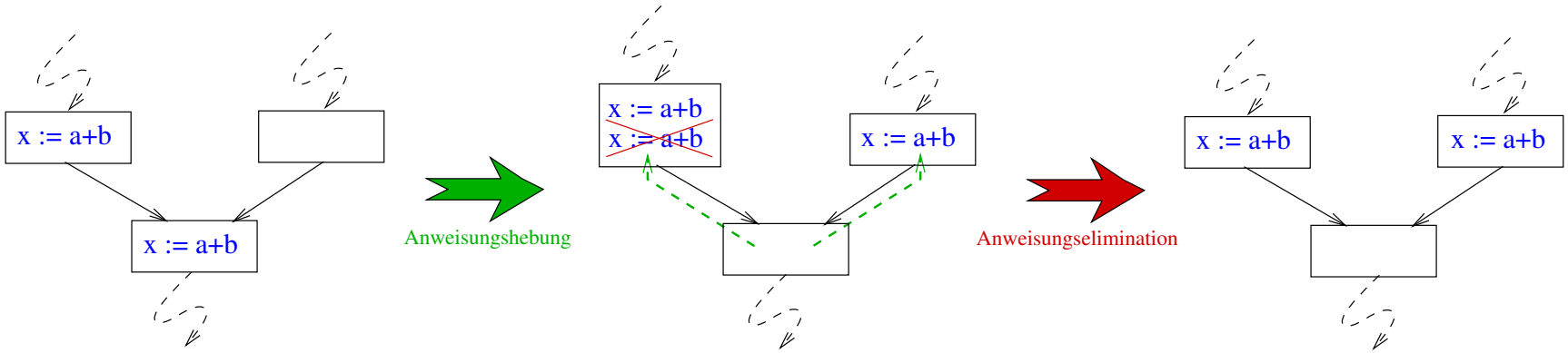
Partiell redundante Anweisungen

...und ihre Elimination.

Das Grundmuster:



Die konzeptuelle Verfahrensidee:



Kapitel 12.4.2

Elementartransformationen

Redundante Anweisungen

Definition 12.4.2.1 (Redundante Anweisung)

Eine Anweisung vom Muster $\alpha \equiv x := t$ am Knoten n ist redundant gdw jeder Programmpfad vom Startknoten zu einem Vorgänger m von n führt über einen Knoten k, wobei gilt:

- m enthält ein α-Vorkommen als Anweisung.
- auf der Pfadfortsetzung von k zu m werden `x`, `a` und `b` nicht geschrieben.

Anweisungseliminationen

Definition 12.4.2.2 (Elimination redundanter Anw.)

Eine Anweisungselimination, die einige redundante Anweisungen aus dem Programm streicht, heißt Elimination redundanter Anweisungen (engl. redundant assignment elimination).

Definition 12.4.2.3 (Korrekte Anweisungselim.)

Eine Anweisungselimination ist korrekt, wenn sie eine Elimination redundanter Anweisungen ist.

Anweisungshebungen

Definition 12.4.2.4 (Anweisungshebung)

Eine Anweisungshebung für ein Anweisungsmuster $\alpha \equiv x := t$ (oder α-Anweisungshebung) ist das simultane stetige Verschieben eines oder mehrerer Vorkommen von α entgegen der Richtung des Kontrollflusses zu einem oder mehreren anderen Knoten.

Definition 12.4.2.5 (Korrekte Anweisungshebung)

Eine α-Anweisungshebung, $\alpha \equiv x := t$, ist korrekt, wenn während des Schiebens zu jedem Zeitpunkt gilt:

- Kein α-Vorkommen wird über eine Anweisung hinweggeschoben, die x liest oder modifiziert oder einen Operanden von t modifiziert (und α dadurch blockiert).
- Kein α-Vorkommen wird (rückwärts) in einen Verzweigungsknoten geschoben, wenn dies nicht von jedem Nachfolger des Verzweigungsknotens aus geschieht.

Sprechweisen und Bezeichnungen

Definition 12.4.2.6 (Blockiert)

Ein Anweisung α der Form $x := t$ ist von einer Anweisung α' hebungsblockiert (oder blockiert), wenn α'

- Variable x
  - liest ($\alpha' \equiv ... := ...x...$) oder
  - modifiziert ($\alpha' \equiv x := ...$) oder
- einen Operanden von t modifiziert.

Proposition 12.4.2.7

Eine Anweisung blockiert die Hebung einer Anweisung gdw sie deren Senkung blockiert.

Kapitel 12.4.3

Effekte zweiter Ordnung

Effekte zweiter Ordnung

...treten bei EPRA ähnlich wie bei EPTA und EPGA in 4 Formen auf und sind auch hier maßgeblich für die kombinierte Wirkung der Elementartransformationen von EPRA:

1. Hebungs-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)
   $\rightsquigarrow$ Hoisting-elimination effects
2. Hebungs-Hebungs-Effekte (Potentialeffekt)
   $\rightsquigarrow$ Hoisting-hoisting effects
3. Eliminations-Hebungs-Effekte (Potentialeffekt)
   $\rightsquigarrow$ Elimination-hoisting effects
4. Eliminations-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)
   $\rightsquigarrow$ Elimination-elimination effects

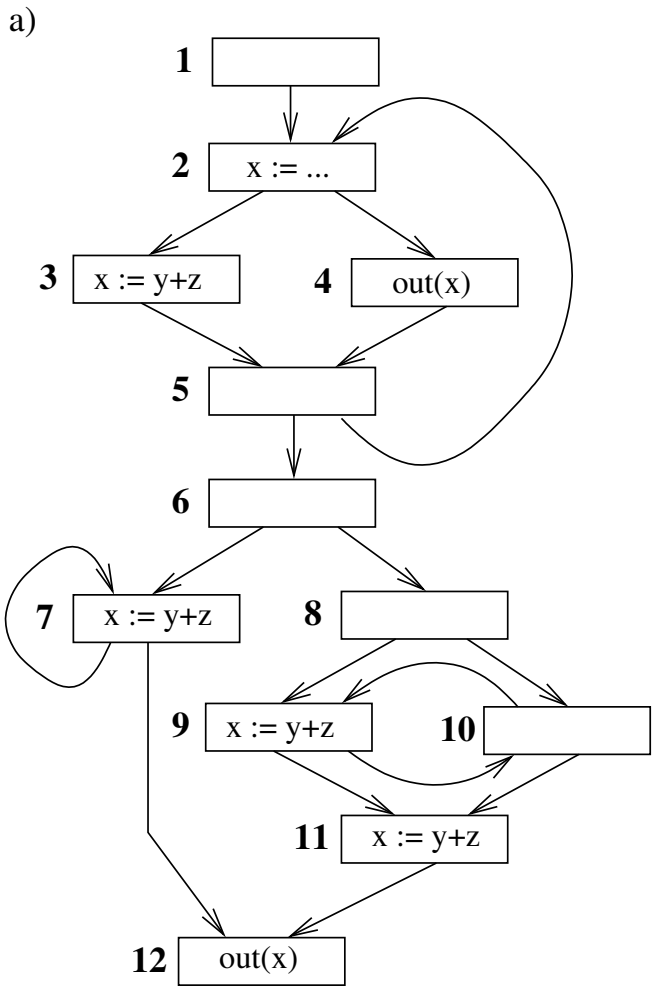
Übungsaufgabe

Gib für jeden der vier Effekte zweiter Ordnung von EPRA ein Beispiel an:

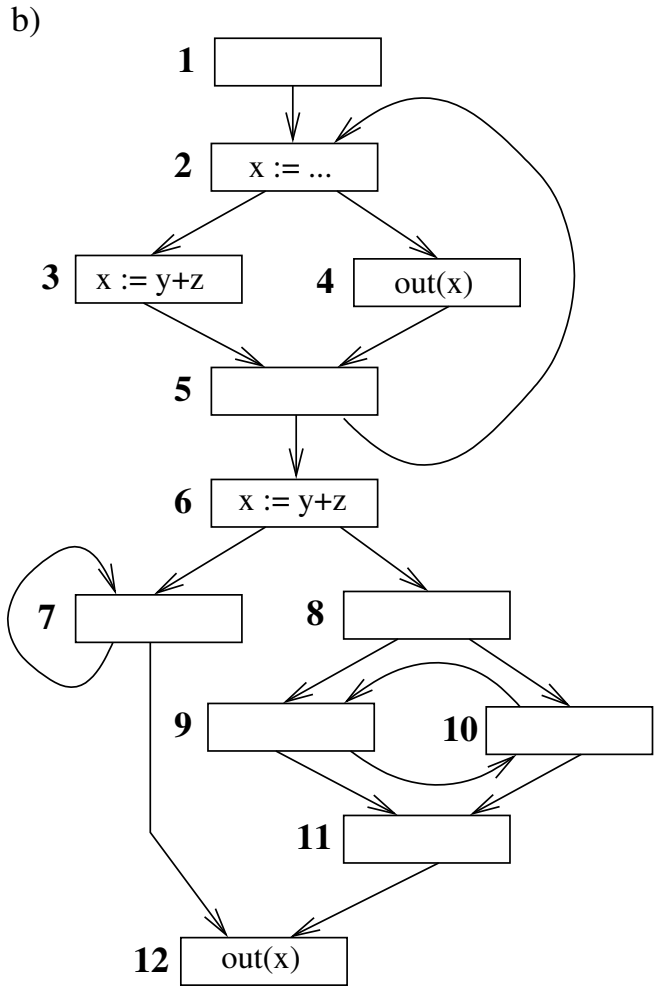
1. Hebungs-Eliminations-Effekt
2. Hebungs-Hebungs-Effekt
3. Eliminations-Hebungs-Effekt
4. Eliminations-Eliminations-Effekt

Sequenzwirkung von Effekten 2. Ordnung

Ausgangsprogramm



Optimiertes Programm



Beachte: Kein Schieben von Anweisungen in Schleifen!

Kapitel 12.4.4

EPRA: Transformation

Unnötige Anweisungen

Sei G ein Programm.

Definition 12.4.4.1 (Unnötige Anweisung)

Eine Anweisung α am Knoten n in G heißt unnötig gdw α ist redundant am Knoten n.

Sprechweisen und Bezeichnungen (1)

Wir bezeichnen informell mit

- $AH \quad =_{df} \bigcup \{AH_\alpha^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$
- $ERA =_{df} \bigcup \{ERA_\alpha^G \mid \alpha \in \mathcal{AM}, G \in \mathcal{G}\}$

die Mengen aller zulässigen Anweisungshebungen und -eliminationen (für beliebige Programme).

Wir bezeichnen ebenso informell mit Wörtern der von dem regulär-artigen Ausdruck

$$(AH + ERA)^*$$

erzeugten Sprache

$$\mathcal{L}((AH + ERA)^*)$$

Folgen zulässiger AH- und ERA-Transformationen (für beliebige Programme und Anweisungsmuster).

Sprechweisen und Bezeichnungen (2)

Mit diesen Schreibweisen bezeichne:

- $T^G_{AH,ERA} = \{\tau \,|\, \tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AH + ERA)^*)\}$

die Menge aller Transformationsfolgen aus zulässigen AH- und ERA-Transformationen für ein Programm G.

Geht G aus dem Kontext hervor, schreiben wir statt $T^G_{AH,ERA}$ einfacher $T_{AH,ERA}$.

Ist $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Transformationsfolge, so bezeichne:

- $(\tau_i)_{i\leq k}$ das Anfangsstück von τ bis zum Index k einschließlich.
- τ_j die Elementartransformation mit Index j von τ .
- G_τ, $G_{(\tau_i)_{i\leq k}}$ und $G_{(\tau_j)}$ diejenigen Programme, die aus G durch Anwendung von τ, $(\tau_i)_{i\leq k}$, auf G entstehen.

EPRA-Transformation

Sei G ein Programm.

Definition 12.4.4.2 (EPRA-Transformation)

1. Eine EPRA-Transformation ist eine beliebige Abfolge zulässiger Anweisungshebungen und Eliminationen redundanter Anweisungen.
2. T^G_{EPRA} bezeichnet die Menge aller EPRA-Transformationen für G, in Zeichen:

$$T^G_{EPRA} =_{df} T^G_{AH,ERA}$$

3. Ist $\tau \in T^G_{EPRA}$, so bezeichnet G_τ das Programm, das τ angewendet auf G liefert.

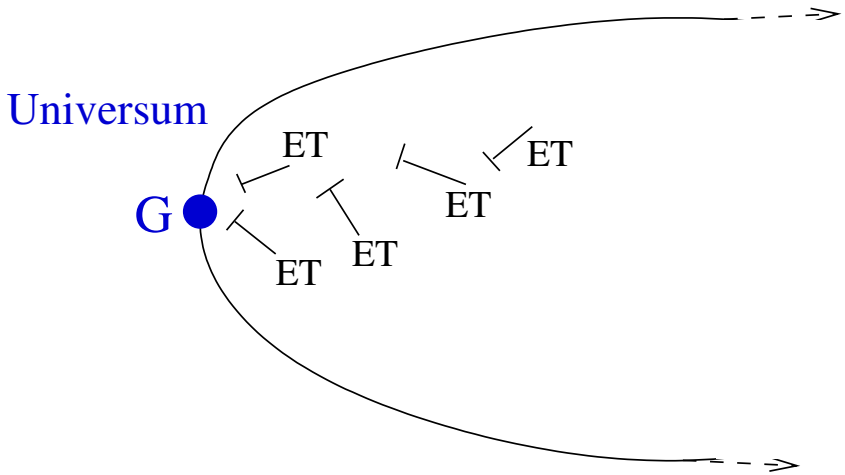
Transformationsrelation, Programmuniversum

- Transformationsrelation:

  $G \vdash_\tau G'$, $\tau \in AH \cup ERA$: G' resultiert aus G durch Anwendung von τ mit τ zulässige Hebungs- oder Eliminationstransformation redundanter Anweisungen.

- Induziertes Programmuniversum:

  $\mathcal{U}^G_{T_{EPRA}} =_{df} \{G' \mid G \vdash_{(\tau_i)_{i \leq k}} G', \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T^G_{EPRA}, k \in \mathbb{N}\}$: Das von G durch die Präfixe der Transformationsfolgen $\tau \in T^G_{EPRA}$ aufgespannte Universum.



Kapitel 12.4.5

EPRA: Besser, best, optimal

Vergleichsrelation 'besser' für Programme

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Programm und seien $G', G'' \in \mathcal{U}^G_{T_{EPRA}}$.

Definition 12.4.5.1 (Besser)

G' heißt besser als G'' (in Zeichen: $G'' \sqsubseteq G'$) gdw. G' ist besser als G'' i.S.v. Definition 12.3.6.1, d.h.:

$$\forall\, p \in \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, \mathbf{e}]\ \forall\, \alpha \in \mathcal{AM}.\ \#_\alpha(p_{G'}) \leq \#_\alpha(p_{G''})$$

wobei $\#_\alpha(p_{G'})$ und $\#_\alpha(p_{G''})$ die Anzahl von Anweisungen des Anweisungsmusters α auf p in G' bzw. G'' bezeichnen.

Beachte: Anweisungshebungen und -eliminationen erhalten die Verzweigungs- und Knotenstruktur eines Programms G. Die einem Pfad in G eineindeutig in G' und G'' entsprechenden Pfade können deshalb einfach identifiziert werden.

Eigenschaften der Relation 'besser'

Lemma 12.4.5.2 (Quasiordnung)

Die Programmvergleichsrelation besser $\sqsubseteq_{\sim}$ ist eine Quasiordnung (d.h. reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch).

Lemma 12.4.5.3 (Verbesserung, Verb.-Neutralität)

Seien G und G' zwei Programme mit $G \vdash_\tau G'$ und $\tau \in AH \cup ERA$. Dann gilt:

1. $G \sim G'$, falls τ eine zulässige Anweisungshebung ist.
2. $G \sqsubset_{\not\sim} G'$, falls τ eine nichttriviale ($\neq Id$) zulässige Elimination redundanter Anweisungen ist.

...das heißt: Eliminationen bewirken umittelbar echte Verbesserungen, während Hebungen verbesserungsneutral sind, aber durch spätere Eliminationen als Effekte zweiter Ordnung mittelbar Verbesserungen ermöglichen können.

Beste (oder optimale) Programme

Sei G ein Programm.

Definition 12.4.5.4 (Gobal beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm $G^* \in \mathcal{U}^G_{T_{EPRA}}$ heißt global EPRA-best (oder global EPRA-optimal) gdw G^* ist besser als jedes andere Programm aus $\mathcal{U}^G_{T_{EPRA}}$:

$$\forall\, G' \in \mathcal{U}^G_{T_{EPRA}}.\ G' \sqsubseteq_{\approx} G^*$$

2. Bezeichne $\mathcal{G}^{opt}_{T_{EPRA}}(G)$ die Menge der global EPRA-besten (oder global EPRA-optimalen) Programme in $\mathcal{U}^G_{T_{EPRA}}$.

Lokal beste (oder optimale) Programme

Sei G ein Programm.

Definition 12.4.5.5 (Lokal beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm $G^* \in \mathcal{U}^G_{T_{EPRA}}$ heißt lokal EPRA-best gdw:

$$\forall\, G' \in \mathcal{U}^{G^*}_{T_{EPRA}}.\ G^* \sim G'$$

2. Bezeichne $\mathcal{G}^{lokopt}_{T_{EPRA}}(G)$ die Menge der lokal EPRA-besten (oder lokal EPRA-optimalen) Programme in $\mathcal{U}^G_{T_{EPRA}}$.

Intuitiv: Ein Programm ist lokal optimal, wenn beliebige weitere (Folgen von) Elementartransformationen nicht mehr zu einer echten Verbesserung führen, sondern höchstens noch Anweisungen durch Hebungen an anderen Programmstellen platzieren.

Vergleichsrelation 'besser' für Transf.-Folgen

Sei G ein Programm.

Definition 12.4.5.6 (EPRA-bessere Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation) $\tau \in \mathsf{T}^G_{EPRA}$ heißt EPRA-besser für G als $\tau' \in T^G_{EPRA}$ gdw: $G_{\tau'} \sqsubseteq\!\!\!\sim G_\tau$.

Global, lokal beste Transformationsfolgen

Definition 12.4.5.7 (Global EPRA-beste Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation) $\tau \in T^G_{EPRA}$ heißt global EPRA-best für G gdw τ ist EPRA- besser für G als jede andere Transformation in T^G_{EPRA}.

Definition 12.4.5.8 (Lokal EPRA-beste Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation) $\tau \in T^G_{EPRA}$ heißt lokal EPRA-best für G gdw keine EPRA- Verlängerung von τ ist echt EPRA-besser als τ, d.h. τ ist genauso gut wie jede Verlängerung von τ.

Mengen bester (oder optimaler) Transf.-Folgen

Definition 12.4.5.9 (Beste (oder optimale) Transf.)

Wir bezeichnen mit $T^{opt}_{EPRA}(G)/T^{lokopt}_{EPRA}(G)$ die Menge der global/lokal EPRA-besten (oder EPRA-optimalen) Transformationen für G.

Globale Optimalität

...von Programmen und Transformationen impliziert ihre lokale Optimalität.

Proposition 12.4.5.10

1. Global EPRA-optimale Programme sind lokal EPRA-optimal.
2. Global EPRA-optimale Transformationen sind lokal EPRA-optimal.

Universumskorrekt, universumsoptimal

Sei G ein Programm.

Lemma 12.4.5.11 (Universumskorrekt)

Ist $\tau \in T^G_{EPRA}$, so ist $G_\tau \in \mathcal{U}^G_{T_{EPRA}}$.

Lemma 12.4.5.12 (Universumsoptimal)

Ist $\tau \in T^G_{EPRA}$ global EPRA-best für G, so ist $G_\tau \in \mathcal{G}^{opt}_T(G)$ global EPRA-best.

Kapitel 12.4.6

EPRA: Optimalität

Maximale Transformationsfolgen

Sei G ein Programm.

Definition 12.4.6.1 (Maximale Transf.-Folge)

Eine unendliche oder endliche Transformationsfolge τ für G mit $\tau \in T^G_{EPRA}$ und

- $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ oder
- $\tau = (\tau_i)_{i \leq k}$, $k \in \mathbb{N}$

heißt maximal, wenn τ lokal optimal ist (d.h. weitere Eliminationstransformationen lassen das Programm G_τ unverändert, weitere Senkungstransformationen platzieren lediglich Anweisungen an anderen Programmstellen ohne dadurch neue Eliminationsmöglichkeiten zu eröffnen).

Faire Transformationsfolgen

Sei G ein Programm.

Definition 12.4.6.2 (Faire Transf.-Folge)

Eine Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau \in T^G_{EPRA}$, für G heißt fair, wenn

$$\forall\, k \in \mathbb{N}.\ (\tau_i)_{i \leq k} \text{ nicht maximal } \Rightarrow\ \exists k' > k.\ G_{(\tau_i)_{i \leq k}} \stackrel{\sqsubset}{\not\sim} G_{(\tau_i)_{i \leq k'}}$$

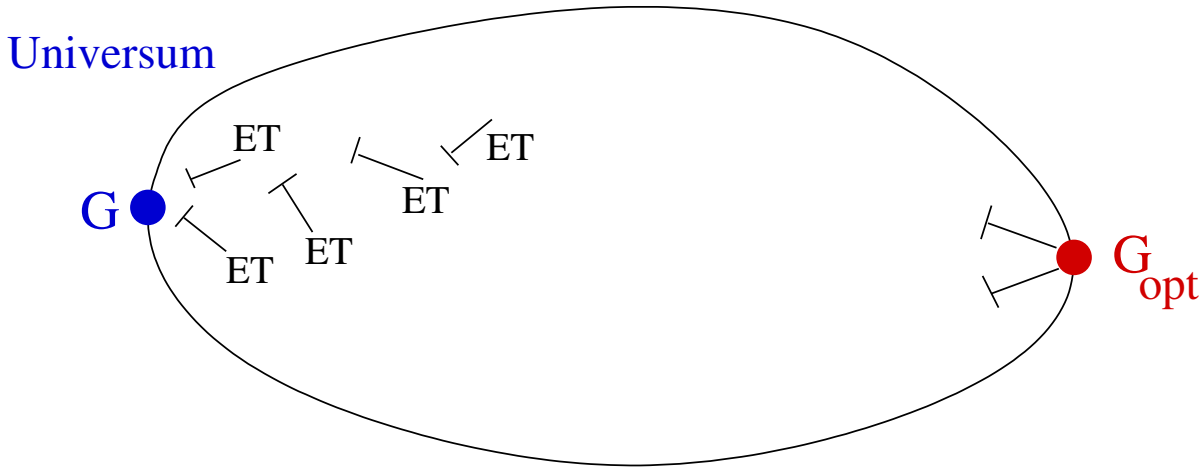
Lemma 12.4.6.3 (Maximale Transf.-Folge fair)

Maximale Transformationsfolgen für G sind fair.

Globale EPRA-Optimalität

Theorem 12.4.6.4 (Globale EPRA-Optimalität)

1. Jede faire EPRA-Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ für ein Programm G ist global optimal, d.h. endet in einem bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programm $G_{opt} \in \mathcal{G}^{opt}_{T_{EPRA}}(G)$.
2. Jede faire EPRA-Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ hat ein endliches Anfangsstück $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$ mit $G_{opt} \sim G_\tau \sim G_{\tau'}$



Beweis von Theorem 12.4.6.4

...analog zum Beweis von Theorem 12.3.7.4 in zwei Varianten: Über

- Monotonie, Dominanz und Fixpunkttheorem 11.2.9 (Variante 1).
- Konfluenz und Termination der Transformationsrelation, s. Theorem 12.4.6.5 (Variante 2).

EPTA/EPGA-T.-Relation: Konfluenz, Term.

Theorem 12.4.6.5 (Konfluenz, Terminierung)

Die EPRA-Transformationsrelation

- $\cdot \vdash_\tau \cdot, \tau \in \mathit{AH} \cup \mathit{ERA}$

ist (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken) konfluent und terminierend.

Determiniertheit maximaler Transformationen

Korollar 12.4.6.6 (Determiniertheit max. Transf.-F.)

Sind $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau' = (\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\tau, \tau' \in T^G_{EPRA}$, maximal (und damit fair) für G, so stimmen G_τ und $G_{\tau'}$ bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken überein, d.h. das finale Programm maximaler Transformationsfolgen ist determiniert

Korollar 12.4.6.7 (Endliche max. Transf.-Folge)

Ist $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau \in T^G_{EPRA}$, fair für G, so hat τ ein endliches Anfangsstück, das maximal für G ist, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$ maximal für G.

Endliche faire Transformationsfolgen

Theorem 12.4.6.8 (Endliche faire Transf.-Folge)

1. Eine Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\tau \in T^G_{EPRA}$, für G, die für jedes Anweisungsmuster Hebungs- und Eliminationstransformation nach höchstens endlich vielen Eliminations- und Hebungstransformationen für andere Anweisungsmuster wieder anwendet, ist fair.
2. Eine endliche Transformationsfolge für G ist maximal (und damit fair), wenn ein voller Zyklus von Hebungs- und Eliminationstransformationen für alle Anweisungsmuster keine echte Verbesserung mehr erbracht hat.

Korollar 12.4.6.9 (Existenz global opt. Transf.)

$$\forall\, G \in \mathcal{G}.\ T^{opt}_{EPRA}(G) \neq \emptyset$$

Existenz und Konstruktion

...global optimaler Programme und Transformationen.

Korollar 12.4.6.10 (Existenz global opt. Programme)

$$\forall\, G \in \mathcal{G}.\ \mathcal{G}^{opt}_{T_{EPRA}}(G) \neq \emptyset$$

Korollar 12.4.6.11 (Determiniertheit)

Bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen gilt:

$$|\mathcal{G}^{opt}_{T_{EPRA}}(G)| = 1$$

Korollar 12.4.6.12

Theorem 12.4.6.7 beschreibt konstruktiv und effektiv die Bildung endlicher maximaler (und damit fairer und optimaler) EPRA-Transformationsfolgen.

Kapitel 12.4.7

EPRA: Implementierung

Beobachtung

...um die Elementartransformationen von EPRA und EPRA selbst implementieren zu können, ist die Angabe von DFAs für folgende Aufgaben nötig (und ausreichend):

Datenflussanalysen zur Berechnung

- redundanter Anweisungen
- der Endpunkte von Anweisungshebungen

Redundante Anweisungsanalyse

...für knotenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionsknoten):

- Transp_n^α: Die Anweisung von Knoten n modifiziert weder die linksseitige Variable noch einen Operanden des rechtsseitigen Ausdrucks von α.
- Comp_n^α: Die Anweisung von Knoten n ist vom Muster α.

Übungsaufgabe: Red. Anweisungsanalyse

Spezifiziere das RAA-Gleichungssystem für die Erkennung redundanter Anweisungen:

$$\begin{aligned} \text{N-RED}_n^\alpha &= \ldots \\ \text{X-RED}_n^\alpha &= \ldots \end{aligned}$$

Anweisungshebungsanalyse

...für knotenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionsknoten):

- $\text{Hoistable}_n^\alpha$: Die Anweisung von Knoten n ist vom Anweisungsmuster α (und steht deshalb bereits am Anfang von n.
- Blocked_n^α: Die Hebung (oder Verschiebung) von α über die Anweisung am Knoten n hinweg wird von dieser blokkiert.

Übungsaufgabe: Anweisungshebungsanalyse

Spezifiziere das AHA-Gleichungssystem für Anweisungshebung:

$$\begin{aligned} \text{N-HOIST}_n^\alpha &= \ldots \\ \text{X-HOIST}_n^\alpha &= \ldots \end{aligned}$$

sowie die Prädikate für die Endpunkte (oder Einsetzungspunkte) von Anweisungshebungen:

$$\begin{aligned} \text{N-Insert}_n^\alpha &=_{df} \ldots \\ \text{X-Insert}_n^\alpha &=_{df} \ldots \end{aligned}$$

Übungsaufgabe

Wie lauten die Spezifikationen der Analysen zur

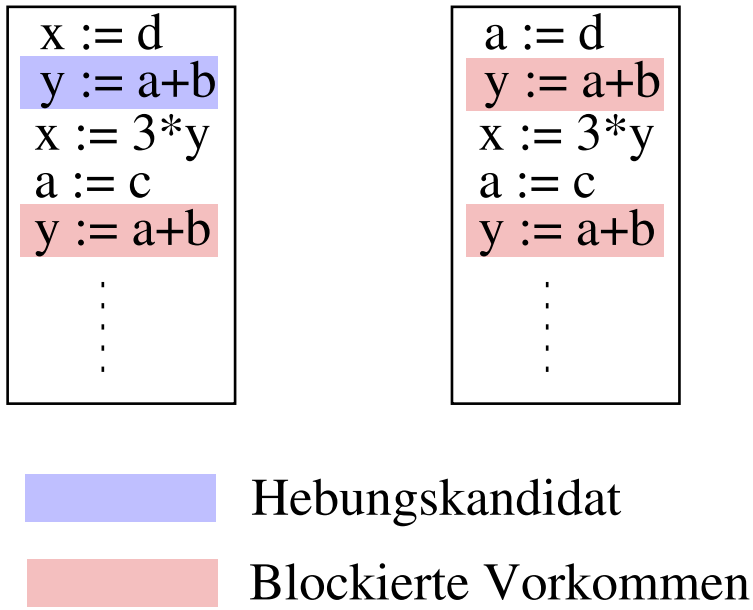
- Erkennung redundanter Anweisungen
- Hebung von Anweisungen

im Stil von Kapitel 7?

Gib die entsprechenden Spezifikationstupel an.

Anmerkung zu Basisblock-Graphen (1)

...wenn sie existieren, sind Hebungskandidaten in Basisblöcken eindeutig bestimmt:



Nur das blau markierte Vorkommen von `y := a+b` ist ein Hebungskandidat; die pink markierten Vorkommen von `y := a+b` sind lokal in den Basisblöcken blockiert.

Anmerkung zu Basisblock-Graphen (2)

Hebungsanalyse

- Die Eindeutigkeit von Hebungskandidaten erlaubt die Hebungsanalyse unmittelbar (ohne Änderungen oder Anpassungen) von Instruktions- auf Basisblockgraphen zu übertragen.

Redundanzanalyse

- Anpassungen zur Übertragung der Analyse von Instruktions- auf Basisblockgraphen sind erforderlich; siehe Anhang B für Details.

Kapitel 12.5

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 12 (1)

Ras Bodik, Rajiv Gupta. *Partial Dead Code Elimination using Slicing Transformations*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'97 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'97), ACM SIGPLAN Notices 32(6):159-170, 1997.

L. Feigen, D. Klappholz, R. Casazza, X. Xue. *The Revival Transformation*. In Conference Record of the 21st ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'94), 1994.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 12 (2)

Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Partial Dead Code Elimination*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'94 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'94), ACM SIGPLAN Notices 29(6):147-158, 1994.

Ronald J. Mintz, Gerald A. Fisher, Micha Sharir. *The Design of a Global Optimizer*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'79 Symposium on Compiler Construction (SoCC'79), ACM SIGPLAN Notices 14(8):226-234, 1979.

Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Partial Dead Code Elimination Using Extended Value Graph*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 179-193, 1999.

Kapitel 13

Transformationskombinationen

Kapitel 13.1

EPTRA: EPTA/EPRA-Kombination

Kapitel 13.1.1

EPTA, EPRA: Grundtransformationen

Motivation

...konzeptuell können wir EPTA und EPRA als 'Summe' von je zwei fair wiederholt angewendeter Elementartransformationen verstehen:

- EPTA $= (\mathrm{AS} + \mathrm{ETA})^*$
- EPRA $= (\mathrm{AH} + \mathrm{ERA})^*$

Das legt nahe, auch die 'Summe' aller vier fair wiederholt angewendeter Elementarfunktionen als Verfahrenskombination einzuführen für die Elimination partiell toter und redundanter Anweisungen (EPTRA) :

- EPTRA $= (\mathrm{AS} + \mathrm{ETA} + \mathrm{AH} + \mathrm{ERA})^*$

Erwartung:

- EPTRA ist mächtiger als EPTA und EPRA für sich!

Zur Wiederholung

Bezeichne:

- $T^G_{AS,ETA,AH,ERA} = \{\tau \mid \tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}((AS + ETA + AH + ERA)^*)\}$

die Menge aller Transformationsfolgen aus zulässigen Anweisungssenkungen, -hebungen und Eliminationen toter oder redundanter Anweisungen für ein Programm G.

Geht G aus dem Kontext hervor, schreiben wir statt $T^G_{AS,ETA,AH,ERA}$ einfacher $T_{AS,ETA,AH,ERA}$.

Ist $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Transformationsfolge, so bezeichne:

- $(\tau_i)_{i\leq k}$ das Anfangsstück von τ bis zum Index k einschließlich.
- τ_j die Elementartransformation mit Index j von τ .
- G_τ, $G_{(\tau_i)_{i\leq k}}$ und $G_{(\tau_j)}$ diejenigen Programme, die aus G durch Anwendung von τ, $(\tau_i)_{i\leq k}$, auf G entstehen.

EPTA/EPRA: Konfluenz, Terminierung

...für die EPTA/EPRA-Transformationsrelationen gilt (s. Kapitel 12.3 und 12.4):

Theorem 13.1.1.1 (Konfluenz, Terminierung)

Die EPTA- und EPRA-Transformationsrelationen

1. $\cdot \vdash_\tau \cdot, \tau \in AS \cup ETA$ (EPTA)
2. $\cdot \vdash_\tau \cdot, \tau \in AH \cup ERA$ (EPRA)

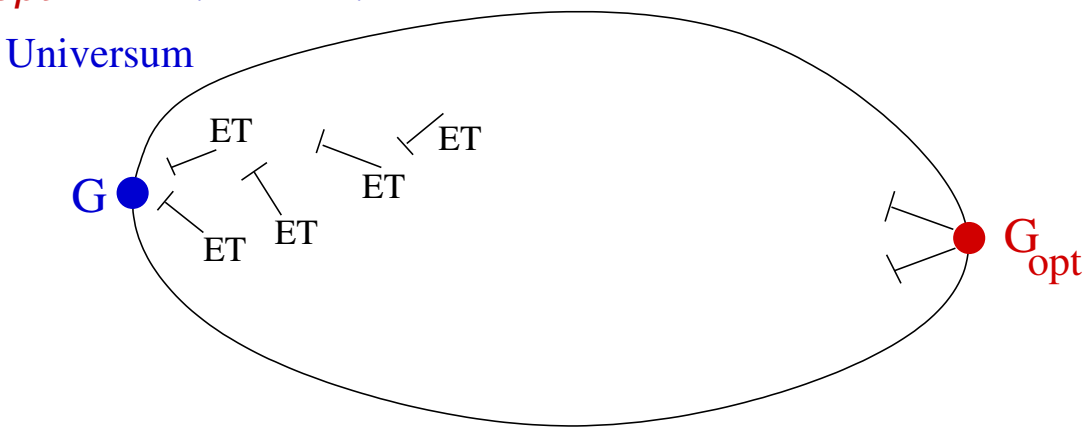
sind (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken) konfluent und terminierend.

EPTA/EPRA: Globale Optimalität

...für faire EPTA/EPRA-Transformationsfolgen gilt (s. Kapitel 12.3 und 12.4):

Theorem 13.1.1.2 (Globale EPTA-/EPRA-Opt.)

1. Jede faire EPTA- und EPRA-Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist global optimal, d.h. endet in einem bis auf irrelevante Umsortierungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programm $G_{opt} \in \mathcal{G}_T^{opt}(G)$.
2. Jede faire EPTA- und EPRA-Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ hat ein endliches Anfangsstück $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$ mit $G_{opt} \sim G_\tau \sim G_{\tau'}$.



Kapitel 13.1.2

EPTRA: Transformation

EPTRA-Transformationsfolgen

Sei G ein Programm.

Definition 13.1.2.1 (EPTRA-Transformationsfolge)

1. Eine EPTRA-Transformationsfolge (oder EPTRA-Transformation) ist eine beliebige Abfolge zulässiger Anweisungssenkungen, -hebungen und Eliminationen toter oder redundanter Anweisungen.
2. T^G_{EPTRA} bezeichne die Menge aller EPTRA-Transformation(sfolg)en für G, in Zeichen:

$$T^G_{EPRTA} = T^G_{AS,ETA,AH,ERA}$$

3. Ist $\tau \in T^G_{EPTRA}$, so bezeichnet G_τ das Programm, das τ angewendet auf G liefert.

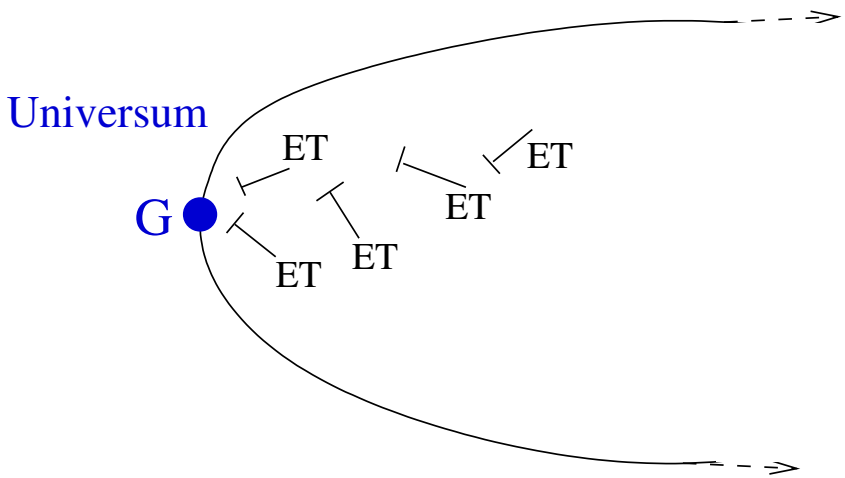
Transformationsrelation, Programmuniversum

- Transformationsrelation:

  $G \vdash_\tau G'$, $\tau \in AS \cup ETA \cup AH \cup ERA$: G' resultiert aus G durch Anwendung einer zulässigen Senkungs-, Hebungs- oder Eliminationstransformation toter oder redundanter Anweisungen.

- Induziertes Programmuniversum:

  $\mathcal{U}^G_{T_{EPRTA}} =_{df} \{G' \mid G \vdash_{(\tau_i)_{i \le k}} G', \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T^G_{EPTRA}, k \in \mathbb{N}\}$: Das von G durch die Präfixe der Transformationsfolgen $\tau \in T^G_{EPTRA}$ aufgespannte Universum.



Kapitel 13.1.3

EPTRA: Besser, best, optimal

Vergleichsrelation 'besser' für Programme

Sei $G = (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ ein Programm und seien $G', G'' \in \mathcal{U}^G_{T_{EPTRA}}$.

Definition 13.1.3.1 (Besser)

G' heißt besser als G'' (in Zeichen: $G'' \sqsubseteq G'$) gdw G' ist besser als G'' i.S.v. Definition 12.3.6.1, d.h.:

$$\forall\, p \in \mathbf{P}_G[\mathbf{s}, \mathbf{e}]\ \forall\, \alpha \in \mathcal{AM}.\ \#_\alpha(p_{G'}) \leq \#_\alpha(p_{G''})$$

wobei $\#_\alpha(p_{G'})$ und $\#_\alpha(p_{G''})$ die Anzahl von Anweisungen des Anweisungsmusters α auf p in G' bzw. G'' bezeichnen.

Eigenschaften der Relation 'besser'

Lemma 13.1.3.2 (Quasiordnung)

Die Programmvergleichsrelation besser $\sqsubseteq_{\approx}$ ist eine Quasiordnung (d.h. reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch).

Lemma 13.1.3.3 (Verbesserung, Verb.-Neutralität)

Seien G und G' zwei Programme mit $G \vdash_\tau G'$ und $\tau \in AS \cup ETA \cup AS \cup ERA$. Dann gilt:

1. $G \sim_T G'$, falls τ eine zulässige Anweisungssenkung oder -hebung ist.
2. $G \sqsubset_{\not\approx T} G'$, falls τ eine nichttriviale ($\neq Id$) zulässige Elimination toter oder redundanter Anweisungen ist.

...d.h.: Eliminationen bewirken echte Verbesserungen, während Senkungen und Hebungen verbesserungsneutral sind, aber durch spätere Eliminationen als Effekte zweiter Ordnung mittelbar Verbesserungen ermöglichen können.

Global beste (oder optimale) Programme

Sei G ein Programm.

Definition 13.1.3.4 (Global beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm $G^* \in \mathcal{U}^G_{T_{EPTRA}}$ heißt global EPTRA-best (oder global EPTRA-optimal) gdw G^* ist besser als jedes andere Programm aus $\mathcal{U}^G_{T_{EPTRA}}$:

$$\forall\, G' \in \mathcal{U}^G_{T_{EPTRA}}.\ G' \sqsubseteq_{\approx} G^*$$

2. Bezeichne $\mathcal{G}^{opt}_{T_{EPTRA}}(G)$ die Menge der global EPTRA-besten (oder global EPTRA-optimalen) Programme in $\mathcal{U}^G_{T_{EPTRA}}$.

Lokal beste (oder optimale) Programme

Sei G ein Programm.

Definition 13.1.3.5 (Lokal beste (optimale) Prg.)

1. Ein Programm $G^* \in \mathcal{U}^G_{T_{EPTRA}}$ heißt lokal EPTRA-best (oder lokal EPTRA-optimal) gdw:

$$\forall\, G' \in \mathcal{U}^G_{T_{EPTRA}}.\ G' \approx G^*$$

2. Bezeichne $\mathcal{G}^{lokopt}_{T_{EPTRA}}(G)$ die Menge der lokal EPTRA-besten (oder lokal EPTRA-optimalen) Programme in $\mathcal{U}^G_{T_{EPTRA}}$.

Intuitiv: Ein Programm ist lokal optimal, wenn beliebige weitere Anwendungsfolgen von Elementartransformationen nicht mehr zu einer echten Verbesserung führen, sondern nur Anweisungen durch Senkungen oder Hebungen an anderen Programmstellen platzieren.

Vergleichsrelation 'besser' für Transf.-Folgen

Sei G ein Programm.

Definition 13.1.3.6 (EPRTA-bessere Transf.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation) $\tau \in \mathsf{T}^G_{EPRTA}$ heißt EPTRA-besser für G als $\tau' \in T_{EPTRA}$ gdw: $G_{\tau'} \sqsubseteq\!\!\!\sim G_\tau$

Definition 13.1.3.7 (Global, lokal EPTRA-beste T.)

Eine Transformationsfolge (oder Transformation) $\tau \in T^G_{EPTRA}$ heißt

1. global EPTRA-best für G gdw τ ist EPTRA-besser für G als jede andere Transformation in T^G_{EPTRA}.
2. lokal EPTRA-best für G gdw keine EPTRA-Verlängerung von τ ist echt EPTRA-besser als τ, d.h. τ ist genauso gut wie jede Verlängerung von τ.

Kapitel 13.1.4

EPTRA: Optimalität

EPTRA: Nicht-Konfluenz, Termination

...für die EPTRA-Transformationsrelation gilt:

Theorem 13.1.4.1 (Nicht-Konfluenz, Terminierung)

Die EPTRA-Transformationsrelation

- $\cdot \vdash_\tau \cdot, \tau \in AS \cup ETA \cup AH \cup ERA$ (EPTRA)

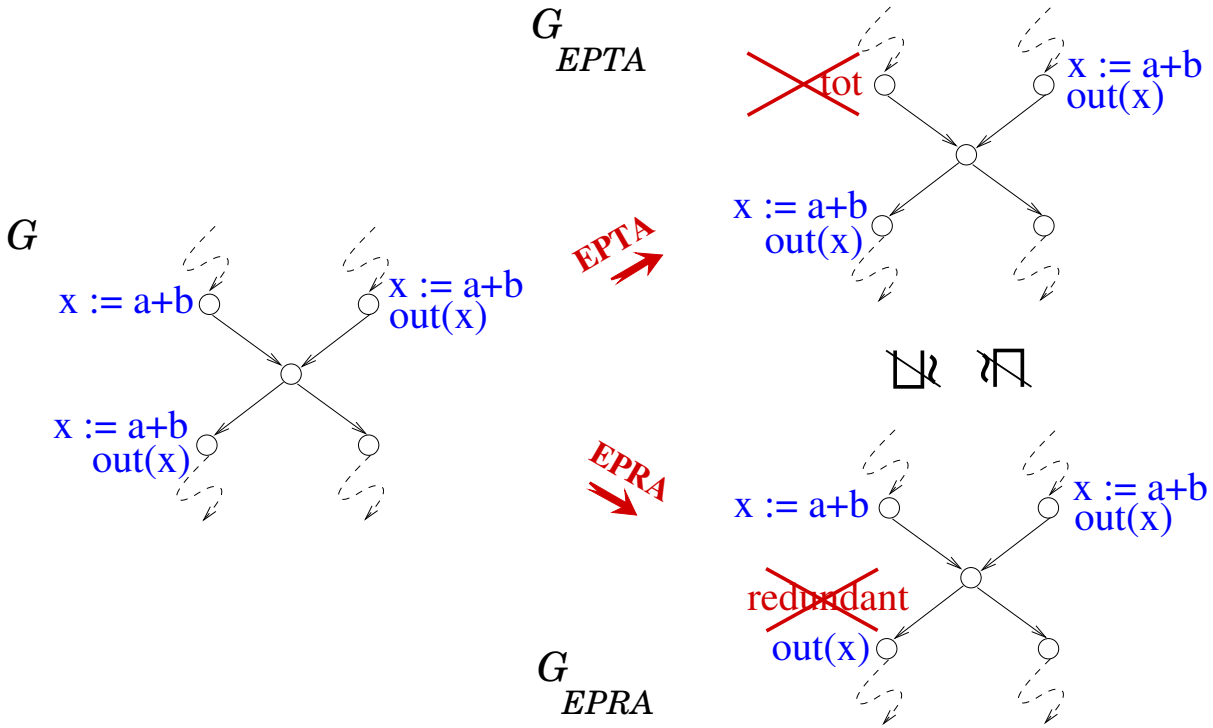
ist (bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen im Programm) terminierend, aber (i.a.) nicht konfluent.

Beachte: Irrelevante Umsortierungen sind nicht länger auf Basisblöcke beschränkt, sondern können das gesamte Programm betreffen, da sowohl irrelevante Hebungen als auch Senkungen über Basisblockgrenzen hinaus möglich sind.)

Beweisskizze zu Theorem 13.1.4.1

...durch Angabe eines Beispiels:

Betrachte die Effekte von EPTA und EPRA auf Programm G:



Offenbar gilt: G_{EPTA} und G_{EPRA} sind unvergleichbar bezüglich der Relation besser $\sqsubseteq$; es gilt:

$$G_{EPTA} \not\sqsubseteq G_{EPRA} \;\wedge\; G_{EPRA} \not\sqsubseteq G_{EPTA}$$

EPTRA: Lokale, keine globale Optimalität

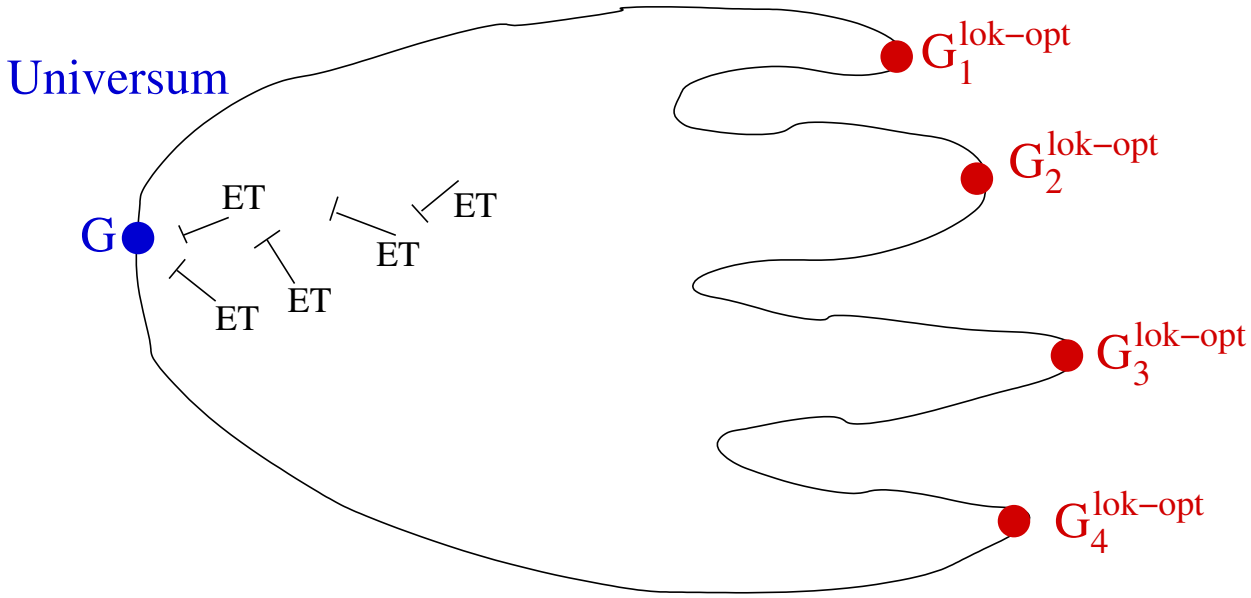
...für faire EPTRA-Transformationsfolgen gilt:

Theorem 13.1.4.2 (Lokale EPTRA-Optimalität)

1. Jede faire EPTRA-Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist lokal optimal, d.h. endet in einem bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen eindeutig bestimmten lokal optimalen Programm $G_{lokopt} \in \mathcal{G}^{lokopt}_{EPTRA}(G)$.
2. Jede faire bis auf irrelevante Umsortierungen in einem Programm $G_{lokopt} \in \mathcal{G}^{lokopt}_{EPTRA}(G)$ endende EPTRA-Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ hat ein endliches Anfangsstück $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$ mit $G_{lokopt} \sim G_\tau \sim G_{\tau'}$.
3. Global optimale EPTRA-Transformationsfolgen und -Programme existieren i.a. nicht.

EPTRA: Verlust von Konfluenz, globaler Opt.

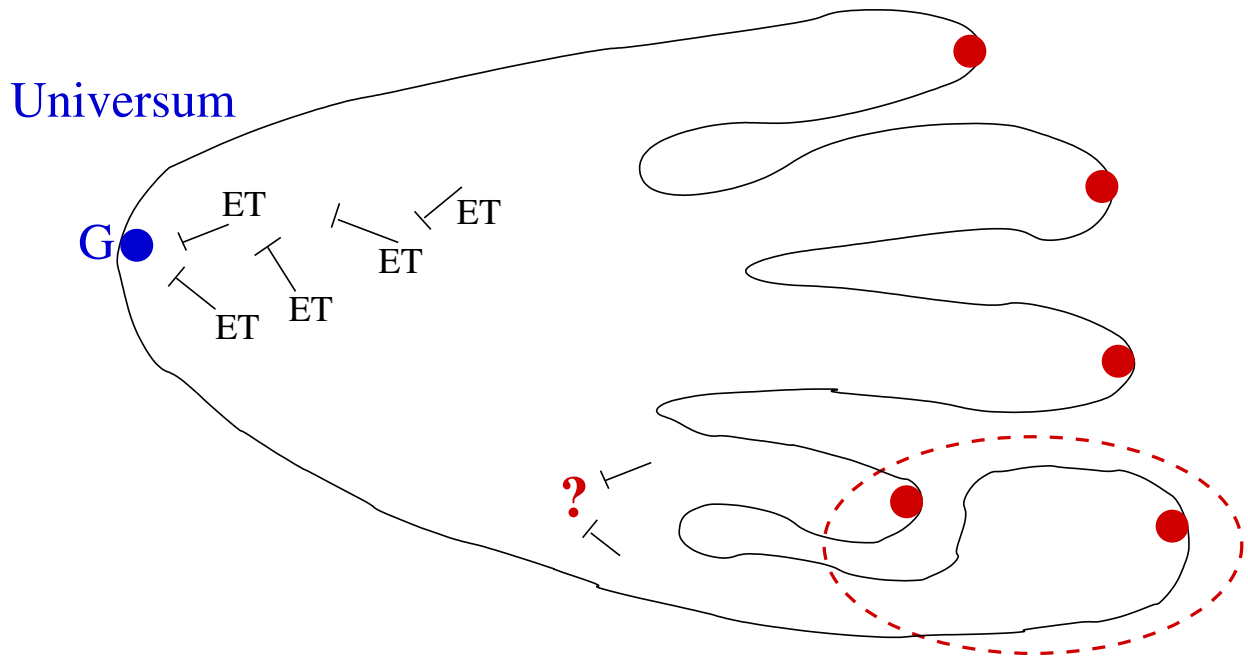
...Konfluenz und globale Optimalität sind für EPTRA verloren!



Lokale Optimalität bleibt für EPTRA zumindest erhalten!

EPTRA: Verlust auch lokaler Optimalität

...allerdings möglich in speziellen Szenarien aufgrund spezieller Instruktionen (konkret: High-Performance Fortran):



Für Details siehe:

- Jens Knoop, Eduard Mehofer. Distribution Assignment Placement: Effective Optimization of Redistribution Costs. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 13(6):628-647, 2002.

Kapitel 13.1.5

EPTRA: Purismus vs. Pragmatismus

Purismus vs. Pragmatismus

...aus theoretischer Sicht ist das lokale Optimalitätsergebnis für

- EPTRA = (AS + ETA +AH + ERA)*

weniger elegant und befriedigend als die globalen Optimalitätsergebnisse für

- EPRA = (AH + ERA)*
- EPTA = (AS + ETA)*

Aus pragmatischer Sicht ist allerdings

- EPTRA

EPRA ebenso wie EPTA überlegen, weil wirkmächtiger; im Fall von High-Performance Fortran durch die Einsparung besonders rechenaufwändiger unnötiger Distributionsanweisungen sogar in der Größenordnung mehrerer hundert Prozent!

EPTRA wirkmächtiger als EPRA und EPTA

Für die bis auf irrelevante Umsortierungen in Programmen bzw. Basisblöcken eindeutig bestimmten lokal bzw. global optimalen Programme

$G^{lokopt}_{EPTRA} \in \mathcal{G}^{lokopt}_{T_{EPTRA}}(G)$, $G^{opt}_{EPRA} \in \mathcal{G}^{opt}_{T_{EPRA}}(G)$ und $G^{opt}_{EPTA} \in \mathcal{G}^{opt}_{T_{EPTA}}(G)$

gilt: G^{lokopt}_{EPTRA} ist besser (i.S.v. Definition 12.3.6.1) als G^{opt}_{EPRA} und G^{opt}_{EPTA}:

Lemma 13.1.5.1 (EPTRA besser als EPRA, EPTA)

$$\forall\, G \in \mathcal{G}.\ G^{opt}_{EPRA} \sqsubseteq_{\approx} G^{lokopt}_{EPTRA} \ \wedge\ G^{opt}_{EPTA} \sqsubseteq_{\approx} G^{lokopt}_{EPTRA}$$

Übungsaufgabe

Zeige, dass die Erwartung, dass EPTRA mächtiger ist als EPTA und EPRA für sich, begründet ist:

Finde dazu ein Programm G, so dass EPTRA angewendet auf G zu einem performanteren Programm führt als EPTA und EPRA jeweils für sich alleine.

Kapitel 13.2

EPRAA: EPRA/EPRAd-Kombination

Kapitel 13.2.1

EPRA, EPRAd: Grundtransformationen

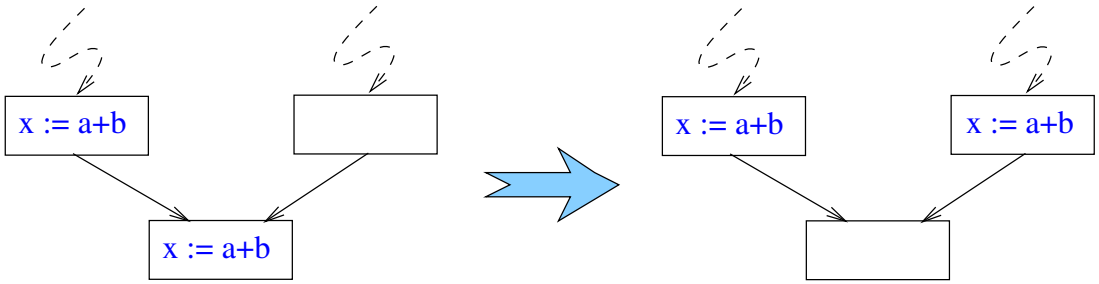
EPRA und EPRAd

...zwei Grundtransformationen zur Elimination redundanten Berechnungsaufwands:

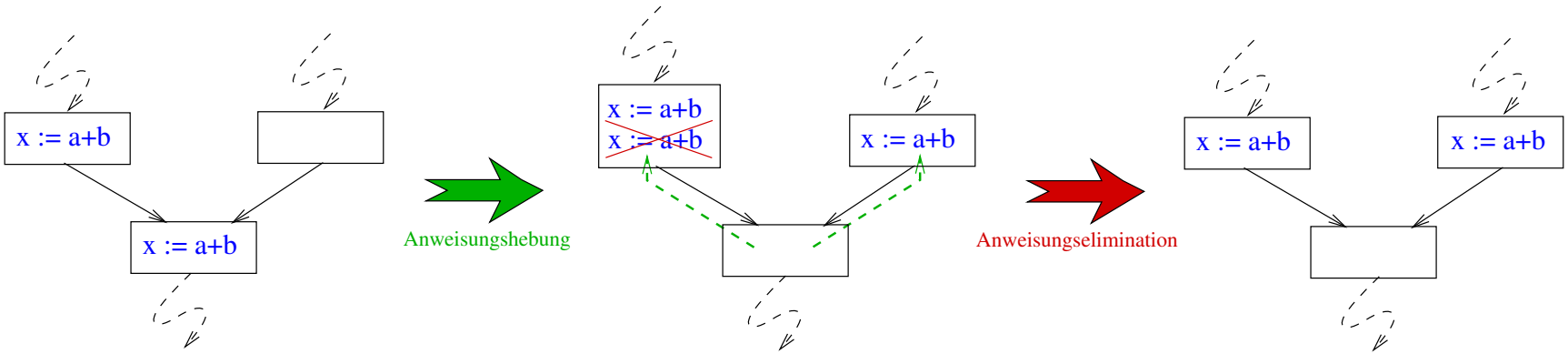
- Elimination partiell redundanter Ausdrücke (EPRAd)
  - $\rightsquigarrow$ Partially Redundant Expression Elimination (PREE)
  - $\rightsquigarrow$ Expression Motion (EM)
- Elimination partiell redundanter Anweisungen (EPRA)
  - $\rightsquigarrow$ Partially Redundant Assignment Elimination (PRAE)
  - $\rightsquigarrow$ Assignment Motion (AM)

Elimination partiell redundanter Anweisungen

Das EPRA-Grundmuster:

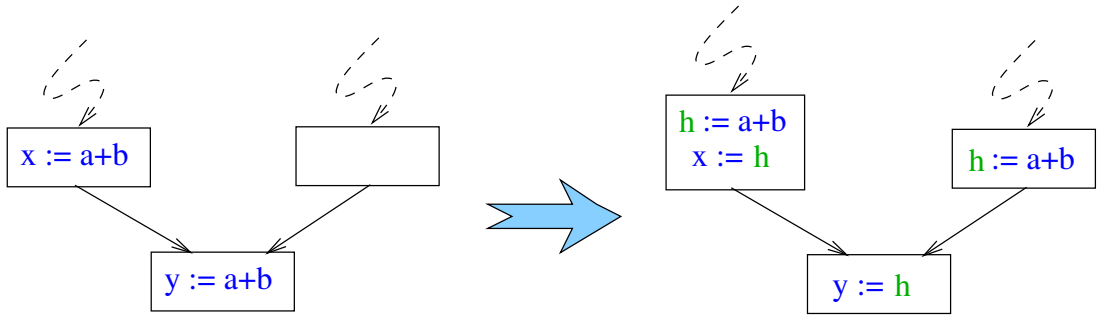


Die konzeptuelle EPRA-Verfahrensidee:

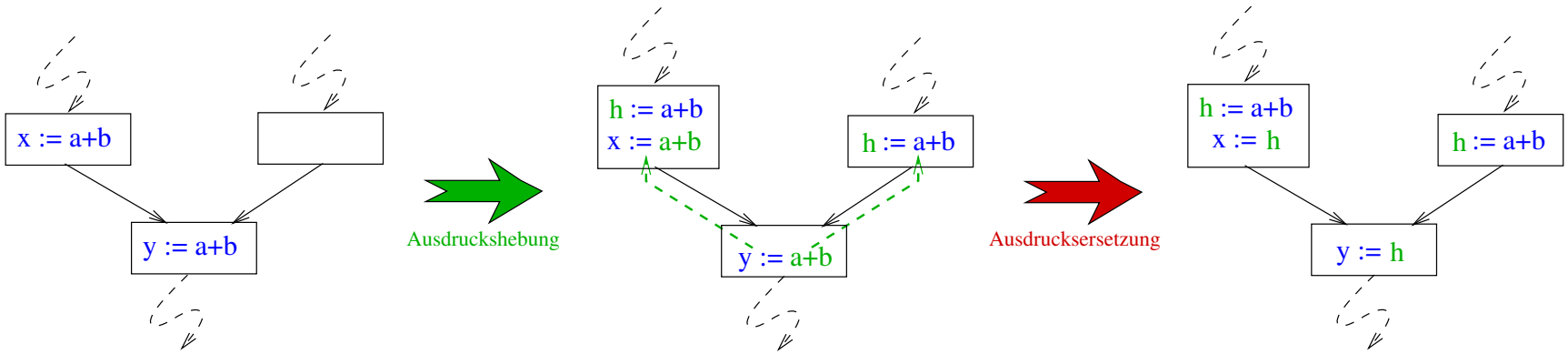


Elimination partiell redundanter Ausdrücke

Das EPRAd-Grundmuster:

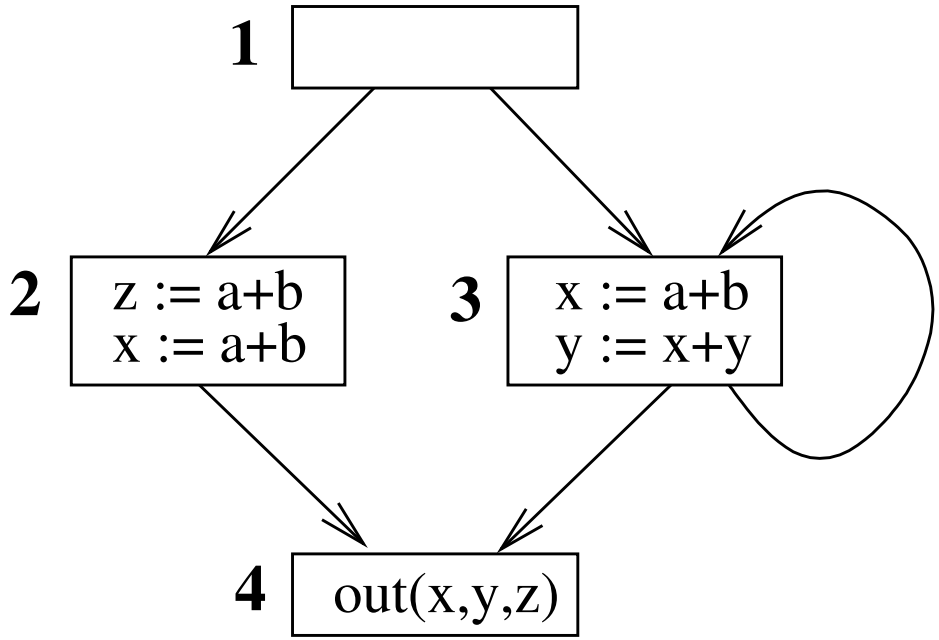


Die konzeptuelle EPRAd-Verfahrensidee:



Ein gemeinsames Beispiel

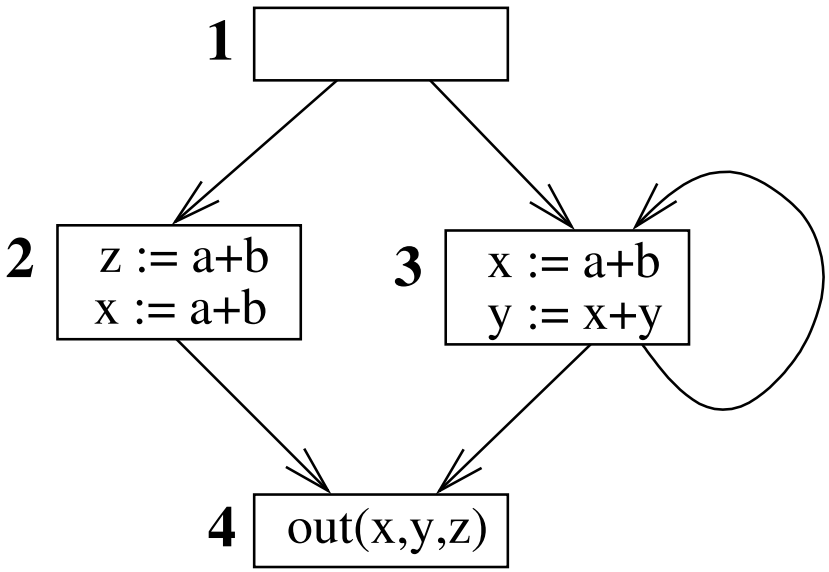
...für die Illustration der verschiedenen Transformationseffekte:



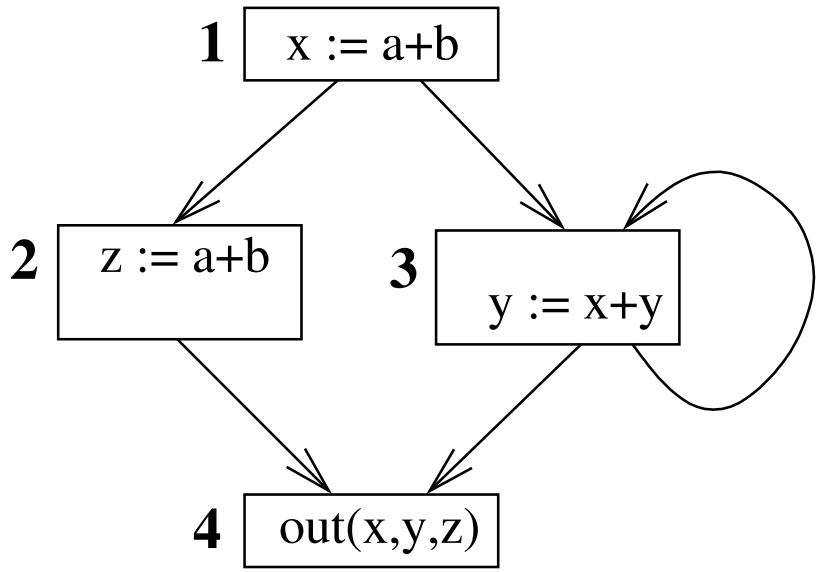
Elimination partiell redundanter Anweisungen

...der EPRA-Effekt auf das gemeinsame Beispiel:

Ausgangsprogramm



Optimiertes Programm

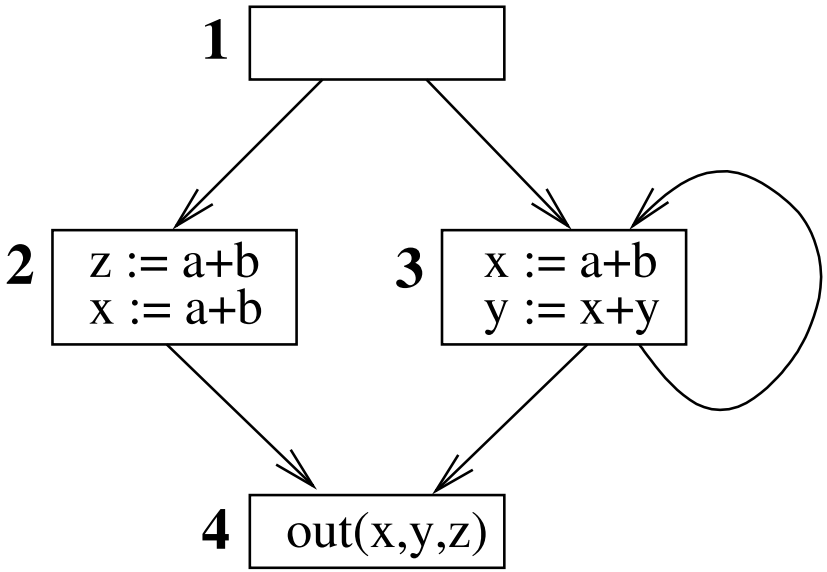


Beachte: Wären die kritischen Kanten $(1,3)$ und $(3,3)$ gespalten, würden maximale EPRA-Transformationen die Anweisung `y := x+y` vom Knoten 3 in die synthetischen Knoten $S_{1,3}$ und $S_{3,3}$ schieben, was bezüglich der Relation 'besser' keinen Unterschied zum obigen optimierten Programm machte.

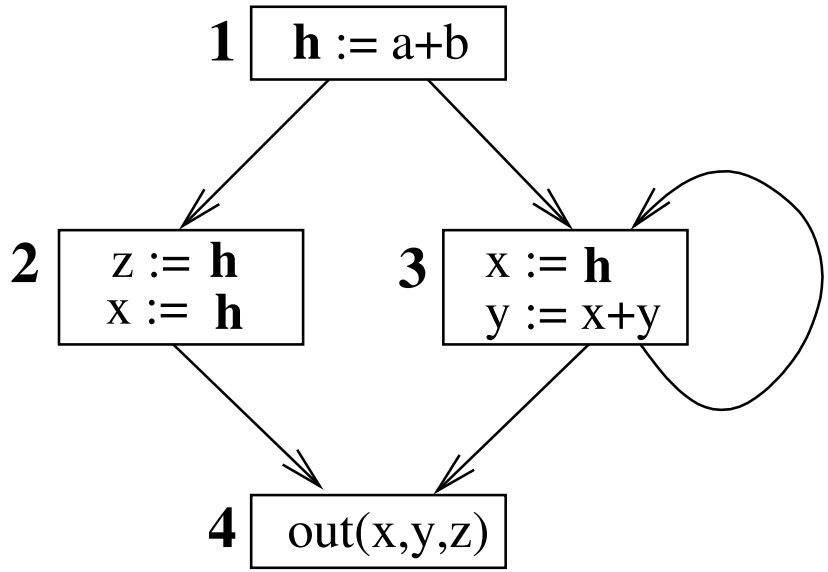
Elimination partiell redundanter Ausdrücke

...der EPRAd-Effekt auf das gemeinsame Beispiel:

Ausgangsprogramm



Optimiertes Programm



Beachte: Der Term x+y ist nicht schleifeninvariant. Merken seines Wertes in einer Hilfsvariablen und Wiederbenutzung des gemerkten Werts führt deshalb nicht zu einer Verbesserung.

Globale Optimalität d. Grundtransformationen

...konzeptuell können die

- Elimination partiell redundanter Anweisungen (EPRA)
- Elimination partiell redundanter Ausdrücke (EPRAd)

im Sinne folgender regulär-ähnlicher Ausdrücke verstanden werden:

- EPRA $= (\mathrm{AH} + \mathrm{ERA})^*$
- EPRAd $= \mathrm{AdH}_{max} * \mathrm{ETRAd}_{max} * (\mathrm{AdS}_{max})^k,\ k \in \{0, 1\}.$

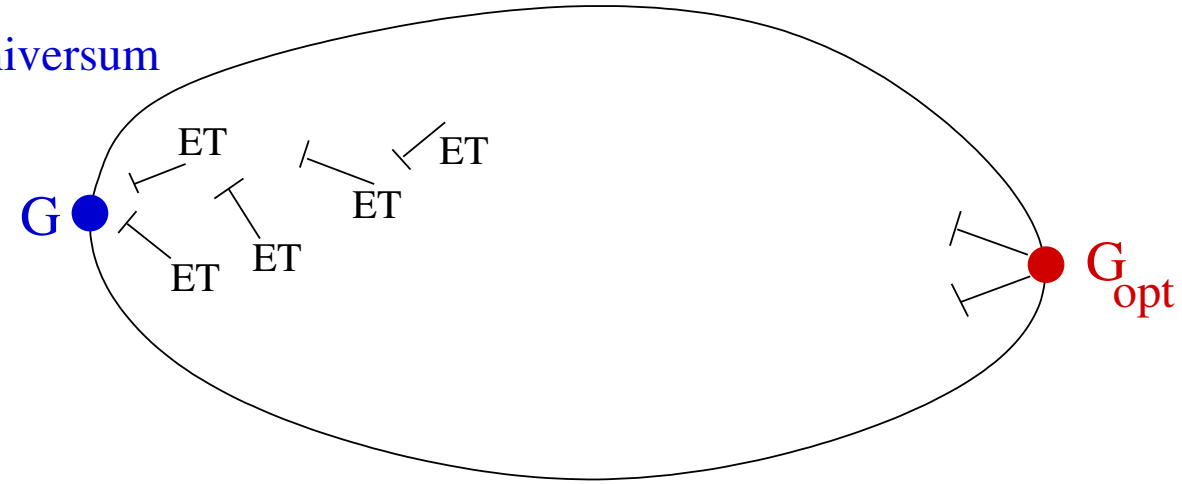
Beachte: EPRAd ist anders als EPRA frei von Effekten zweiter Ordnung: Eine maximale Ausdruckshebung (oder Vorziehen) gefolgt von einer anschließenden einmaligen Elimination total redundanter Ausdrücke und einer optionalen berechnungsneutralen maximalen Zurückschiebung liefert deshalb bereits die bestmögliche Verbesserung und optional geringste Zahl an Hilfsvariableninitialisierungen und -lebenszeiten.

Globale Optimalität von EPRA

...für EPRA gilt (s. Kapitel 12.4):

Theorem 13.2.1.1 (Globale EPRA-Optimalität)

1. Jede faire EPRA-Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ für ein Programm G ist global optimal, d.h. endet in einem bis auf irrelevante Umsortierungen von Anweisungen in Basisblöcken eindeutig bestimmten global optimalen Programm $G_{opt} \in \mathcal{G}^{opt}_{T_{EPRA}}(G)$.
2. Jede faire EPRA-Transformationsfolge $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ hat ein endliches Anfangsstück $\tau' = (\tau_i)_{i \leq k}$ mit $G_{opt} \sim G_\tau \sim G_{\tau'}$



Globale Optimalität von EPRAd

...für EPRAd gilt (s. Vorlesung 185.A04 Optimierende Übersetzer):

Theorem 13.2.1.2 (Globale Berechnungsoptimalität)

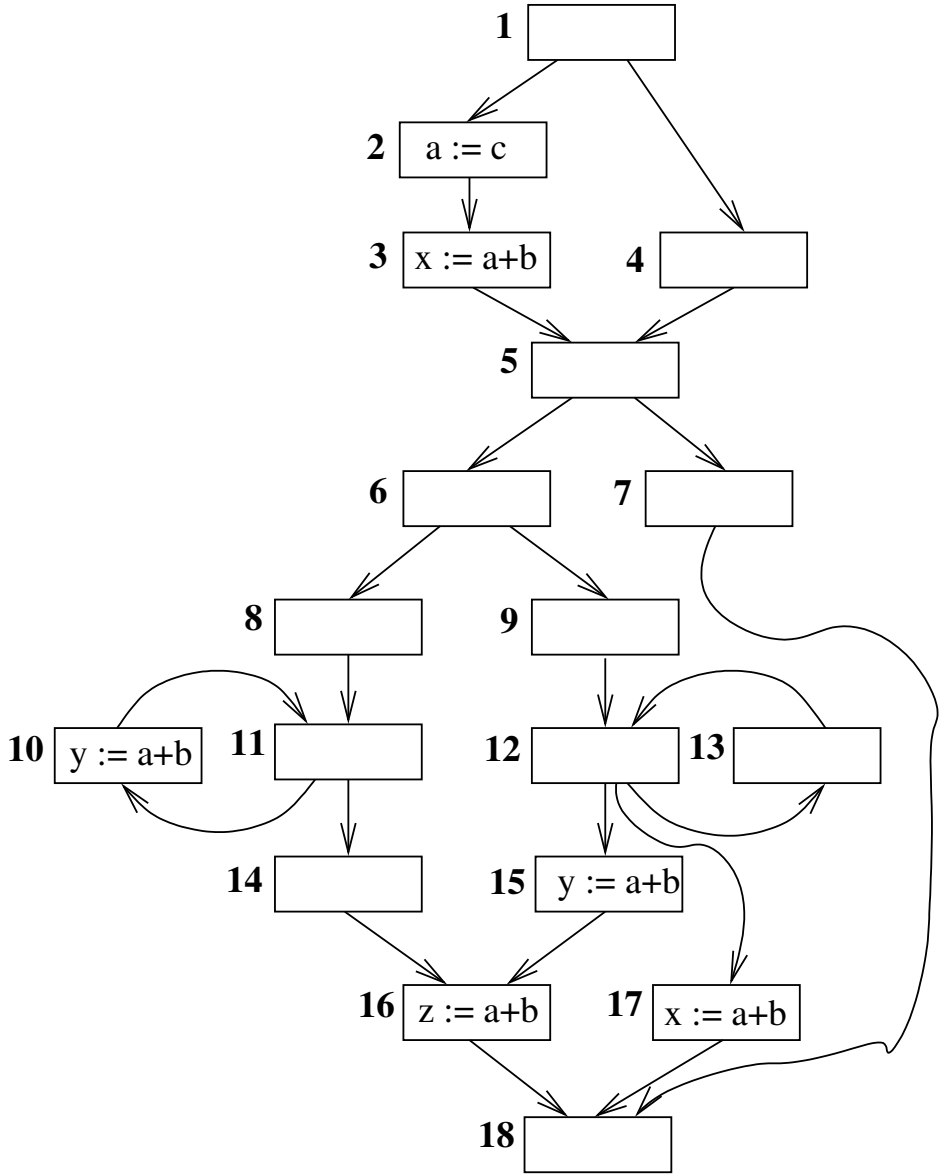
Initialisieren der Hilfsvariablen an den frühest möglichen sicheren Programmpunkten führt zu global besten berechnungsoptimalen Programmen.

Theorem 13.2.1.3 (Globale Lebenszeitoptimalität)

Initialisieren der Hilfsvariablen an den spätest möglichen berechnungsoptimalen Programmpunkten führt zu global besten berechnungs- und hilfsvariablenlebenszeitoptimalen Programmen.

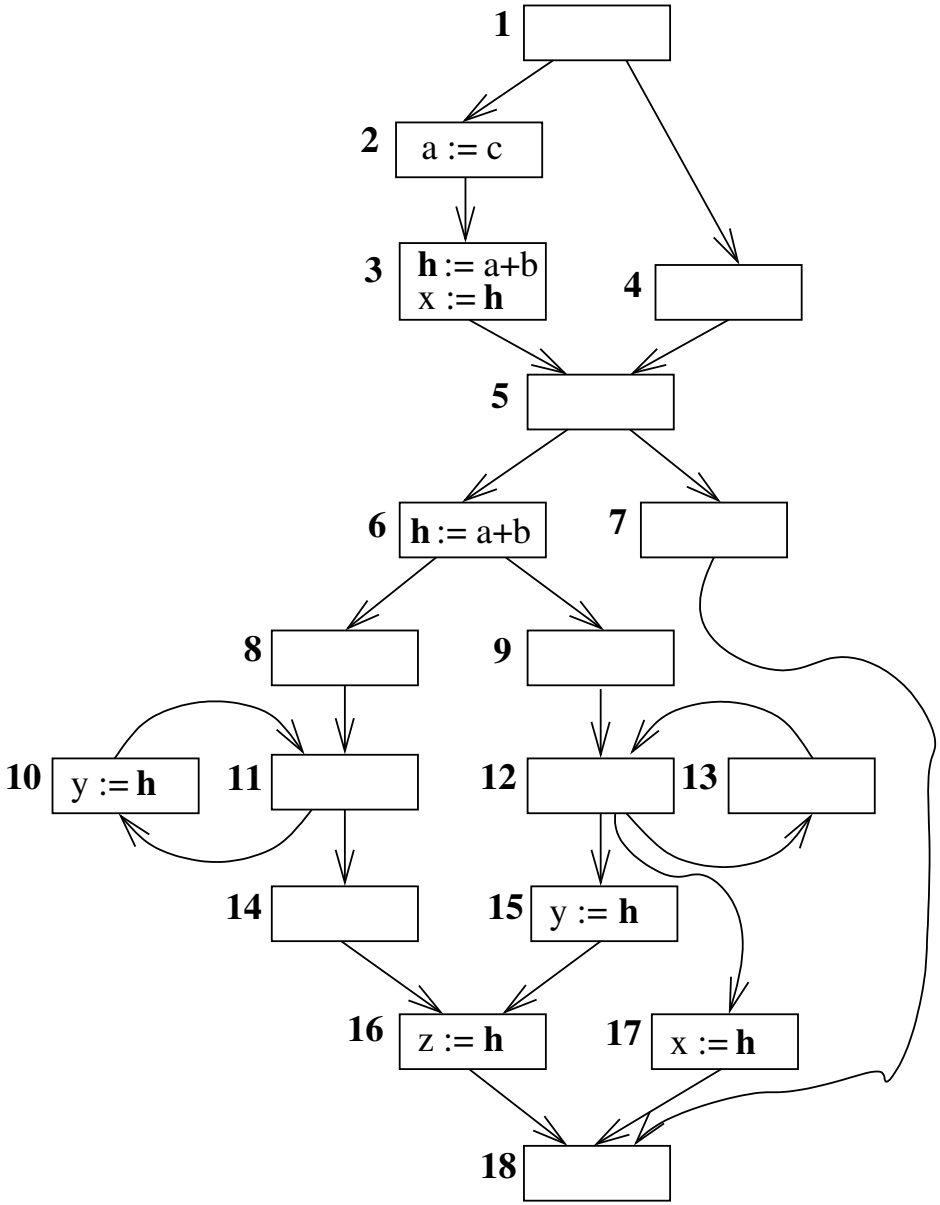
Veranschaul. v. Theorem 13.2.1.2 u. 13.2.1.3

...anhand eines Beispiels:



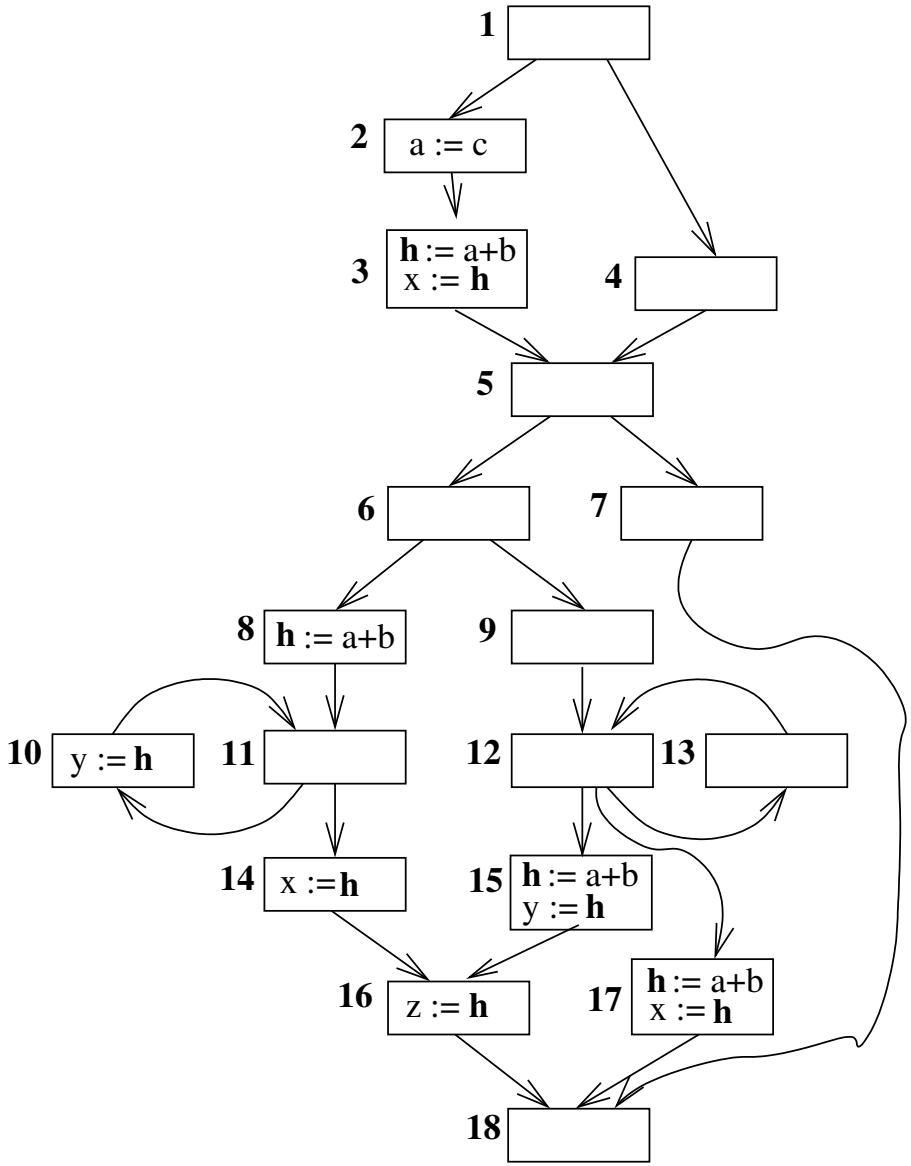
Th. 13.2.1.2: Frühestmögl. sichere Platzierung

...ist global berechnungsoptimal:



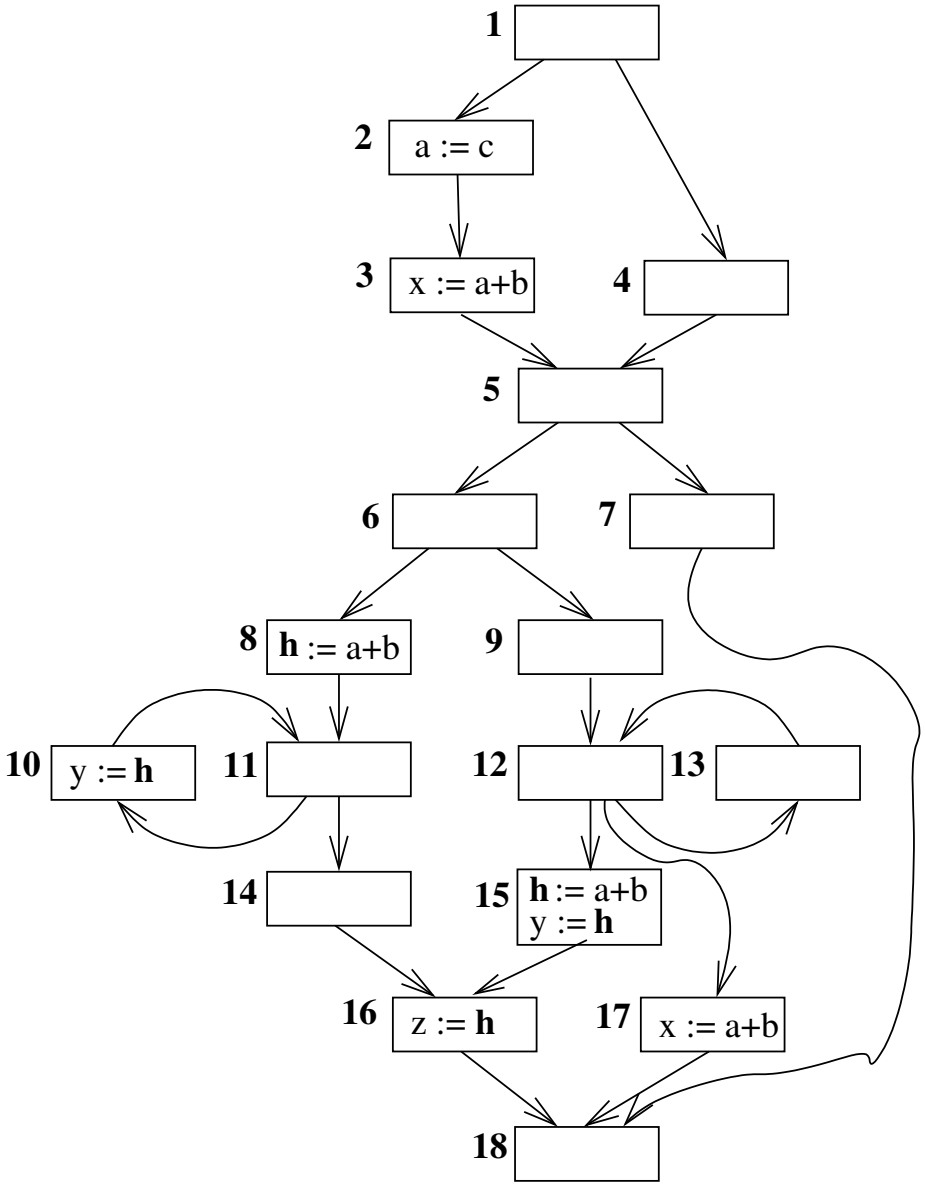
Th. 13.2.1.3: Spätestm. berechn.-opt. Platz.

...ist global berechnungs- und hilfsvariablenlebenszeitoptimal:



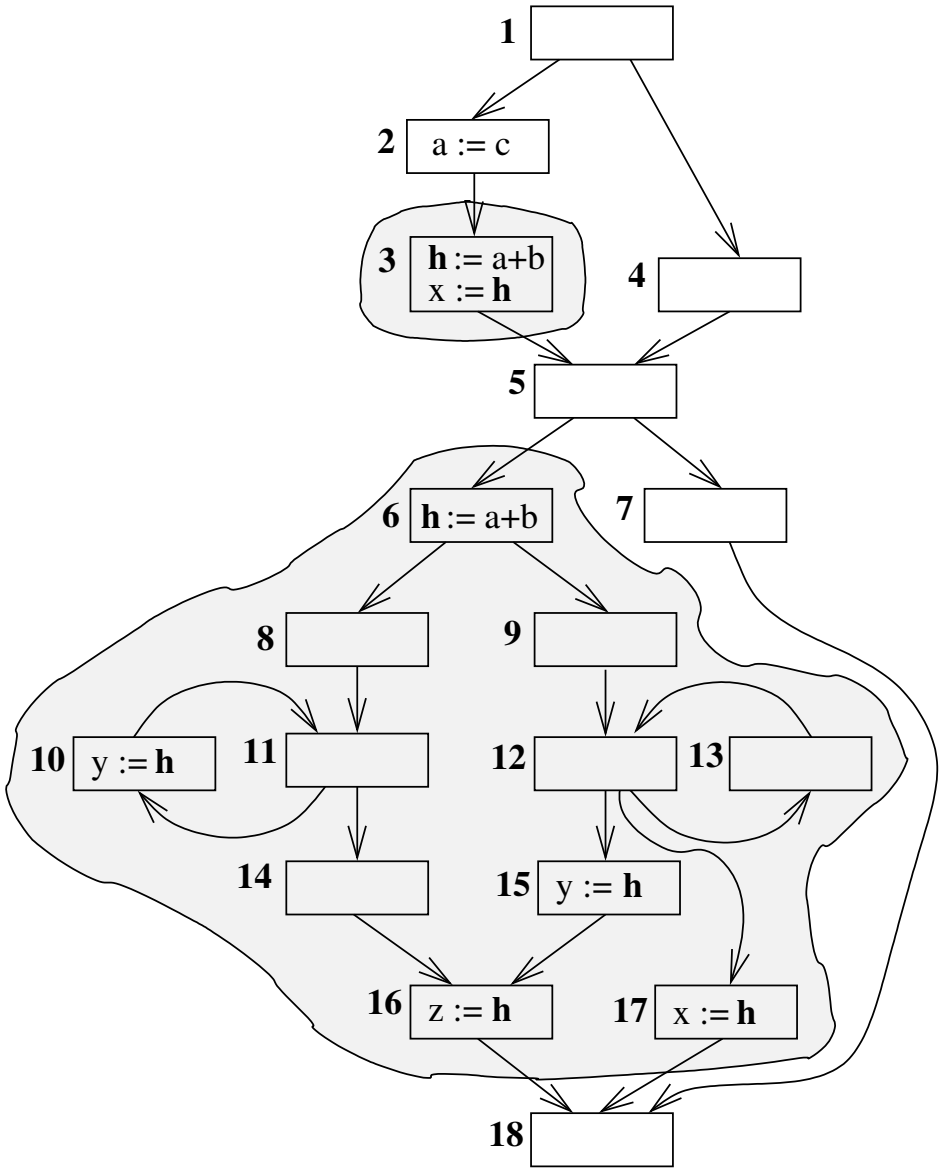
Th. 13.2.1.3: Spätestm. berechn.-opt. Platz.

...nach abschließendem 'Aufräumen':



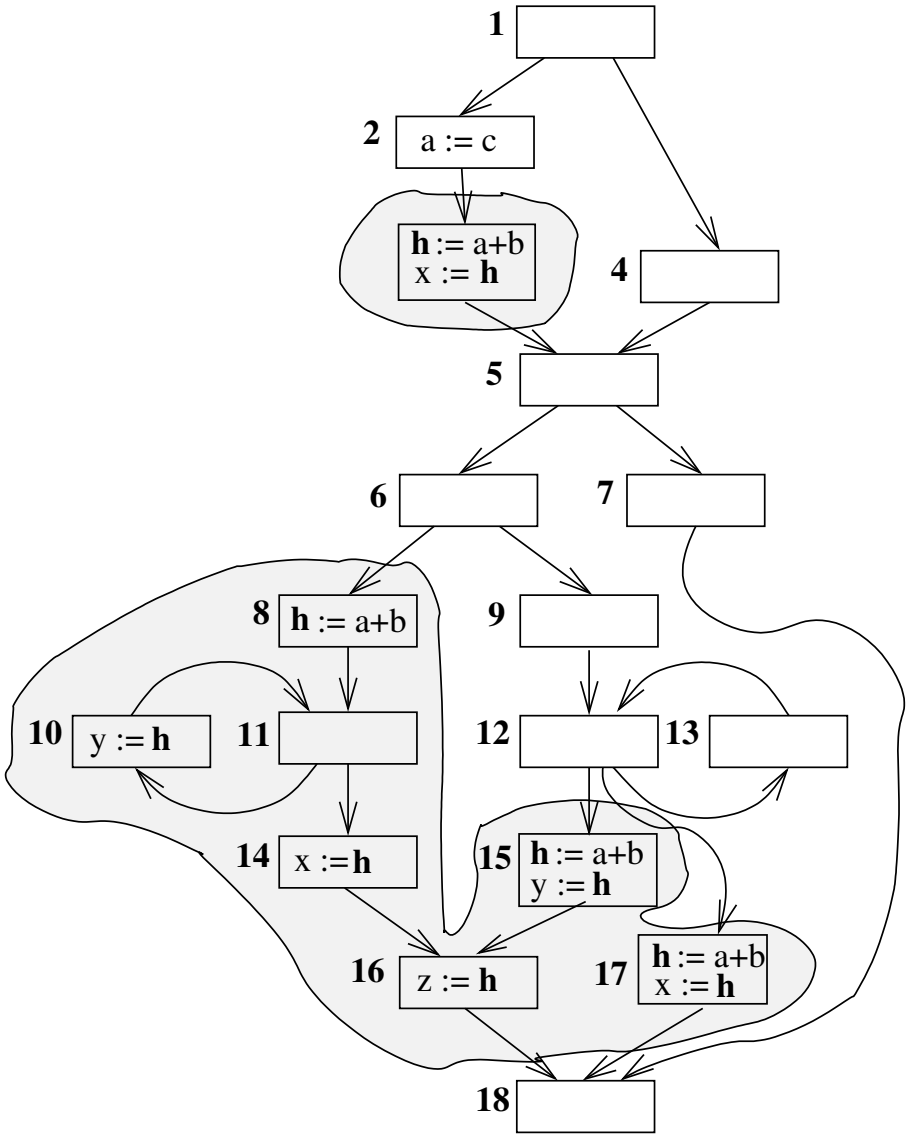
Frühestmögliche sichere Platzierung

...berechnungsoptimal, aber max. Hilfsvariablenlebenszeiten.



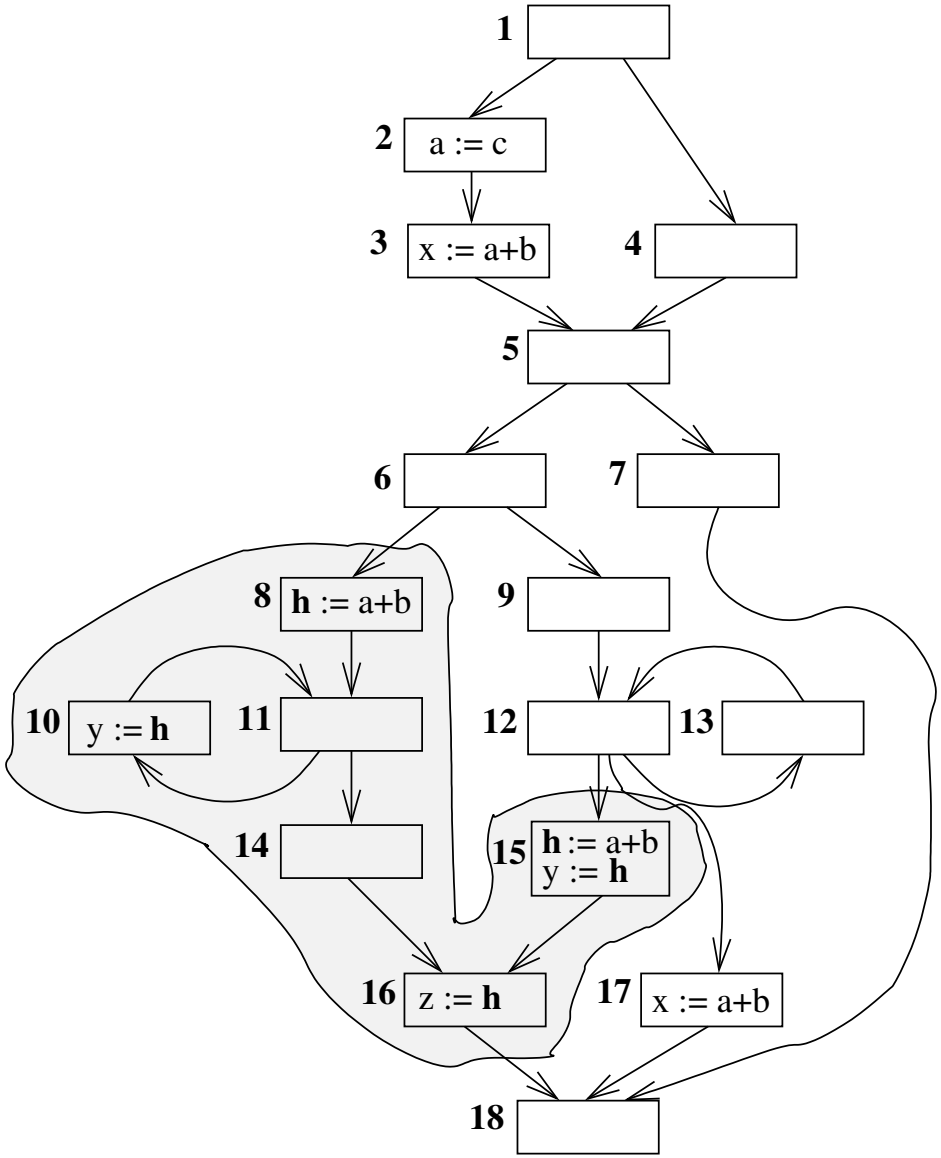
Spätestmögliche berechn.-optimale Platzierung

...berechnungsoptimal, aber min. Hilfsvariablenlebenszeiten.



Spätestmögliche berechn.-optimale Platzierung

...nach ‘Aufräumen’: min. Hilfsvariableninitialisierungen und -lebenszeiten.



Kapitel 13.2.2

EPRAA: Transformation

Die EPRAA-Transformation

...EPRAA, einheitliche, kombinierte Transformation zur:

- Elimination partiell redundanter Ausdrücke und Anweisungen (EPRAA)
  - $\rightsquigarrow$ Partially Redundant Expression and Assignment Elimination (PREAE)
  - $\rightsquigarrow$ Expression and Assignment Motion (EAM)

Das EPRAA-Verfahren

...ein dreistufiger Algorithmus:

- Präprozess
  Ersetze jedes Vorkommen einer Anweisung `x := t` durch die Anweisungssequenz $\texttt{h}_t$ `:= t;` `x :=` $\texttt{h}_t$.
- Hauptprozess
  Wende die Transformationen
  - Heben von Anweisungen (AH)
    $\rightsquigarrow$ Assignment Hoisting
  - Eliminieren (total) redundanter Anweisungen (ERA)
    $\rightsquigarrow$ (Totally) Redundant Assignment Elimination

  wiederholt so lange an bis Stabilität eintritt.
- Postprozess
  Aufräumen isolierter Initialisierungen.

Der Präprozess ist Schlüssel

...zur einheitlichen Behandlung von Ausdrücken und Anweisungen.

Die Einführung spezifischer Hilfsvariablen $\mathtt{h}_t$ für jedes rechtsseitig in einer Anweisung auftretende Termmuster $\mathtt{t}$ im Präprozess bewirkt, dass

- EPRA als Hauptprozess des EPRAA-Verfahrens

die Effekte von EPRA und EPRAd einheitlich erfasst und abdeckt!

Dabei gilt:

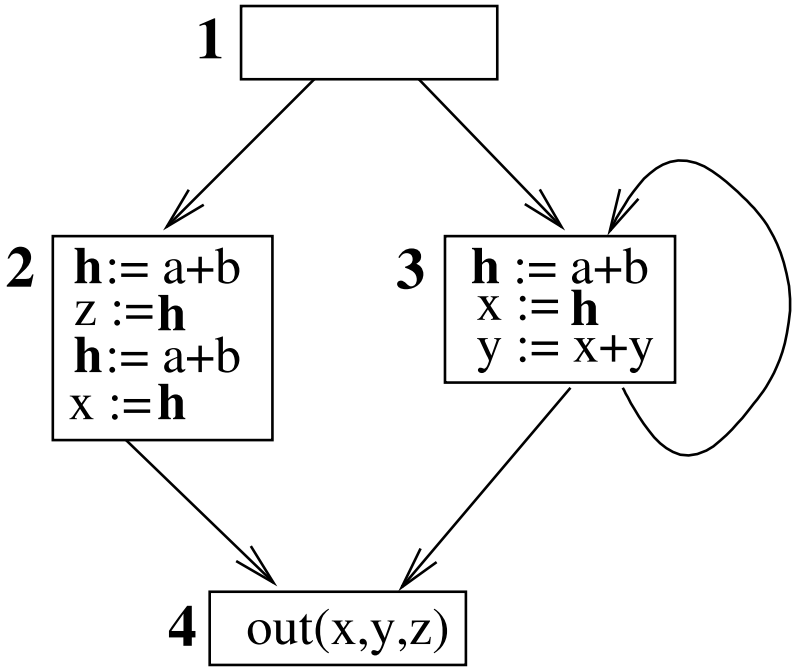
- 'Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile':

$$\text{EPRAA} > \text{EPRA} + \text{EPRAd}$$

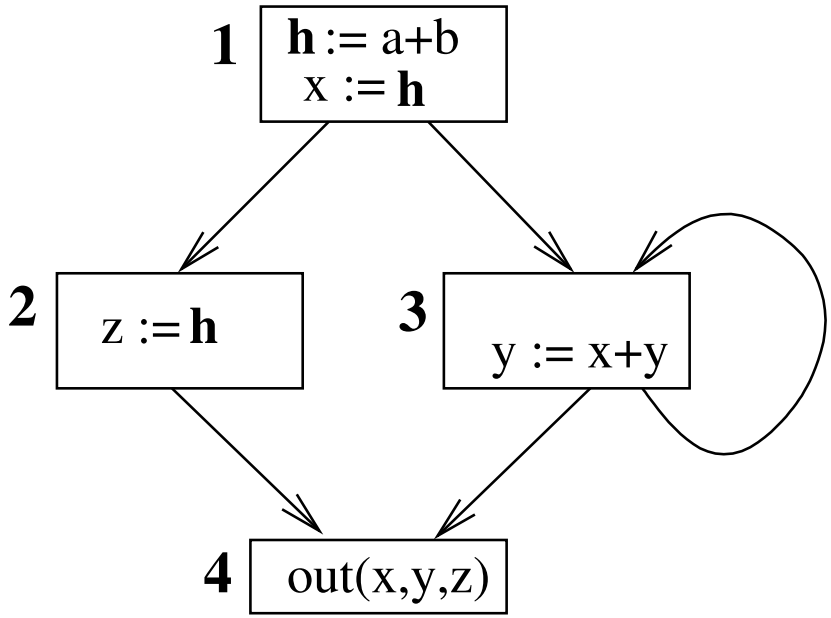
Einheitl. Elimination part. red. Ausd. u. Anw.

...der EPRAA-Effekt auf das gemeinsame Beispiel:

Ausgangsprogramm nach Präprozess



Optimiertes Programm



Effekte zweiter Ordnung für EPRAA

...(engl. second order effects) im EPRAA-Fall:

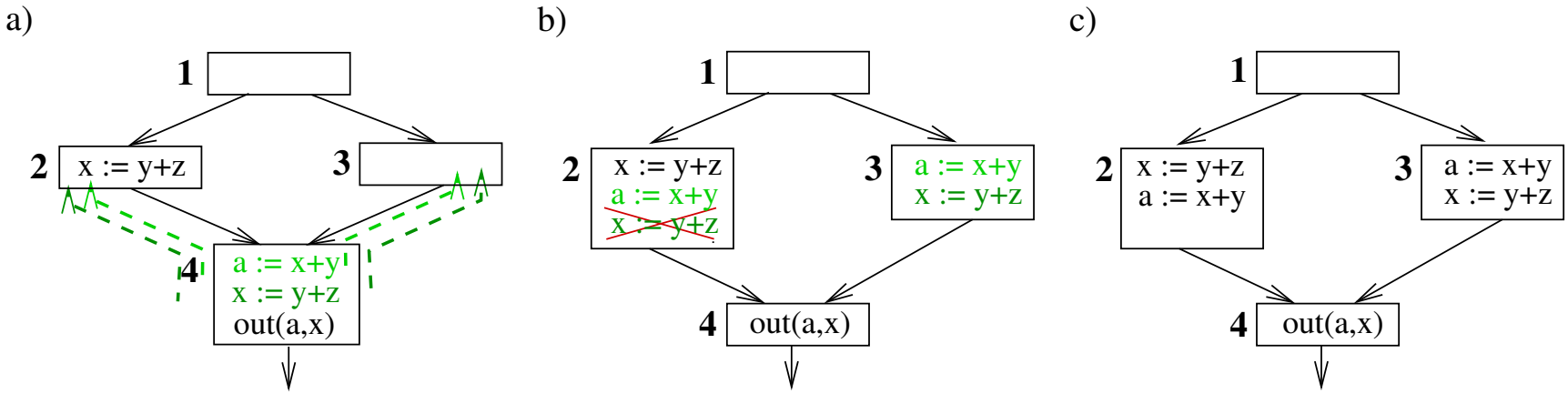
- Hebungs-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)
  $\rightsquigarrow$ Hoisting-Elimination effects (HE)
- Hebungs-Hebungs-Effekte (Potentialeffekt)
  $\rightsquigarrow$ Hoisting-Hoisting effects (HH)
- Eliminations-Hebungs-Effekte (Potentialeffekt)
  $\rightsquigarrow$ Elimination-Hoisting effects (EH)
- Eliminations-Eliminations-Effekte (Zieleffekt)
  $\rightsquigarrow$ Elimination-Elimination effects (EE)

Beispiel für einen Hebungs-Eliminations-Effekt

Ausgangsprogramm

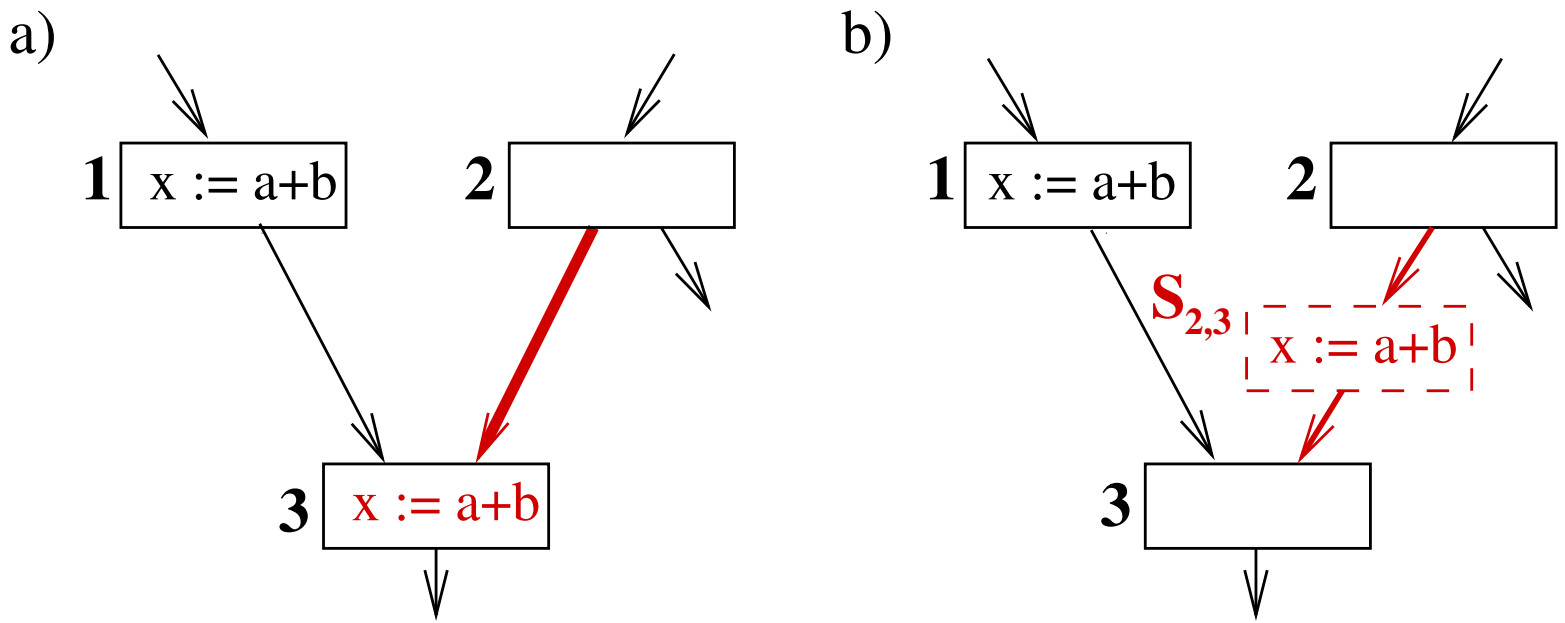
Anweisungshebung (Effekt 1. Ord.)

Elim. red. Anw. (Effekt 2. Ord.)



Anmerkung zu kritischen Kanten

...wie für EPTA, EPGA und EPRA müssen kritische Kanten gespalten werden, um bestmögliche Ergebnisse erzielen zu können:



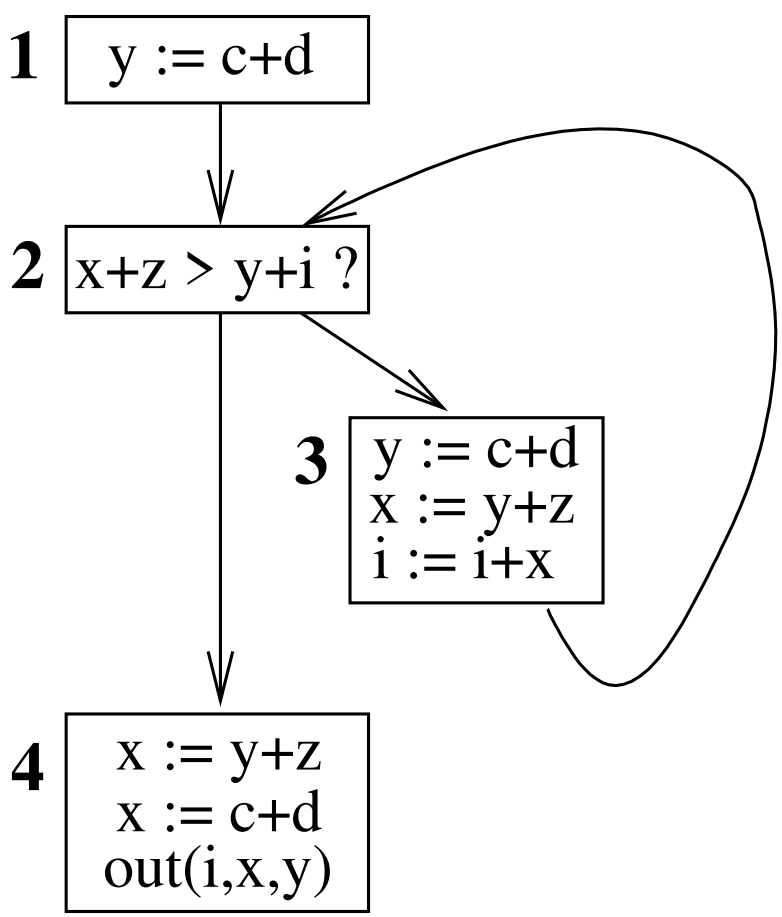
Kapitel 13.2.3

EPRAA: Beispiel

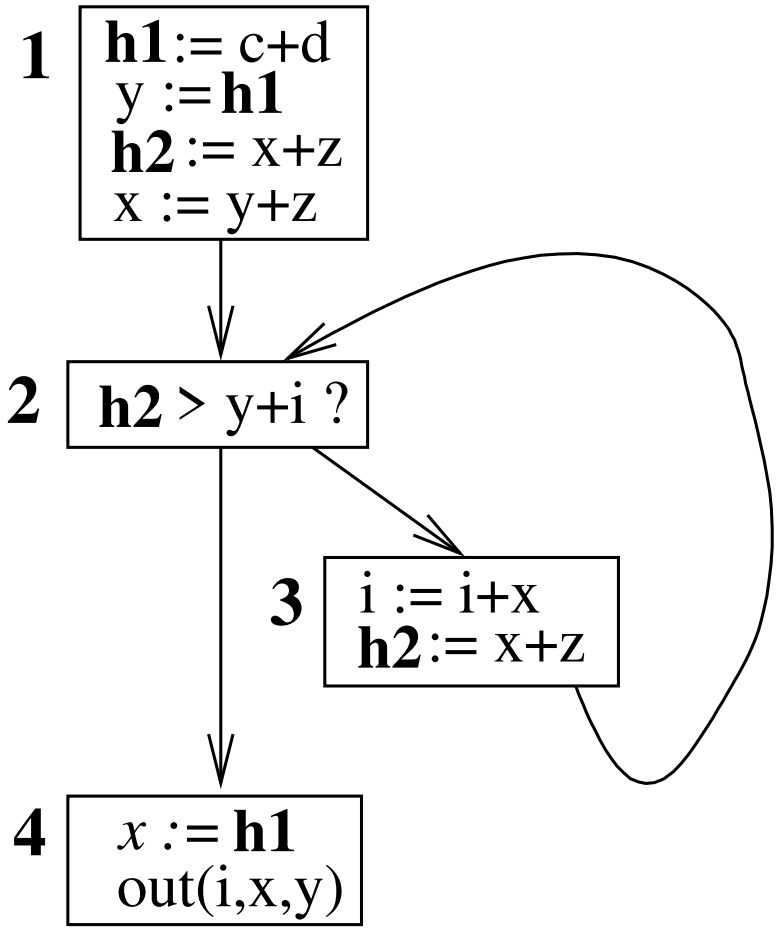
Die EPRAA-Transformation

...illustriert anhand eines größeren Beispiels.

Ausgangsprogramm

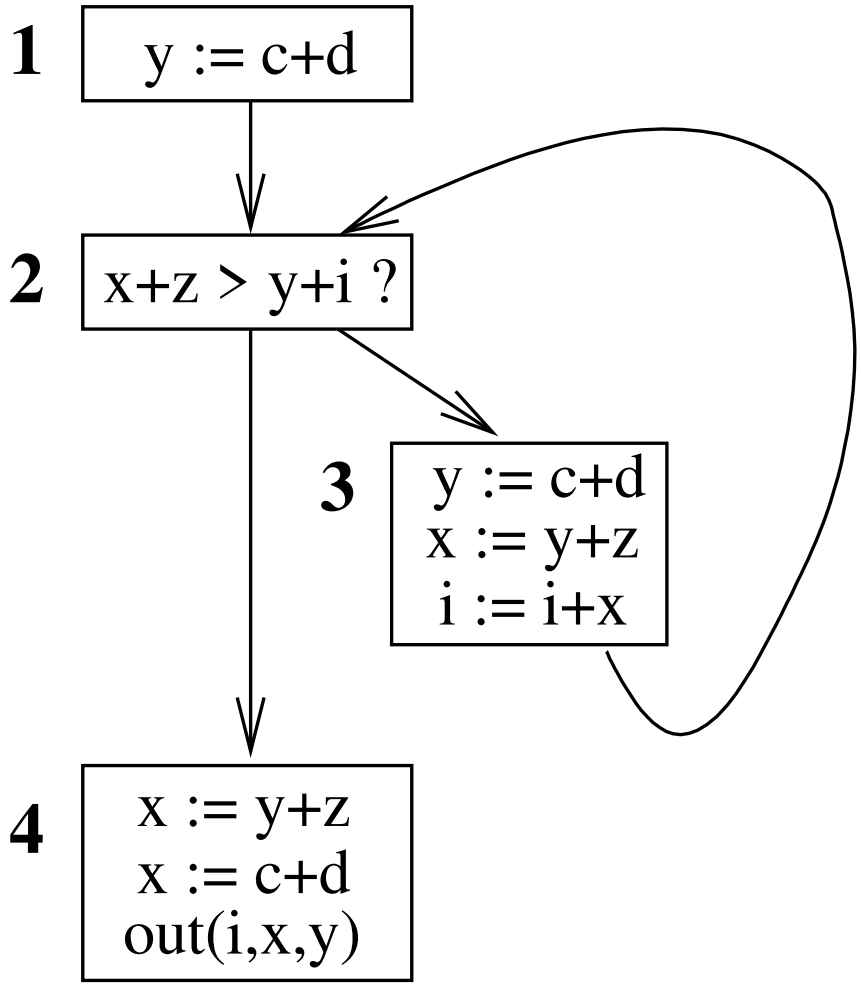


Optimiertes Programm



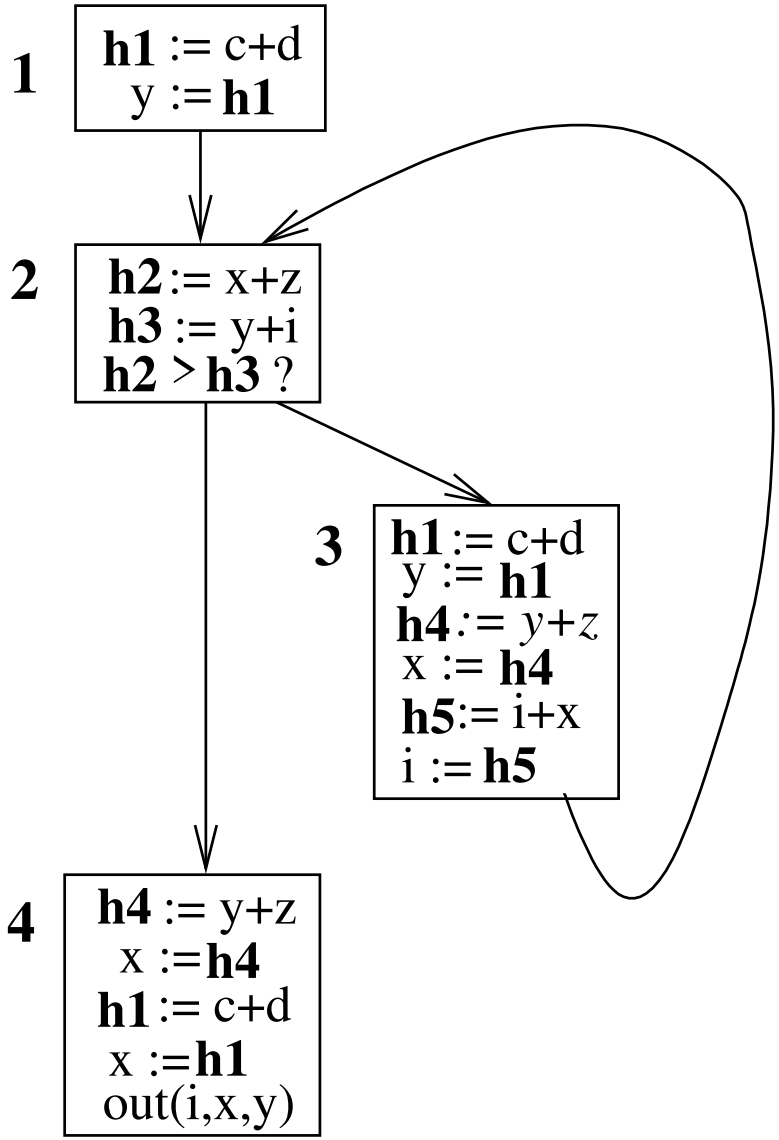
Die EPRAA-Transformation im Detail (1)

Ausgangsprogramm



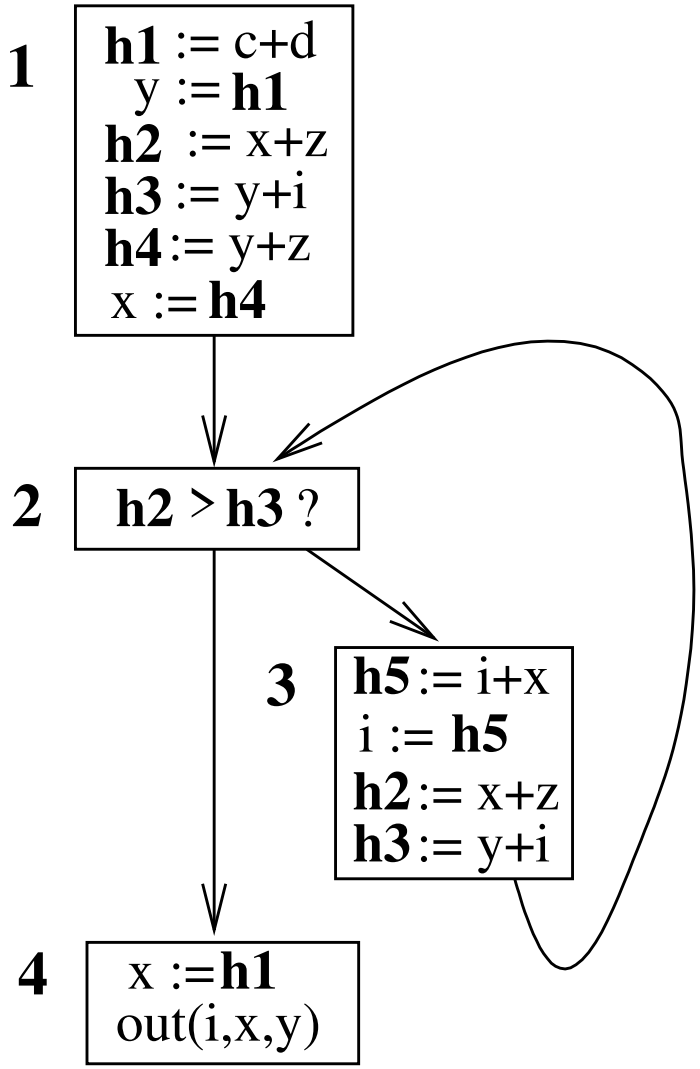
Die EPRAA-Transformation im Detail (2)

Programm nach Präprozess



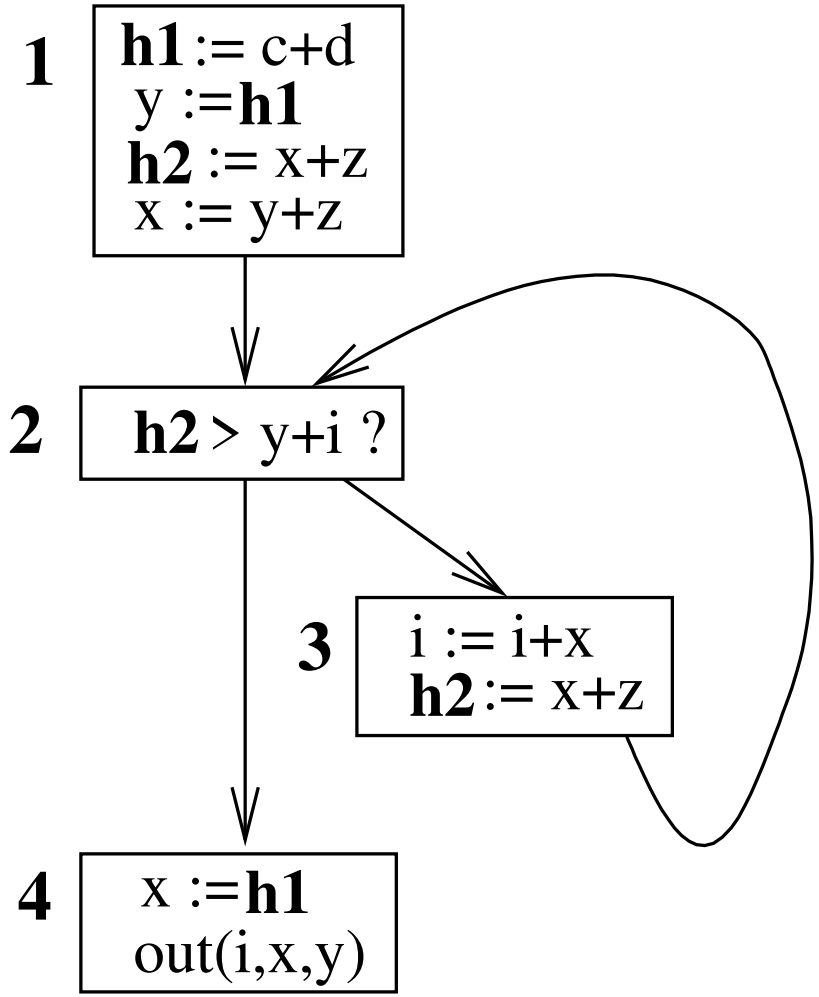
Die EPRAA-Transformation im Detail (3)

Programm nach Hauptprozess



Die EPRAA-Transformation im Detail (4)

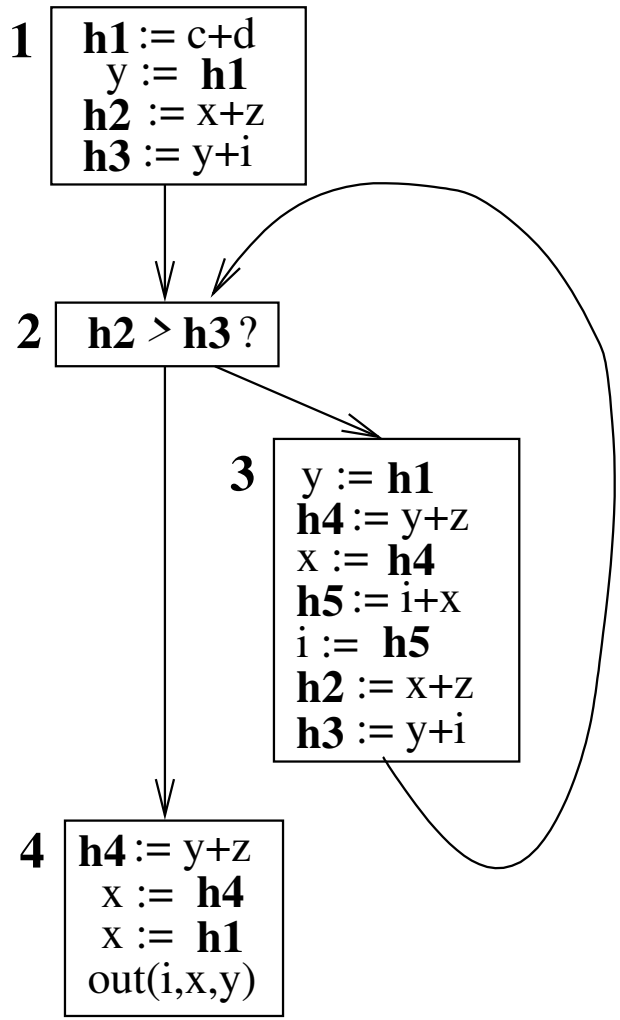
Programm nach Postprozess - das EPRAA-optimierte Prg.



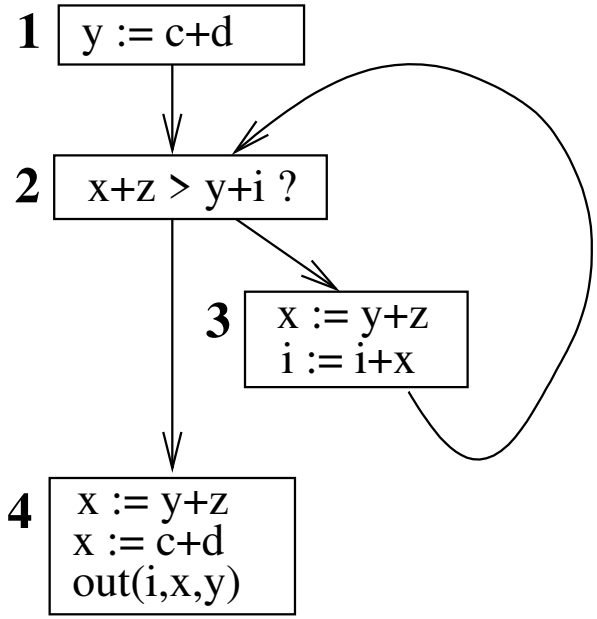
Zum Vergleich: Die schwächeren Effekte

...der EPRAd- und EPRA-Transformationen:

EPRAd-Effekt



EPRA-Effekt



Kapitel 13.2.4

EPRAA: Optimalität

EPRAA-Optimalitätsresultate

...anders als für EPTA, EPGA und EPRA mit je einer globalen Optimalitätsaussage zerfällt Optimalität für EPRAA in drei Aussagen über:

- Ausdrücke (globale Optimalität)
- Anweisungen (lokale Optimalität)
- Hilfsvariablen (lokale Optimalität)

Im folgenden bezeichnen für ein Programm G:

- $\mathcal{U}^G_{EPRAA} =_{df} \{G' \mid G \vdash_{(\tau_i)_{i \leq k}} G', \tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T^G_{EPRAA}, k \in \mathbb{N}\}$: Das von G durch die Präfixe der Transformationsfolgen $\tau \in T^G_{EPRAA}$ aufgespannte Universum.
- G_τ: Das durch Anwendung von $\tau \in T^G_{EPRAA}$ auf G entstehende Programm.

EPRAA: Globale, lokale Optimalität

Sei $\tau_{max} \in \mathsf{T}^{G}_{EPRAA}$ eine maximale EPRAA-Transformation.

Theorem 13.2.4.2 (Globale Ausdrucksoptimalität)

$G_{\tau_{max}}$ is ausdrucksoptimal in $\mathcal{U}^{G}_{EPRAA}$, d.h., während seiner Ausführung werden höchstens so viele Ausdrücke ausgewertet wie in jedem anderen Programm in $\mathcal{U}^{G}_{EPRAA}$.

Theorem 13.2.4.3 (Lokale Anweisungsoptimalität)

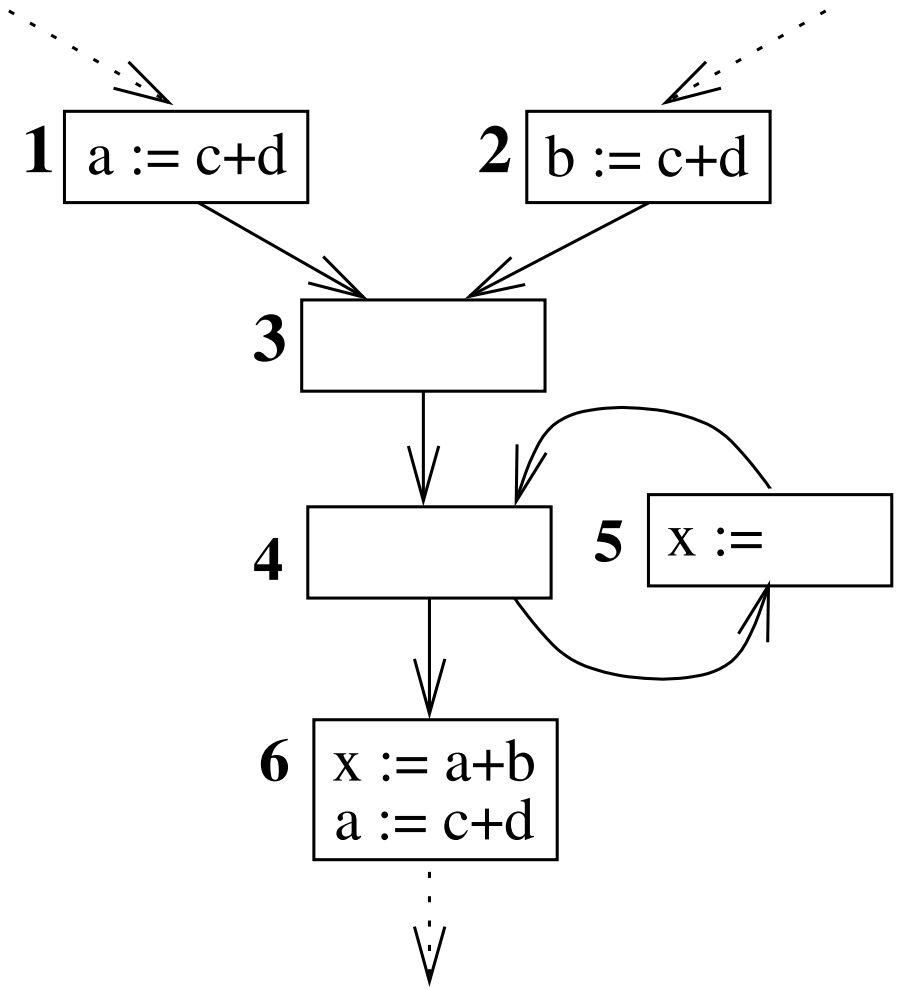
$G_{\tau_{max}}$ ist lokal anweisungsoptimal in $\mathcal{U}^{G}_{EPRAA}$, d.h. es ist nicht möglich, die Zahl der von $G_{\tau_{max}}$ zur Laufzeit ausgeführten Anweisungen durch weitere EPRAA-Elementartransformationen zu verringern.

Theorem 13.2.4.4 (Lokale Hilfsvariablenoptimalität)

$G_{\tau_{max}}$ ist lokal hilfsvariablenoptimal in $\mathcal{U}^{G}_{EPRAA}$, d.h. es ist nicht möglich, die Zahl der Zuweisungen an Hilfsvariablen oder die Länge der Lebenszeiten von Hilfsvariablen in $G_{\tau_{max}}$ durch weitere EPRAA-Elementartransformationen zu verringern.

Warum nur lokale Anw./Hilfsv.-Optimalität?

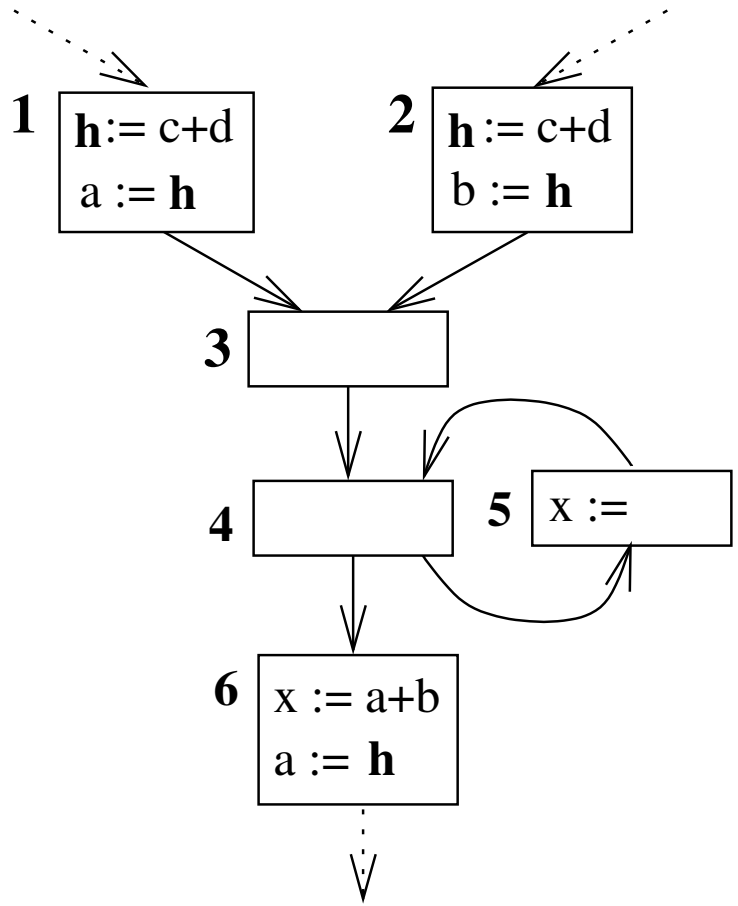
...betrachte folgendes Programm:



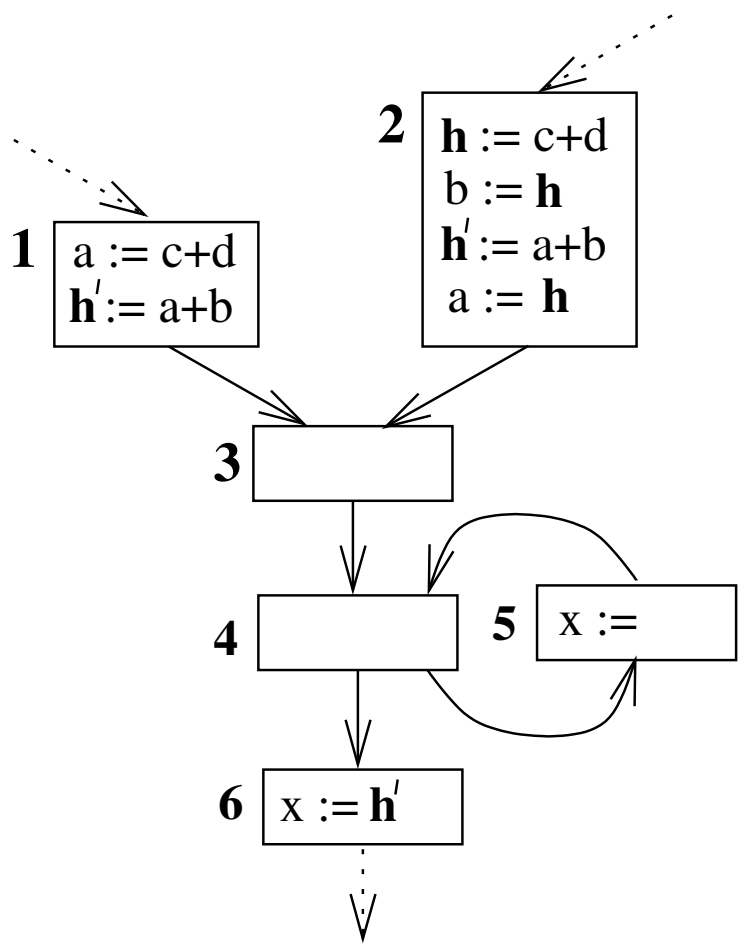
Darum nur lokale Anw./Hilfsv.-Optimalität!

...und folgende zwei unvergleichbare Transformationsresultate:

a)



b)



⇒ Lokale Anw./Hilfsv.-Optimalität ist das bestmögliche!

Kapitel 13.3

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Kapitel 13.3.1

Motivation

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

...eine häufig getroffene Annahme, z.B.:

- Jeder Knoten eines Flussgraphen liegt auf einem Pfad vom Start- zum Endknoten (s. Kap. 12.2.3).
- Gibt es mehrere Endknoten, kann durch Einfügen eines künstlichen Endknotens und entsprechender Kanten dies erreicht werden (s. Kap. 12.2.3, indirekt behandelt).
- Anweisungen liegen im Format von Drei-Adress-Code vor (s. Kap. 13.3.2).
- Flussgraphen sind wahlfrei knoten- oder kantenbenannt, mit einzelnen Instruktionen oder mit Sequenzen von Instruktionen (sog. Basisblöcken) (s. Kap. 13.3.3 und Anhang B).
- ...

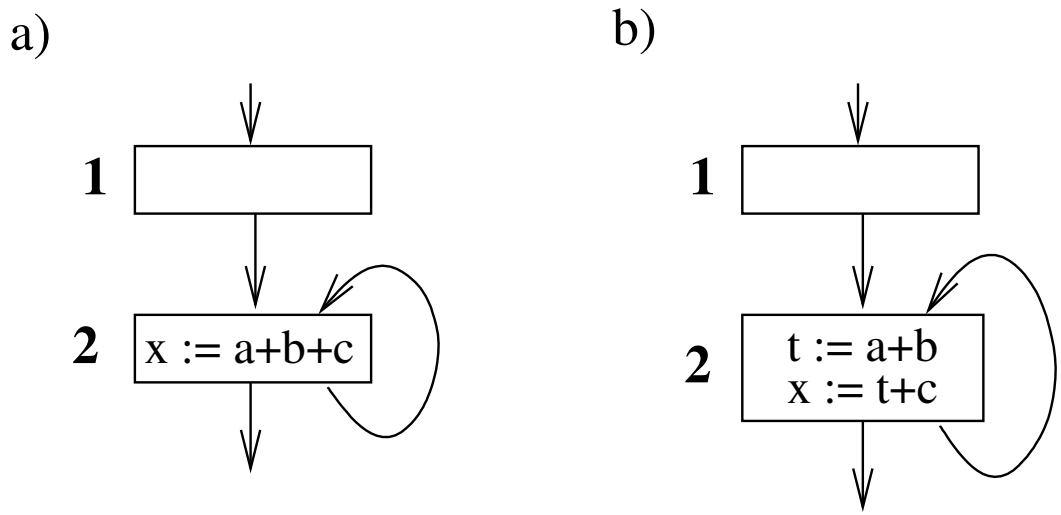
Nicht immer sind solche Annahmen uneingeschränkt unbeschränkend und frei von Nebenwirkungen...

Kapitel 13.3.2

Drei-Adress-Code vs. allgemeiner Code

Drei-Adress-Code

...entsteht durch Aufspalten von Anweisungen mit rechten Seiten mit mehr als einem Operator in Anweisungssequenzen, in der die rechten Seiten jeder Anweisung (höchstens) einen Operator besitzen (allgemein: Zahl der Operatoren der Ausgangsanweisung ist gleich Zahl der Anweisungen der Anweisungssequenz):

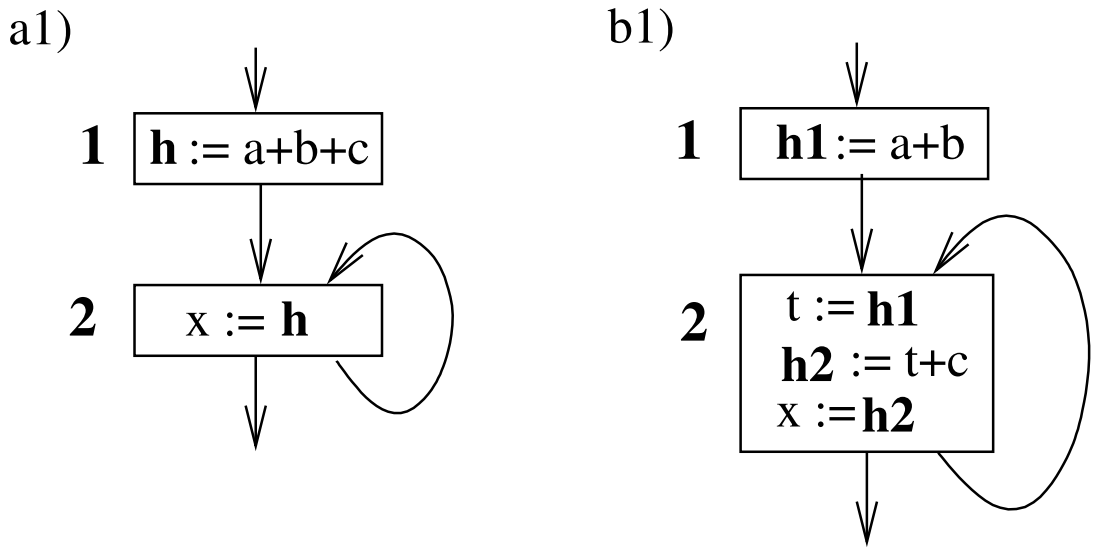


...offenbar ist eine solche Aufspaltung immer möglich;

- OBdA darf deshalb angenommen werden, dass Anweisungen in Drei-Adress-Form vorliegen.

Frei von Nebenwirkungen oBdA?

...vergleiche die Wirkung von EPRA auf die Programme aus Abb. a) und b) in Abb. a1) und b1):



...offenbar ist das transformierte Programm in Abb. a1) performanter als das in Abb. b1). Ist 'OBdA' hier gerechtfertigt? Nebenwirkungsfrei möglicherweise dank Variablensubsumption?

Variablensubsumption

...die mit dem Übergang zu Drei-Adress-Code verbundene Einführung zunächst vieler neuer Variablen ist nicht wesentlich, da nach Transformationsabschluss das Programm abschließend mittels

- Variablensubsumption (engl.variable subsumption)

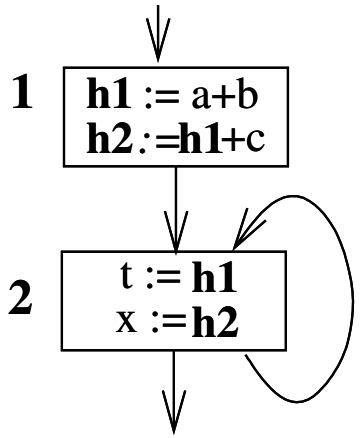
'aufgeräumt' werden kann, woduch Variablen zusammengefasst und in ihrer Zahl reduziert werden.

Frei von Nebenwirkungen oBdA?

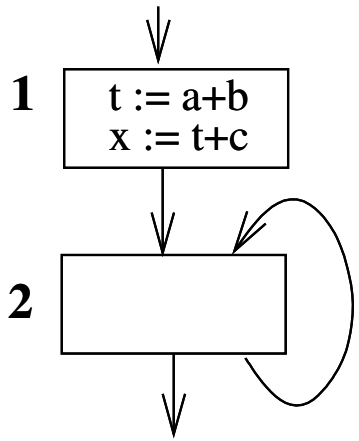
...vergleiche die Wirkungen von

- EPRA gefolgt von Variablensubsumption auf das Programm aus Abb. b) in Abb. b2).
- EPRAA ohne/mit Variablensubsumption auf das Programm aus Abb. b) in Abb. b3) und b4).

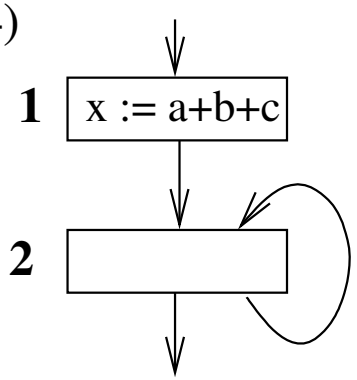
b2)



b3)



b4)



...offenbar ist das transformierte Programm in Abb. b3) bereits performanter als das in Abb. b2). 'OBdA' durch Variablensubsumption gerechtfertigt? Allenfalls bei richtiger Transformationswahl (im Beispiel EPRAA statt EPRA).

Kapitel 13.3.3

Basisblock- vs. Instruktionsgraphen, knoten- vs. kantenbenannte Graphen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

...wird die Wahl der Programmdarstellung als

- knoten- oder kantenbenannte
- Instruktions- oder Basisblockflussgraphen

i.a. als ohne Nebenwirkungen und deshalb oBdA freie Wahlentscheidung gesehen.

Einschätzung: Fast immer zutreffend gibt es Ausnahmen, die eine genauere Betrachtung und sorgfältigere Wahl nahelegen oder gar verlangen...

Basisblock- vs. Instruktionsgraphen

...eine Abwägung, die historisch zugunsten von

- Basisblockgraphen

ausgefallen ist, da Basisblockgraphen weniger Knoten als Instruktionsgraphen enthalten und deshalb

- zu schnellerer Konvergenz von Fixpunktanalysen führen.

Der konzeptuelle und implementierungstechnische Mehraufwand durch die erforderliche Dreistufigkeit der Analyse aus

- Präprozess (Berechnung der Basisblocksemantik)
- Hauptprozess (Fixpunktanalyse auf Basisblockgraph)
- Postprozess (Basisblockanalyse)

würde dadurch aufgewogen.

Einschätzung: Während der Mehraufwand real ist, realisiert sich der Performanzvorteil in der Praxis nicht (oder heute nicht mehr); siehe Anhang B für eine genauere Betrachtung.

Knoten- vs. kantenbenannte Graphen

...eine Abwägung, die historisch zugunsten von

- knotenbenannten Graphen

ausgefallen ist, ohne aus der Literatur ersichtliche tiefergehende Überlegungen.

Einschätzung:

- Pragmatische Unterschiede zwischen knoten- und kantenbenannten Graphen beschränken sich für DFA-Probleme i.w. auf die konzeptuelle Ebene mit leichten Vorteilen für kantenbenannte Graphen, die zu knapperen Analysespezifikationen führen; siehe Anhang B für Details.
- Interessant ist, dass im Bereich von Modellprüfung mit Kripke-Strukturen (knotenbenannte Graphen) und Transitionssystemen (kantenbenannte Graphen) beide Varianten gezielt gewählt werden; siehe Kapitel 16 für Details.

Von Instruktions- zu Basisblockgraphen

...die Analysen der Elementartransformationen für die Berechnung

- toter und redundanter Anweisungen
- der Endpunkte von Anweisungssenkungen und -hebungen

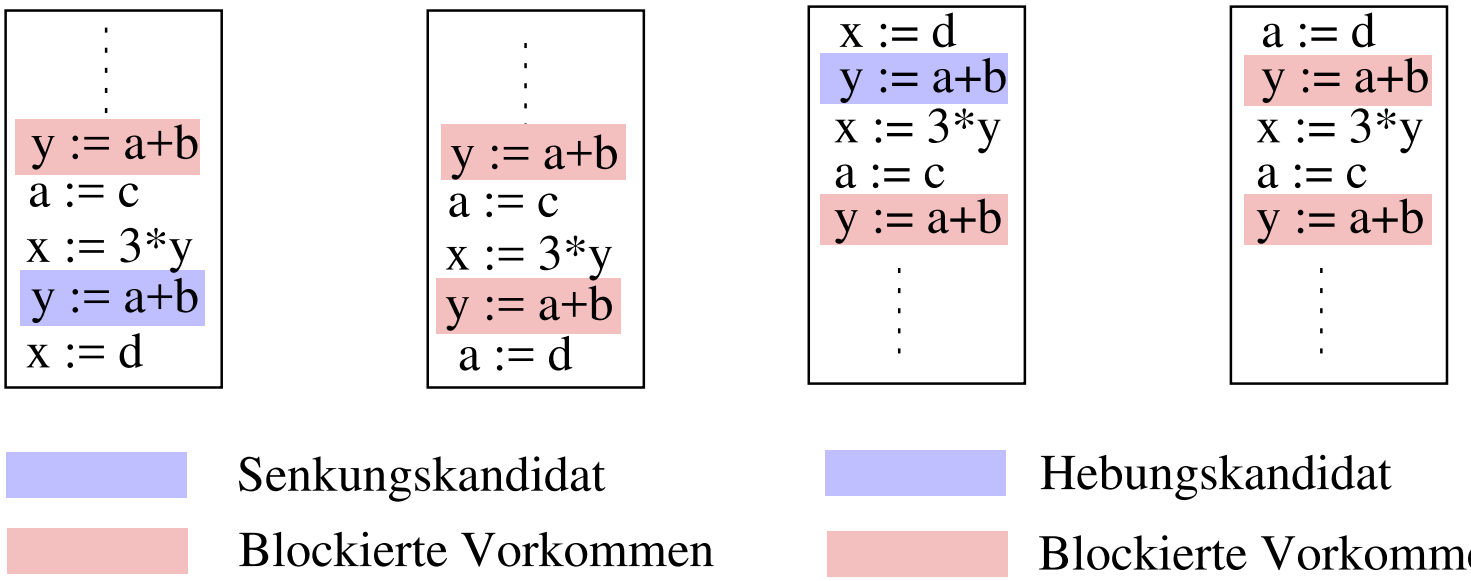
lassen sich in natürlicher Weise von Instruktions- auf Basisblockgraphen ausdehnen; für die Analyse zur Berechnung

- geisterhafter Anweisungen

als sog. nicht-separables Problem gilt das nicht, eine Ausdehnung auf Basisblockgraphen ist nicht möglich (s. Kapitel 13.3 und Anhang B für Details).

Senkungs-/Hebungskandidaten in Basisblöcken

...sind für jedes Anweisungsmuster eindeutig bestimmt: Höchstens das letzte bzw. erste Vorkommen eines Musters ist Senkungs-/Hebungskandidat, wenn es nicht lokal blockiert ist.



Beispiel: Blau markiert sind die eindeutig bestimmten Senkungs- bzw. Hebungskandidaten des Anweisungsmusters $\alpha \equiv$ y := a+b; rot markiert sind lokal blockierte α-Vorkommen, die keine Senkungs- oder Hebungskandidaten sind.

Anpassung der Senkungs-/Hebungsanalyse

...auf Basisblockgraphen.

Es reicht, die Interpretation (oder Bedeutung) der lokalen Prädikate wie folgt zu ändern:

Lokale Prädikate (assoziiert mit Basisblockknoten):

- Sinkable$_n^\alpha$/Hoistable$_n^\alpha$: Es gibt einen α-Senkungs-/Hebungskandidaten im Basisblockknoten n (d.h. es gibt ein letztes/erstes α-Vorkommen in n), das von keiner nachfolgenden/vorausgehenden Anweisung in n blockiert wird.
- Blocked$_n^\alpha$: Basisblockknoten n enthält eine Anweisung, die das Schieben eines weiteren α-Vorkommens an den Basisblockausgang/-eingang blockiert.

...mit diesen Änderungen können das AS/HS-Gleichungssystem für Instruktionsgraphen aus Kapitel 12.3.8 bzw. 12.4.7 unverändert für Basisblockgraphen übernommen werden.

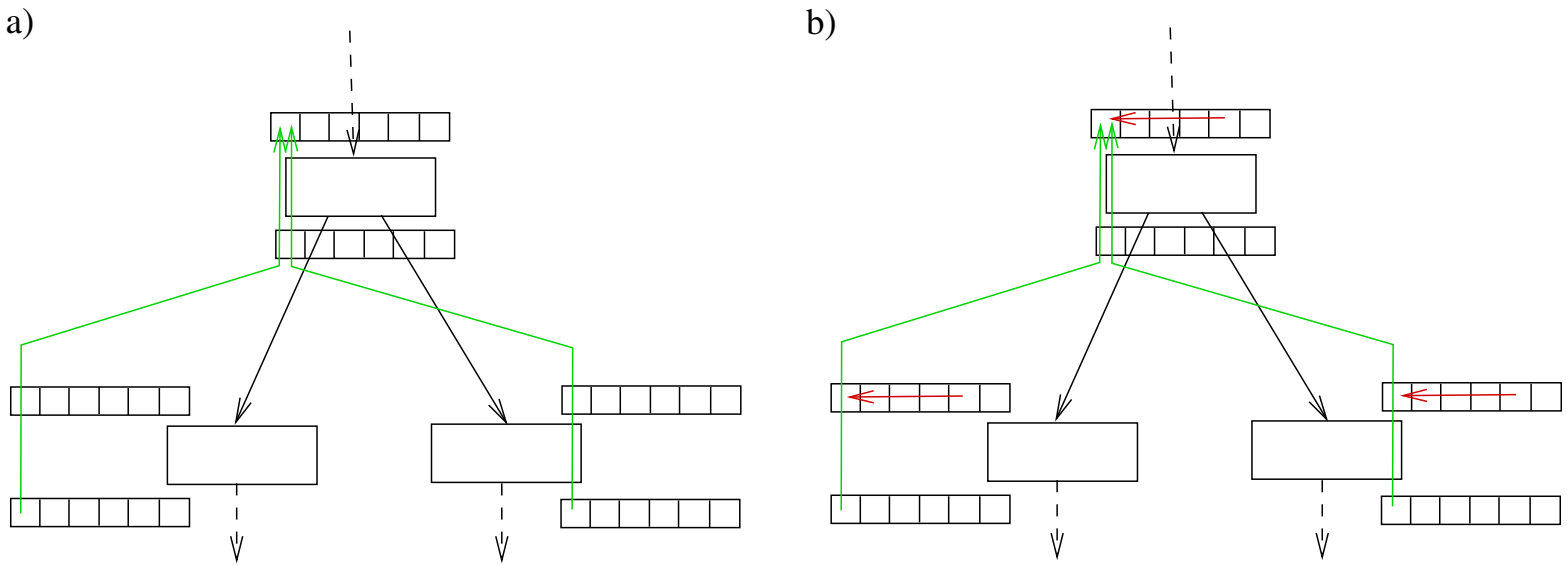
Separable vs. nicht-separable DFA-Probleme

...nicht für alle DFA-Probleme ist die Ausdehnung auf Basisblockgraphen so natürlich und einfach möglich; für sog. nicht-separable DFA-Probleme sogar gar nicht. Der Grund liegt im zusätzlich 'quer' verlaufenden Informationsfluss bei nicht-separablen Problemen wie der Geistervariablenanalyse; s.a. Anh. B.

Informationsfluss in Bitvektoren

Tote-Variablen-Analyse (separabel)

Geistervariablenanalyse (nicht-separabel)



Kapitel 13.4

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 13 (1)


Dhananjay M. Dhamdhere. *Register Assignment using Code Placement Techniques*. Journal of Computer Languages 13(2):75-93, 1988.


Dhananjay M. Dhamdhere. *A usually linear Algorithm for Register Assignment using Edge Placement of Load and Store Instructions*. Journal of Computer Languages 15(2):83-94, 1990.


Dhananjay M. Dhamdhere. *Practical Adaptation of the Global Optimization Algorithm of Morel and Renvoise*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 13(2):291-294, 1991. Technical Correspondence.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 13 (2)


Jens Knoop, Eduard Mehofer. *Distribution Assignment Placement: Effective Optimization of Redistribution Costs*. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 13(6):628-647, 2002.


Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Lazy Code Motion*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'92 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'92), ACM SIGPLAN Notices 27(7):224-234, 1992.


Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Optimal Code Motion: Theory and Practice*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 16(4):1117-1155, 1994.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 13 (3)

Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *The Power of Assignment Motion*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'95 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'95), ACM SIGPLAN Notices 30(6):233-245, 1995.

Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Code Motion and Code Placement: Just Synonyms?* In Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98), Springer-V., LNCS 1381, 154-169, 1998.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 13 (4)

Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Retrospective: Lazy Code Motion*. In '20 Years of the ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (1979 - 1999): A Selection,' ACM SIGPLAN Notices 39(4):460-461&462-472, 2004.

Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Effective Partial Redundancy Elimination based on Extended Value Graph*. Information Processing Society of Japan 38(11):2237-2250, 1990.

Kapitel 14

Konstantenanalyse auf nicht-klassischen Programm- und Datenstrukturen

Konstantenanalyse

...auf dem Wertegraphen (engl. value graph) eines Programms bzw. Flussgraphen.

- Hintergrund, Motivation
- Die VG-Konstantenanalyse
  - Basisalgorithmus
  - Voller Algorithmus
- Die PVG-Konstantenanalyse auf prädikatiertem Code

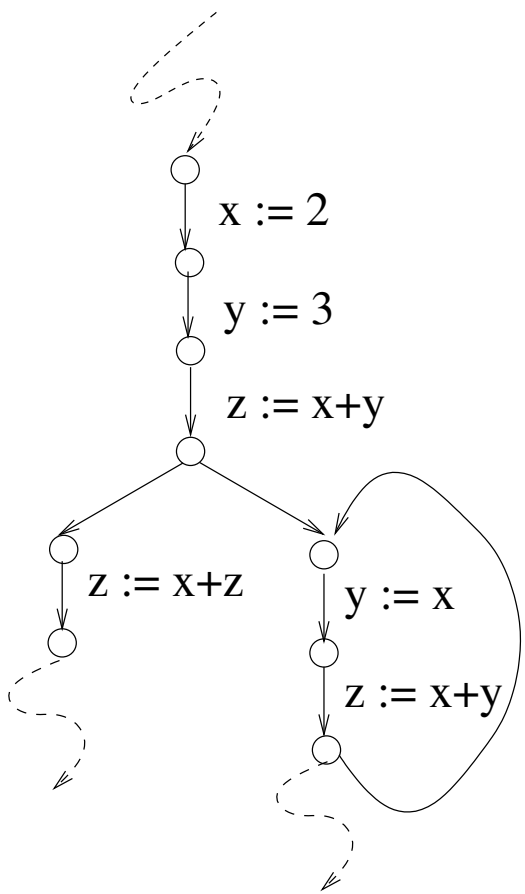
Kapitel 14.1

Motivation

Konstantenanalyse

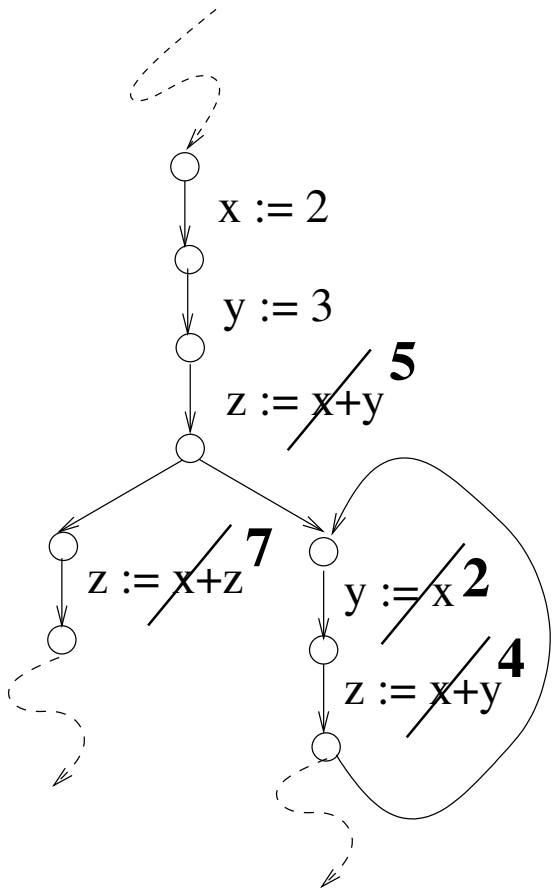
...anhand eines Beispiels für einfache Konstanten:

a)



Original program

b)



After simple constant propagation

Ausgangspunkt und Treiber

...von Algorithmen zur Konstantenanalyse:

- Gary A. Kildalls Algorithmus zur Berechnung einfacher Konstanten (engl. simple constants (SC) (POPL'73).

  Beachte: Der Algorithmus zur Berechnung einfacher Konstanten aus Kapitel 7.10.2 stimmt im Ergebnis, nicht jedoch in den verwendeten Datenstrukturen mit Kildalls Algorithmus überein.

Erweiterungen von Kildalls SC-Algorithmus (1)

...zielen auf Verstärkung oder Verbesserung der:

- Ausdruckskraft
  - 'SC+': Kam, Ullman (Acta Informatica, 1977)
  - Konditionale Konstanten (engl. conditional constants): Wegman, Zadeck (POPL'85)
  - Endliche Konstanten (engl. finite constants): Steffen, Knoop (MFCS'89)
  - Polynomiale Konstanten (engl. polynomial constants): Müller-Olm, Seidl (SAS 2002)
  - ...

  zulasten der Performanz.
- Performanz
  - SSA-Form: Wegman, Zadeck (POPL'85)
  - ...

  ohne Erhöhung der Ausdruckskraft.

Erweiterungen von Kildalls SC-Algorithmus (2)

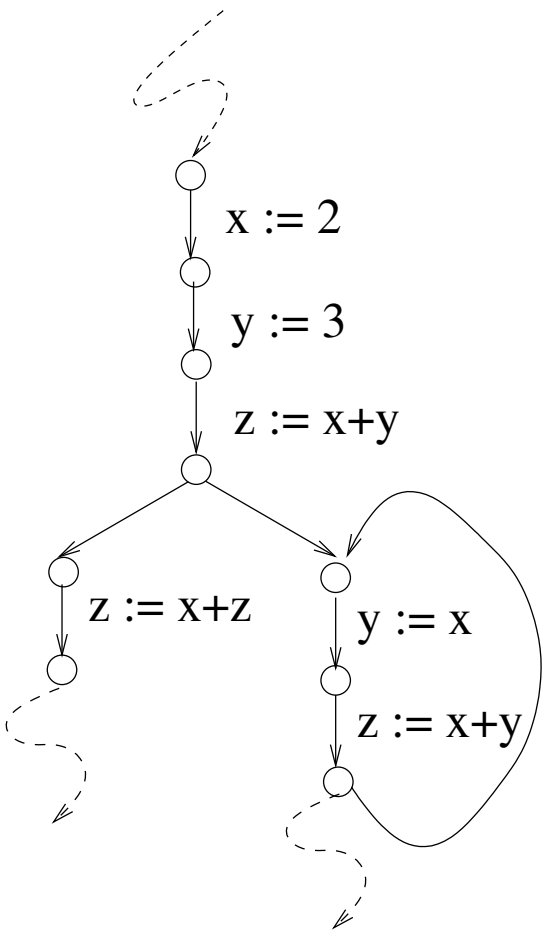
- Anwendungsreichweite
  - Interprozedural
    - Callahan, Cooper, Kennedy, Torczon (SCC'86)
    - Grove, Torczon (PLDI'93)
    - Metzer, Stroud (LOPLAS, 1993)
    - Sagiv, Reps, Horwitz (TAPSOFT'95)
    - Duesterwald, Gupta, Soffa (TOPLAS, 1997)
    - ...
  - Explizit parallel
    - Lee, Midkiff, Padua (J. of Parallel Prog., 1998)
    - Knoop (Euro-Par'98)
    - ...

  zulasten der Ausdruckskraft, z.B. Kopier- und lineare Konstanten (engl. copy constants, linear constants) anstelle einfacher Konstanten (engl. simple constants).

...siehe auch LVA 185.A04, Kapitel 5.

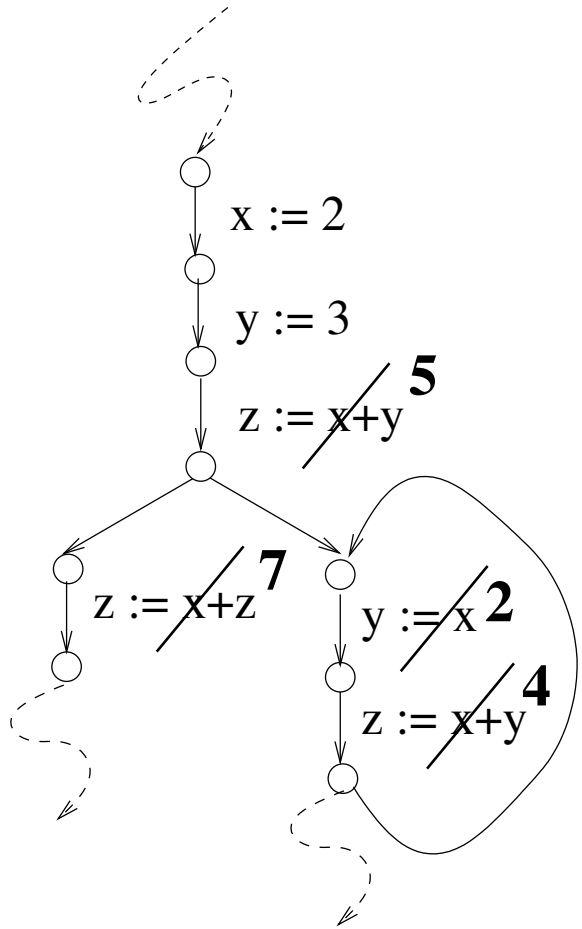
Warum streben nach größerer Ausdruckskraft?

a)



Original program

b)



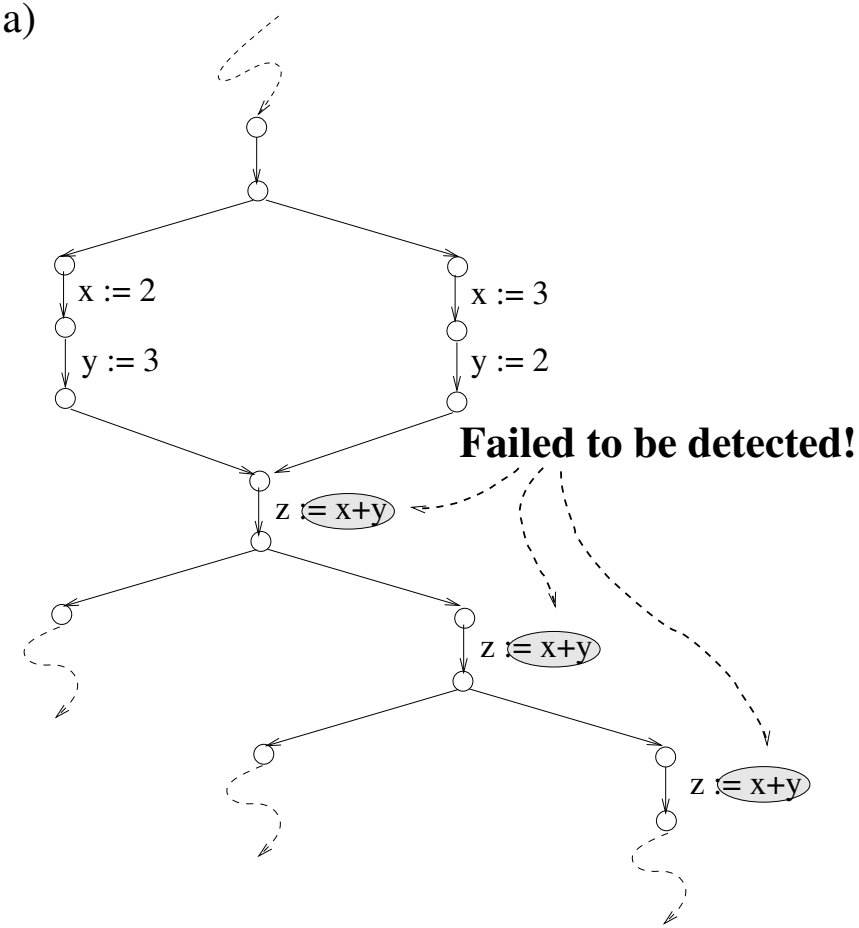
After simple constant propagation

...das Ergebnis der SC-Analyse scheint hier überzeugend.

Der Schein trügt

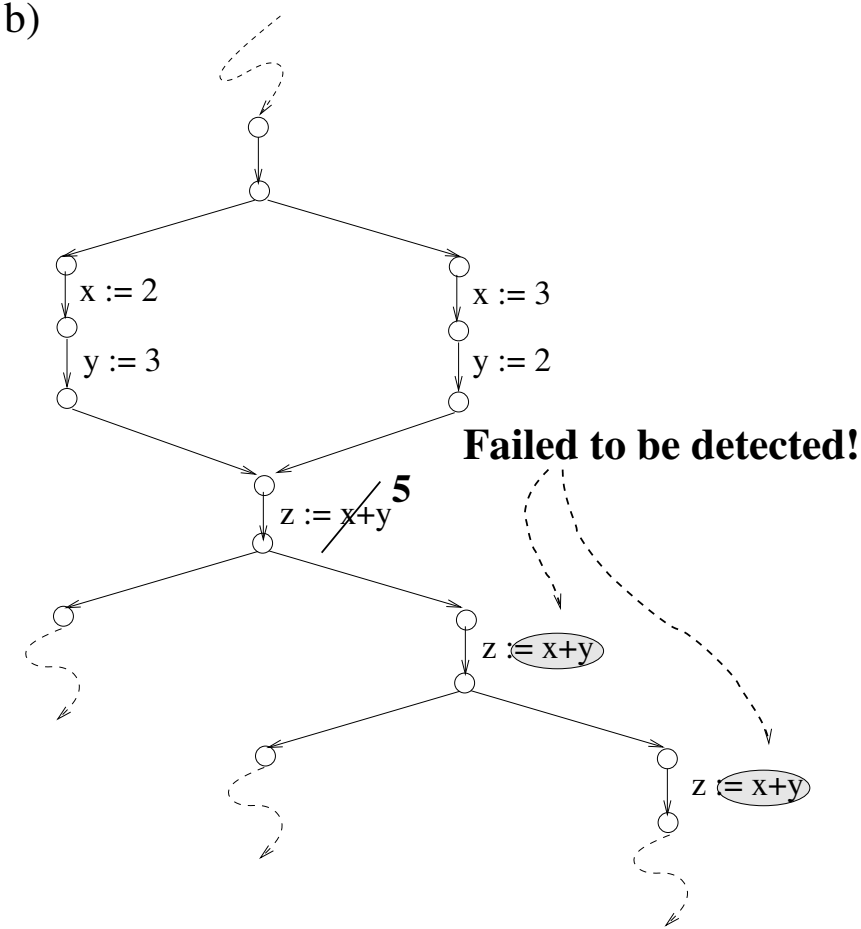
...das Konzept einfacher Konstanten ist tatsächlich schwach:

a)



After simple constant propagation
(Note: No effect at all!)

b)



After simple constant propagation
enriched by the "look–ahead–of–one" heuristics
of Kam and Ullman

Entscheidbarkeitsfragen für Konstantenanalyse

Einerseits: Konstantenanalyse ist

- unentscheidbar: Reif, Lewis (POPL 1977, vgl. Kapitel 7.10.2)

für allgemeine Programme.

Andererseits: Konstantenanalyse ist definitiv

- entscheidbar

für schleifenfreie, azyklische Programme (engl. directed acyclic graphs (DAGs)):

- Die Zahl der Programmpfade ist endlich!

Das Konzept endlicher Konstanten

...ist optimal (oder vollständig) für schleifenfreie Programme, d.h. jede Konstante in einem schleifenfreien Programm ist eine endliche Konstante (engl. finite constant)!

Der Schlüssel endlicher Konstantenanalyse ist

- in einem Präprozess für jeden Programmpunkt n eine endliche Menge interessanter Terme $\mathbf{T}_n$ zu berechnen.
- im Hauptprozess DFA-Zustandsmenge und lokale Semantikfunktionen einfacher Konstantenanalyse:

$$\Sigma = \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \to \mathbb{Z}_\perp^\top\},\ [\![e]\!]_{sc} : \Sigma \to \Sigma$$

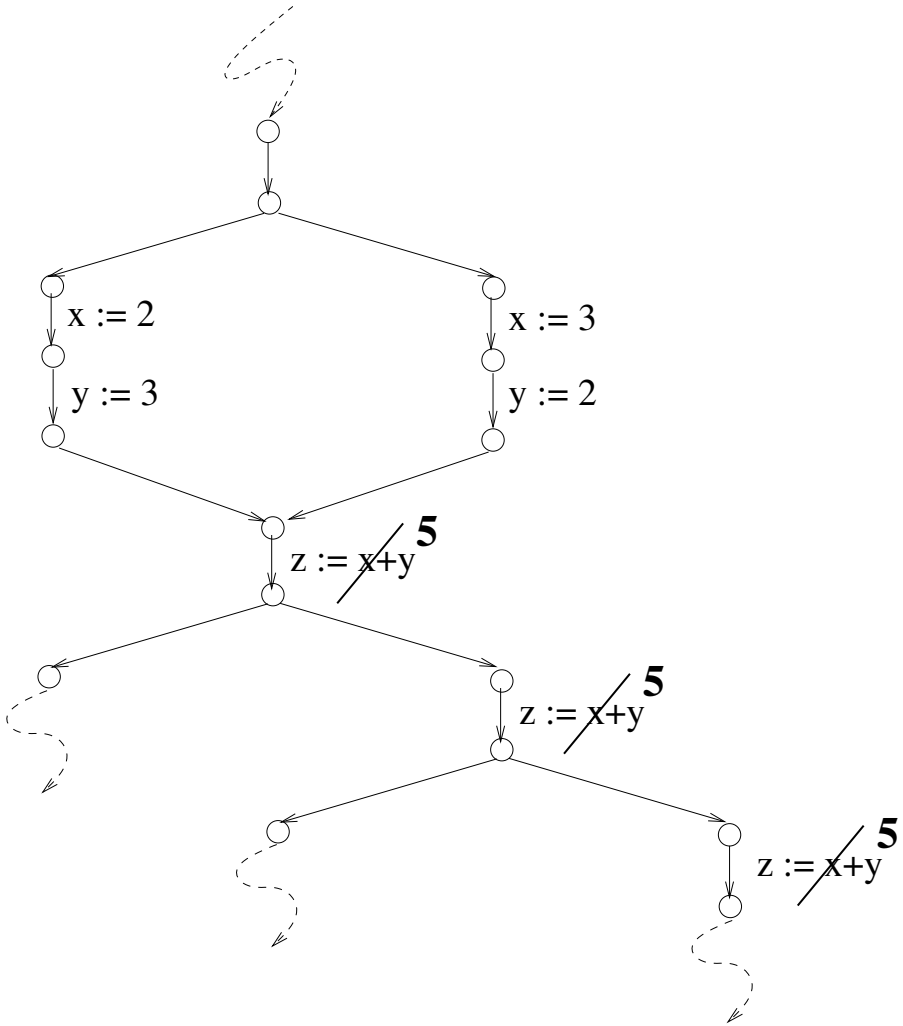
durch jene endlicher Konstantenanalyse:

$$\Sigma_N = \{\sigma_n \mid \sigma_n : \mathbf{T}_n \to \mathbb{Z}_\perp^\top,\ n \in N\},\ [\![e]\!]_{fc} : \Sigma_{\mathbf{T}_{src(e)}} \to \Sigma_{\mathbf{T}dst(e)}$$

zu ersetzen.

Endliche Konstanten

...überkommen die konzeptuelle Schwäche einfacher Konstanten:



The effect of the new algorithm

Hauptergebnisse für endliche Konstanten

Positiv: Endliche Konstanten sind

- optimal (oder vollständig) für schleifenfreie Programme.
- echte Obermenge einfacher Konstanten für allgemeine Programme (d.h. mit beliebigem Kontrollfluss).

Aber: Der Algorithmus für endliche Konstantenanalyse ist

- exponentiell (bereits für schleifenfreie Programme).

Allerdings, bevor man den Stab vorschnell bricht:

Theorem 14.1.1

Konstantenanalyse für schleifenfreie Programme ist co-NP-vollständig.

Knoop, Rüthing (CC'00)
Müller-Olm, Rüthing (ESOP'01)

Die Herausforderung von Konstantenanalyse

...eine angemessene und gute Balance zu wahren zwischen Genauigkeit und Effizienz!

Einfache Konstanten

- effizient, aber ungenau.

Endliche Konstanten

- genau, aber ineffizient.

Gesucht: Eine entscheidbare Konstantenklasse

- deutlich umfassender als einfache Konstanten.
- wesentlich effizienter als endliche Konstanten.

Konstantenanalyse auf dem Wertegraphen

...oder VG-Konstantenanalyse bietet eine ausgewogene Balance zwischen

- Ausdruckskraft und Effizienz.

Die VG-Konstantenanalyse stützt sich auf den

- Wertegraphen (engl. value graph)

von Alpern, Wegman, and Zadeck (POPL'88).

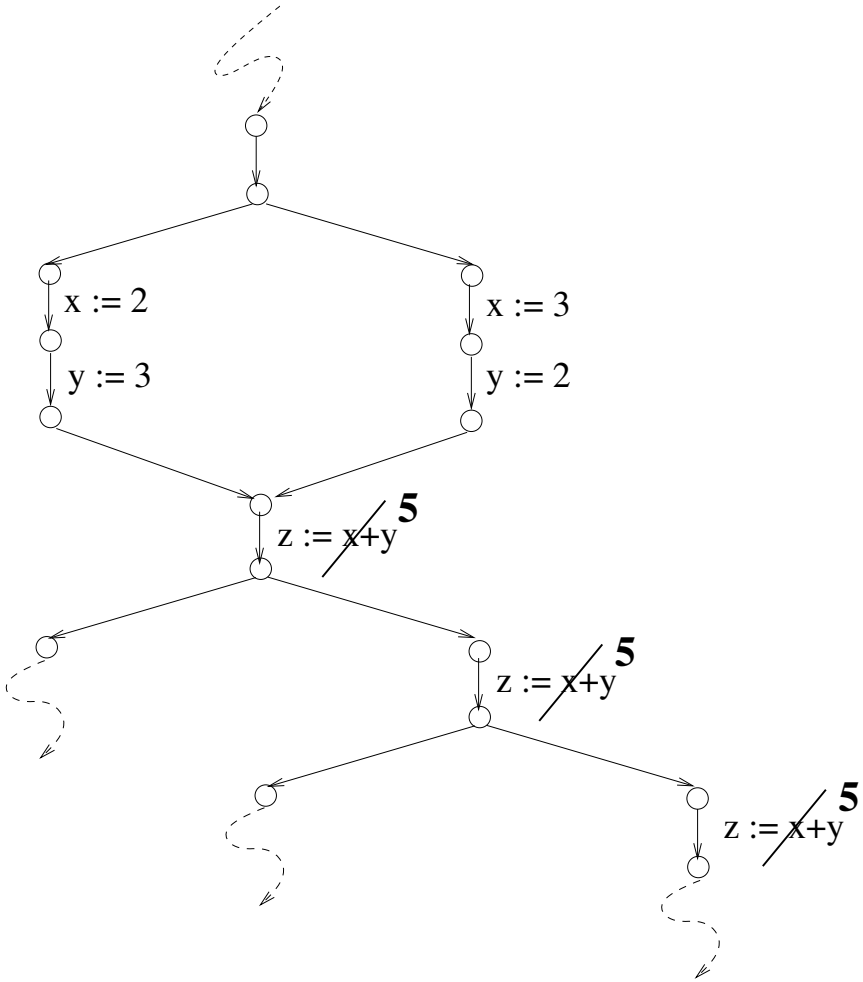
Der Wertegraph stützt sich seinerseits auf die

- Einmal-Zuweisungs-Repräsentation (engl. static single assignment (SSA) form) von Programmen

von Cytron et al. (POPL'89)).

Zurück zum laufenden Beispiel

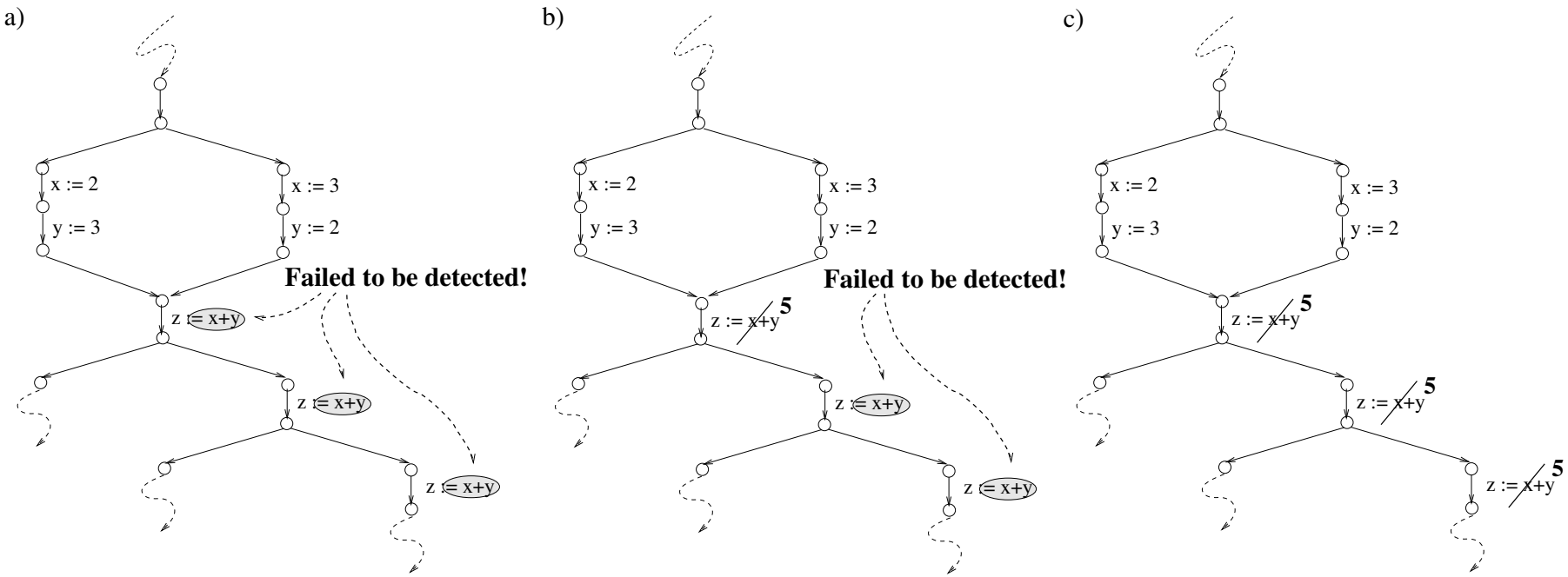
...wie endliche Konstantenanalyse erkennt auch VG-Konstantenanalyse alle Terme als Konstanten:



The effect of the new algorithm

Insbesondere

...geht VG-Konstantenanalyse weit über eine frühere effiziente *ad hoc*-Verbesserung von Kam und Ullman, 1977, von Kildalls SC-Algorithmus hinaus und eine hier SC+ genannte Klasse von '1-Vorschau'-Konstanten erkennt:



After simple constant propagation
(Note: No effect at all!)

After simple constant propagation
enriched by the "look–ahead–of–one" heuristics
of Kam and Ullman

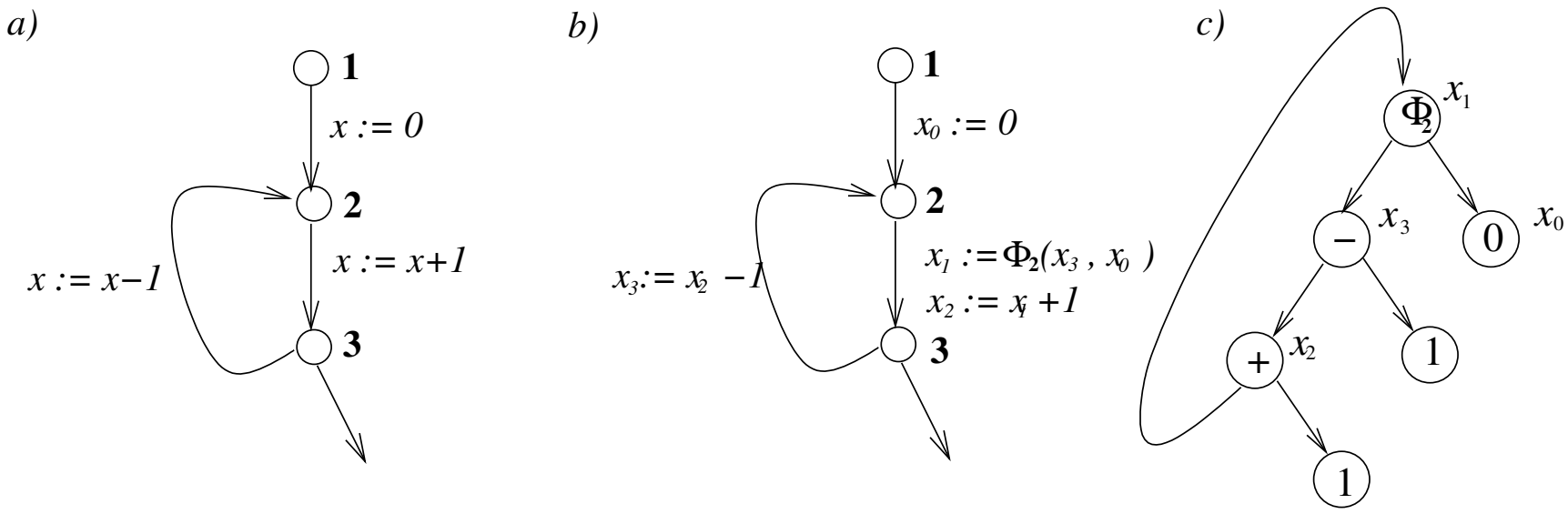
The effect of the new algorithm

Kapitel 14.2

Konstantenanalyse auf dem Wertegraph

Der Wertegraph

...eines Programms nach Alpern, Wegman und Zadec (POPL'88):



Flussgraph SSA-Graph Wertegraph

Konstantenanalyse auf dem Wertegraphen

...in zwei unterschiedlich mächtigen Varianten:

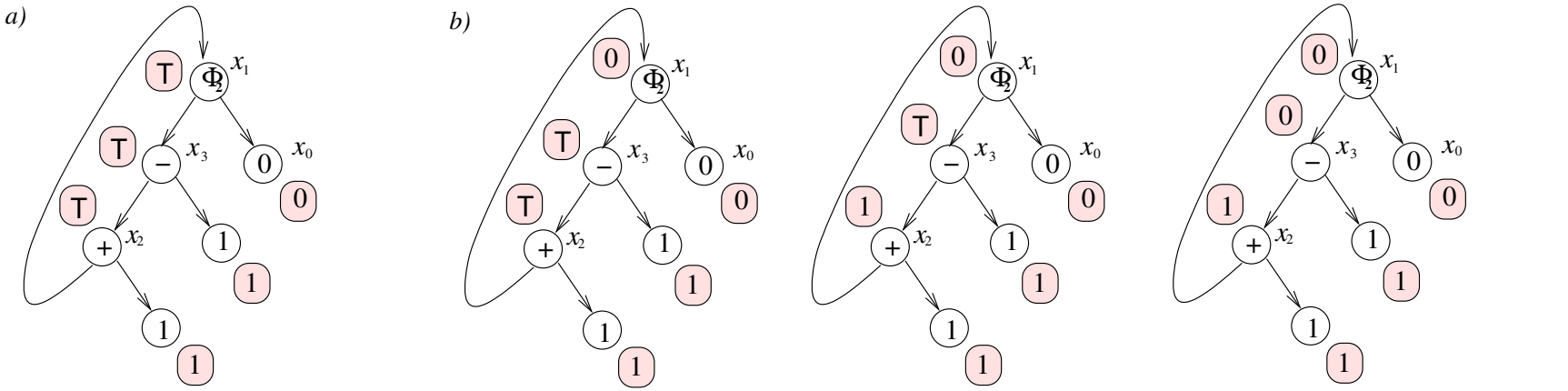
- VG-Basiskonstantenanalyse
  ...erkennt die Klasse einfache Konstanten.
- Volle VG-Konstantenanalyse
  ...erkennt eine Klasse von Konstanten, die weit über die Klassen der einfachen und SC+-Konstanten hinausgeht.

Kapitel 14.2.1

VG-Basiskonstantenanalyse

Konstantenanalyse auf dem Wertegraphen

...illustriert anhand eines Beispiels:



After the initialization step | After the 1st iteration step | After the 2nd iteration step | After the 3rd iteration step: Stable!

Analyseresultat: x_2 und x_3 sind (einfache) Konstanten!

Hauptresultat

...für die VG-Basiskonstantenanalyse.

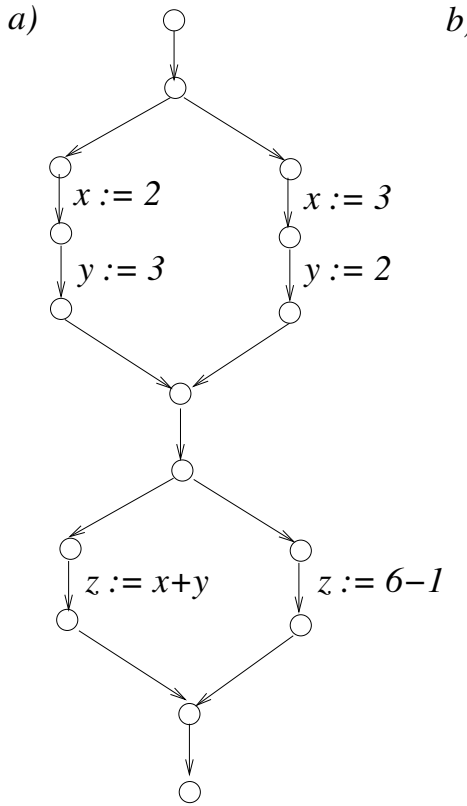
Lemma 14.2.1.1

Die VG-Basiskonstantenanalyse ist korrekt und erkennt die Klasse der einfachen Konstanten.

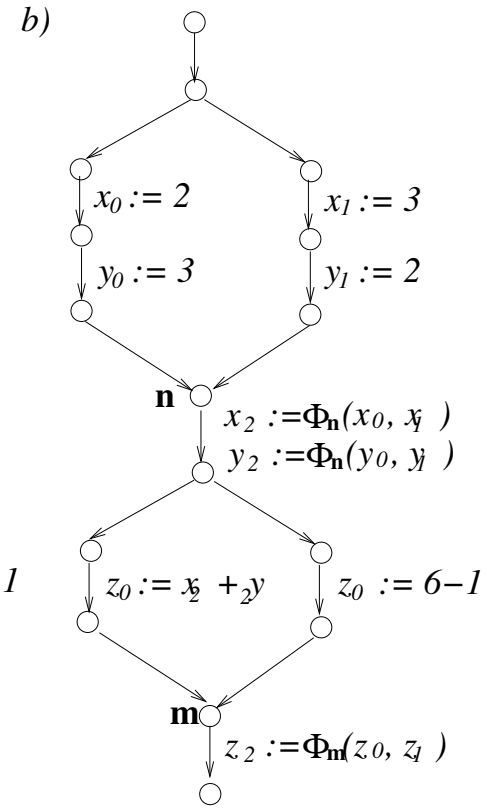
Kapitel 14.2.2

Volle VG-Konstantenanalyse

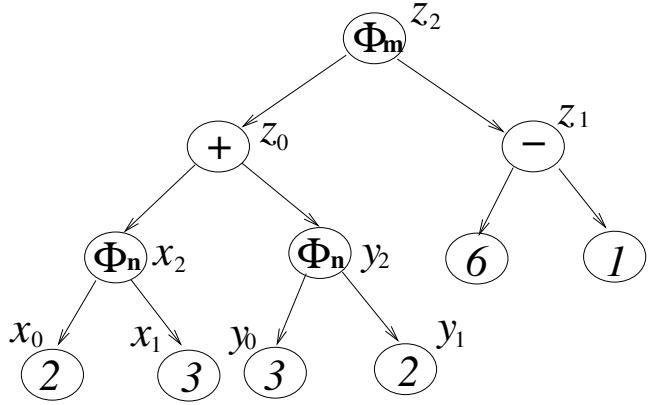
Illustrierendes Beispiel



Flussgraph



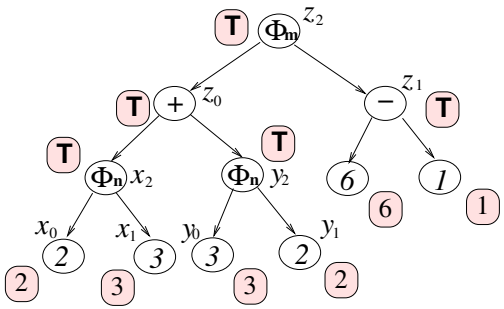
SSA-Graph



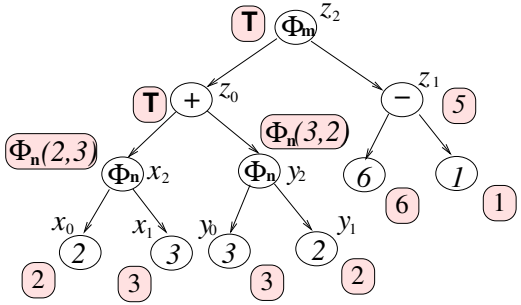
Wertegraph

Volle VG-Konstantenanalyse

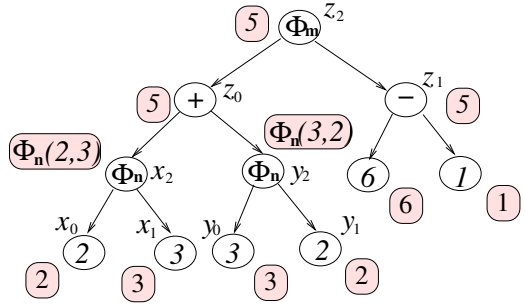
...illustriert anhand des laufenden Beispiels:



The start annotation



After the first iteration



After the second iteration. Stable!

Der technische Clou: Die

- Einführung von Φ-Konstanten
- Anpassung der Evaluationsfunktion auf Wertegraphen!

Hauptresultate

Lemma 14.2.2.1

Die volle VG-Konstantenanalyse ist korrekt und erkennt

- eine Obermenge der Klasse einfacher Konstanten.
- in schleifenfreien Programmen jede injektive Konstante, d.h. jeden Term, dessen relevante Operanden ausschließlich durch injektive Operatoren verknüpft sind.

Insgesamt erreicht die volle VG-Konstantenanalyse damit eine

- ausgewogene Balance zwischen Ausdruckskraft und Effizienz.

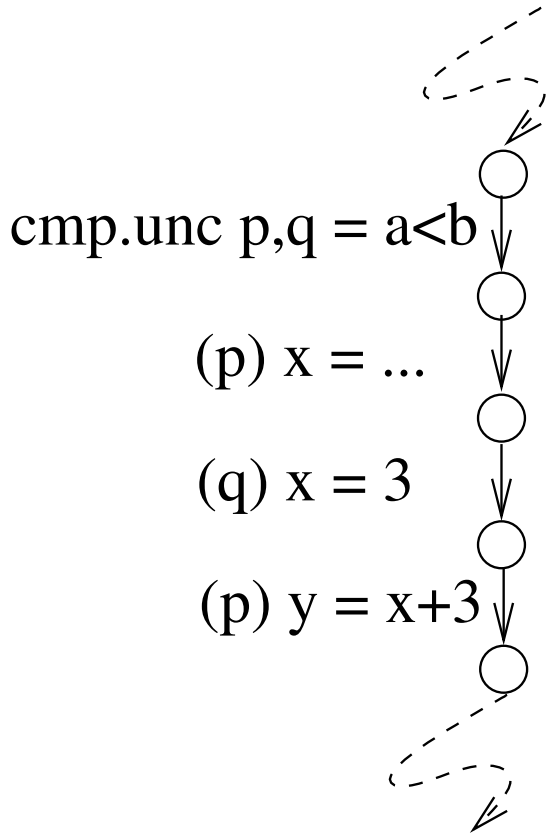
Essentiell dafür ist die Abstützung auf den Wertegraph (und damit indirekt auf den SSA-Graphen eines Programms).

Kapitel 14.3

Konstantenanalyse auf dem prädikatierten Wertegraph

Prädikatierter Code

...als Resultat sog. if-Konversion:

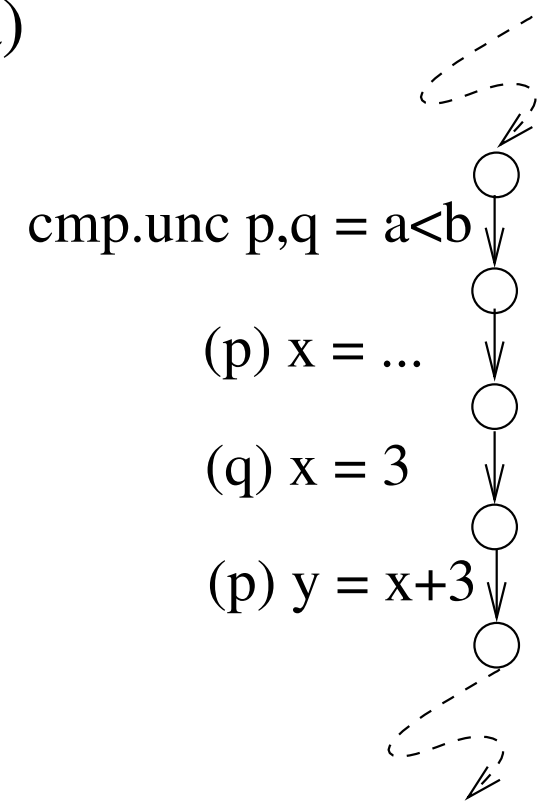


...mit dem Ziel besserer Parallelisierbarkeit durch erhöhte Parallelität auf Instruktionsebene (engl. instruction-level parallelism).

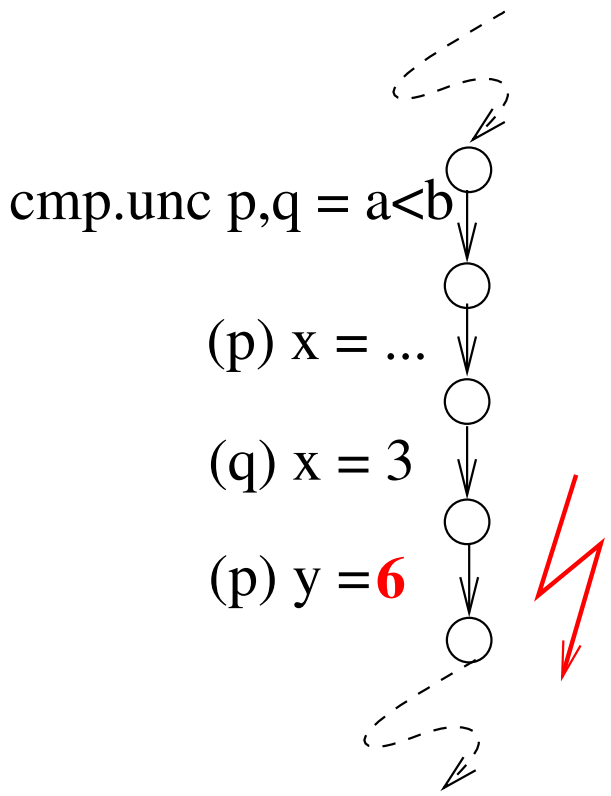
Naive Übertragung

...von Konstantenanalysetechniken von unprädikatiertem auf prädikatierten Code schlägt fehl:

a)



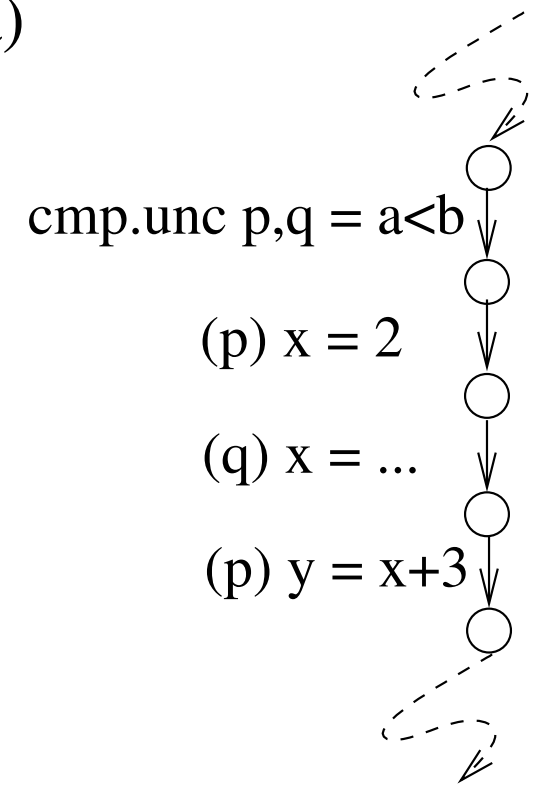
b)



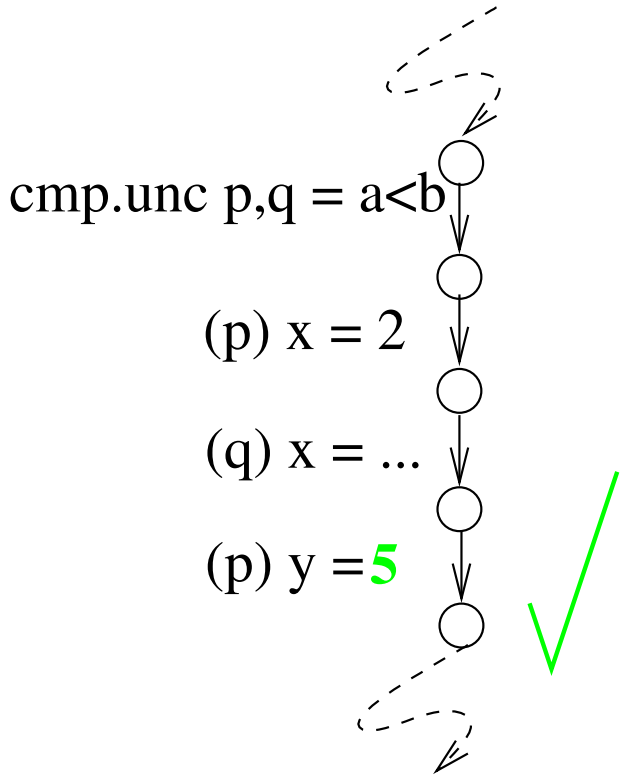
Naive korrekte Übertragung

...von Konstantenanalysetechniken von unprädikatiertem auf prädikatierten Code ist andererseits zu konservativ und erkennt zu viele Konstanten nicht wie etwa im folgenden Beispiel:

a)



b)



PVG-Konstantenanalyse

...für einen angemesseneren Umgang mit prädikatiertem Code zur Konstantenanalyse mit ‘zwei+’ Varianten:

- PVG-Basiskonstantenanalyse
- Volle PVG-Konstantenanalyse

zuzüglich

- performanz-verbesserter Variationen.

Alle Varianten und Variationen sind zweistufig und bestehen aus einer

- lokalen
- globalen

Analysestufe.

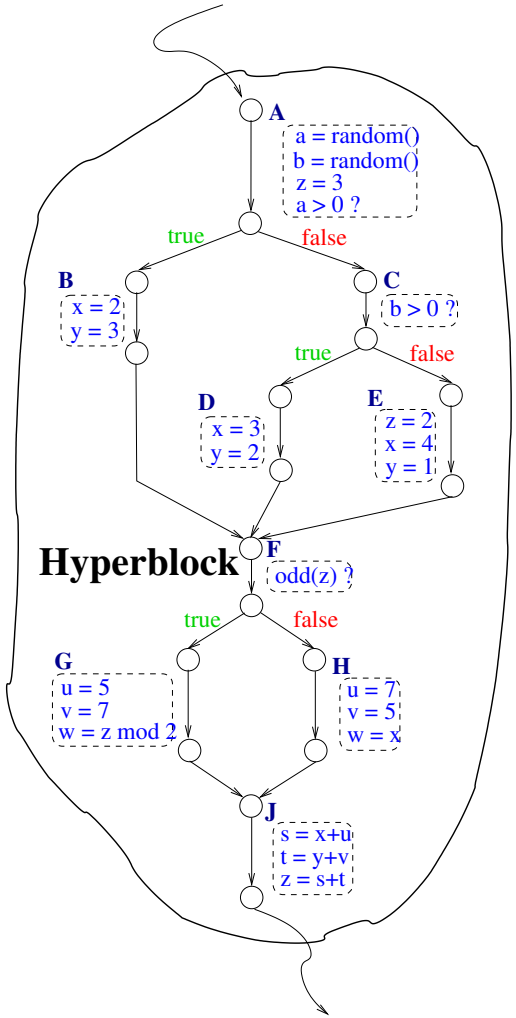
Kapitel 14.3.1

Hyperblöcke, Hyperblockgraphen

Hyperblöcke

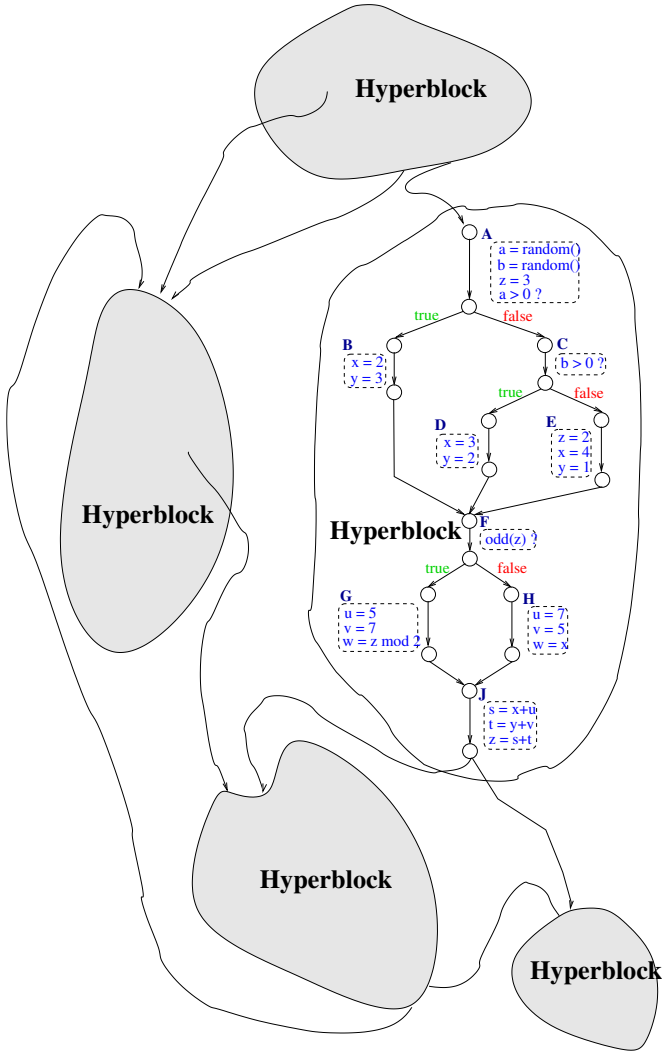
...sind Schlüsselbausteine prädikatierten Codes gekennzeichnet durch:

- ein Eintrittspunkt, mehrere Austrittspunkte.



Hyperblockgraphen

...sind die Hyperblockzerlegung eines Flussgraphen, hier anhand des durchgehenden Beispiels illustriert:



Aufbau der PVG-Konstantenanalyse

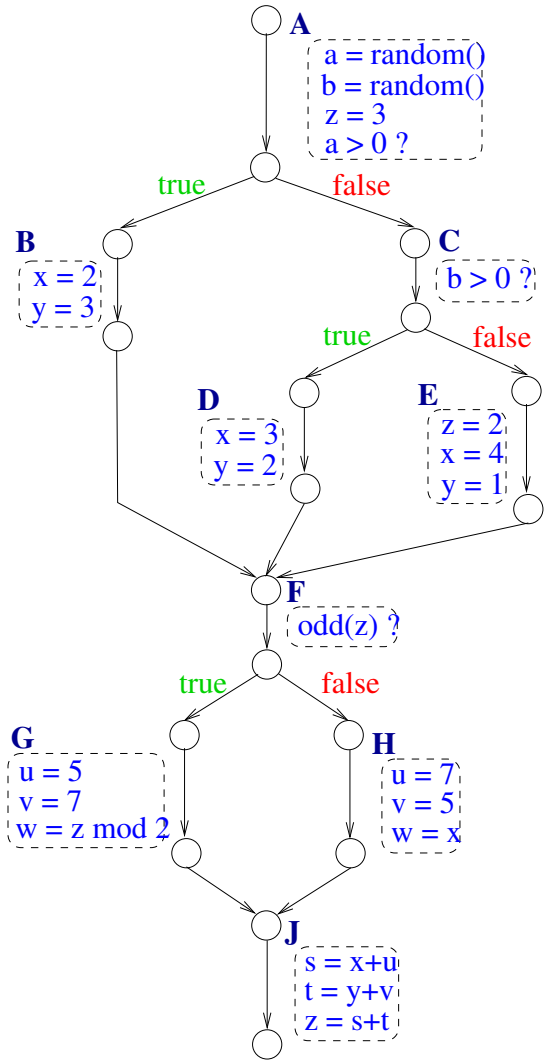
1. Stufe: Lokale Analyse
   - Separate und unabhängige Analyse aller Hyperblöcke eines Programms.
2. Stufe: Globale Analyse
   - Globalisierung der Ergebnisse der lokalen Analysestufe.

Kapitel 14.3.2

Lokale Hyperblock-Konstantenanalyse

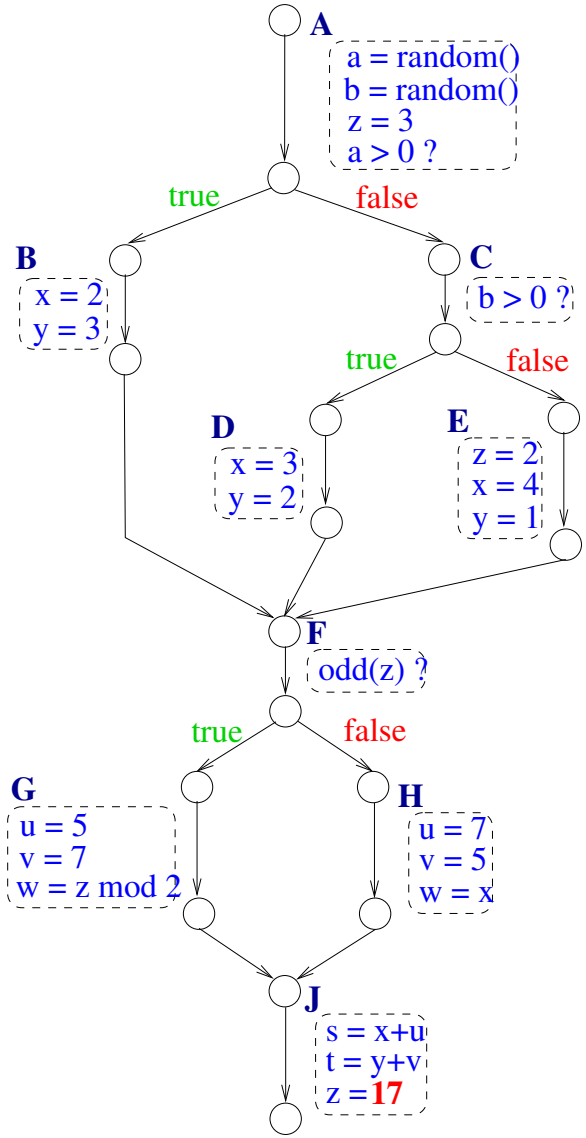
Diskussion der lokalen Analysestufe

....anhand des Hyperblocks unseres durchgehenden Beispiels:



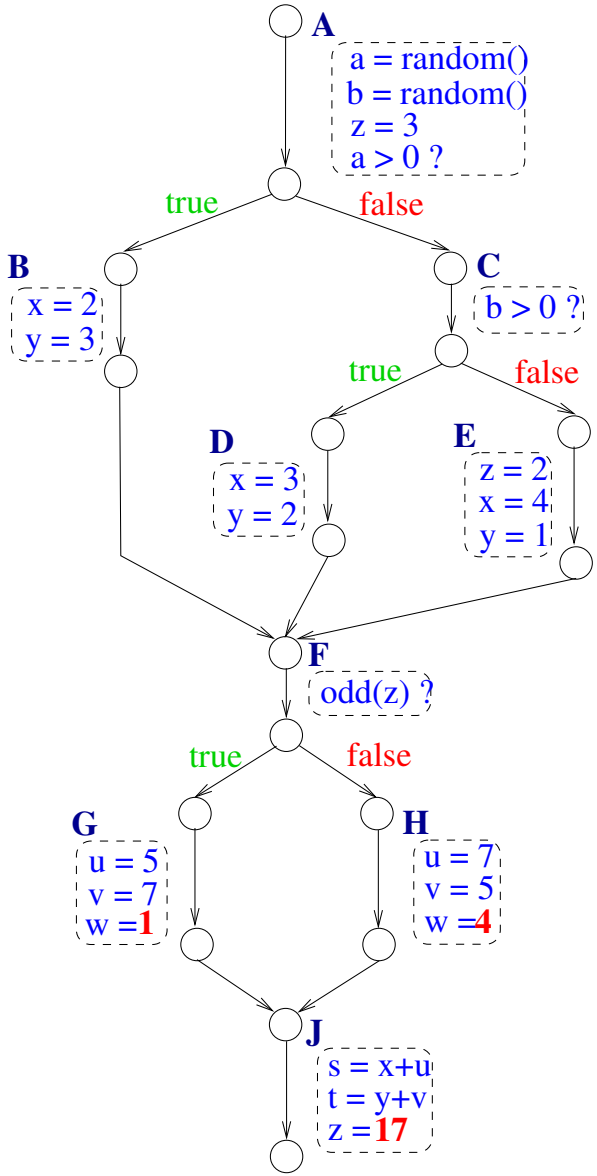
Original Hyperblock

Die PVG-Grundalgorithmustransformation



The Non–Deterministic Path–Precise
Basic Optimization

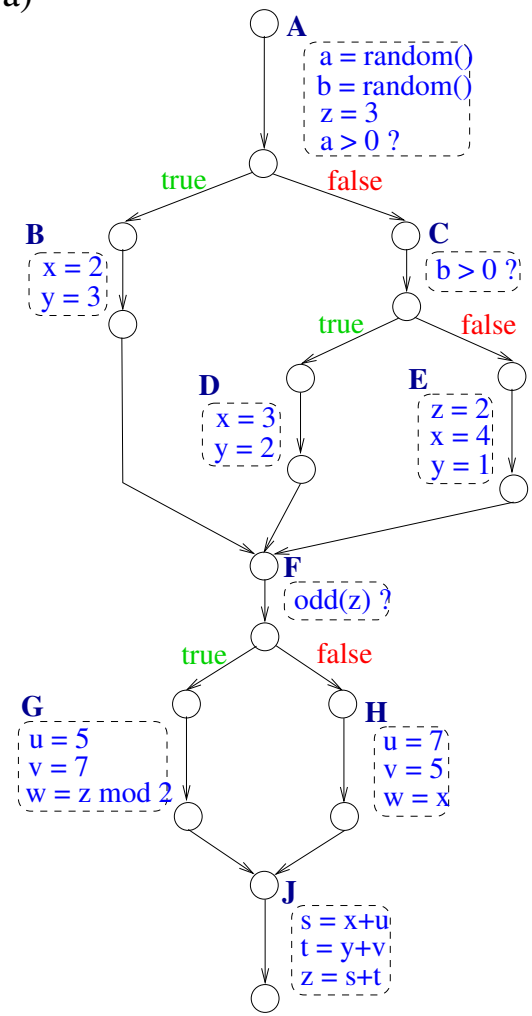
Die volle PVG-Algorithmustransformation



The Deterministic Path–Precise
Full Optimization

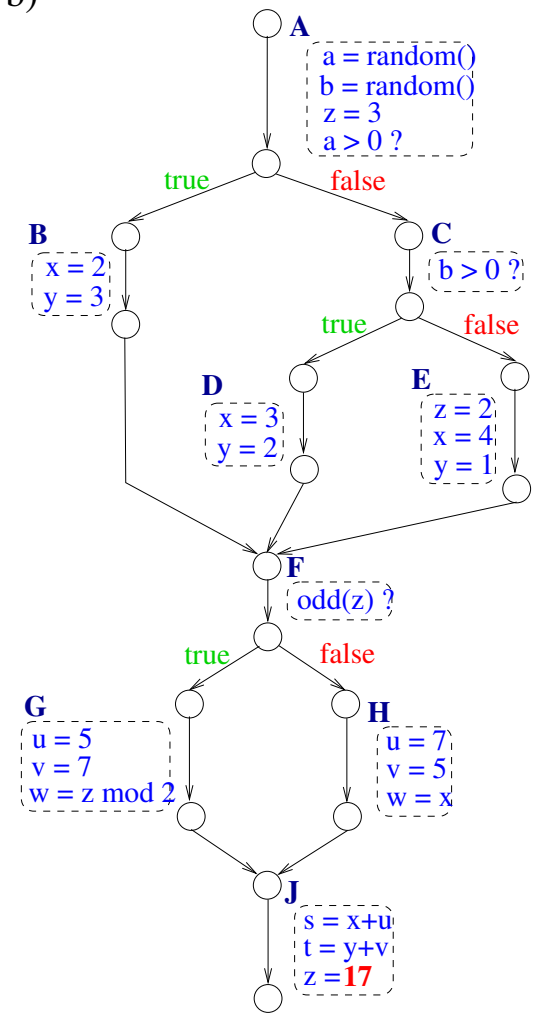
Ausgangsprogramm & beide Transformationen

a)



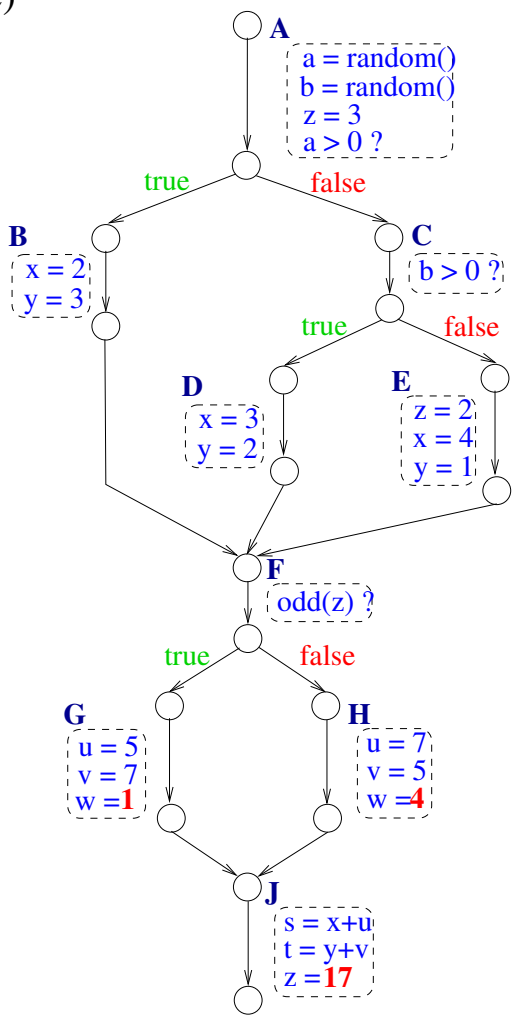
Original Hyperblock

b)



The Non–Deterministic Path–Precise Basic Optimization

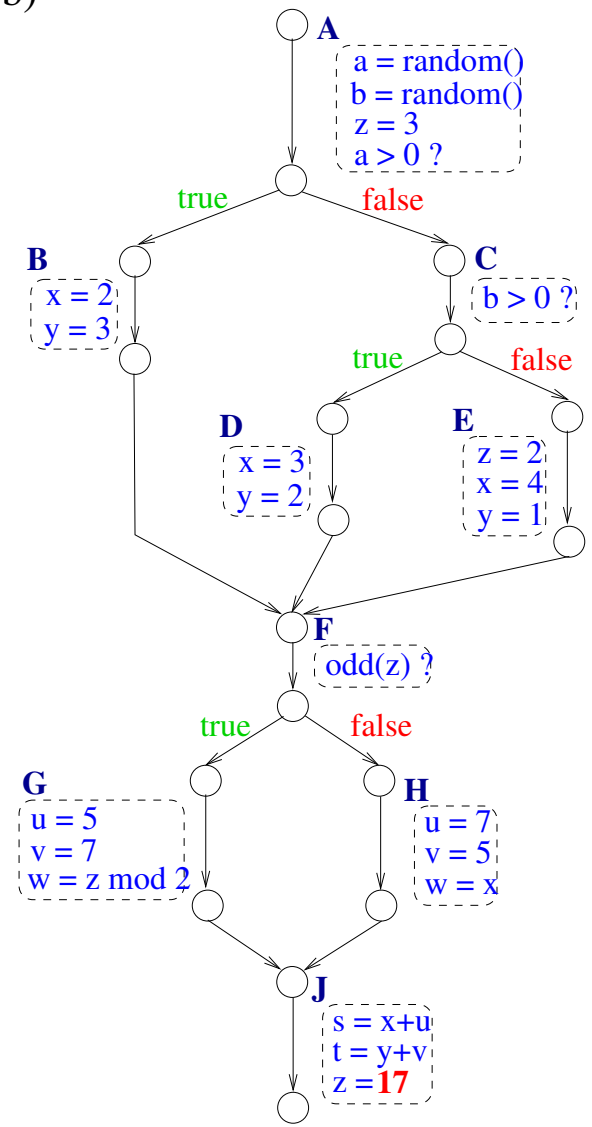
c)



The Deterministic Path–Precise Full Optimization

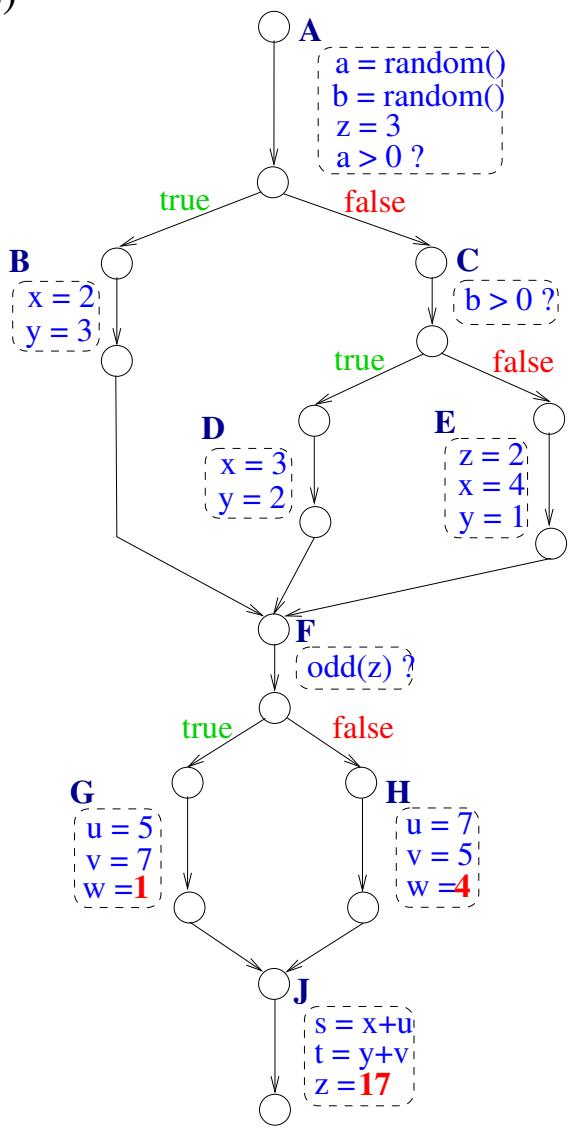
Beide Transformationen auf einen Blick

b)



The Non–Deterministic Path–Precise Basic Optimization

c)



The Deterministic Path–Precise Full Optimization

Ursprünglicher und prädikatierter Code

```
Urspruenglicher Hyperblock | Nach if-Konversion
=========================== | ==================
```

```
begin \\ Original Hyperblock   | begin \\ After if-Conversion
 (a,b) = (random(),random());  |   (p0) (a,b) = (random(),random());
 z = 3;                        |   (p0) z = 3;
 if a>0 then                   |   (p0) cmp.unc B,C (a>0);
   x = 2;                      |   (B)  x = 2;
   y = 3                       |   (B)  y = 3;
 elsif b>0 then                |   (C)  cmp.unc D,E (b>0);
   x = 3;                      |   (D)  x = 3;
   y = 2                       |   (D)  y = 2;
 else                          |
   z = 2;                      |   (E)  z = 2;
   x = 4;                      |   (E)  x = 4;
   y = 1 fi;                   |   (E)  y = 1;
 if odd(z) then                |   (p0) cmp.unc G,H (odd(z));
   u = 5;                      |   (G)  u = 5;
   v = 7;                      |   (G)  v = 7;
   w = z mod 2                 |   (G)  w = z mod 2;
 else                          |
   u = 7;                      |   (H)  u = 7;
   v = 5;                      |   (H)  v = 5;
   w = x fi;                   |   (H)  w = x;
 s = x+u;                      |   (p0) s = x+u;
 t = y+v;                      |   (p0) t = y+v;
 z = s+t end.                  |   (p0) z = s+t end.
```

Prädikatierte SSA-Form (PSSA-Form)

...von Carter, Simon, Calder, Ferrante (PACT'99):

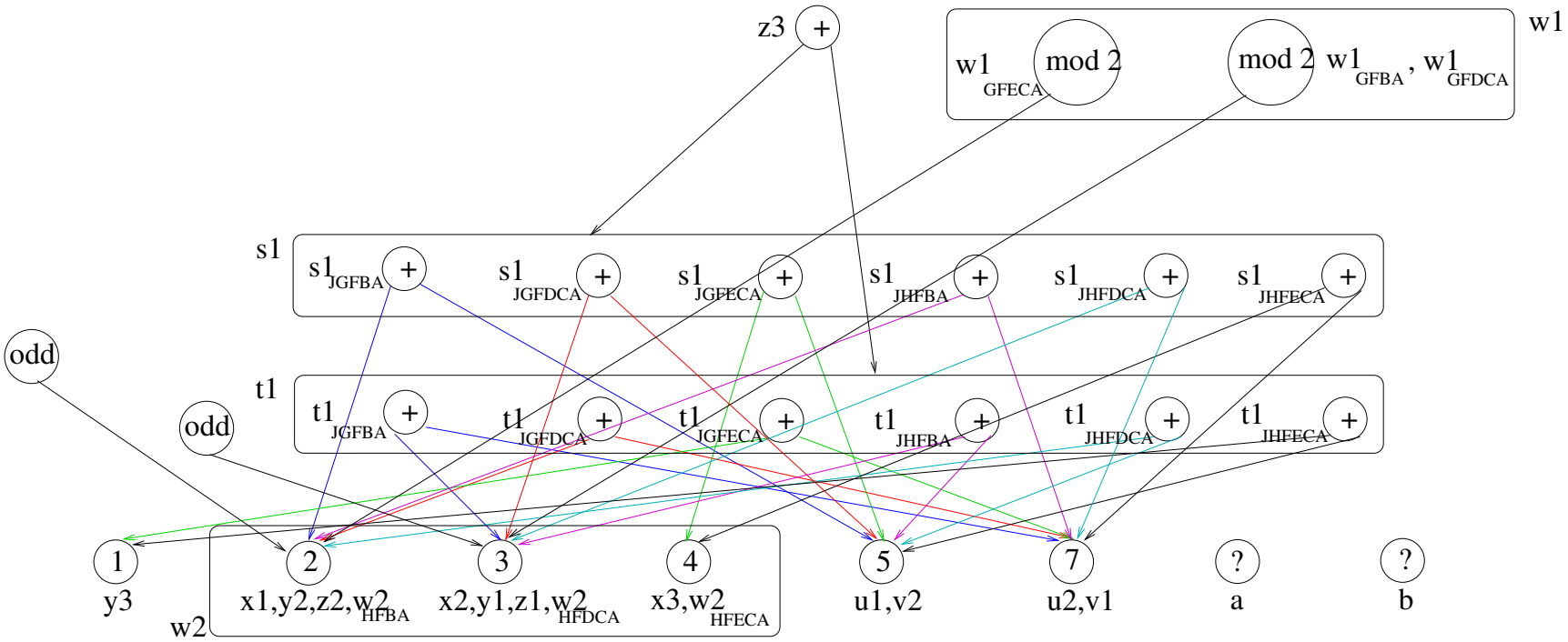
```
begin (p0)     A = OR(TRUE);                    | [*] (HFBA)   w2 = x1;
      (A)      (a1,b1) = (random(),random());   | [*] (HFDCA)  w2 = x2;                 |
      (A)      z1 = 3;                          |     (HFECA)  w2 = x3;
      (A)      cmp.unc BA,CA (a1>0);            |     (H)      u2 = 7;
      (p0)     B = OR(BA);                      |     (H)      v2 = 5;
      (p0)     C = OR(CA);                      |     (GFBA)   JGFBA = OR(TRUE);
      (B)      x1 = 2;                          |     (GFDCA)  JGFDCA = OR(TRUE);
      (B)      y1 = 3;                          | [*] (GFECA)  JGFECA = OR(TRUE);
      (C)      cmp.unc DCA,ECA (b1>0);          | [*] (HFBA)   JHFBA = OR(TRUE);
      (p0)     D = OR(DCA);                     | [*] (HFDCA)  JHFDCA = OR(TRUE);
      (p0)     E = OR(ECA);                     |     (HFECA)  JHFECA = OR(TRUE);
      (D)      x2 = 3;                          | [-] (p0)     J = OR(JGFBA,JGFDCA,
      (D)      y2 = 2;                          |                     JGFECA,JHFBA,
      (E)      z2 = 2;                          |                     JHFDCA,JHFECA);
      (E)      x3 = 4;                          |     (JGFBA)  s1 = x1+u1;
      (E)      y3 = 1;                          |     (JGFBA)  t1 = y1+v1;
      (BA)     FBA = OR(TRUE);                  | [*] (JGFDCA) s1 = x2+u1;
      (DCA)    FDCA = OR(TRUE);                 | [*] (JGFDCA) t1 = y2+v1;
      (ECA)    FECA = OR(TRUE);                 |     (JGFECA) s1 = x3+u1;
      (p0)     F = OR(FBA,FDCA,FECA);           |     (JGFECA) t1 = y3+v1;
      (FBA)    cmp.unc GFBA,HFBA (odd(z1));     | [*] (JHFBA)  s1 = x1+u2;
      (FDCA)   cmp.unc GFDCA,HFDCA (odd(z1));   | [*] (JHFBA)  t1 = y1+v2;
      (FECA)   cmp.unc GFECA,HFECA (odd(z2));   | [*] (JHFDCA) s1 = x2+u2;
  [-] (p0)     G = OR(GFBA,GFDCA,GFECA);        | [*] (JHFDCA) t1 = y2+v2;
  [-] (p0)     H = OR(HFBA,HFDCA,HFECA);        |     (JHFECA) s1 = x3+u2;
      (GFBA)   w1 = z1 mod 2;                   |     (JHFECA) t1 = y3+v2;
      (GFDCA)  w1 = z1 mod 2;                   |     (J)      z3 = s1+t1;
  [*] (GFECA)  w1 = z2 mod 2;                   |    end.
      (G)      u1 = 5;                          |
      (G)      v1 = 7;                          |
```

Kapitel 14.3.3

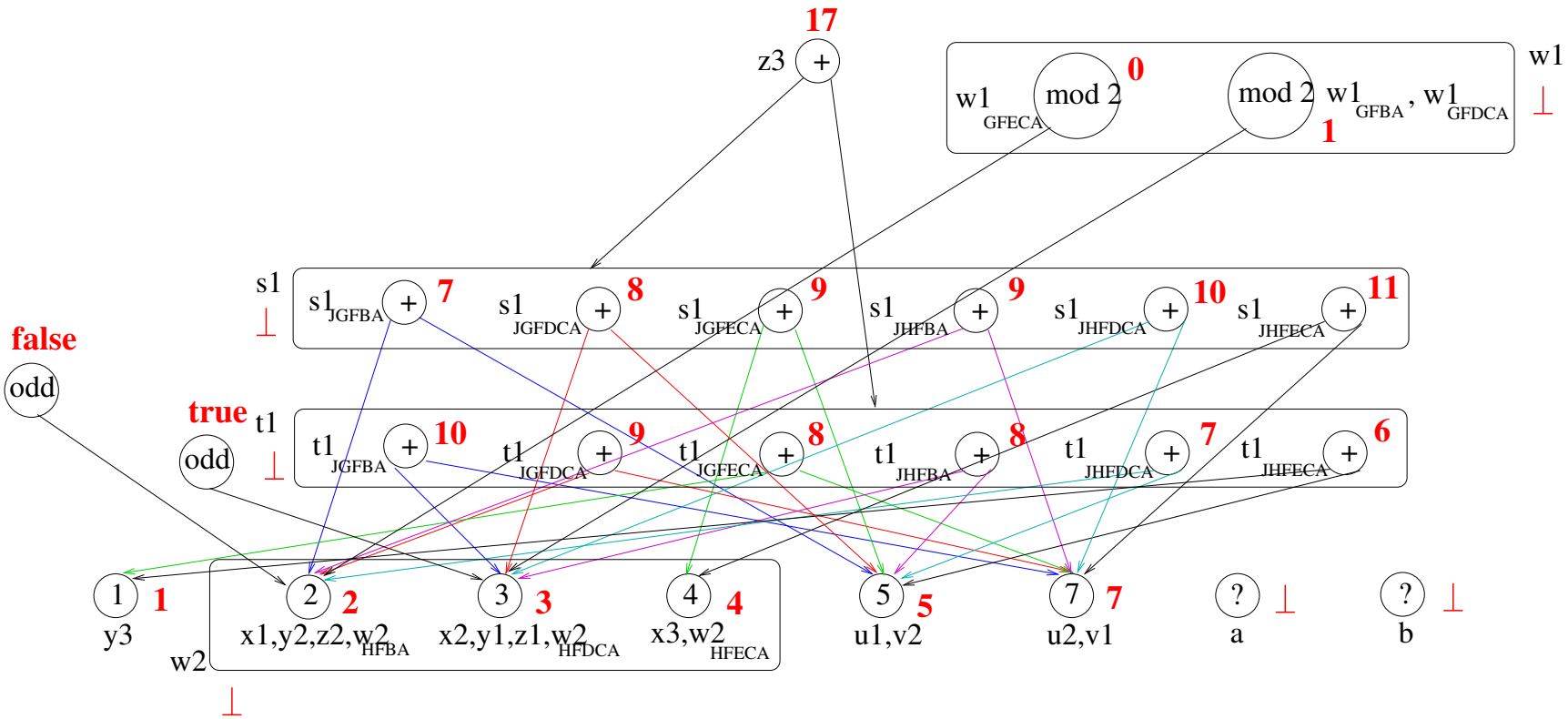
PVG-Basiskonstantenanalyse

Die PVG-Basiskonstantenanalyse

... auf PSSA-basiertem PVG ohne Wächterprädikatausnutzung (engl. guarding predicates):

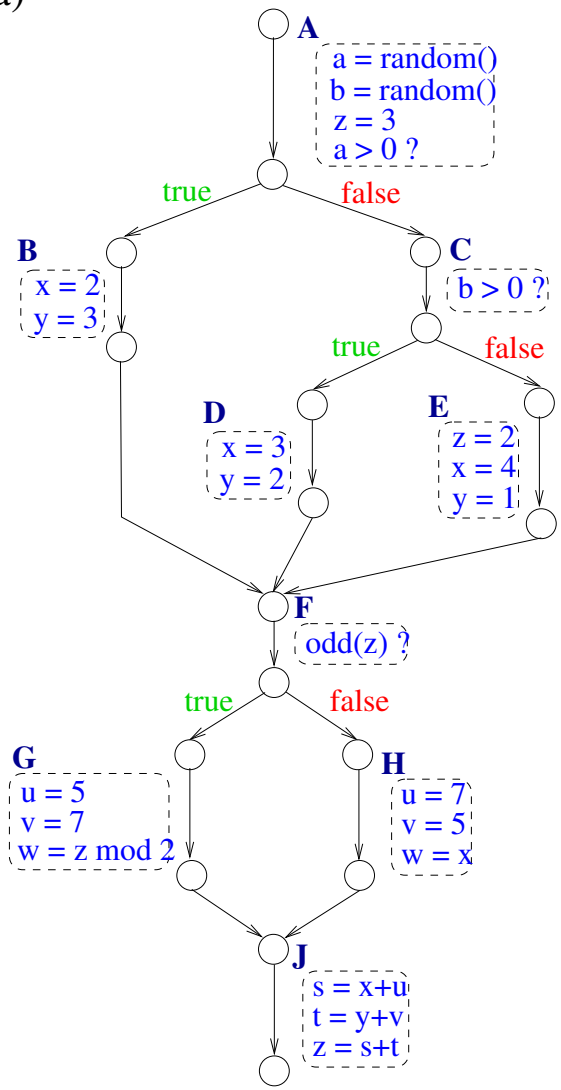


Resultat der PVG-Basiskonstantenanalyse



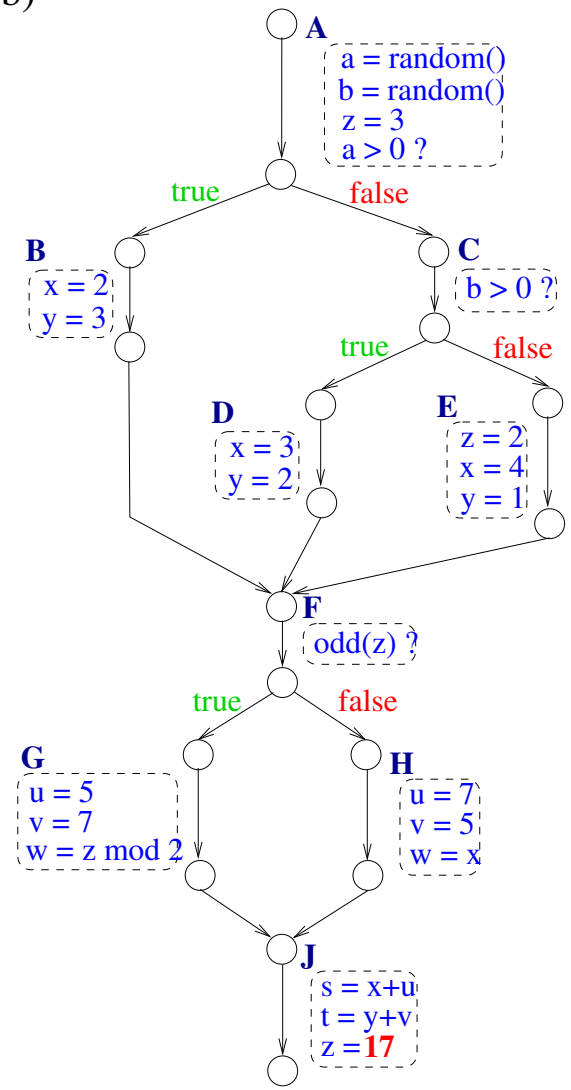
PVG-Basiskonstantenanalysetransformation

a)



Original Hyperblock

b)



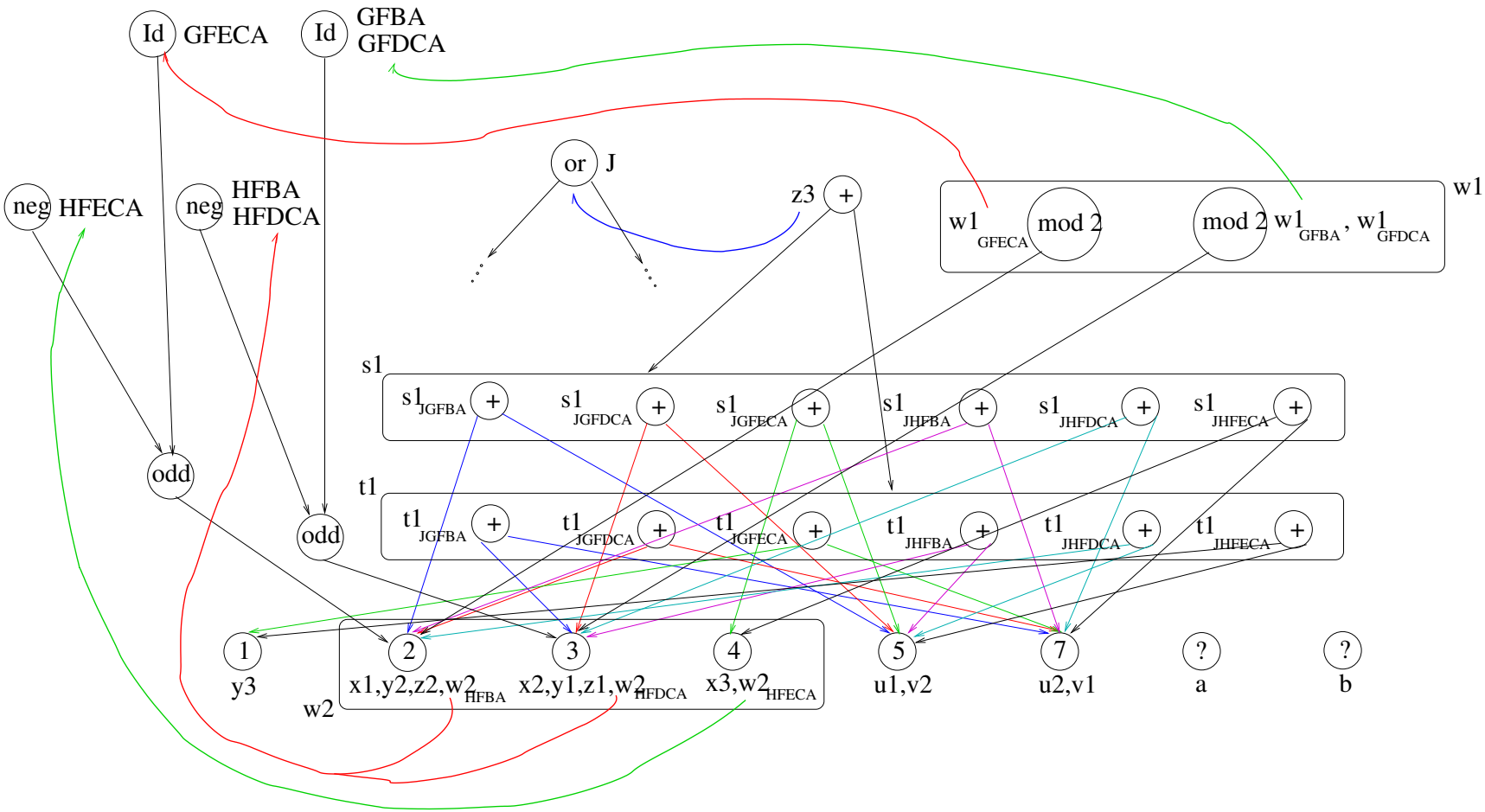
The Non–Deterministic Path–Precise Basic Optimization

Kapitel 14.3.4

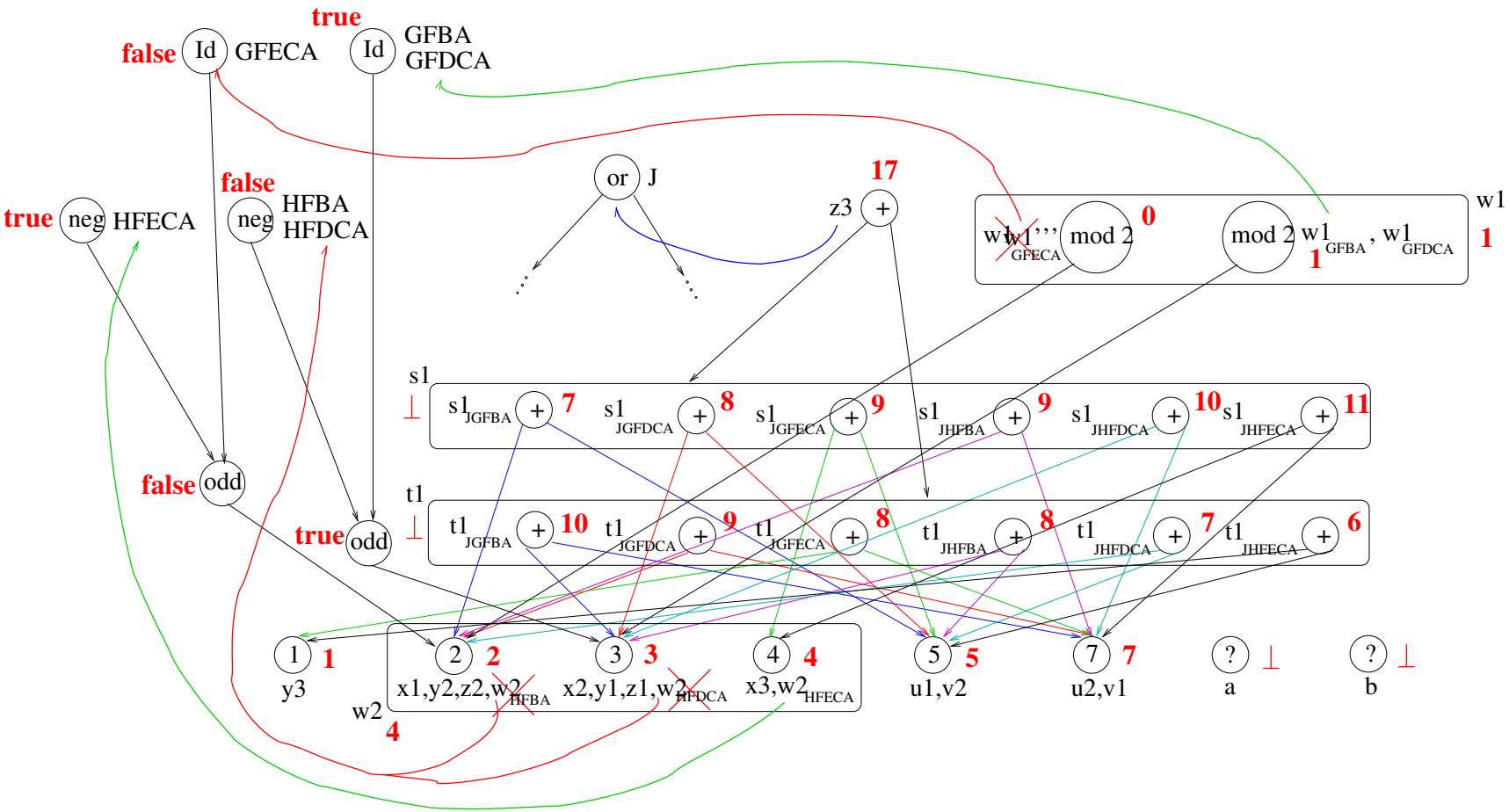
Volle PVG-Konstantenanalyse

Der prädikatierte Wertegraph

...unter Ausnutzung der Wächterprädikate (engl. guarding predicates):

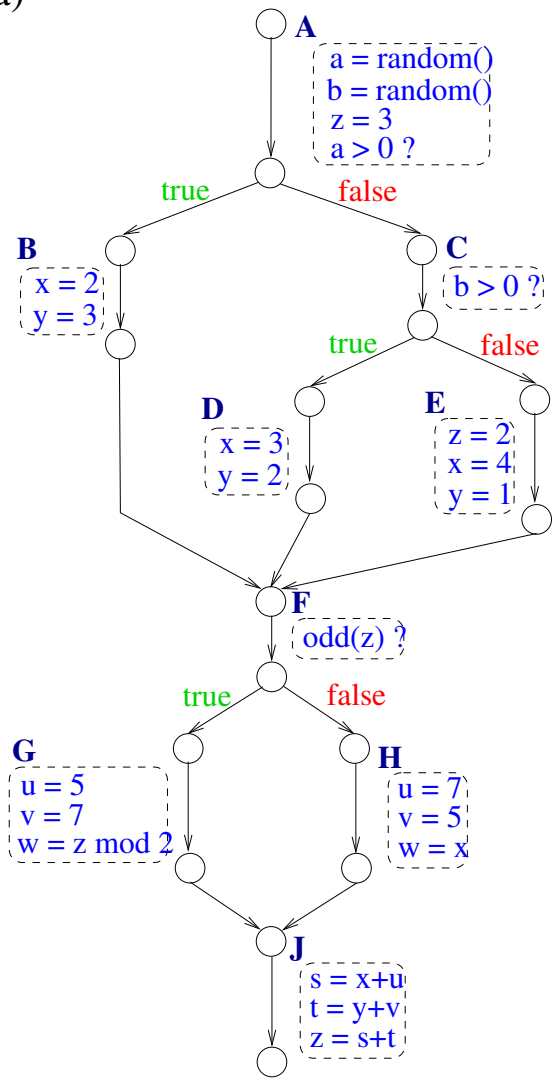


Resultat der vollen PVG-Konstantenanalyse



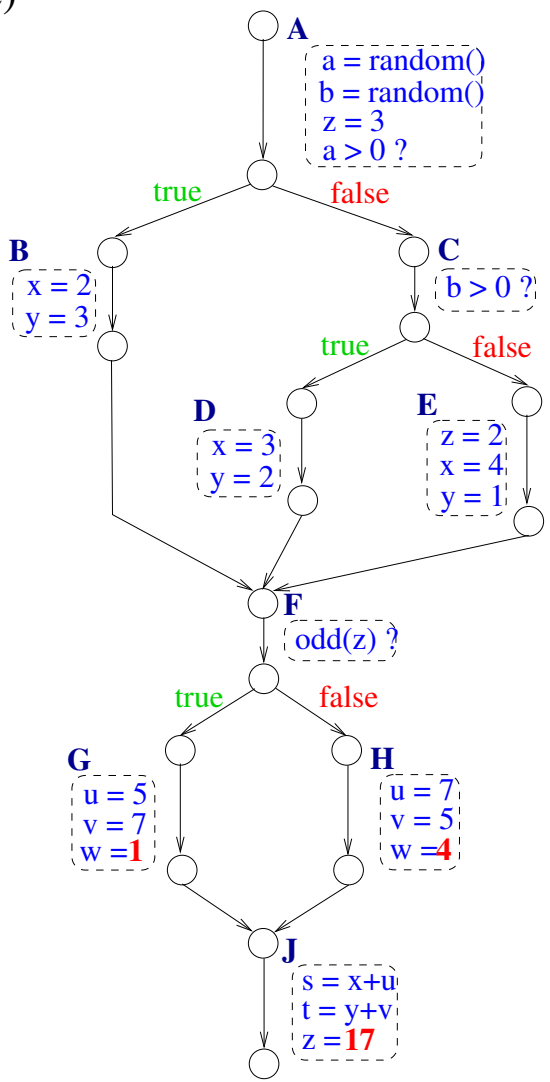
Volle PVG-Konstantenanalysetransformation

a)



Original Hyperblock

c)



The Deterministic Path–Precise
Full Optimization

Der transformierte Hyperblock in PSSA-Form

```
begin (p0)     A = OR(TRUE);                 |
      (A)      a1 = random();                | [-] (p0)     G = OR(GFBA,GFDCA);
      (A)      b1 = random();                | [-] (p0)     H = OR(HFECA);
      (A)      z1 = 3;                       |     (G)      w1 = 1;
      (A)      cmp.unc BA,CA (a1>0);         |     (G)      u1 = 5;
      (p0)     B = OR(BA);                   |     (G)      v1 = 7;
      (p0)     C = OR(CA);                   |     (HFECA)  w2 = 4;
      (B)      x1 = 2;                       |     (H)      u2 = 7;
      (B)      y1 = 3;                       |     (H)      v2 = 5;
      (C)      cmp.unc DCA,ECA (b1>0);       |     (GFBA)   JGFBA = OR(TRUE);
      (p0)     D = OR(DCA);                  |     (GFDCA)  JGFDCA = OR(TRUE);
      (p0)     E = OR(ECA);                  |     (HFECA)  JHFECA = OR(TRUE);
      (D)      x2 = 3;                       | [-] (p0)     J = OR(JGFBA,JGFECA,
      (D)      y2 = 2;                       |                     JHFECA);
      (E)      z2 = 2;                       |     (JGFBA)  s1 = 7;
      (E)      x3 = 4;                       |     (JGFBA)  t1 = 10;
      (E)      y3 = 1;                       |     (JGFECA) s1 = 9;
      (BA)     FBA = OR(TRUE);               |     (JGFECA) t1 = 8;
      (DCA)    FDCA = OR(TRUE);              |     (JHFECA) s1 = 11;
      (ECA)    FECA = OR(TRUE);              |     (JHFECA) t1 = 6;
      (p0)     F = OR(FBA,FDCA,FECA);        |     (J)      z3 = 17;
      (FBA)    cmp.unc GFBA,HFBA (TRUE));    |   end.
      (FDCA)   cmp.unc GFDCA,HFDCA (TRUE);   |
      (FECA)   cmp.unc GFECA,HFECA (FALSE);  |
```

Hauptresultate

Lemma 14.3.4.1 (Korrektheit)

Die PVG-Basis- und die volle PVG-Konstantenanalyse sind korrekt.

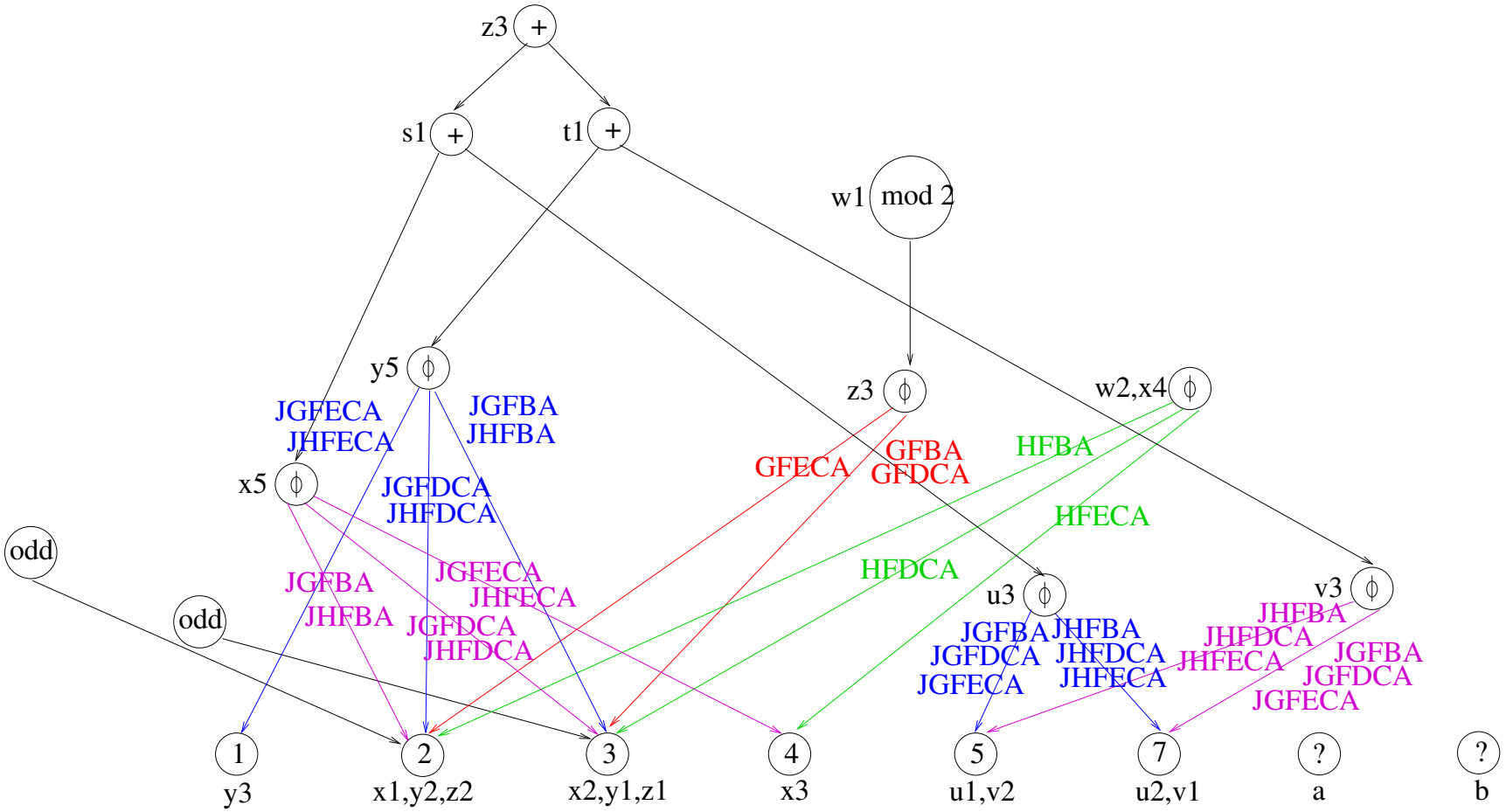
Lemma 14.3.4.2 (Vollständigkeit/Optimalität)

- Die PVG-Basiskonstantenanalyse ist pfad-präzise für nicht-deterministische Interpretation von Verzweigungsbedingungen.
- Die volle PVG-Konstantenanalyse ist prädikatsensitiv pfad-präzise.

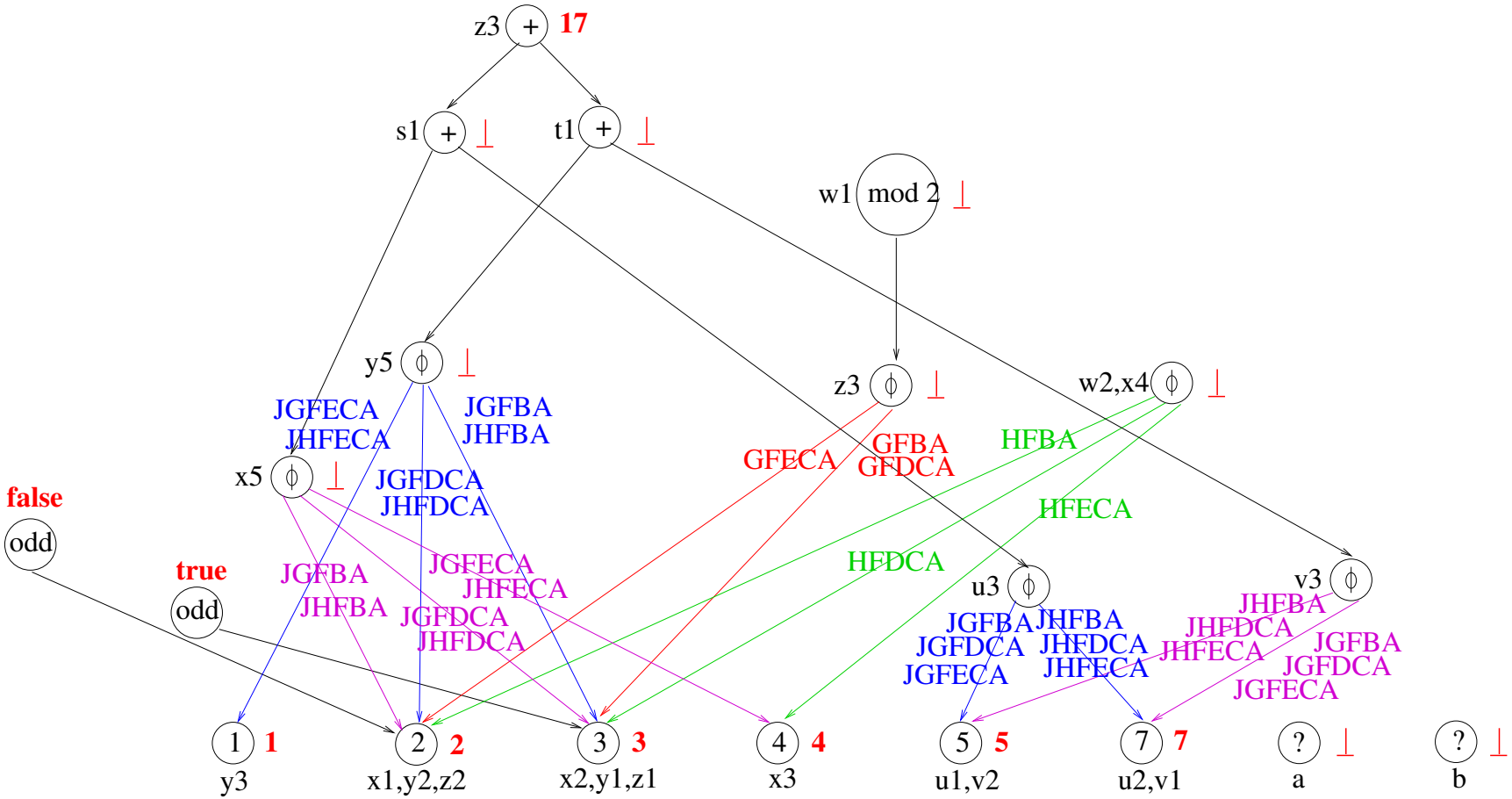
Kapitel 14.3.5

Variationen zur Performanzverbesserung

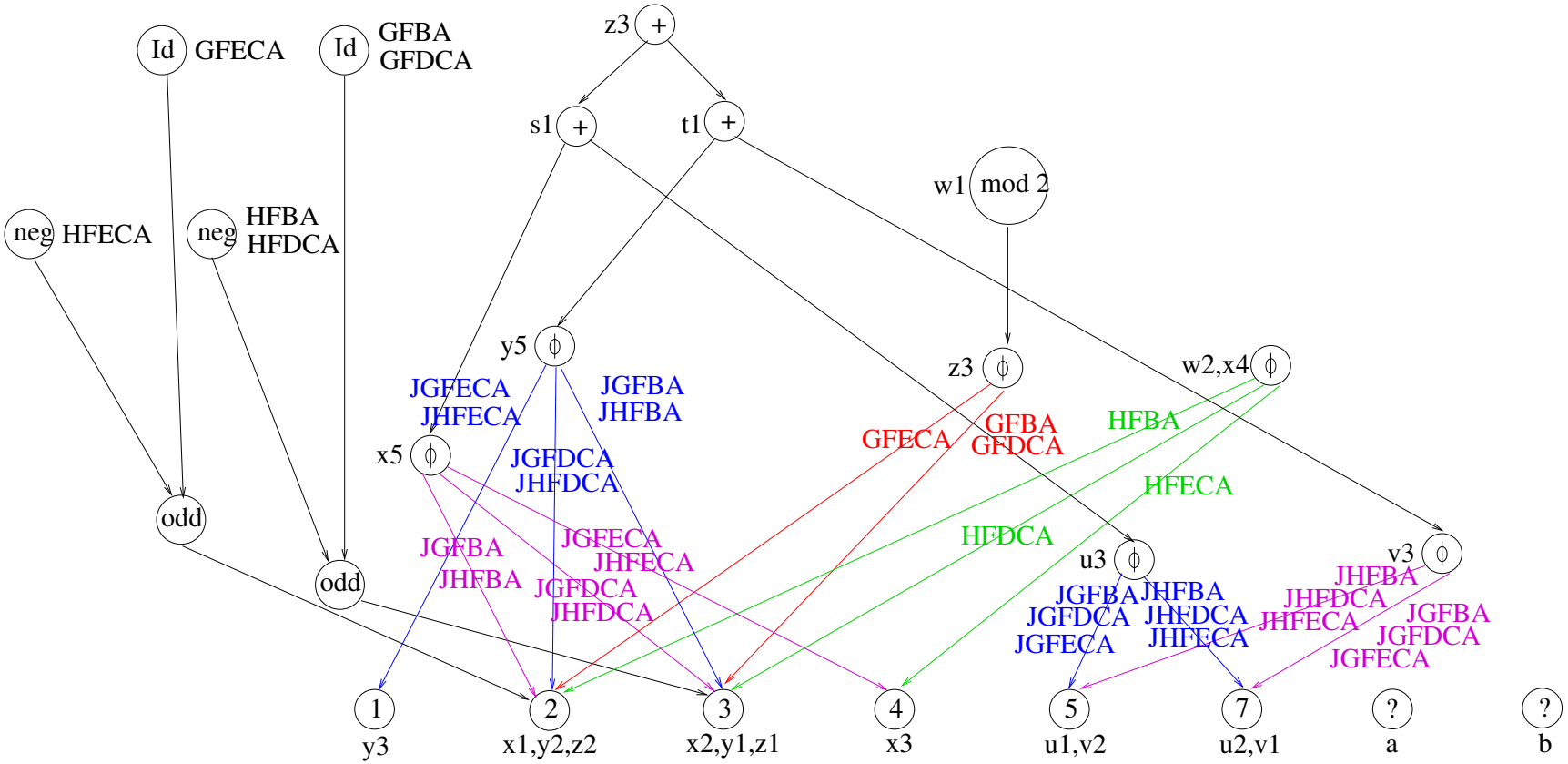
Performanzverbesserung der PVG-Basisanalyse



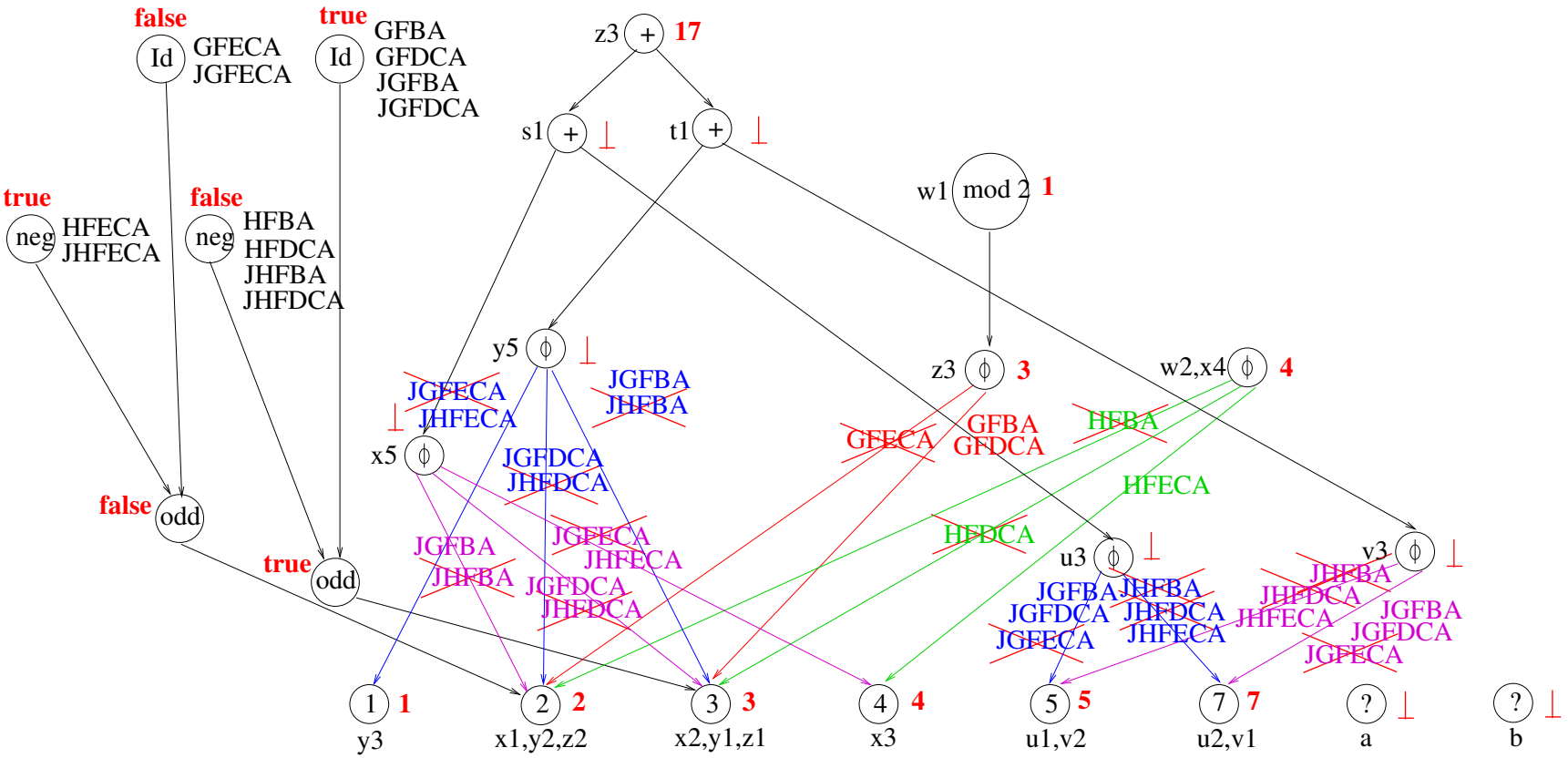
Wirkung d. Performanzverb. f. d. Basisanalyse



Performanzverbesserung d. vollen PVG-Analyse



Wirkung d. Performanzverb. f. d. volle Analyse



Kapitel 14.4
Zusammenfassung

Zusammenfassung

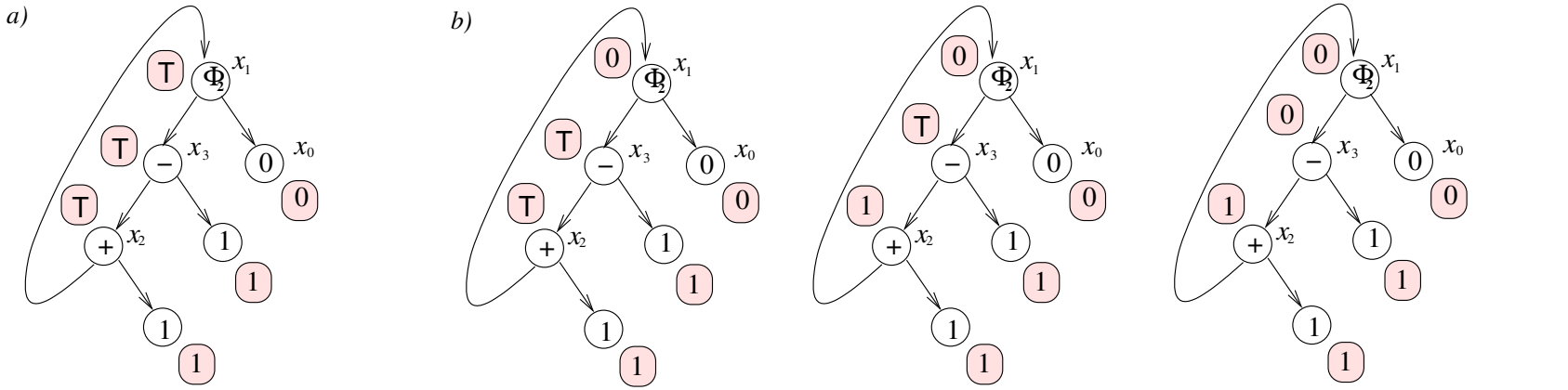
Konstantenanalyse und SSA/PSSA-basierter (prädikatierter) Wertegraph sind

- perfekt aufeinander abgestimmt: SSA/PSSA-Programmdarstellungen zeigen sich als
  - wirklich von Hilfe für Konstantenanalyse.
  - Grundlage und Schlüssel für Wertegraph und prädikatierten Wertegraph.
- offen für Erweiterungen, z.B.:
  - Bedingte Konstanten (engl. conditional constants)

  auf dem (prädikatierten) Wertegraph.

Konstantenanalyse auf dem Wertegraph

...erzielt **Triple E** Rating: **E**xpressive, **E**fficient, **E**asy!



und ist von daher Vorzeigeanwendung, Vorteile von

- (P)SSA als Programmdarstellung für Analyse und Transformation, insbesondere Optimierung

aufzuzeigen.

Literaturhinweise

...zur VG-Konstantenanalyse:

- Jens Knoop, Oliver Rüthing. Constant Propagation on the Value Graph: Simple Constants and Beyond. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 94-109, 2000.

...zur PVG-Konstantenanalyse:

- Jens Knoop, Oliver Rüthing. Constant Propagation on Predicated Code. Journal of Universal Computer Science 9(8):829-850, 2003. (Sonderausgabe zur SBLP'03).

Kapitel 14.5

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (1)

Bowen Alpern, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Detecting Equality of Variables in Programs*. In Conference Record of the 15th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'88), 1-11, 1988.

Ron Cytron, Jeanne Ferrante, Barry K. Rosen, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *An Efficient Method of Computing Static Single Assignment Form*. In Conference Record of the 16th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'89), 25-35, 1989.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (2)


Ron Cytron, Jeanne Ferrante, Barry K. Rosen, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Efficiently Computing Static Single Assignment Form and the Control Dependence Graph*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 13(4):451-490, 1991.


John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Monotone Data Flow Analysis Frameworks*. Acta Informatica 7:305-317, 1977.


Gary A. Kildall. *A Unified Approach to Global Program Optimization*. In Conference Record of the 1st ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'73), 194-206, 1973.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (3)


Jens Knoop, Oliver Rüthing. *Constant Propagation on the Value Graph: Simple Constants and Beyond*. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 94-109, 2000.


Jens Knoop, Oliver Rüthing. *Constant Propagation on Predicated Code*. Journal of Universal Computer Science 9(8):829-850, 2003. (Sonderausgabe zur SBLP'03).


Markus Müller-Olm, Helmut Seidl. *Polynomial Constants are Decidable*. In Proceedings of the 9th Static Analysis Symposium (SAS 2002), Springer-V., LNCS 2477, 4-19, 2002.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (4)


John H. Reif, Harry R. Lewis. *Symbolic Evaluation and the Global Value Graph*. In Conference Record of the 4th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77), 104-118, 1977.


Oliver Rüthing, Jens Knoop, Bernhard Steffen. *Detecting Equalities of Variables: Combining Efficiency with Precision*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 232-247, 1999.


Oliver Rüthing, Markus Müller-Olm. *On the Complexity of Constant Propagation*. In Proceedings of the 10th European Symposium on Programming (ESOP 2001), Springer-V., LNCS 2028, 190-205, 2001.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (5)


Bernhard Steffen, Jens Knoop. *Finite Constants: Characterizations of a New Decidable Set of Constants*. Theoretical Computer Science 80(2):303-318, 1991.


Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Effective Partial Redundancy Elimination based on Extended Value Graph*. Information Processing Society of Japan 38(11):2237-2250, 1990.


Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Partial Dead Code Elimination Using Extended Value Graph*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 179-193, 1999.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 14 (6)

Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Constant Propagation with Conditional Branches*. In Conference Record of the 12th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'85), 291-299, 1985.

Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Constant Propagation with Conditional Branches*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 13(2):181-201, 1991.

Teil V

Abstrakte Interpretation und Modellprüfung

Kapitel 15

Abstrakte Interpretation und Datenfluss-analyse

Kapitel 15.1

Motivation

Motivation

...abstrakte Interpretation – ein 'mondäner' Programmanalyse-ansatz (cf. Nielson, Nielson, Hankin, 2005).

Intuitiv, der

- DFA-Ansatz beinhaltet die Spezifikation einer Programmanalyse, deren Korrektheit separat und unabhängig *a posteriori*
- abstrakte Interpretationsansatz beinhaltet den Korrektheitsnachweis von Anfang an als integralen Bestandteil der Spezifikation einer Programmanalyse, wodurch Korrektheit *a priori*

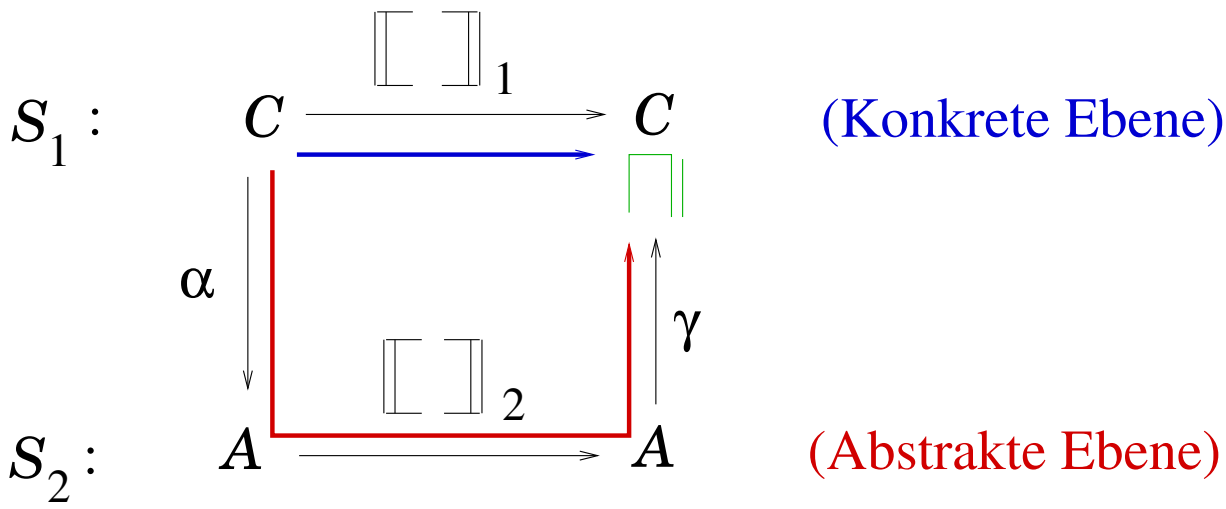
bewiesen wird.

Kapitel 15.2

Theorie abstrakter Interpretation

Theorie abstrakter Interpretation

...ein Ansatz mit zwei (oder mehr) Beobachtungsniveaus:



zusammengehalten durch Wohlzusammenhangsforderungen:

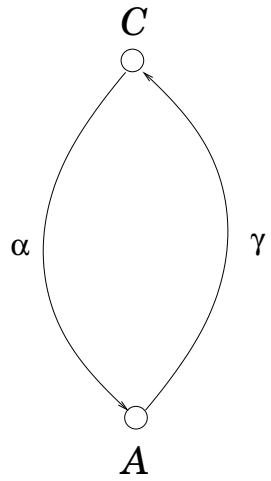
1. $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ und $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ als sog. Abstraktions- und Konkretisierungsfunktionen bilden eine Galois-Verbindung.
2. das Diagramm (schwach) kommutativ ist.

Im folgenden

...bezeichnen:

- $\mathcal{C} = (C, \sqcup_{\mathcal{C}}, \sqsubseteq_{\mathcal{C}}, \bot_{\mathcal{C}}, \top_{\mathcal{C}})$, $\mathcal{A} = (A, \sqcup_{\mathcal{A}}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}}, \bot_{\mathcal{A}}, \top_{\mathcal{A}})$: Vollständige (Vereinigungs-) Halbverbände.
- $\alpha : C \to A$: sog. Abstraktionsfunktion.
- $\gamma : A \to C$: sog. Konkretisierungsfunktion.

...womit das Tupel $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ folgende Situation beschreibt:



Generalvereinbarung:

- Verbandmäßig kleiner heißt bessere, genauere Information!
- $Id_C : C \to C$, $Id_A : A \to A$: Identitäten auf C und A, d.h.: $Id_C = \lambda\, c.\, c$ und $Id_A(a) = \lambda\, a.\, a$.

Beachte

...in der Theorie abstrakter Interpretationen ist die Generalvereinbarung verbandmäßig kleiner bedeutet

- bessere, genauere Information

genauer andersherum getroffen als in der Theorie der Datenflussanalyse, wo verbandmäßig kleiner

- schlechtere, ungenauere Information

bedeutet (vgl. Kapitel 7.3).

Kapitel 15.2.1

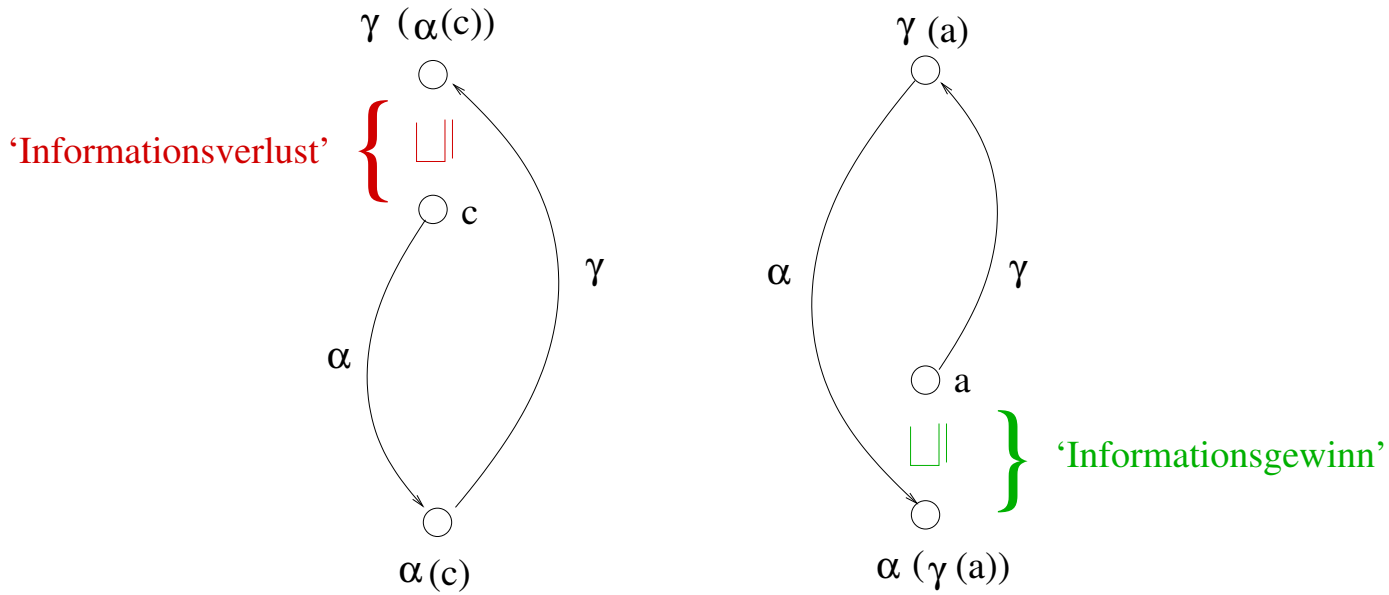
Galois-Verbindungen

Galois-Verbindungen

Definition 15.2.1.1 (Galois-Verbindung)

Ein Quadrupel $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ heißt Galois-Verbindung (engl. Galois connection) gdw:

1. α und γ sind monoton
2. $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq_{\mathcal{C}} Id_{\mathcal{C}}$ ($\sqsupseteq_{\mathcal{C}}$: linksseitig 'Informationsverlust')
3. $\alpha \circ \gamma \sqsubseteq_{\mathcal{A}} Id_{\mathcal{A}}$ ($\sqsubseteq_{\mathcal{A}}$: linksseitig 'Informationsgewinn')



Informell

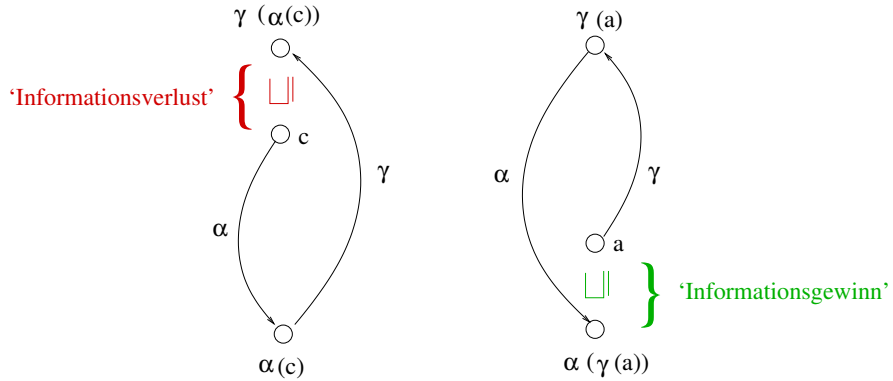
Abstraktion

- kann schaden: Ist die Inklusion $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq_C Id_C$ in Definition 15.2.1.1(1) echt, so bedeutet das eine Schlechterstellung, einen Informationsverlust auf der konkreten Ebene.

Konkretisierung

- darf nicht schaden: Ist die Inklusion $\alpha \circ \gamma \sqsubseteq_A Id_A$ in Definition 15.2.1.1(2) echt, so bedeutet das (sogar) eine Besserstellung, einen Informationsgewinn auf der abstrakten Ebene.

...entsprechend der Generalvereinbarung: 'kleiner' ist 'besser'.



Maximaler Informationsverlust, -gewinn

Proposition 15.2.1.2 (Triviale, nutzlose Galois-Verb.)

$Q_{triv} = (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ mit $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ definiert durch:

- $\alpha = \lambda\, c.\, \bot_{\mathcal{A}}$
- $\gamma = \lambda\, a.\, \top_{\mathcal{C}}$

ist eine Galois-Verbindung.

Beachte: Q_{triv} erfüllt die Anforderungen an eine Galois-Verb.

- trivialerweise.
- maximiert die Informations-
  - Schlechterstellung durch Abstraktions-/Konkretisierungs-abfolge: $\gamma \circ \alpha = \lambda c.\ \top_{\mathcal{C}}\ \sqsupseteq_{\mathcal{C}}\ Id_C$
  - Besserstellung durch Konkretisierungs-/Abstraktionsab-folge: $\alpha \circ \gamma = \lambda a.\ \bot_{\mathcal{A}}\ \sqsubseteq_{\mathcal{A}}\ Id_A$
- ist nutzlos für praktische Anwendungen.

Beispiel: Galois-Verbindung (1)

Bezeichne

- $IV =_{df} \{[m, n] \mid m, n \in \mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty}, m \leq n\} \dot{\cup} \{[\,]\}$ die Menge der Intervalle über der Menge ganzer Zahlen

$$\mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty} =_{df} \mathbb{Z} \dot{\cup} \{-\infty, \infty\}$$

wobei Intervalle Teilmengen von $\mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty}$ bezeichnen:

$$\begin{array}{lll} [\,] & =_{df} & \emptyset \\ \forall\, m \leq n \in \mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty}.\ [m, n] & =_{df} & \{z \mid -\infty \leq m \leq z \leq n \leq \infty\} \end{array}$$

- $\widehat{\mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty}} =_{df} (\mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty}, \leq, \sqcap_{\widehat{\mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty}}}, \sqcup_{\widehat{\mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty}}}, -\infty, \infty)$ den durch die (in natürlicher Weise auf $\mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty}$ erweiterte) kleiner/gleich-Relation geordneten vollständigen Verband $\widehat{\mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty}}$.

Beispiel: Galois-Verbindung (2)

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{A}$ die vollständigen (Vereinigungs-) Verbände:

- $\mathcal{C} =_{df} (\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \cup, \subseteq, \emptyset, \mathbb{Z})$ der Potenzmengenverband ganzer Zahlen.
- $\mathcal{A} =_{df} (IV, \sqcup, \sqsubseteq, [\,], [-\infty, \infty])$ der Intervallverband ganzer Zahlen mit:

$$\forall\, [m,n], [p,q] \in IV.$$

$$[\,] \sqsubseteq [\,]$$

$$[\,] \sqsubseteq [p,q]$$

$$[m,n] \sqsubseteq [-\infty, \infty]$$

$$[m,n] \sqsubseteq [p,q] \iff_{df} [m,n] \subseteq [p,q]$$

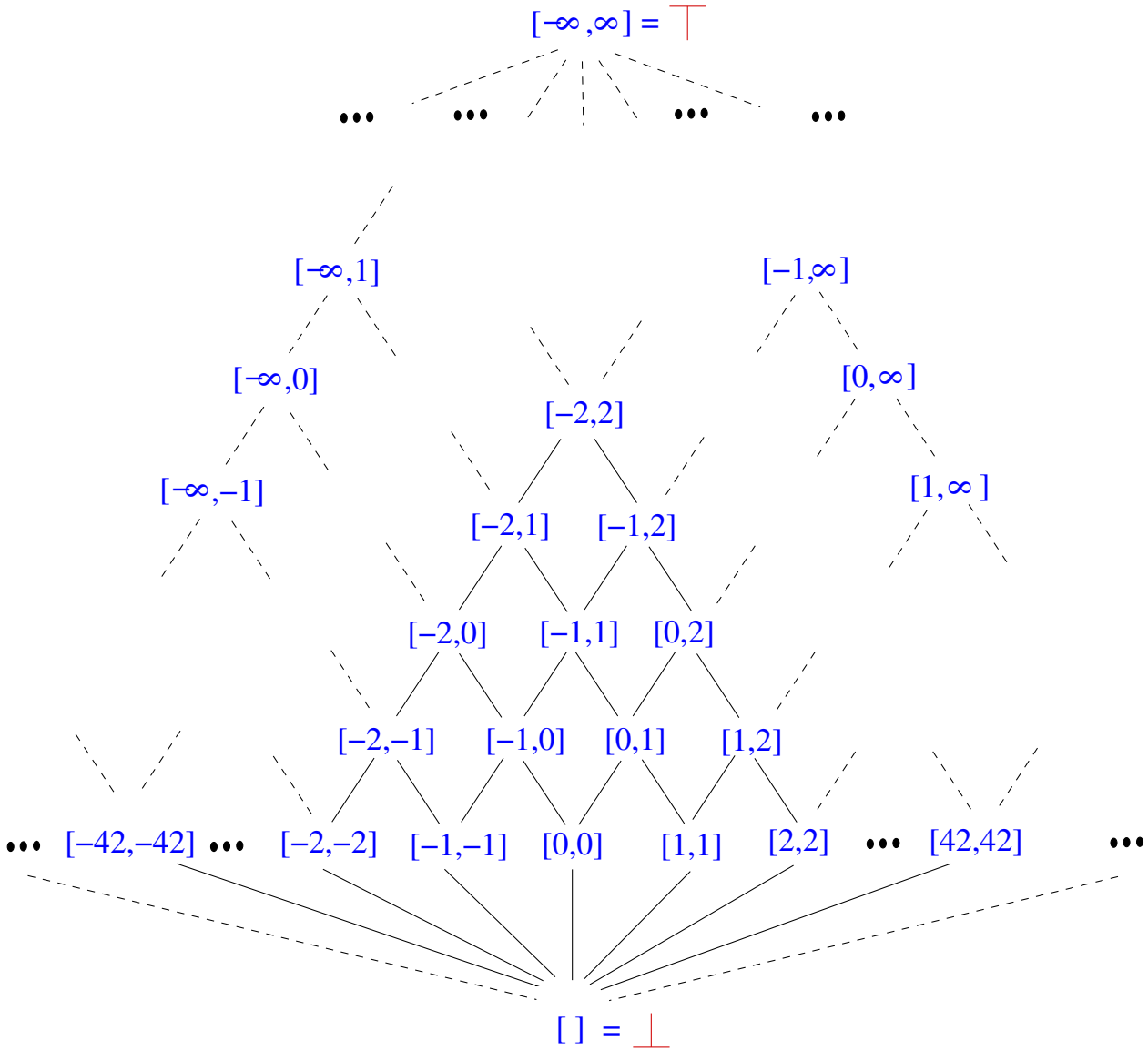
$$\iff p \leq m \leq n \leq q$$

$$[m,n] \sqcup [p,q] =_{df} [\bigsqcap_{\widehat{\mathbf{Z}}_{-\infty}^{\infty}}([m,n] \cup [p,q]),$$

$$\bigsqcup_{\widehat{\mathbf{Z}}_{-\infty}^{\infty}}([m,n] \cup [p,q])\,]$$

Beispiel: Galois-Verbindung (3)

Der Intervallverband $\mathcal{A}$:



Beispiel: Galois-Verbindung (4)

Proposition 15.2.1.3

Das Quadrupel $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ mit $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ und $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ definiert durch:

$$\forall\, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}).\ \alpha(Z) =_{df} \begin{cases} [\,] & \text{falls } Z = \emptyset \\ [\bigsqcap_{\widehat{\mathbf{Z}^{\infty}_{-\infty}}} Z, \bigsqcup_{\widehat{\mathbf{Z}^{\infty}_{-\infty}}} Z\,] & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\forall\, iv \in IV.\ \gamma(iv) =_{df} \begin{cases} \emptyset & \text{falls } iv = [\,] \\ \{z \in \mathbb{Z}^{\infty}_{-\infty} \mid m \leq z \leq n\} & \text{falls } iv = [m, n] \end{cases}$$

ist eine Galois-Verbindung.

Eigenschaften von Galois-Verbindungen (1)

...keine weiteren Informationsverluste oder -gewinne durch fortgesetzte Abstraktionen und Konkretisierungen, Neutralität.

Lemma 15.2.1.4 (Neutralität)

Sei $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung. Dann gilt:

1. $\alpha \circ \gamma \circ \alpha = \alpha$
2. $\gamma \circ \alpha \circ \gamma = \gamma$

Eigenschaften von Galois-Verbindungen (2)

...Abstraktions- und Konkretisierungsfunktionen bestimmen einander eindeutig in Galois-Verbindungen.

Lemma 15.2.1.5 (Eindeutigkeit von α und γ)

Sei $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung. Dann gilt:

1. γ ist durch α eindeutig bestimmt und es gilt:
   $\forall\, a \in A.\ \gamma(a) = \bigsqcup_C \{c \in C \mid \alpha(c) \sqsubseteq_A a\}$.
2. α ist durch γ eindeutig bestimmt und es gilt:
   $\forall\, c \in C.\ \alpha(c) = \bigsqcap_A \{a \in A \mid c \sqsubseteq_C \gamma(a)\}$.
3. α ist additiv und γ distributiv.

   Insbesondere gilt: $\alpha(\bot_C) = \bot_A$ und $\gamma(\top_A) = \top_C$.

...vergleiche die Charakterisierungen von γ und α in Lemma 15.2.1.5(1)/(2) mit der Festlegung reverser lokaler Semantikfunktionen in Definition 8.2.1.

Eigenschaften von Galois-Verbindungen (3)

...Additivität bzw. Distributivität von Abstraktions- und Konkretisierungsfunktion garantieren einander wechselweise Existenz und eindeutige Bestimmtheit.

Lemma 15.2.1.6 (Existenz, eindeutige Vervollst.)

1. Ist $\alpha : C \to A$ additiv, dann gibt es ein $\gamma : A \to C$, so dass $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung ist.
2. Ist $\gamma : A \to C$ distributiv, dann gibt es ein $\alpha : C \to A$, so dass $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung ist.

Beweis

- Für 1): Setze $\forall\, a \in A.\ \gamma(a) = \bigsqcup_{\mathcal{C}} \{c \in C \mid \alpha(c) \sqsubseteq_A a\}$.
- Für 2): Setze $\forall\, c \in C.\ \alpha(c) = \bigsqcap_{\mathcal{A}} \{a \in A \mid c \sqsubseteq_C \gamma(a)\}$.

Eigenschaften von Galois-Verbindungen (4)

Proposition 15.2.1.7

Sei $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung und

$$A_\alpha =_{df} \{\alpha(c) \mid c \in \mathcal{C}\} \subseteq A$$

Dann ist

$$\mathcal{A}_\alpha =_{df} (A_\alpha, \sqcup_{\mathcal{A}_{|\mathcal{A}_\alpha}}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}_{|\mathcal{A}_\alpha}}, \bot_A, \top_A)$$

ein vollständiger (Vereinigungs-) Halbverband, wobei $\sqcup_{\mathcal{A}_{|\mathcal{A}_\alpha}}$ und $\sqsubseteq_{\mathcal{A}_{|\mathcal{A}_\alpha}}$ die Einschränkungen von $\sqcup_{\mathcal{A}}$ und $\sqsubseteq_{\mathcal{A}}$ von A auf A_α bezeichnen.

Eigenschaften von Galois-Verbindungen (5)

Proposition 15.2.1.8

Sei $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung und $\rho : A \to A$ der wie folgt definierte Reduktionsoperator:

$$\forall\, a \in A.\ \rho(a) =_{df} \bigsqcap\nolimits_{\mathcal{A}} \{a' \in A \mid \gamma(a) = \gamma(a')\}$$

und $R_\rho =_{df} \{\rho(a) \mid a \in A\}$ $R_\rho =_{df} \{\rho(a) \mid a \in A\}$.

Dann gilt:

1. $\mathcal{R}_\rho =_{df} (R_\rho, \sqcup_{\mathcal{A}_{|\mathcal{R}_\rho}}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}_{|\mathcal{R}_\rho}}, \bot_{\mathcal{A}}, \top_{\mathcal{A}})$ ist ein vollständiger Verband.
2. $\forall\, a \in A.\ \rho(a) = \alpha(\gamma(a))$
3. $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{R}_\rho$

...siehe auch Lemma 15.2.2.4.

Adjunktionscharakterisierung v. Galois-Verbind.

...mit der Adjunktionscharaktisierung von Galois-Verbindungen (Lemma 15.2.1.10) ist oft einfacher zu arbeiten als mit ihrer unmittelbaren Definition (Definition 15.2.1.1); siehe dazu auch Übungsaufgabe 15.3.2.7.

Definition 15.2.1.9 (Adjunktion)

Ein Quadrupel $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ heißt Adjunktion (engl. adjunction) gdw:

1. α und γ sind total
2. $\forall\, c \in C\ \forall\, a \in A.\ \alpha(c) \sqsubseteq_{\mathcal{A}} a \iff c \sqsubseteq_{\mathcal{C}} \gamma(a)$

Lemma 15.2.1.10 (Charakterisierung v. Galois-Verb.)

$(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ ist eine Adjunktion gdw $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ ist eine Galois-Verbindung.

Kapitel 15.2.2

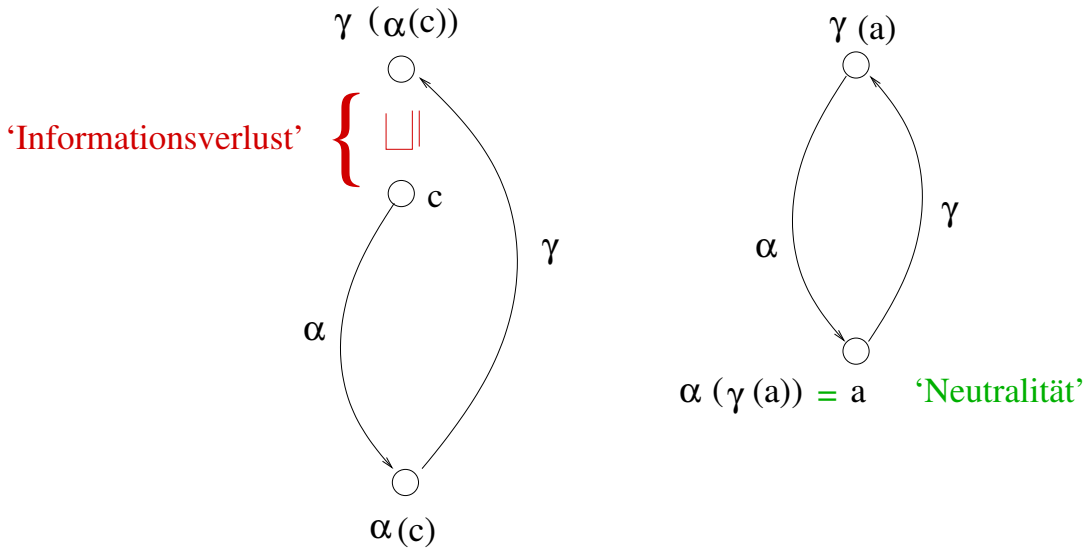
Galois-Passungen

Galois-Passungen

Definition 15.2.2.1 (Galois-Passung)

Ein Quadrupel $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ heißt Galois-Passung (engl. Galois insertion) gdw:

1. α und γ sind monoton
2. $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq_C Id_C$ ($\sqsupseteq_{\mathcal{C}}$: linksseitig 'Informationsverlust')
3. $\alpha \circ \gamma =_{\mathcal{A}} Id_A$ ($=_{\mathcal{A}}$: linksseitig 'Neutralität')



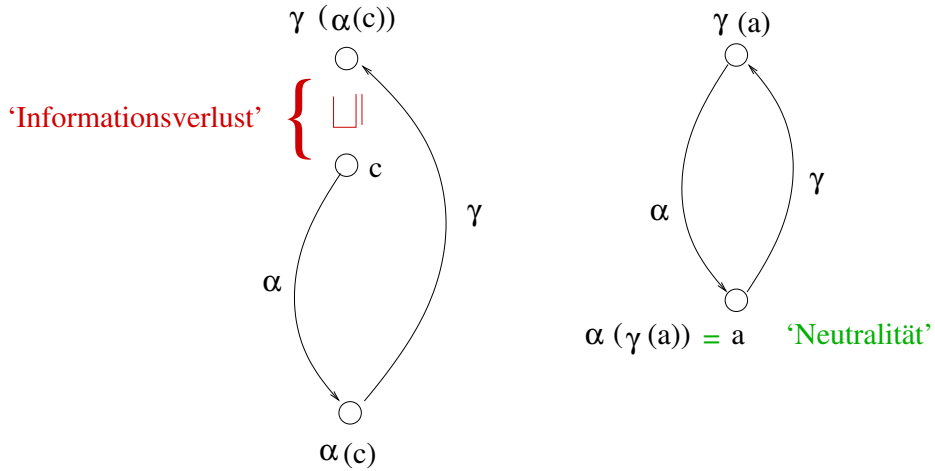
Informell

Wie für Galois-Verbindungen:

- Abstraktion kann schaden: Ist die Inklusion $\gamma \circ \alpha \sqsupseteq_{\mathcal{C}} Id_C$ in Definition 15.2.2.1(1) echt, so bedeutet das eine Schlechterstellung, einen Informationsverlust auf der konkreten Ebene.

Anders als für Galois-Verbindungen:

- Konkretisierung darf zwar nicht schaden, aber auch nicht zu einer Besserstellung, einem Informationsgewinn auf der abstrakten Ebene führen: $\alpha \circ \gamma =_{\mathcal{A}} Id_A$.

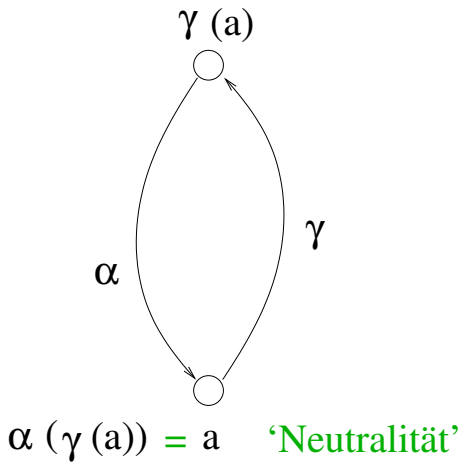


Galois-Passungen: Spezielle Galois-Verbind.

Proposition 15.2.2.2

Eine Galois-Verbindung $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ ist eine Galois-Passung gdw:

$$\alpha \circ \gamma =_{\mathcal{A}} Id_{\mathcal{A}}$$



Bem.: Die triviale, nutzlose Galois-Verbindung aus Proposition 15.2.1.2 ist keine Galois-Passung.

Charakterisierung von Galois-Passungen

Lemma 15.2.2.3 (Äquivalenzaussagen)

Sei $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ ist eine Galois-Passung.
2. α ist surjektiv, d.h.: $\forall\, a \in A\ \exists\, c \in C.\ \alpha(c) = a$.
3. γ ist injektiv, d.h.:
   $\forall\, a_1, a_2 \in A.\ \gamma(a_1) = \gamma(a_2) \ \Rightarrow\ a_1 = a_2$.
4. γ ist ordnungsähnlich, d.h.:
   $\forall\, a_1, a_2 \in A.\ \gamma(a_1) \sqsubseteq_C \gamma(a_2) \ \Leftrightarrow\ a_1 \sqsubseteq_A a_2$.

Beachte: Die Rückrichtungsimplikation in 4)

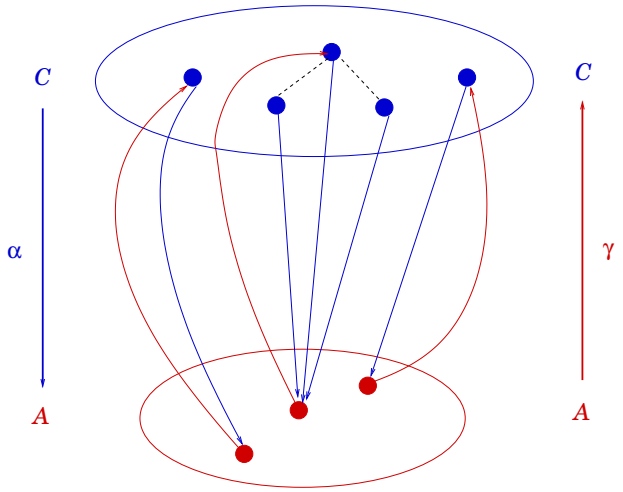
$$\forall\, a_1, a_2 \in A.\ \gamma(a_1) \sqsubseteq_C \gamma(a_2) \ \Leftarrow\ a_1 \sqsubseteq_A a_2$$

folgt bereits aus der Galois-Verbindungseigenschaft v. $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$.

Informell

- In einer Galois-Verbindung können mehrere Elemente aus $\mathcal{A}$ dasselbe Element aus $\mathcal{C}$ beschreiben; in einer Galois-Passung nicht.
- Aus diesem Grund ist in einer Galois-Verbindung die Konkretisierungsfunktion γ i.a. nicht injektiv, die Abstraktionsfunktion α i.a. nicht surjektiv; in einer Galois-Passung schon: γ ist stets injektiv, α stets surjektiv.
- In einer Galois-Passung kann $\mathcal{A}$ deshalb keine Elemente enthalten, die keine Elemente aus $\mathcal{C}$ beschreiben, d.h. $\mathcal{A}$ enthält in diesem Sinn keine überflüssigen Elemente.

Galois-Passung: α surjektiv, γ injektiv.



Konstruktion von Galois-Passungen

Lemma 15.2.2.4 (Galois-Passungskonstruktion)

Sei $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung, $\rho : A \to A$ der wie folgt definierte Reduktionsoperator:

$$\forall\, a \in A.\ \rho(a) =_{df} \bigsqcap_A \{a' \in A \mid \gamma(a) = \gamma(a')\}$$

und $R_\rho =_{df} \{\rho(a) \mid a \in A\}$.

Dann gilt:

1. $\mathcal{R}_\rho =_{df} (R_\rho, \sqcup_{\mathcal{A}_{|\mathcal{R}_\rho}}, \sqsubseteq_{\mathcal{A}_{|\mathcal{R}_\rho}}, \bot_{\mathcal{A}}, \top_{\mathcal{A}})$ ist ein vollständiger Verband.
2. Das Quadrupel $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{R}_\rho)$ ist eine Galois-Passung.

Beweis mit Proposition 15.2.1.6 und 15.2.1.7 und Lemma 15.2.1.9 und 15.2.2.3.

Übungsaufgabe 15.2.2.5

Ist die Galois-Verbindung $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ aus Proposition 15.2.1.2 zur Intervallanalyse eine Galois-Passung? Beweis oder Gegenbeispiel.

Kapitel 15.3

Systematische Konstruktion von Galois-Verbindungen

Übersicht

...wir betrachten acht Methoden, aufgeteilt in zwei Gruppen:

- Aus dem 'Nichts' erschaffende Methoden

  ...zur Konstruktion neuer Galois-Verbindungen ohne bereits gegebene Galois-Verbindungen.

- Kombinationsmethoden

  ...zur Konstruktion neuer Galois-Verbindungen aus gegebenen Galois-Verbindungen.

Im einzelnen

Erschaffende Methoden

1. Extraktionsmethode
2. Spezialfall der Extraktionsmethode

Kombinierende Methoden

1. Unabhängige Attributemethode
2. Relationale Methode
3. Totale Funktionenraummethode
4. Monotone Funktionenraummethode
5. Direkte Produktmethode
6. Direkte Tensorproduktmethode

Kapitel 15.3.1

Erschaffende Methoden

1) Extraktionsmethode

Lemma 15.3.1.1 (Extraktionsmethode)

Sei $\beta : \mathbf{V} \to \mathcal{C}$ eine Abbildung von der Menge der Variablen $\mathbf{V}$ in einen Verband $\mathcal{C} = (C, \sqcup_{\mathcal{C}}, \sqsubseteq_{\mathcal{C}}, \bot_{\mathcal{C}}, \top_{\mathcal{C}})$.

Dann ist das Quadrupel $(\mathcal{P}(\mathbf{V}), \alpha, \gamma, \mathcal{C})$ mit

$$\begin{aligned} \forall\, V \in \mathcal{P}(\mathbf{V}).\ \alpha(V) &=_{df} \bigsqcup\nolimits_{\mathcal{C}} \{\beta(v) \mid v \in V\} \\ \forall\, c \in C.\ \gamma(c) &=_{df} \{v \in \mathbf{V} \mid \beta(v) \sqsubseteq_{\mathcal{C}} c\} \end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

2) Spezialfall der Extraktionsmethode

Lemma 15.3.1.2 (Spezialfall d. Extraktionsmethode)

Sei D eine Menge, $\mathcal{C} = (\mathcal{P}(D), \cup, \subseteq, \emptyset, D)$ der Potenzmengenverband von D, $\eta : \mathbf{V} \to D$ eine Extraktionsfunktion von der Menge der Variablen $\mathbf{V}$ in D und $\beta_\eta : \mathbf{V} \to \mathcal{C}$ eine Abbildung mit

$$\forall\, v \in \mathbf{V}.\ \beta_\eta(v) =_{df} \{\eta(v)\}$$

Dann ist das Quadrupel $(\mathcal{P}(\mathbf{V}), \alpha_\eta, \gamma_\eta, \mathcal{C})$ mit

$$\begin{array}{rcl} \forall\, V \in \mathcal{P}(\mathbf{V}).\ \alpha_\eta(V) & =_{df} & \bigcup\{\beta_\eta(v) \mid v \in V\} \\ & = & \{\eta(c) \mid v \in V\} \\ \forall\, D' \in \mathcal{P}(D).\ \gamma_\eta(D') & =_{df} & \{v \in \mathbf{V} \mid \beta_\eta(v) \in D'\} \\ & = & \{v \mid \eta(v) \in D'\}) \end{array}$$

eine Galois-Verbindung.

Übungsaufgabe 15.3.1.3

Beweise:

1. Lemma 15.3.1.1
2. Lemma 15.3.1.2

Kapitel 15.3.2

Kombinierende Methoden

1) Unabhängige Attributemethode

Lemma 15.3.2.1 (Unabhängige Attributemethode)

Seien $(\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$ zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \alpha, \gamma, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mit

$$\begin{aligned} \forall (c_1, c_2) \in C_1 \times C_2.\ \alpha(c_1, c_2) &=_{df} (\alpha_1(c_1), \alpha_2(c_2)) \\ \forall (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2.\ \gamma(a_1, a_2) &=_{df} (\gamma_1(a_1), \gamma_2(a_2)) \end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

2) Relationale Methode

...bezeichne $\mathcal{P}$ den Potenzmengenoperator.

Lemma 15.3.2.2 (Relationale Methode)

Seien $(\mathcal{P}(C_1), \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{P}(A_1))$ und $(\mathcal{P}(C_2), \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{P}(A_2))$ zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch $(\mathcal{P}(C_1 \times C_2), \alpha, \gamma, \mathcal{P}(A_1 \times A_2))$ mit

$$\begin{aligned} \alpha(CC) &=_{df} \bigcup \{\alpha_1(\{c_1\}) \times \alpha_2(\{c_2\}) \,|\, (c_1, c_2) \in CC\} \\ \gamma(AA) &=_{df} \{(c_1, c_2) \,|\, \alpha_1(\{c_1\}) \times \alpha_2(\{c_2\}) \subseteq AA\} \end{aligned}$$

für $CC \subseteq C_1 \times C_2$ und $AA \subseteq A_1 \times A_2$ eine Galois-Verbindung.

3) Totale Funktionenraummethode

...bezeichne $[P \overset{tot}{\to} Q]$, P, Q Mengen, die Menge der total definierten Funktionen von P nach Q.

Lemma 15.3.2.3 (Totale Funktionenraummethode)

Sei $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung und M eine Menge.

Dann ist auch $([M \overset{tot}{\to} C], \alpha', \gamma', [M \overset{tot}{\to} A])$ mit

$$\begin{aligned} \forall f \in [M \overset{tot}{\to} C].\ \alpha'(f) &=_{df} \alpha \circ f \\ \forall g \in [M \overset{tot}{\to} A].\ \gamma'(g) &=_{df} \gamma \circ g \end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

4) Monotone Funktionraummethode

...bezeichne $[P \overset{mon}{\to} Q]$, P, Q Mengen, die Menge der monotonen Funktionen von P nach Q.

Lemma 15.3.2.4 (Monotone Funktionenraummeth.)

Seien $(\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$ zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch $([C_1 \overset{mon}{\to} C_2], \alpha, \gamma, [A_1 \overset{mon}{\to} A_2])$ mit

$$\begin{aligned} \forall\, f \in [C_1 \overset{mon}{\to} C_2].\ \alpha(f) &=_{df} \alpha_2 \circ f \circ \gamma_1 \\ \forall\, g \in [A_1 \overset{mon}{\to} A_2].\ \gamma(g) &=_{df} \gamma_2 \circ g \circ \alpha_1 \end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

5) Direkte Produktmethode

Lemma 15.3.2.5 (Direkte Produktmethode)

Seien $(\mathcal{C}, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\mathcal{C}, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$ zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mit

$$\begin{aligned} \forall\, c \in C.\ \alpha(c) &=_{df} (\alpha_1(c), \alpha_2(c)) \\ \forall\, (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2.\ \gamma(a_1, a_2) &=_{df} \gamma_1(a_1) \sqcap \gamma_2(a_2) \end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

(Beachte die Abstützung von γ auf $\sqcap$, nicht $\sqcup$; s.a. Übungsaufgabe 15.3.2.7).

6) Direkte Tensorproduktmethode

...bezeichne $\mathcal{P}$ den Potenzmengenoperator.

Lemma 15.3.2.6 (Direkte Tensorproduktmethode)

Seien $(\mathcal{P}(C), \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{P}(A_1))$ und $(\mathcal{P}(C), \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{P}(A_2))$ zwei Galois-Verbindungen.

Dann ist auch $(\mathcal{P}(C), \alpha, \gamma, \mathcal{P}(A_1 \times \mathcal{A}_2))$ mit

$$\forall\, C' \in \mathcal{P}(C).\ \alpha(C') =_{df} \bigcup \{\alpha_1(\{c\}) \times \alpha_2(\{c\}) \mid c \in C'\}$$
$$\forall\, AA \in \mathcal{P}(A_1 \times A_2).\ \gamma(AA) =_{df} \{c \mid \alpha_1(\{c\}) \times \alpha_2(\{c\}) \subseteq AA\}$$

eine Galois-Verbindung.

Übungsaufgabe 15.3.2.7

Beweise Lemma 15.3.2.5, d.h. sind $(\mathcal{C}, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\mathcal{C}, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$ Galois-Verbindungen, dann ist auch $(\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mit α und γ definiert durch:

$$\begin{aligned} \forall\, c \in C.\ \alpha(c) &=_{df} (\alpha_1(c), \alpha_2(c)) \\ \forall\, (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2.\ \gamma(a_1, a_2) &=_{df} \gamma_1(a_1) \sqcap \gamma_2(a_2) \end{aligned}$$

eine Galois-Verbindung.

Zeige dazu:

$$\alpha(c) \sqsubseteq (a_1, a_2) \Longleftrightarrow c \sqsubseteq \gamma(a_1, a_2)$$

woraus mithilfe von Lemma 15.2.1.10 (Adjunktionscharakterisierung von Galois-Verbindungen) die Behauptung folgt.

Übungsaufgabe 15.3.2.8

Beweise die übrigen Lemmata aus Kapitel 15.3.2, d.h. beweise:

1. Lemma 15.3.2.1
2. Lemma 15.3.2.2
3. Lemma 15.3.2.3
4. Lemma 15.3.2.4
5. Lemma 15.3.2.6

Kapitel 15.4

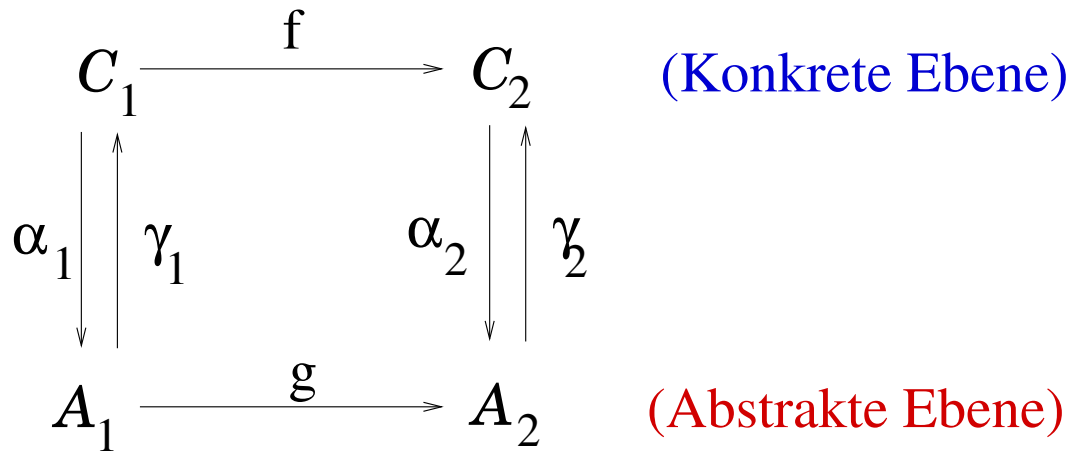
Galois-Systeme

Galois-System

Definition 15.4.1 (Galois-System)

Seien $(\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2)$ zwei Galois-Verbindungen und seien $f : C_1 \to C_2$ und $g : A_1 \to A_2$ zwei monotone Abbildungen.

Dann heißt das Tupel $(f, g, (\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1), (\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2))$ ein Galois-System, das folgende Situation beschreibt:



Charakterisierung von Galois-Systemen

Lemma 15.4.2 (Charakterisierung)

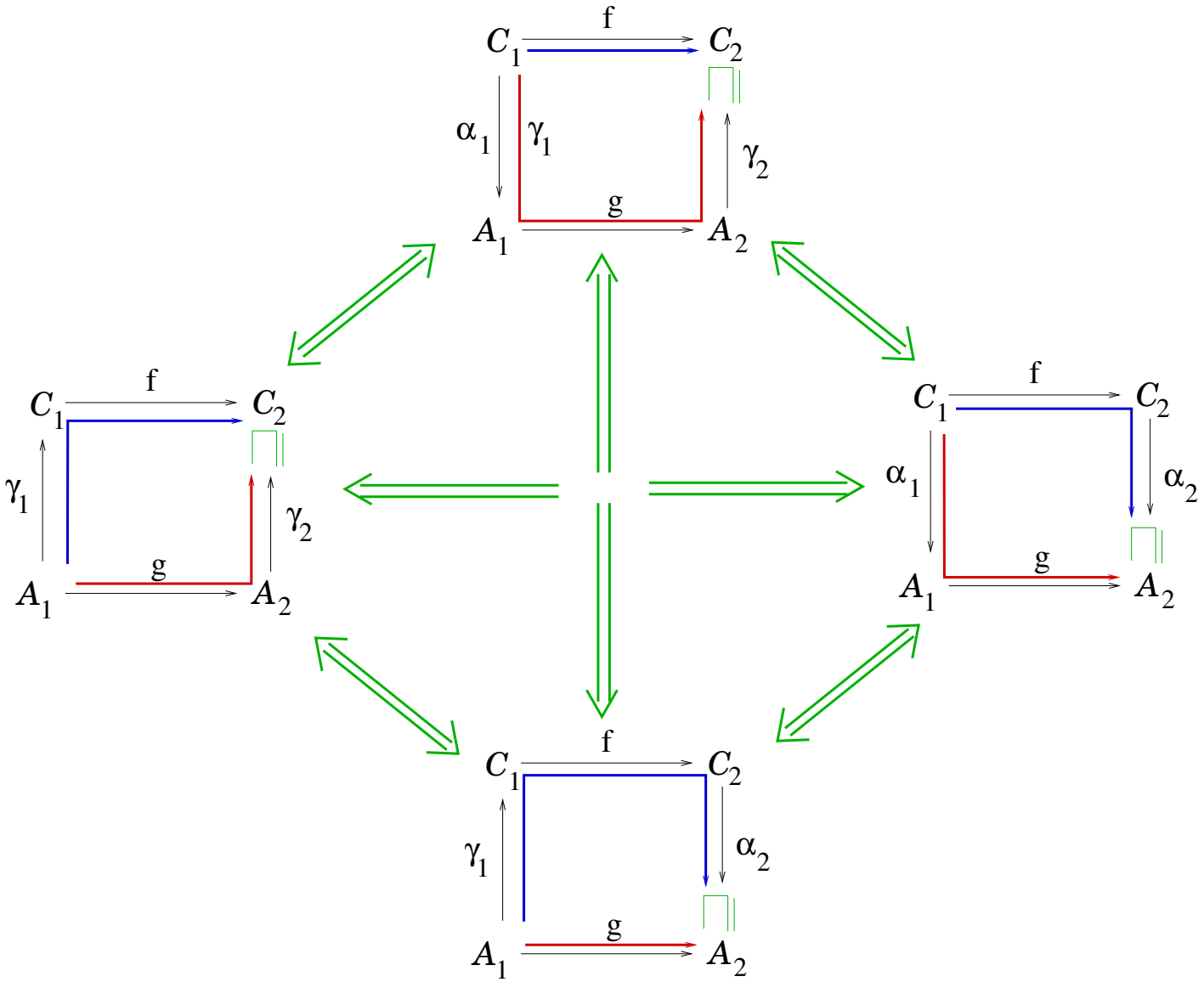
Sei $(f, g, (\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1), (\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2))$ ein Galois-System. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $f \sqsubseteq_{\mathcal{C}_2} \gamma_2 \circ g \circ \alpha_1$
2. $\alpha_2 \circ f \sqsubseteq_{\mathcal{A}_2} g \circ \alpha_1$
3. $\alpha_2 \circ f \circ \gamma_1 \sqsubseteq_{\mathcal{A}_2} g$
4. $f \circ \gamma_1 \sqsubseteq_{\mathcal{C}_2} \gamma_2 \circ g$

Lemma 15.4.3 (Charakterisierung)

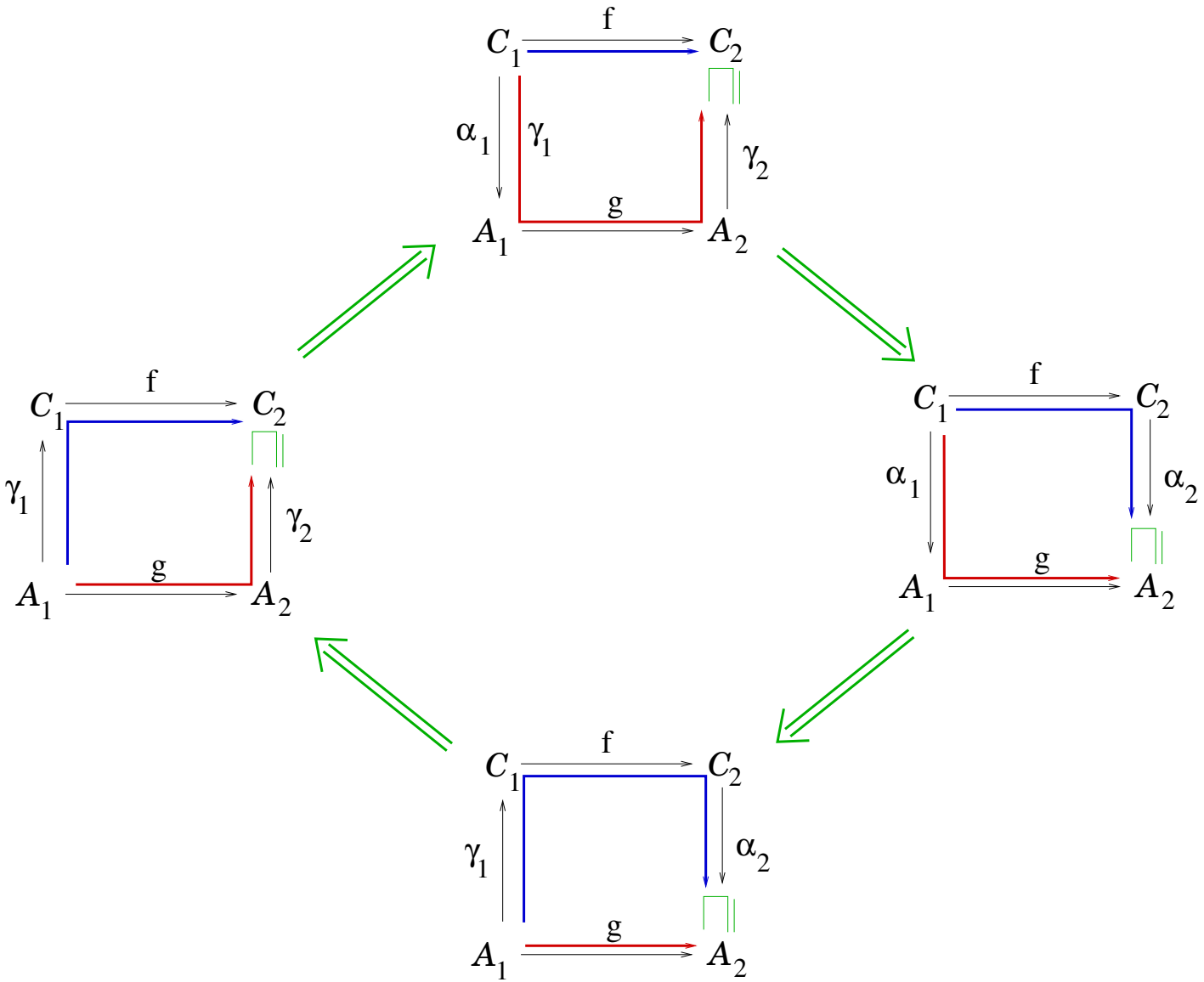
Lemma 15.4.2 gilt analog, wenn überall $\sqsubseteq$ durch $=$ ersetzt wird.

Illustration der Aussage von Lemma 15.4.2



Übungsaufgabe 15.4.4

Beweise Lemma 15.4.2 und 15.4.3 unter Ausnutzung folgender Idee:



Kapitel 15.5

Systeme abstrakter Interpretationen

Idee

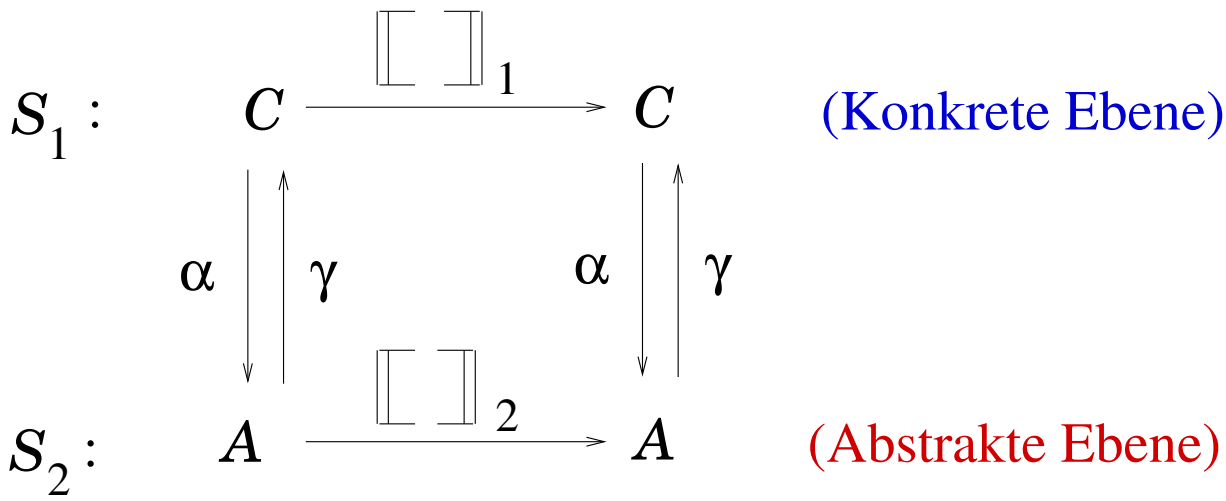
...ersetzen wir in einem Galois-System

$$(f, g, (\mathcal{C}_1, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A}_1), (\mathcal{C}_2, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{A}_2))$$

die Abbildungen f und g durch abstrakte lokale Semantiken $[\![\ ]\!]_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ und $[\![\ ]\!]_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, so erhalten wir ein System abstrakter Interpretationen

$$([\![\ ]\!]_1, [\![\ ]\!]_2, (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}))$$

das folgende (einfachere) Situation beschreibt:

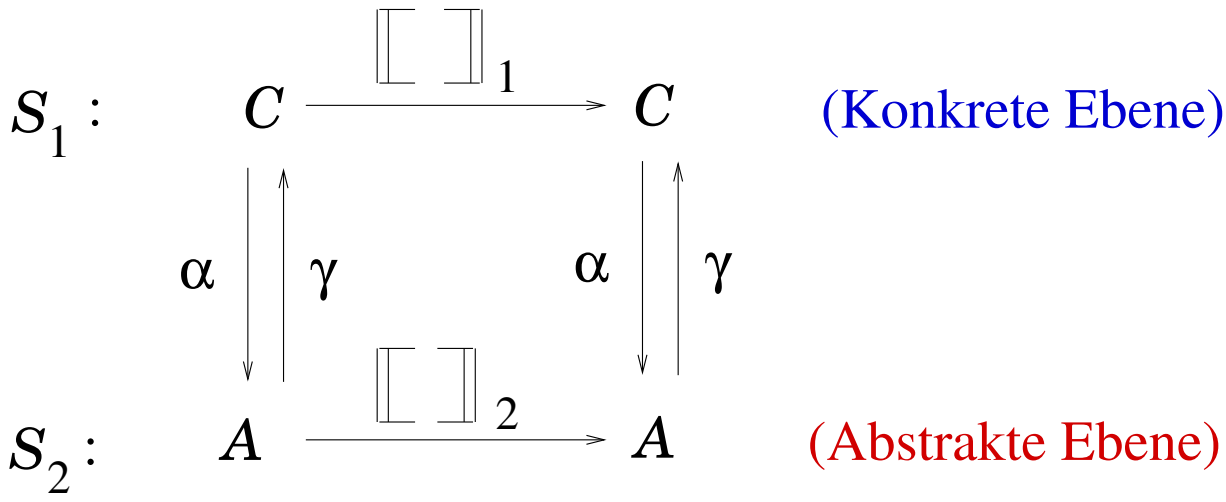


Systeme abstrakter Interpretationen

Definition 15.5.1 (System abstr. Interpretationen)

Sei $(\mathcal{C}, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{A})$ eine Galois-Verbindung und $[\![\ ]\!]_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ und $[\![\ ]\!]_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ zwei abstrakte lokale Semantiken.

Dann heißt das Tupel $([\![\ ]\!]_1, [\![\ ]\!]_2, (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}))$ ein System abstrakter Interpretationen, das folgende Situation beschreibt:



Datenflussanalyse und abstrakte Interpretation

...ist $(\llbracket\ \rrbracket_1, \llbracket\ \rrbracket_2, (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}))$ ein System abstrakter Interpretationen, so spezifizieren $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket\ \rrbracket_1)$ und $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, \llbracket\ \rrbracket_2)$ abstrakte Programmsemantiken, z.B. im Sinn der

- Vereinigung/Schnitt-über-alle-Pfade-Semantik

die (unter geeigneten Voraussetzungen) approximativ oder akkurat als

- minimale/maximale Fixpunktsemantik

effektiv berechnet werden können (s. Kapitel 7).

Datenflussanalyse und abstrakte Interpretation

...dabei ist die abstrakte Semantik eines Programms G durch die globale abstrakte Semantik am Endknoten von G bestimmt:

$$[\![G]\!]_{\mathcal{S}}^{VUP/SUP} =_{df} [\![\mathbf{e}]\!]_{\mathcal{S}}^{VUP/SUP} \sqsubseteq_{MinFP}^{VUP} / \sqsupseteq_{MaxFP}^{SUP} [\![\mathbf{e}]\!]_{\mathcal{S}}^{MinFP/MaxFP}$$

wobei (unter geeigneten Voraussetzungen, s. Kapitel 7) gilt:

$$[\![G]\!]_{\mathcal{S}}^{VUP/SUP} = [\![\mathbf{e}]\!]_{\mathcal{S}}^{MinFP/MaxFP}$$

Diese Beobachtung verknüpft die Theorie (und Praxis) der Datenflussanalyse (s. Kapitel 7) mit der Theorie (und Praxis) der abstrakten Interpretationen (s. Kapitel 15).

Entwicklung von Programmanalysen (1)

...im Rahmen von Systemen abstrakter Interpretationen erfolgt typischerweise iterativ.

Initial-Iteration:

- Wähle eine Analysespezifikation $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, [\![\ ]\!])$ mit $\mathcal{C}$ vollständiger Verband und $[\![\ ]\!] : E \to (C \to C)$ lokale abstrakte Semantik, die noch eng mit der tatsächlichen Programmsemantik verbunden sind, z.B. die (nicht-deterministische) Aufsammelsemantik:

  $$\mathcal{S} = (\mathcal{C}, [\![\ ]\!]) =_{df} (\mathcal{P}(\Sigma_{\perp}^{\top}), [\![\ ]\!]_{\text{WHILE}})$$

  Die Analysespezifikation

  $$\mathcal{S} \ _{df}= \mathcal{S}_0 = (\mathcal{A}_0, [\![\ ]\!]_0)$$

  legt die sog. konkrete Ebene, die Referenzebene aller weiteren Analysen fest.

Entwicklung von Programmanalysen (2)

Folge-Iterationen:

- Ausgehend von $\mathcal{S}_i = (\mathcal{A}_i, [\![\ ]\!]_i)$, führe einen stärker approximativen Verband zusammen mit einer darauf abgestimmten lokalen abstrakten Semantik

$$\mathcal{S}_{i+1} = (\mathcal{A}_{i+1}, [\![\ ]\!]_{i+1})$$

und einem Paar aus Abstraktions- und Konkretisierungsfunktion

$$\alpha_{i+1} : A_i \to A_{i+1}, \quad \gamma_{i+1} : A_{i+1} \to A_i$$

ein, so dass

$$(\mathcal{A}_i, \alpha_{i+1}, \gamma_{i+1}, \mathcal{A}_{i+1})$$

eine Galois-Verbindung oder Galois-Passung bilden.

...bis ein für Analysefrage und -berechnung angemessenes und zweckmäßiges Abstraktionsniveau erreicht ist.

Turm von Galois-Verbindungen/-Passungen (1)

...durch wiederholte Anwendung des Iterationsschritts entsteht ein

- Turm (oder Hierarchie) von Systemen abstrakter Interpretationen

dessen Ebenen durch

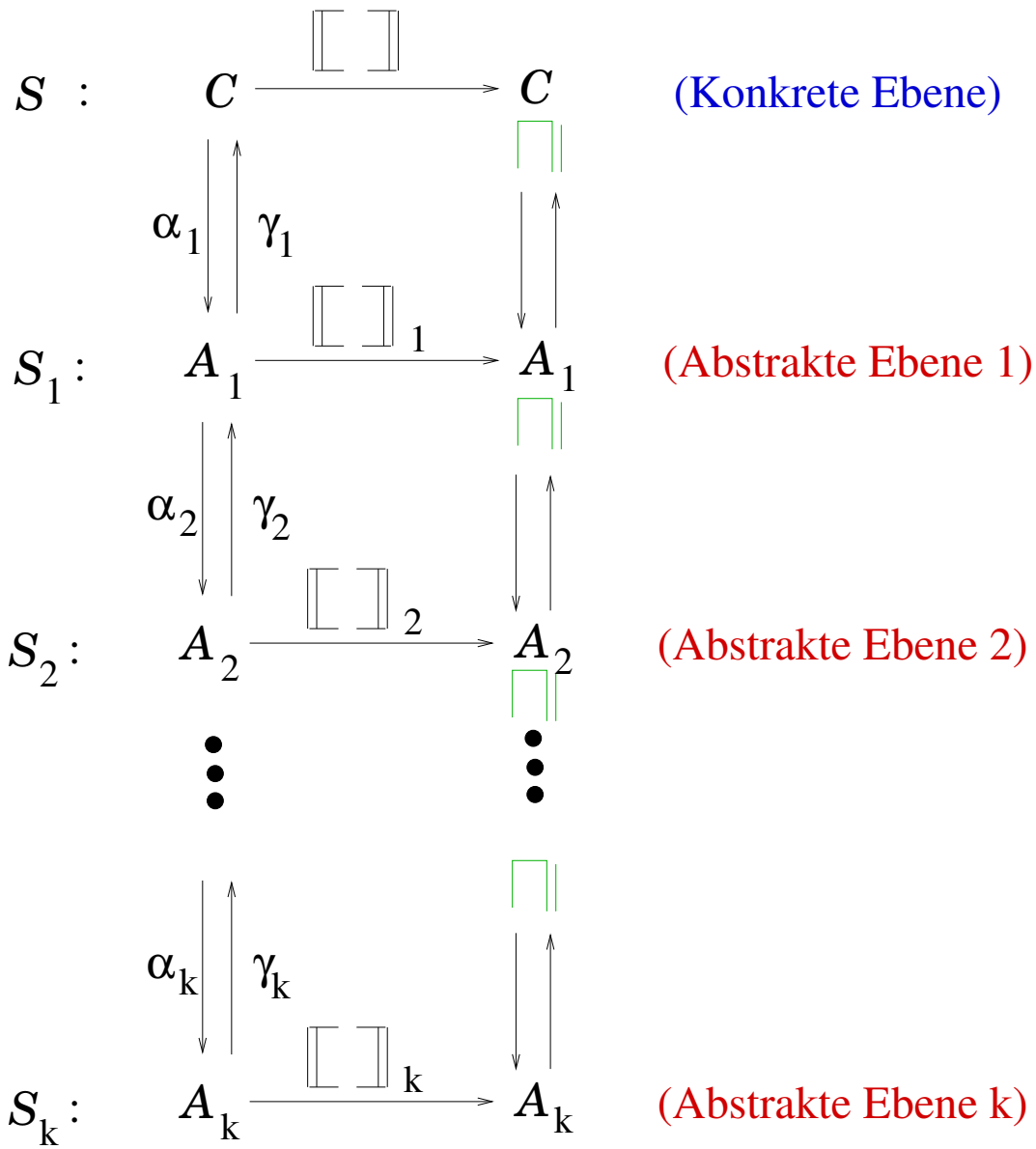
- Galois-Verbindungen oder (sogar) Galois-Passungen

verknüpft sind, so dass abstrakte Interpretationen niedrigerer Ebenen

- korrekt und (idealerweise) vollständig und optimal

bezüglich abstrakter Interpretationen höherer Ebenen sind (s. Kapitel 15.6 und 15.7).

Turm von Galois-Verbindungen/-Passungen (2)



Grundlage für Galois-Verb./-Passungstürme

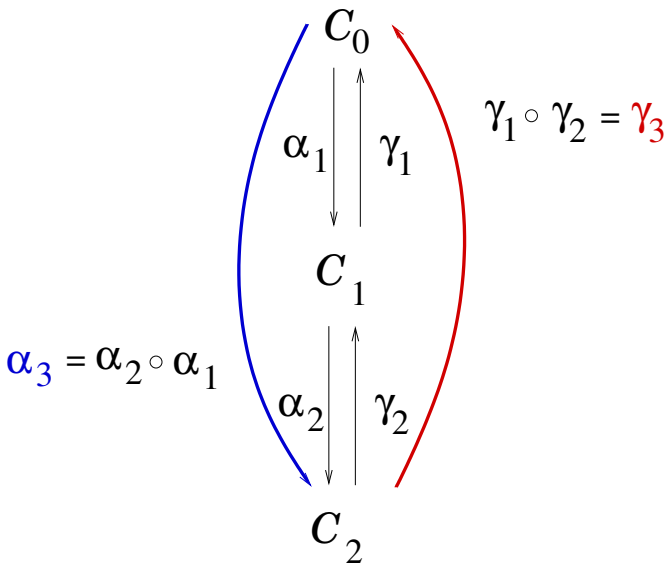
...ist die induktive Ausdehnung von:

Lemma 15.5.2 (Komposition v. Galois-Verb./Pass.)

Seien $(\mathcal{C}_0, \alpha_1, \gamma_1, \mathcal{C}_1)$ und $(\mathcal{C}_1, \alpha_2, \gamma_2, \mathcal{C}_2)$ zwei Galois-Verbindungen (Galois-Passungen). Dann ist auch

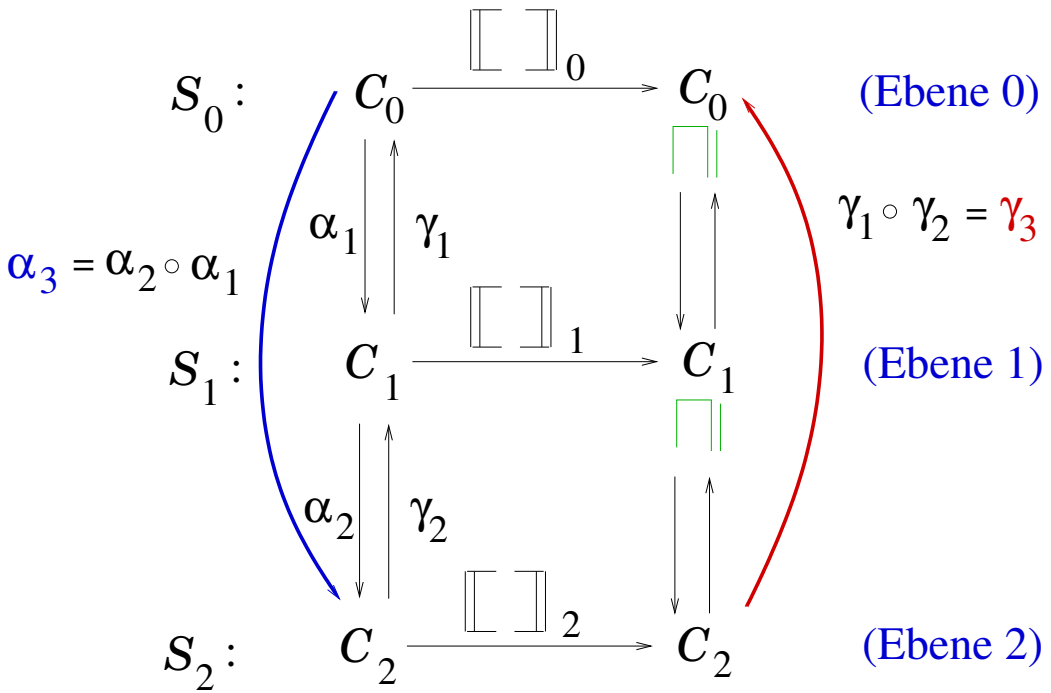
$$(\mathcal{C}_0, \alpha_2 \circ \alpha_1, \gamma_1 \circ \gamma_2, \mathcal{C}_2)$$

eine Galois-Verbindung (Galois-Passung).



Anwendung

...von Lemma 15.5.2 auf Systeme abstrakter Interpretationen:



Kapitel 15.6

Korrektheit und Vollständigkeit abstrakter Interpretationen

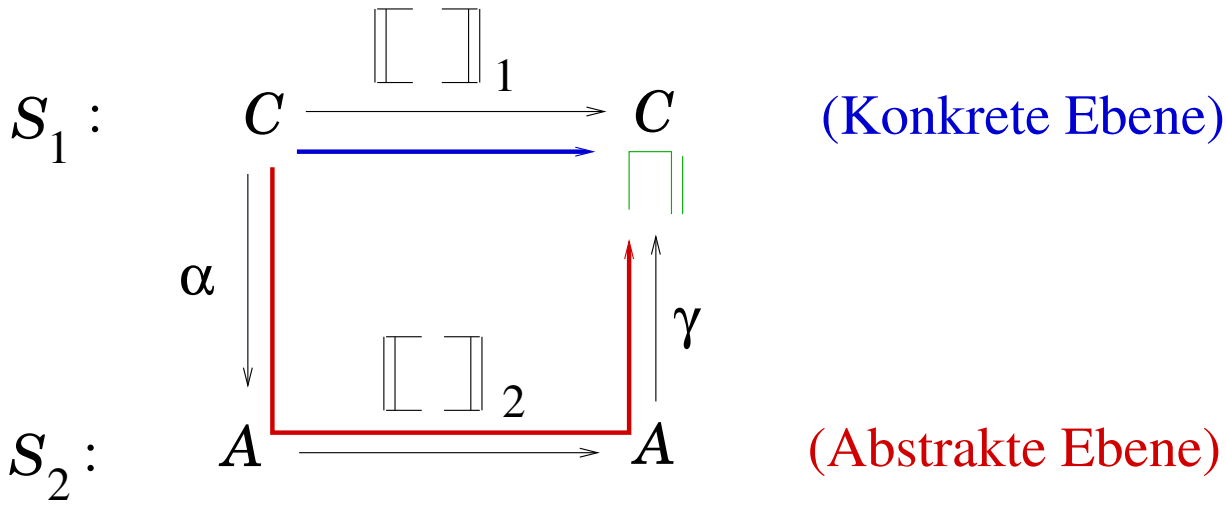
Korrektheits- und Vollständigkeitsbegriff

...in der Theorie abstrakter Interpretationen setzen an der Einbettung abstrakter Interpretationen in

- Systeme abstrakter Interpretationen an.

Informell bedeuten Korrektheit und Vollständigkeit in Systemen abstrakter Interpretationen, speziellen Galois-Systemen

- Korrektheit und Vollständigkeit einer abstrakten Interpretation einer niedrigeren Ebene relativ zu einer abstrakten Interpretation einer höheren Ebene.



Korrektheitheit und Vollständigkeit

...einer abstrakten Interpretation in einem Galois-System.

Definition 15.6.1 (Korrektheit, Vollständigkeit)

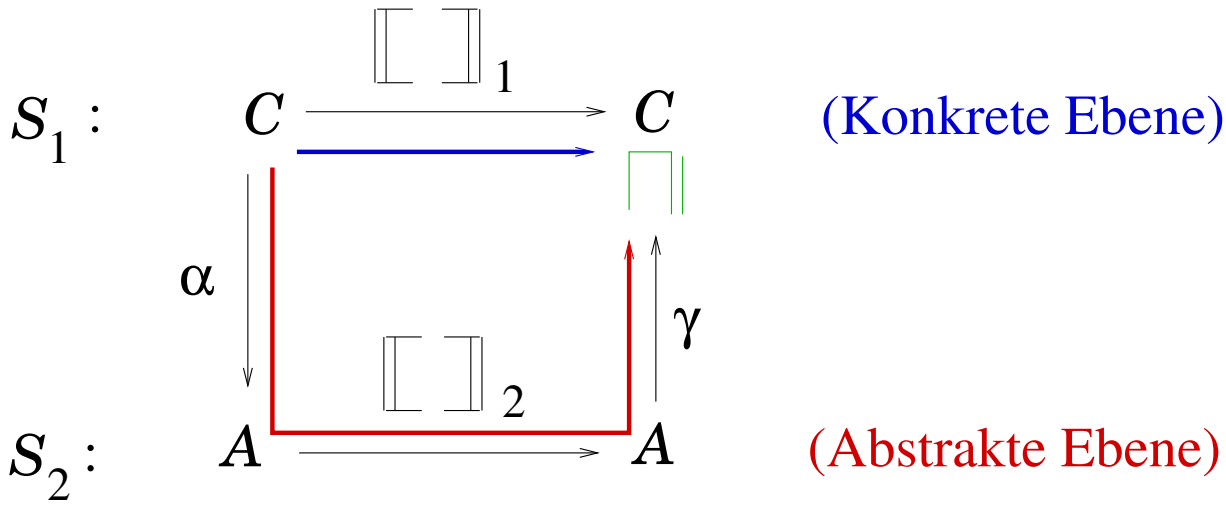
Sei $(\llbracket\ \rrbracket_1, \llbracket\ \rrbracket_2, (\mathcal{C}, \alpha, \gamma, \mathcal{A}))$ ein System abstrakter Interpretationen, wobei $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket\ \rrbracket_1)$ und $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, \llbracket\ \rrbracket_2)$ zwei abstrakte Semantiken auf den vollständigen (Vereinigungs-) Halbverbänden $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{A}$ sind.

Dann heißt $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, \llbracket\ \rrbracket_2)$

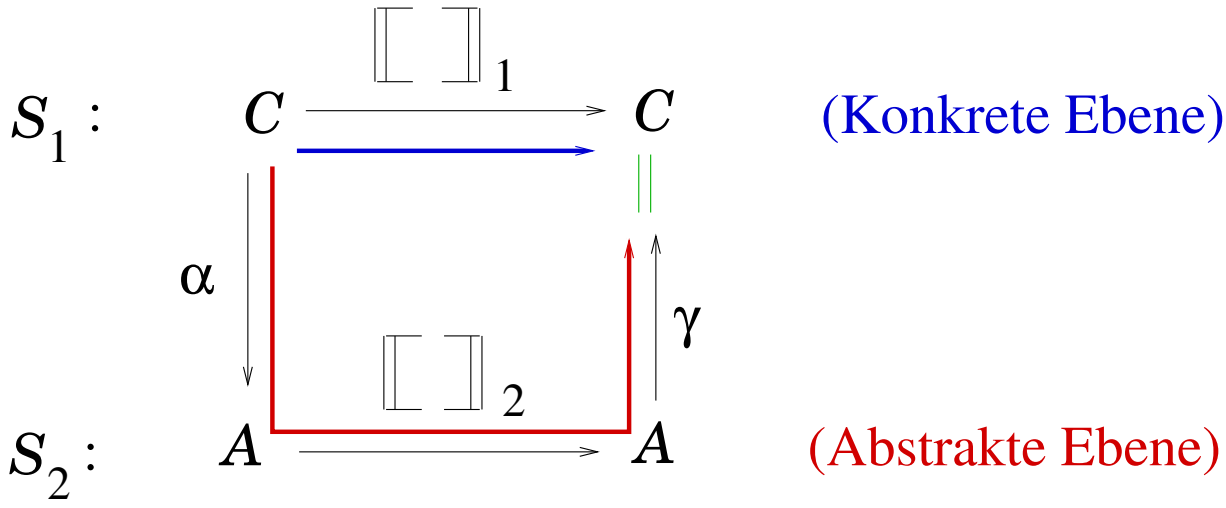
1. korrekt bzgl. $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket\ \rrbracket_1)$, wenn das nachstehende Diagramm schwach kommutativ ist, d.h., für (mindestens) einige Elemente aus $\mathcal{C}$ die Inklusion echt ist.
2. vollständig bzgl. $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, \llbracket\ \rrbracket_1)$, wenn das nachstehende Diagramm (stark) kommutativ ist, d.h. die Inklusion für alle Elemente aus $\mathcal{C}$ unecht ist (also Gleichheit gilt).

Diagramme zu Definition 15.4.1

Korrektheitheit von $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, [\![\ ]\!]_2)$ bzgl. $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, [\![\ ]\!]_1)$:



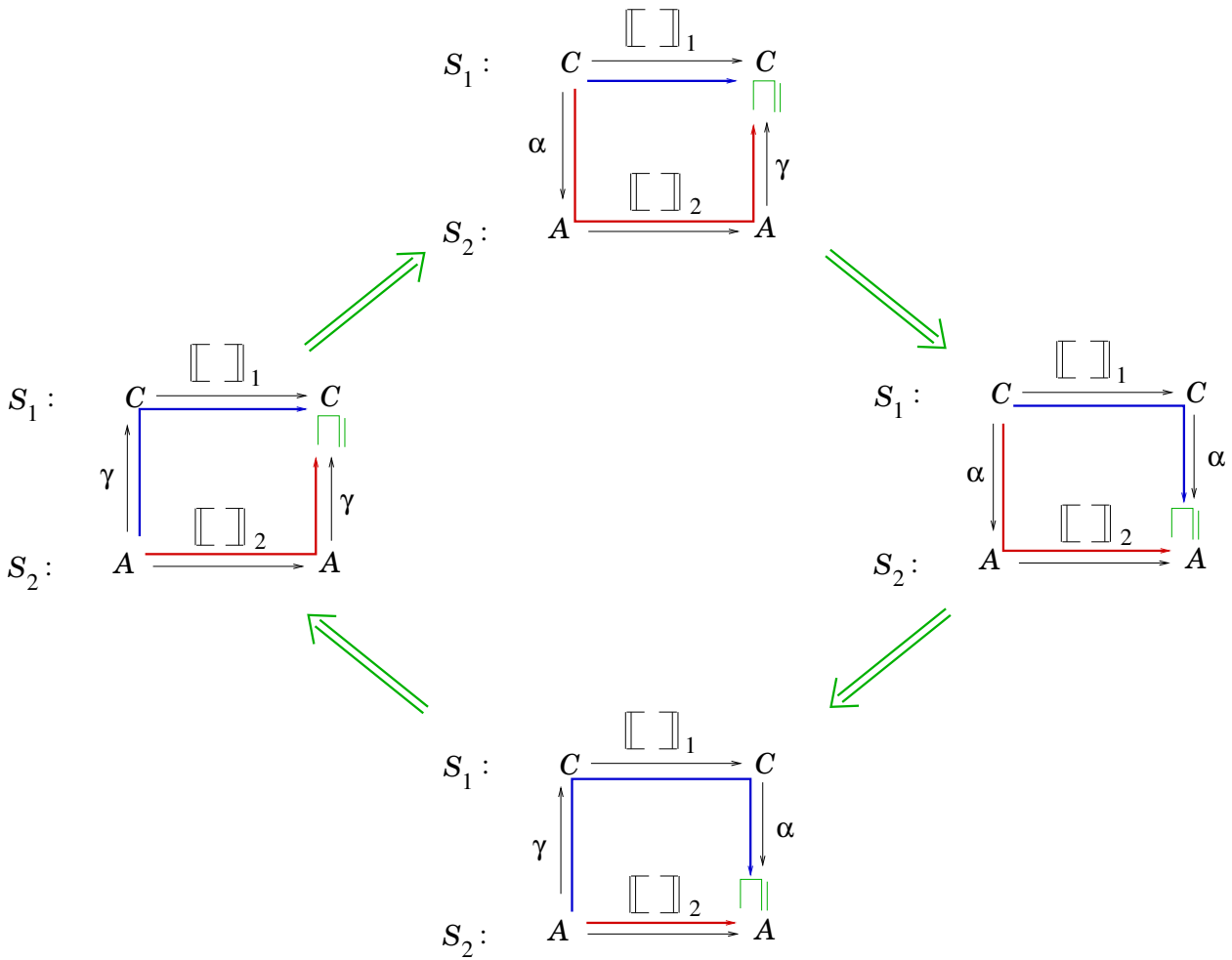
Vollständigkeit von $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{A}, [\![\ ]\!]_2)$ bzgl. $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, [\![\ ]\!]_1)$:



Als unmittelbare Folgerung (1)

...aus Lemma 15.4.2 für allgemeine Galois-Systeme erhalten wir:

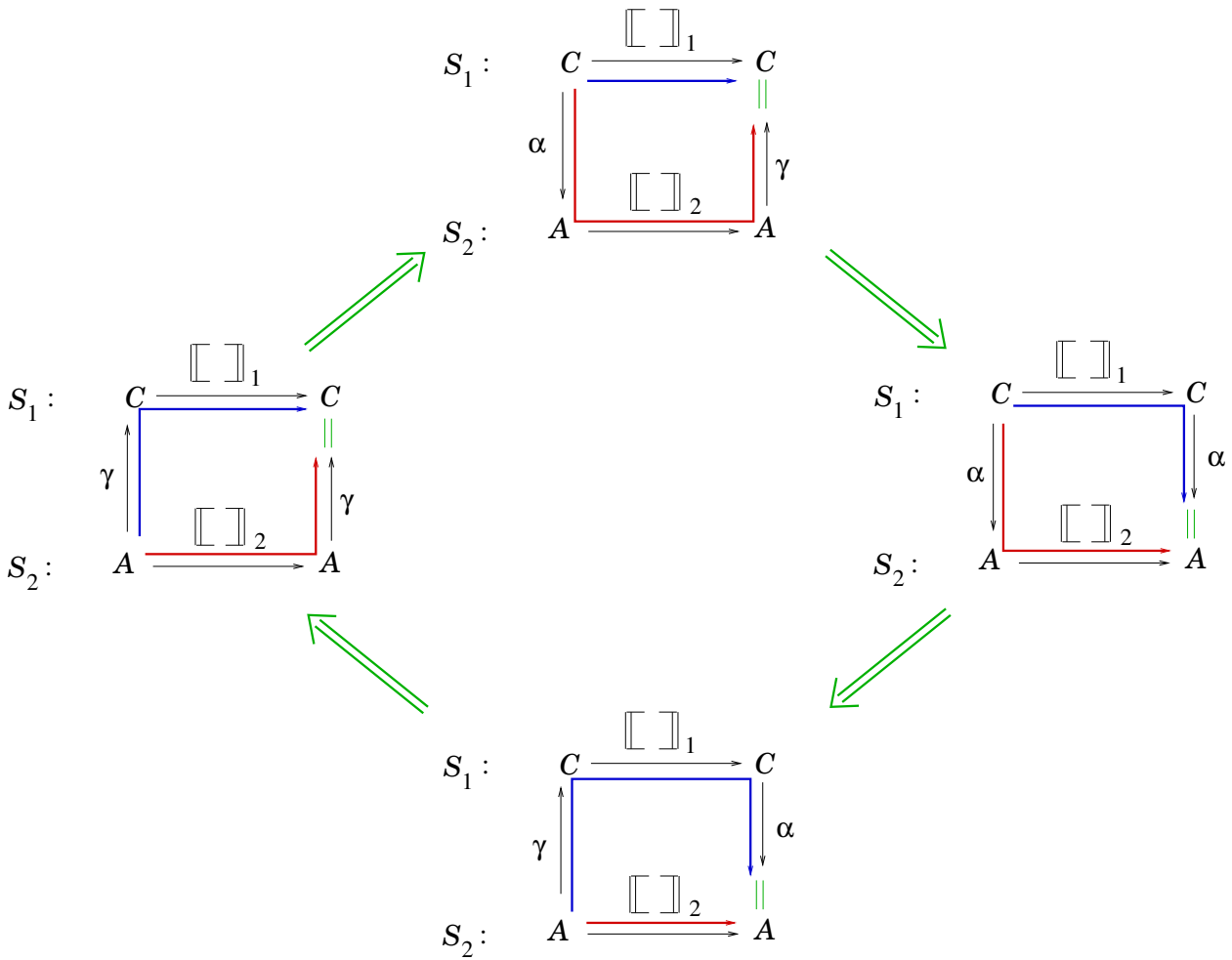
Korollar 15.6.2 (Korrektheit)



Als unmittelbare Folgerung (2)

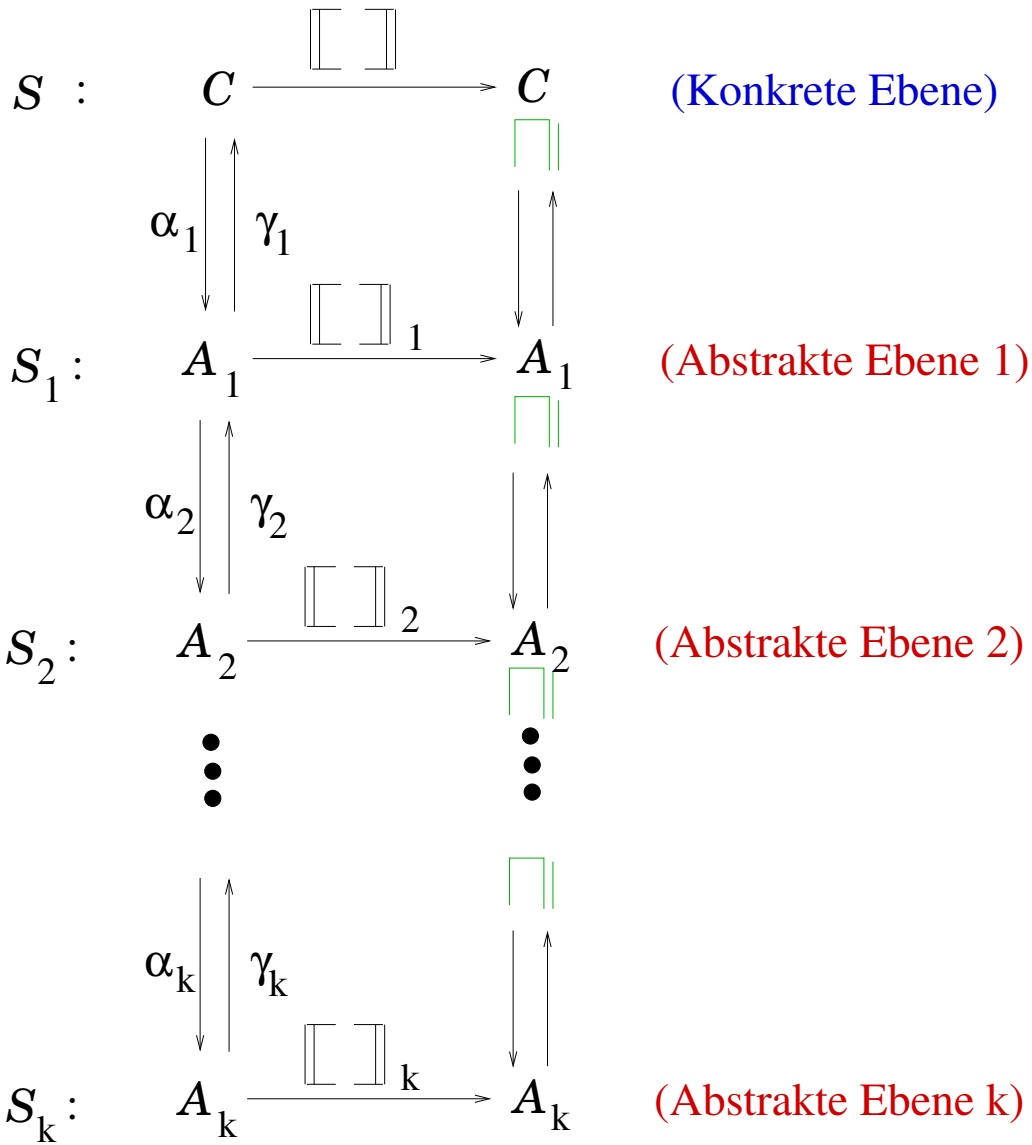
...aus Lemma 15.4.3 für allgemeine Galois-Systeme erhalten wir:

Korollar 15.6.3 (Vollständigkeit)



Verallg. von Korrektheit und Vollständigkeit

...auf Türme von Systemen abstrakter Interpretationen:



Kapitel 15.7

Optimalität abstrakter Interpretationen

Optimalität

...fragt intuitiv nach der

- 'einfachsten', 'abstraktesten', 'niedrigstebenigen' abstrakten Semantik

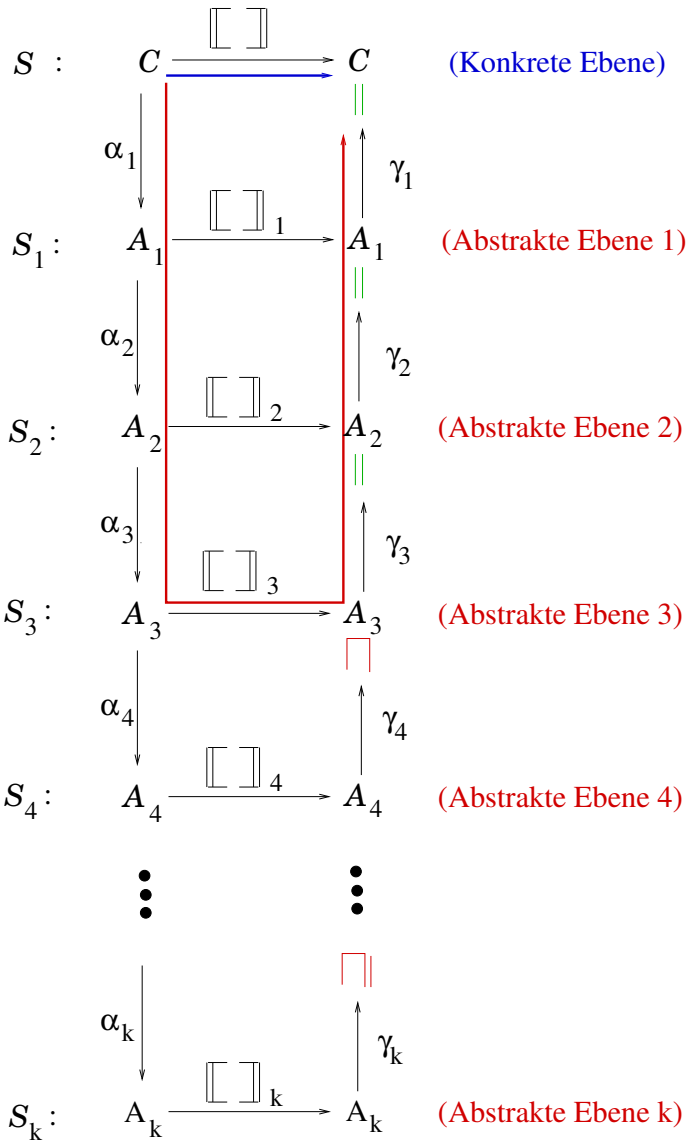
die eine Klasse $\mathcal{K}$ von Analysefrage zu beantworten erlaubt.

Dabei können intuitiv zwei Sichten unterschieden werden:

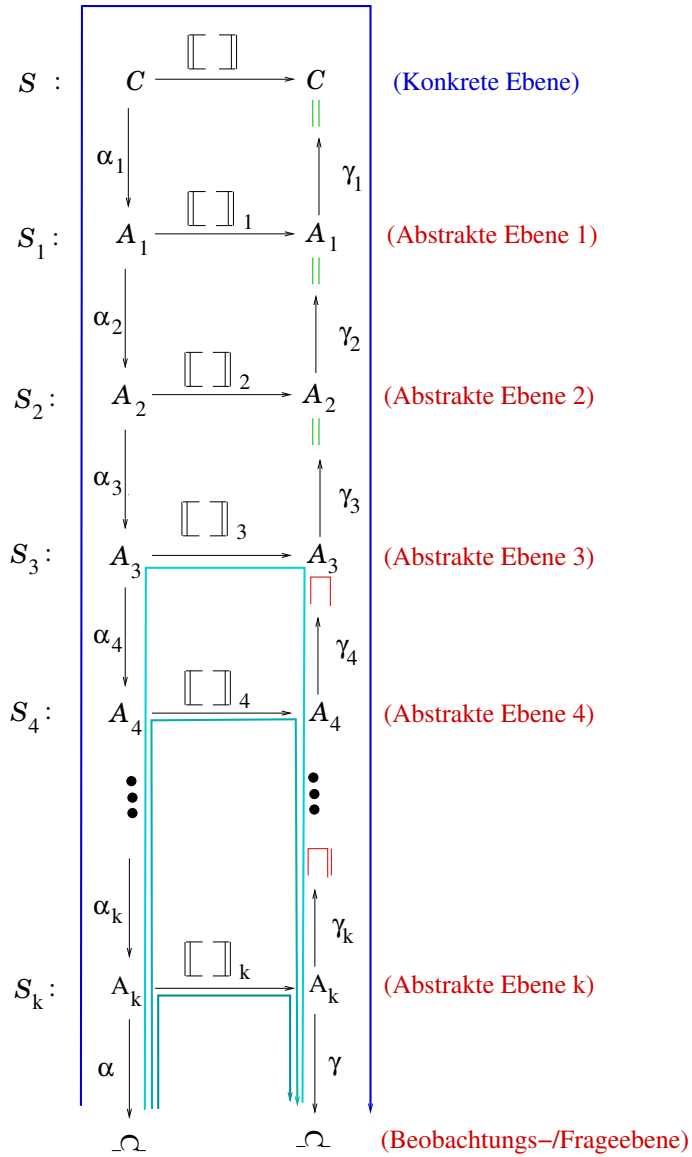
- Von oben nach unten: Wie weit kann abgestiegen werden, ohne Ausdruckskraft für $\mathcal{K}$ zu verlieren?
- Von unten nach oben: Wie weit muss aufgestiegen werden, um eine genügend ausdrucksstarke Analyse zu erreichen, um Analysefragen aus $\mathcal{K}$ zu beantworten?

Illustration

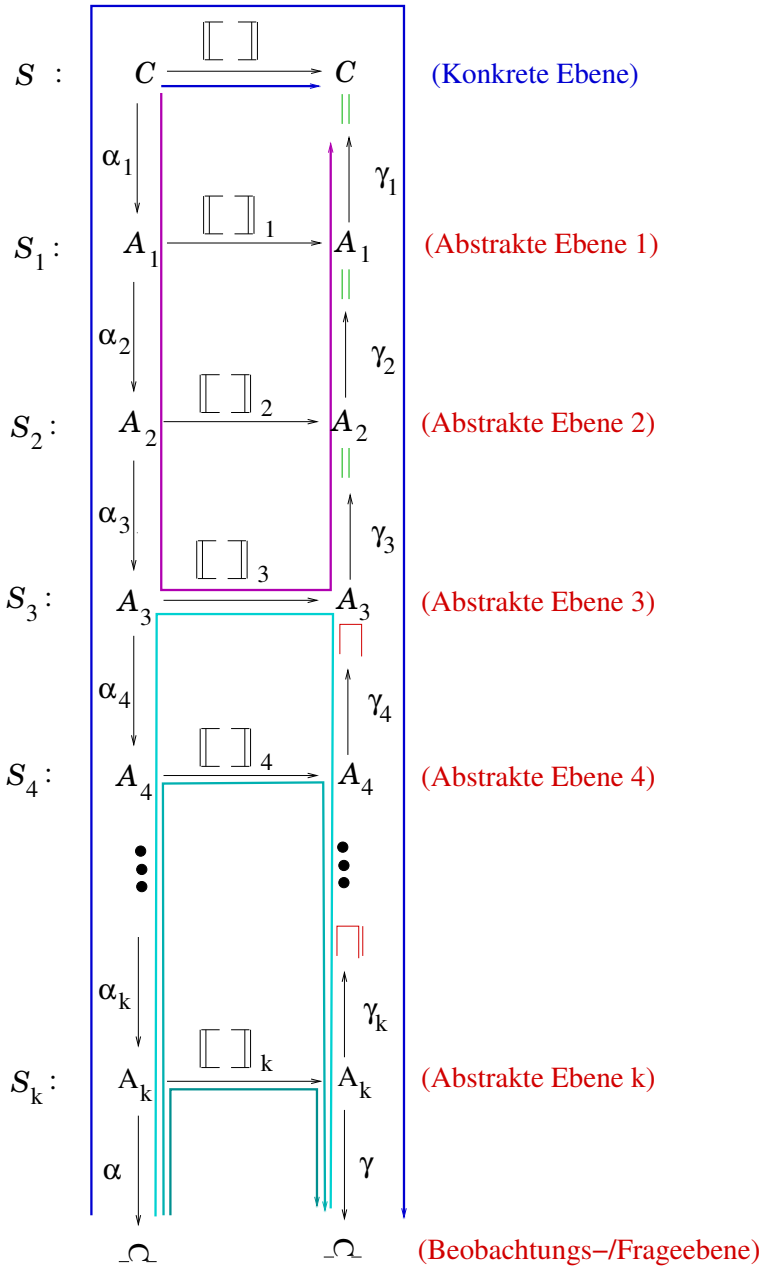
Von oben nach unten:



Von unten nach oben:



Beide Sichten vereint in einem Diagramm



Optimalität in der ‘oben-nach-unten’-Sicht

...informell ist eine abstrakte Interpretation optimal für eine Klasse von Analysefragen, wenn es keine echte Abstraktion von ihr gibt, die diese Fragen in gleicher Weise zu beantworten erlaubt.

Definition 15.7.1 (onu-Optimalität)

Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Analysefragen und $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{C}, [\![\ ]\!]_1)$ ausdruckskräftig für $\mathcal{K}$.

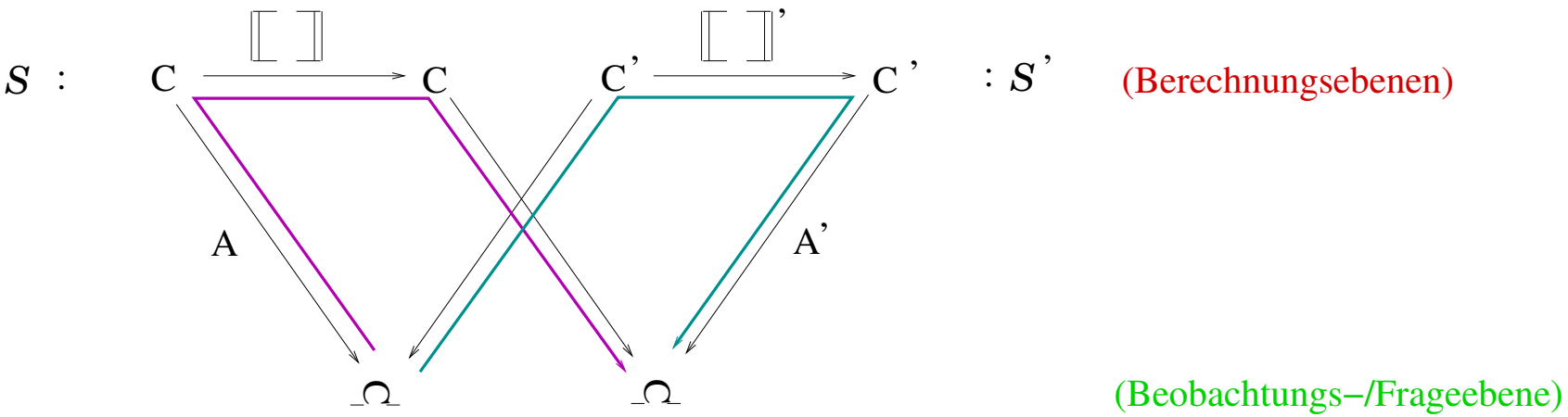
Dann ist $\mathcal{S}_1$ onu-optimal für $\mathcal{K}$, wenn alle für ‘$\mathcal{K}$ ausdruckskräftigen Abstraktionen von $\mathcal{S}_1$ zu $\mathcal{S}_1$ isomorph’ sind.

Optimalität in der ‘unten-nach-oben’-Sicht

...um den Optimalitätsbegriff in der ‘unten-nach-oben’-Sicht zu fassen, gehen wir von der streng hierarchischen zu einer allgemeineren sich auf einen Begriff von

- Beobachungsäquivalenz relativ zu einem Niveau Ω

stützenden Sicht über, die auf Bernhard Steffen (MFCS’89, TAPSOFT’87) zurückgeht und auch die ‘oben-nach-unten’-Sicht in generellerer Weise beleuchtet.



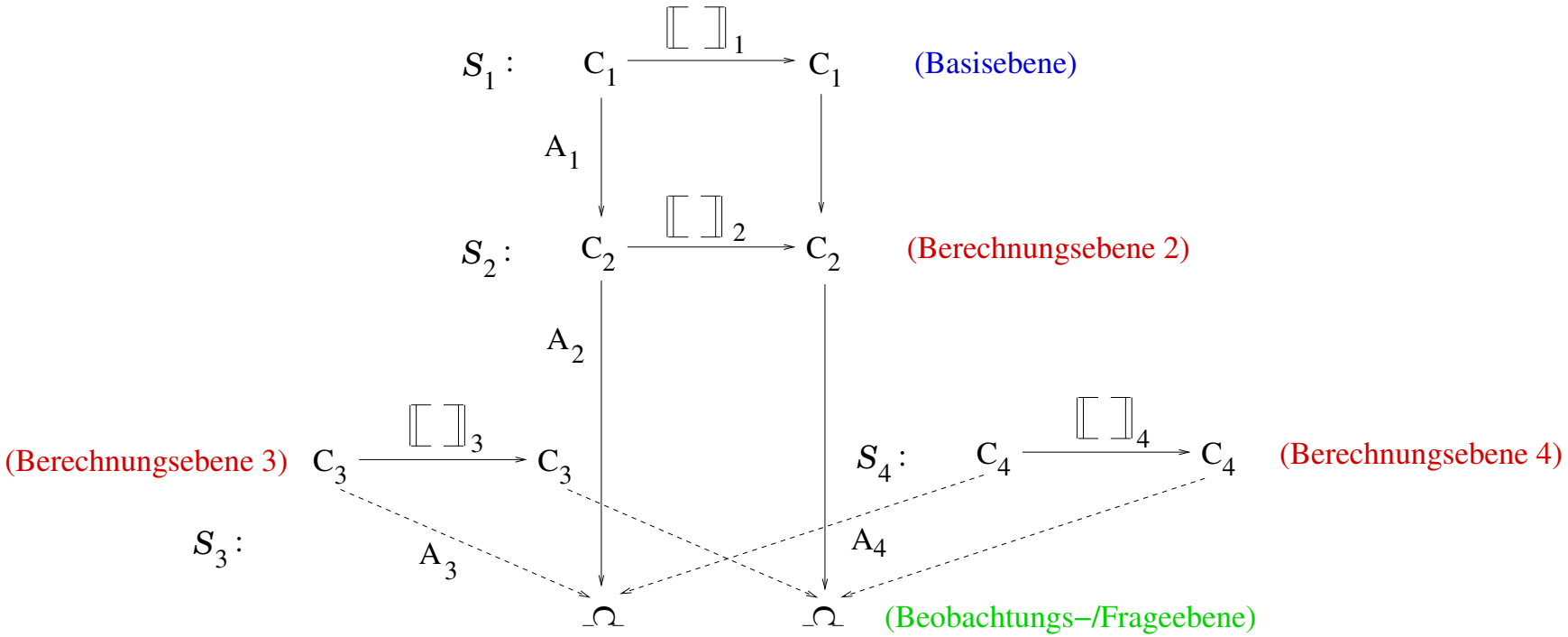
(Berechnungsebenen)

(Beobachtungs–/Frageebene)

...$\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ induzieren beide ein Berechnungsverfahren für Ω.

Illustration

...der Idee von Beobachungsäquivalenz durch induzierte Berechnungsebenen für eine gegebene Anfrage- (oder Beobachtungs-) Ebene.



...es ist nicht *per se* klar, dass ein 'einfachstes ausreichendes' Berechnungsniveau innerhalb eines Turms liegen muss.

In der Folge

...bezeichnen:

- **N** eine Menge von Knoten, die für die Menge der Vorkommen elementarer Anweisungen steht.
- $G =_{df} (N, E, \mathbf{s}, \mathbf{e})$ einen Flussgraphen mit Knotenmenge $N \subseteq \mathbf{N}$, Kantenmenge $E \sqsubseteq N \times N$, Startknoten $\mathbf{s} \in N$ und Endknoten $\mathbf{e} \in N$, wobei **s** keine Vorgänger, **e** keine Nachfolger hat; $\mathbf{P}(G)$ die Menge aller Pfadevon **s** nach **e** in G.
- **FG** die Menge aller Flussgraphen über **N** und **LFG** die Menge aller linearen Flussgraphen über **N**, d.h. die Menge aller Flussgraphen mit genau einem Pfad von **s** und **e**.
- $\mathcal{C} =_{df} (C, \sqcup, \sqsubseteq, \bot, \top)$ einen vollständigen Halbverband mit kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$.

Lokale abstrakte Semantik

Definition 15.7.2 (Lokale abstrakte Semantik)

Sei $[\![\ ]\!]_l : N \to (\mathcal{C} \to \mathcal{C})$ eine Funktion, die jedem Knoten $n \in N$ eine additive Funktion auf $\mathcal{C}$ zuordnet, d.h.

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\ \forall\, C' \subseteq C.\ [\![\, n \,]\!]_l(\bigsqcup C') = \bigsqcup\{[\![\, n \,]\!]_l(c) \mid c \in C'\}.$$

Dann heißt das Paar $([\![\ ]\!]_l, \mathcal{C})$ eine lokale abstrakte Semantik (oder lokale abstrakte Interpretation).

Globale abstrakte Semantik

Definition 15.7.3 (Globale abstrakte Semantik)

Sei $(\llbracket\ \rrbracket_I, \mathcal{C})$ abstrakte Interpretation und $\llbracket\ \rrbracket : \mathbf{FG} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{C})$ die Globalisierung von $\llbracket\ \rrbracket_I$, d.h. $\forall\, G \in \mathbf{FG}\ \forall\, c \in \mathcal{C}$ gilt:

$$\llbracket\, G\, \rrbracket(c) =_{df}$$

$$\begin{cases} \llbracket\, n_k\, \rrbracket_I \circ \ldots \circ \llbracket\, n_1\, \rrbracket_I(c) & \text{falls } G = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbf{LFG} \\ \bigsqcup\{\llbracket\, P\, \rrbracket(c) \mid P \in \mathbf{P}(G)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann heißt das Paar $(\llbracket\ \rrbracket, \mathcal{C})$ die von $(\llbracket\ \rrbracket_I, \mathcal{C})$ induzierte (globale) abstrakte Semantik.

Abstraktion und Konkretisierung

Definition 15.7.4 (Abstraktion und Konkretisierung)

Seien $\mathcal{S}_1 = (\llbracket\ \rrbracket_1, \mathcal{C}_1)$ und $\mathcal{S}_2 = (\llbracket\ \rrbracket_2, \mathcal{C}_2)$ zwei abstrakte Semantiken.

- Eine Funktion $A : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ heißt Abstraktionsfunktion, in Zeichen $\mathcal{S}_2 \leq_A \mathcal{S}_1$, falls A additiv und surjektiv ist und die (lokale) Korrektheitsbedingung

$$\forall\, n \in \mathbf{N}.\ A \circ \llbracket\, n \,\rrbracket_1 \sqsubseteq \llbracket\, n \,\rrbracket_2 \circ A$$

  erfüllt.
- Die Funktion $A^a : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ definiert durch

$$\forall\, c \in \mathcal{C}_2.\ A^a(c) =_{df} \bigsqcup \{c' \mid A(c') = c\}$$

  heißt adjungierte (oder Konkretisierungs-) funktion zu A.

Anmerkungen zu Abstraktion/Konkretisierung

- Additivität ist eine wesentliche Anforderung an eine abstrakte Interpretation. Die meisten der folgenden Ergebnisse gelten nur unter dieser Voraussetzung.
- Surjektivität ist keine wesentliche Voraussetzung, erleichtert aber die formale Argumentation.
- Paare aus Abstraktions- und Konkretisierungsfunktion (A, A^a) sind Paare adjungierter Funktionen im Sinne von Cousot und Cousot (POPL'77) (ebenso in Kapitel 8 die Paare aus Datenfluss- und reversen Datenflussanalysefunktionen).
- Die Konkretisierungsfunktion A^a ist monoton, i.a. aber nicht additiv.
- Mit den Bezeichnungen aus Kap. 15.2 entsprechen sich α und A und γ und A^a.

Isomorphie abstrakter Semantiken

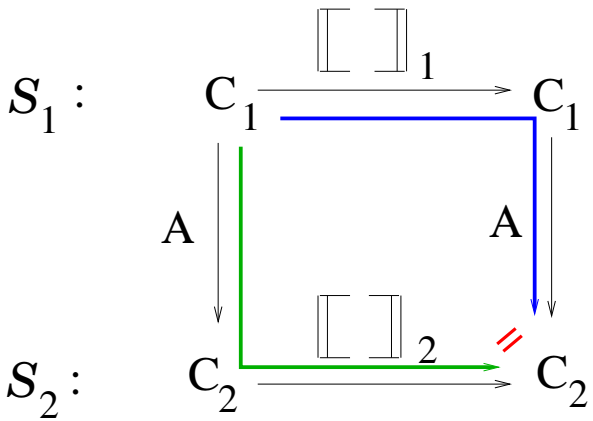
Definition 15.7.5 (Isomorphie)

Seien $\mathcal{S}_1 = (\llbracket\ \rrbracket_1, \mathcal{C}_1)$ und $\mathcal{S}_2 = (\llbracket\ \rrbracket_2, \mathcal{C}_2)$ zwei abstrakte Semantiken.

$\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ heißen isomorph, in Zeichen $S_1 \approx_A S_2$ oder $S_1 \approx S_2$, wenn es eine additive und bijektive Abstraktionsfunktion $A : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ gibt, so dass für alle $G \in \mathbf{FG}$ gilt:

$$A \circ \llbracket\ G\ \rrbracket_1 = \llbracket\ G\ \rrbracket_2 \circ A$$

Veranschaulichung:



Beobachtungsniveau und Beobachtung

Definition 15.7.6 (Beobachtung(sniveau))

Sei $\mathcal{S}$ eine abstrakte Semantik, Ω ('Ω' für Beobachtung) ein vollständiger Halbverband und $A : \mathcal{C} \to \Omega$ eine additive und surjektive Funktion.

Dann induziert $\mathcal{S}$ ein Semantikfunktional oder Verhalten $[\![\ ]\!]_A : \mathbf{FG} \to (\Omega \to \Omega)$ auf Ω durch

$$\forall\, G \in \mathbf{FG}.\ [\![\ G\ ]\!]_A =_{df} A \circ [\![\ G\ ]\!] \circ A^a$$

Wir bezeichnen diese Situation mit $\mathcal{S} \to_A \Omega$ und nennen Ω ein Beobachtungsniveau.

Modell

Definition 15.7.7 (Modell)

Sei Ω ein Beobachtungsniveau und $\mathcal{S}$ eine abstrakte Semantik mit $\mathcal{S} \to_A \Omega$.

Dann heißt das Paar $(\mathcal{S}, A)$ ein Modell von Ω.

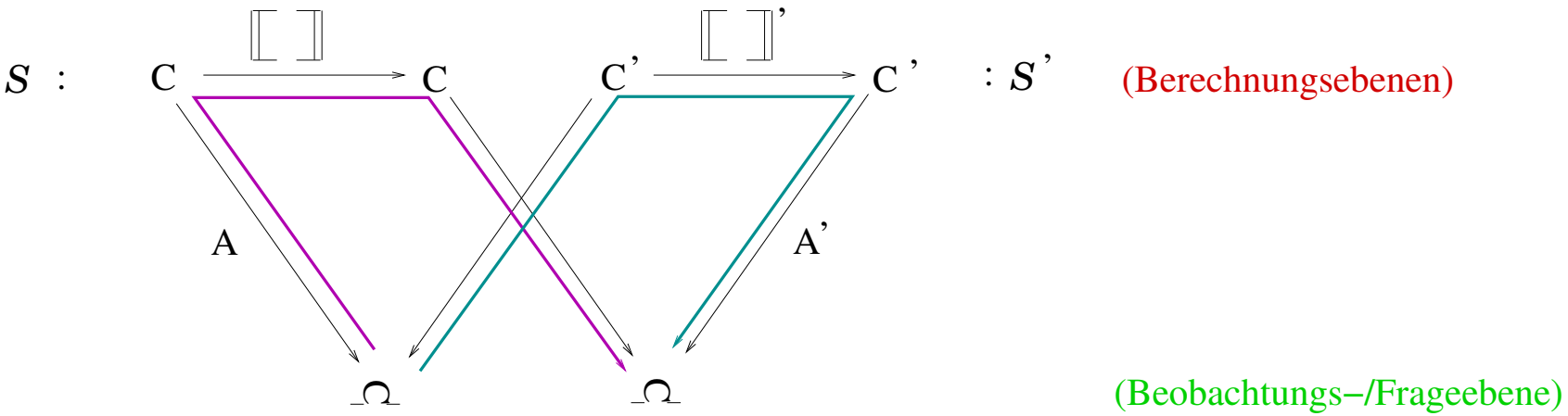
Beobachtungsäquivalenz

Definition 15.7.8 (Beobachtungsäquivalenz)

Seien $(\mathcal{S}, A)$ und $(\mathcal{S}', A')$ zwei Modelle von Ω.

Dann heißen $(\mathcal{S}, A)$ und $(\mathcal{S}', A')$ Ω-äquivalent (oder beobachtungsäquivalent für Ω), in Zeichen $(\mathcal{S}, A) \approx_\Omega (\mathcal{S}', A')$ gdw sie dasselbe Verhalten auf Ω induzieren, d.h. gdw $[\![\ ]\!]_A = [\![\ ]\!]_{A'}$.

Veranschaulichung:



Eigenschaften der Relation $\approx_\Omega$

Lemma 15.7.9 (Äquivalenzrelation)

Die Relation $\approx_\Omega$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Modelle von Ω.

Verbandshüllen

Definition 15.7.10 (Verbandshüllen)

Sei $\mathcal{S}_2 \leq_{A_1} \mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2 \to_{A_2} \Omega$. Dann definieren wir:

1. $RI(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega) =_{df} \{c \in \mathcal{C}_2 \mid \exists\, G \in \mathbf{FG}\ \exists\, c' \in \Omega.\ c = A_1 \circ [\![\ G\ ]\!]_1 \circ A_1^a \circ A_2^a\}(c')\ \}$
2. $RL(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega)$ bezeichnet die vollständige Halbverbandshülle von $RI(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega)$ in $\mathcal{C}_2$.
3. $RS(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega) =_{df} ([\![\ ]\!], RL(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega))$, wobei $[\![\ ]\!]$ folgendermaßen definiert ist:

   $\forall\, G \in \mathbf{FG}.\ [\![\ G\ ]\!] =_{df}$

$$\begin{cases} [\![\ G\ ]\!]_2 \mid_{RL(\mathcal{S}_1,A_1,\mathcal{S}_2,A_2,\Omega)} & \text{falls } RL(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega) \\ & \text{abgeschlossen ist unter } [\![\ ]\!]_2 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

Lokale Optimalität

Definition 15.7.11 (Lokale Optimalität)

Sei $\mathcal{S}_2 \leq_{A_1} \mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2 \to_{A_2} \Omega$. Dann heißt $\mathcal{S}_2$ lokal optimal für $\mathcal{S}_1$ und A gdw für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$A_1 \circ [\![n]\!]_1 \circ A_1^a = [\![n]\!]_2$$

Voll abstrakte Modelle

Definition 15.7.12 (Voll abstrakte Modelle)

Seien $\mathcal{S}_1$, Ω und A mit $\mathcal{S}_1 \to_A \Omega$.

Ein Paar $(\mathcal{S}_2, A_2)$ mit $\mathcal{S}_2 \to_A \Omega$ heißt voll abstraktes Modell für $\mathcal{S}_1$ bezüglich Ω gdw eine Abstraktionsfunktion A_1 mit $\mathcal{S}_2 \leq_{A_1} \mathcal{S}_1$ existiert, die folgende 4 Eigenschaften erfüllt:

1. $A = A_2 \circ A_1$
2. $\mathcal{S}_2 = RS(\mathcal{S}_1, A_1, \mathcal{S}_2, A_2, \Omega)$
3. $\mathcal{S}_2$ ist lokal optimal für $\mathcal{S}_1$ und A_1
4. $\forall\, c, c' \in RI(\mathcal{S}_1, ID, \mathcal{S}_1, A, \Omega).\ A_1(c) = A_1(c') \Longleftrightarrow \forall\, G \in$ **LFG**. $A \circ [\![\, G \,]\!]_1(c) = A \circ [\![\, G \,]\!]_1(c')$, wobei ID die Identität auf dem semantischen Bereich von $\mathcal{S}_1$ ist.

Wir bezeichnen die Menge aller voll abstrakten Modelle für $\mathcal{S}_1$, Ω und A, die in Beziehung $\mathcal{S}_1 \to_A \Omega$ stehen, mit $\Phi(\mathcal{S}_1, A, \Omega)$.

Existenz und Eindeutigkeit

Theorem 15.7.13 (Existenz und Eindeutigkeit)

Seien $\mathcal{S}_1$, Ω und A mit $\mathcal{S}_1 \to_A \Omega$.

Dann gibt es ein voll abstraktes Modell $(\mathcal{S}_2, A_2)$ für $\mathcal{S}_1$ bezüglich Ω mit folgender Eindeutigkeitseigenschaft:

$$\Phi(\mathcal{S}_1, A, \Omega) = \{(\mathcal{S}'_2, A'_2) \mid \exists\, A'.\ \mathcal{S}_2 \approx_{A'} \mathcal{S}'_2 \wedge A_2 = A'_2 \circ A'\}$$

Voll abstrakt ist ‘gut genug’

Theorem 15.7.14 (Abschneidetheorem)

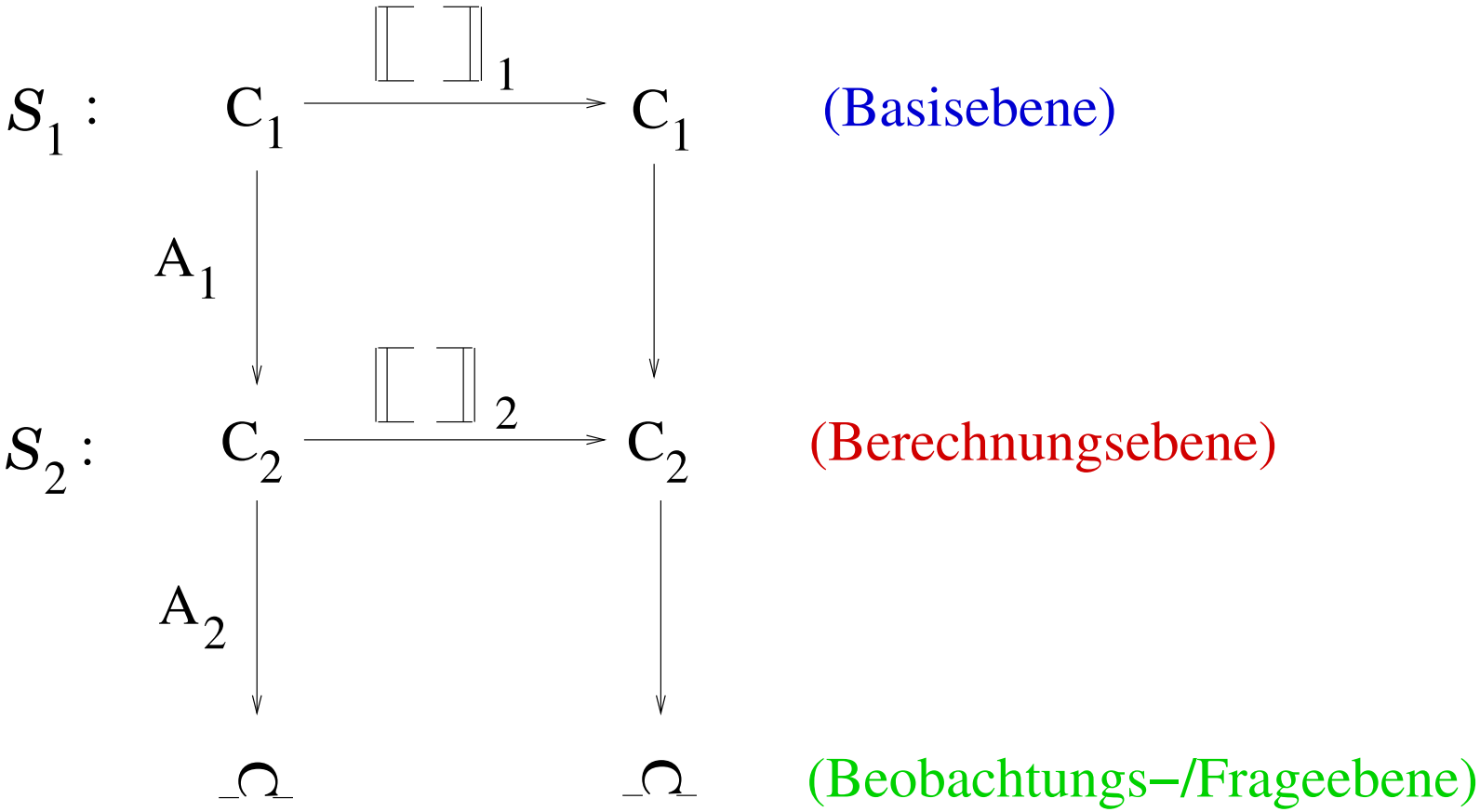
Sei $(\mathcal{S}_2, A_2) \in \Phi(\mathcal{S}_1, A_2 \circ A_1, \Omega)$ mit $\mathcal{S}_2 \leq_{A_1} \mathcal{S}_1$. Dann gilt:

$$\forall\, G \in \mathbf{FG}.\ A_1 \circ [\![\ G\ ]\!]_1 \circ A_1^a = [\![\ G\ ]\!]_2$$

Insbesondere gilt weiters:

$$(\mathcal{S}_1, A_2 \circ A_1) \approx_\Omega (\mathcal{S}_2, A_2)$$

Veranschaulichung



Äquivalenz

Theorem 15.7.15 (Äquivalenz)

Seien $(\mathcal{S}, A)$ und $(\mathcal{S}', A')$ zwei Modelle von Ω. Dann gilt:

$$(\mathcal{S}, A) \approx_\Omega (\mathcal{S}', A') \Longleftrightarrow \Phi(\mathcal{S}, A, \Omega) = \Phi(\mathcal{S}', A', \Omega)$$

Intuitiv: Zusammen mit dem Existenz- und Eindeutigkeitstheorem 15.5.12 und dem Abschneidetheorem 15.5.13 liefert das Äquivalenztheorem 15.5.14, dass voll abstrakte Modelle (bis auf Isomorphie) die 'abstraktesten' Repräsentanten ihrer Beobachtungsäquivalenzklasse sind.

Interpretation und Folgerung (1)

Zu vorgegebenem Beobachtungsniveau Ω und Modell $(\mathcal{S}, A)$ von Ω gibt es ein

- beobachtungsäquivalentes 'abstraktestes' Berechnungsniveau.

Dieses 'abstrakteste' Berechnungsniveau ist das bis auf Isomorphie

- eindeutig bestimmte voll abstrakte Modell.

Das voll abstrakte Modell ist das gesuchte

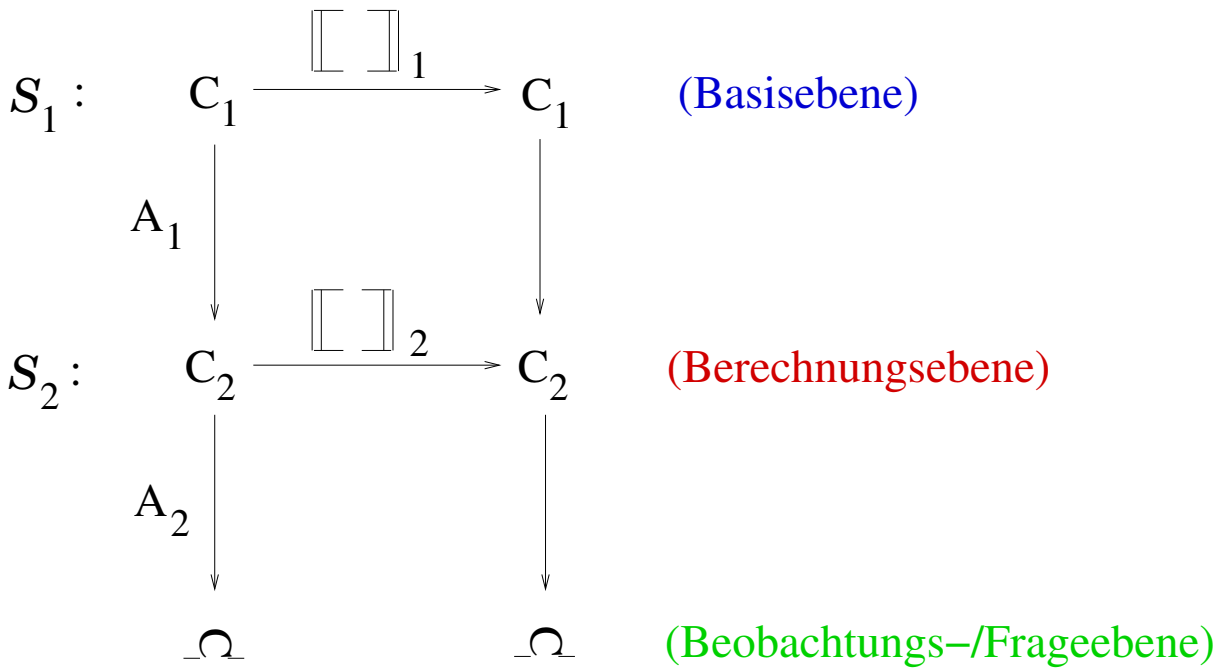
- korrekte, vollständige und optimale Modell.

Interpretation und Folgerung (2)

Das voll abstrakte Modell liegt hierarchisch eingebettet innerhalb des

- 3-stufigen Modells.

In diesem Sinn ist das 3-stufige Modell hinreichend allgemein für den nicht auf Hierarchien abstrakter Interpretationen beschränkten Begriff der Beobachtungsäquivalenz.



Kapitel 15.8

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (1)


Samson Abramsky, Chris Hankin. *An Introduction to Abstract Interpretation*. In Abstract Interpretation of Declarative Languages, Samson Abramsky, Chris Hankin (Hrsg.), Prentice Hall, 63-102, 1987.


Patrick Cousot. *Methods and Logics for Proving Programs*. In Handbook of Theoretical Computer Science, Jan van Leeuwen (Hrsg.), Elsevier Science Publishers B. V., Chapter 15, 841-993, 1990.


Patrick Cousot. *Abstract Interpretation*. ACM Computing Surveys 28(2):324-328, 1996.


Patrick Cousot. *Refining Model-Checking by Abstract Interpretation*. Automated Software Engineering 6(1):69-95, 1999.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (2)


Patrick Cousot. *Design of Syntactic Program Transformations by Abstract Interpretation of Semantic Transformations*. In Proceedings of the 17th International Conference on Logic Programming (ICLP 2001), Springer-V., LNCS 2237, 4-5, 2001.


Patrick Cousot. *The Verification Grand Challenge and Abstract Interpretation*. In Proceedings of Verified Software: Theories, Tools, Experiments (VSTTE 2005), Springer-V, LNCS 4171, 189-201, 2005.


Patrick Cousot. *Verification by Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 4th International Conference on Verification, Model-Checking, Abstract Interpretation (VMCAI 2003), Springer-V., LNCS 2575, 20-24, 2003.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (3)

Patrick Cousot. *Verification by Abstract Interpretation*. In Verification: Theory and Practice, Essays dedicated to Zohar Manna on the Occasion of His 64th Birthday. Springer-V., LNCS 2772, 243-268, 2003.

Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Abstract Interpretation: A Unified Lattice Model for Static Analysis of Programs by Construction or Approximation of Fixpoints*. In Conference Record of the 4th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77), 238-252, 1977.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (4)


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Analysis Frameworks*. In Conference Record of the 6th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'79), 269-282, 1979.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Abstract Interpretation Frameworks*. Journal of Logic and Computation 2(4):511-547, 1992.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Transformation Frameworks by Abstract Interpretation*. In Conference Record of the 29th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2002), 178-190, 2002.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (5)


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *A Gentle Introduction to Formal Verification of Computer Systems by Abstract Interpretation*. In Logics and Languages for Reliability and Security. NATO Science for Peace and Security - D; Information and Communication Security, Vol. 25, IOS Press, 2010. ISBN 978-1-60750–099-5.


Patrick Cousot, Radhia Cousot, Laurent Mauborgne. *Theories, Solvers and Static Analysis by Abstract Interpretation*. Journal of the ACM 59(6), Article 31, 56 Seiten, 2012.


Patrick Cousot, Michael Monerau. *Probabilistic Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 21st Symposium on Programming (ESOP 2012), Springer-V., LNCS 7211, 169-193, 2012.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (6)


Nevin Heintze, Joxan Jaffar, Răzvan Voicu. *A Framework for Combining Analysis and Verification*. In Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000), 26-39, 2000.


Neil D. Jones, Flemming Nielson. *Abstract Interpretation: A Semantics-based Tool for Program Analysis*. In Handbook of Logic in Computer Science, Volume 4, Oxford University Press, 1995.


Kim Marriot. *Frameworks for Abstract Interpretation*. Acta Informatica 30:103-129, 1993.


Flemming Nielson. *A Bibliography on Abstract Interpretations*. ACM SIGPLAN Notices 21:31-38, 1986.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (7)


Flemming Nielson. *A Bibliography on Abstract Interpretation*. EATCS Bulletin 28:42-52, 1986.


Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson, Chris Hankin. *Principles of Program Analysis*. 2nd edition, Springer-V., 2005. (Chapter 1.5, Abstract Interpretation; Chapter 4, Abstract Interpretation)


Bernhard Steffen. *Optimal Run Time Optimization – Proved by a New Look at Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 2nd Joint International Conference on the Theory and Practice of Software Development (TAPSOFT'87), Springer-V., LNCS 249, 52-68, 1987.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 15 (8)

Bernhard Steffen. *Optimal Data Flow Analysis via Observational Equivalence*. In Proceedings of the 14th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'89), Springer-V., LNCS 379, 492-502, 1989.

Kapitel 16

Modellprüfung und Datenflussanalyse

Kapitel 16.1

Motivation

Motivation

...das Grundproblem der Modellprüfung (engl. model-checking).

Gegeben:

- Ein Modell $\mathcal{M}$
- Eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ in Form einer Formel ϕ

Modellprüfungsfrage:

- Ist $\mathcal{M}$ ein Modell für Eigenschaft $\mathcal{E}$, erfüllt $\mathcal{M}$ Eigenschaft ϕ?

$$\mathcal{M} \models \phi$$

Kapitel 16.2

Modellprüfer, Modellprüfung

Modellprüfer und Modellprüfung

Modellprüfer: Eine Methode, ein Werkzeug zur Beantwortung von Modellprüfungsfragen.

Modellprüfung: Ansetzen eines Modellprüfers MP auf ein Paar $\mathcal{M}, \phi$ aus Modell $\mathcal{M}$ und Formel ϕ:

- $\mathcal{M} \models_{MP} \phi$ wird nachgewiesen: $\mathcal{M}$ ist bezüglich ϕ verifiziert (oder ϕ ist für $\mathcal{M}$ verifiziert).
- $\mathcal{M} \models_{MP} \phi$ wird widerlegt: $\mathcal{M}$ ist bezüglich ϕ falsifiziert (oder ϕ ist für $\mathcal{M}$ falsifiziert).

  Wünschenswert: Ausgabe eines (minimalen) Gegenbeispiels, das die Verletzung der Formel zeigt (CEGAR ('counter-example-guided abstraction/refinement'-Ansatz).
- $\mathcal{M} \models_{MP} \phi$ wird weder noch nachgewiesen oder widerlegt: Modellprüfer ist unvollständig für Modell- und Formelsprache.

Kapitel 16.3

Modell- und Formelsprachen

Modellsprachen

...typischerweise:

- Transitionssysteme (kantenbenannt)
- Kripke-Strukturen (knotenbenannt)

Spezielle Ausprägungen:

- Automaten
- Flussgraphen (kanntenbenannt: Transitionssystem;
  knotenbenannt: Kripke-Struktur)
- Zustandsgraphen (z.B. Programmzustandsgraphen)
- ...

Modelle

...können sein:

- endlich: Endliche Modellprüfung
- unendlich: Unendliche Modellprüfung

Herausforderung für Modellprüferbau und Modellprüfung:

...die Meisterung der Explosion des Zustandsraums, eines notorischen (auch im Fall endlicher Modellprüfung schwierig zu handhabenden) Problems, kurz:

- Zustandsraumexplosion

Formelsprachen

...sind typischerweise:

- Temporale, modale Logiken (Linearzeitlogik (engl. linear time logics), Verzweigungszeitlogik (engl. branching time logics)
  - LTL, CTL, CTL*
  - μ-Kalkül
  - ...

Herausforderung:

...Ausdruckskraft und Entscheidbarkeit, vor allem effiziente Entscheidbarkeit der Formelsprache

- ausgewogen auszubalancieren.

Beispiel: Modaler μ-Kalkül: Syntax

...hier erweitert um sog. Rückwärtsmodalitäten erweitert, wobei $\mathcal{S}$ die Knotenmenge eines Modells bezeichnet, λ eine Abbildung, die jedem Knoten aus $\mathcal{S}$ eine Menge von Benennungen (aus der von β erzeugten Sprache) zuordnet, die von X und α erzeugten Sprachen eine Variablenmenge bzw. eine Menge von Transitionsbenennungen (d.h. Kantenbenennungen) sind.

Syntax:

$$\Phi \ ::= \ tt \mid X \mid \Phi \wedge \Phi \mid \neg\Phi \mid \beta \mid [\alpha]\,\Phi \mid \overline{[\alpha]}\,\Phi \mid \nu X.\,\Phi$$

Modaler μ-Kalkül: Semantik

Semantik:

$$
\begin{aligned}
[\![tt]\!]\, e &= \mathcal{S} \\
[\![X]\!]\, e &= e(X) \\
[\![\Phi_1 \wedge \Phi_2]\!]\, e &= [\![\Phi_1]\!]\, e \wedge [\![\Phi_2]\!]\, e \\
[\![\neg\Phi]\!]\, e &= \mathcal{S} \backslash [\![\Phi]\!]\, e \\
[\![\beta]\!]\, e &= \{p \in \mathcal{S} \mid \beta \in \lambda(p)\} \\
[\![[\alpha]\Phi]\!]\, e &= \{p \in \mathcal{S} \mid \forall\, q \in \mathit{Succ}_\alpha.\ q \in [\![\Phi]\!]\, e\} \\
[\![\overline{[\alpha]}\,\Phi]\!]\, e &= \{p \in \mathcal{S} \mid \forall\, p \in \mathit{Pred}_\alpha.\ p \in [\![\Phi]\!]\, e\} \\
[\![\nu X.\Phi]\!]\, e &= \bigcup \{S' \subseteq \mathcal{S} \mid S' \subseteq [\![\Phi]\!]\, e[S'/X]\}
\end{aligned}
$$

wobei e für eine Umgebung (oder Variablenbelegung) (engl. environment) steht: '$e : X \to \mathcal{P}(\mathcal{S})$'

Modaler μ-Kalkül: Informelle Interpretation

...der (allquantifizierten) modalen Operatoren:

- $[\![\, [\alpha]\, \Phi \,]\!]\, e$: Die Menge aller Knoten n, für die gilt: Ausgewertet in Umgebung e gilt für alle α-Nachfolger von n Eigenschaft ϕ.
- $[\![\, \overline{[\alpha]}\, \Phi \,]\!]\, e$: Die Menge aller Knoten n, für die gilt: Ausgewertet in Umgebung e gilt für alle α-Vorgänger von n Eigenschaft ϕ.

Modaler μ-Kalkül: Abgeleitete Operatoren (1)

Abgeleitete Operatoren:

$$
\begin{aligned}
ff &= \neg tt \\
\Phi_1 \vee \Phi_2 &= \neg(\neg\Phi_1 \wedge \neg\Phi_2) \\
\langle\alpha\rangle\Phi &= \neg[\alpha](\neg\Phi) \\
\overline{\langle\alpha\rangle}\Phi &= \neg\overline{[\alpha]}(\neg\Phi) \\
\mu X.\,\Phi &= \nu X.\,\neg(\Phi[\neg X/X]) \\
\Phi \succ \Psi &= \neg\Phi \vee \Psi
\end{aligned}
$$

...informelle Interpretation der (existentiell quantifizierten) modalen Operatoren:

- $[\![\langle\alpha\rangle \Phi]\!]\, e$ ($[\![\overline{\langle\alpha\rangle} \Phi]\!]\, e$): Die Menge aller Knoten n, für die gilt: Ausgewertet in Umgebung e gibt es einen α-Nachfolger (α-Vorgänger) von n, für den Eigenschaft ϕ gilt.

Modaler μ-Kalkül: Abgeleitete Operatoren (2)

Höher-abstrakte abgeleitete Operatoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{AG}\ \Phi &= \nu X.(\Phi \wedge [.]X) \\ \Phi\ \mathbf{U}\ \Psi &= \nu X.(\Psi \vee (\Phi \wedge [.]X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{AG}}\ \Phi &= \nu X.(\Phi \wedge \overline{[.]}X) \\ \Phi\ \overline{\mathbf{U}}\ \Psi &= \nu X.(\Psi \vee (\Phi \wedge \overline{[.]}X) \end{aligned}$$

Modaler μ-Kalkül: Informelle Interpretation

...der höher-abstrakten abeleiteten modalen Operatoren:

- **AG** Φ: Eigenschaft ϕ gilt in der Zukunft immer und überall (engl. always generally (forward)), d.h. jeder von einem Knoten (einschließlich des Knotens selbst) vorwärts erreichbare Knoten erfüllt ϕ.
- $\overline{\textbf{AG}}$ Φ: Eigenschaft ϕ hat in der Vergangenheit immer und überall gegolten (engl. always generally (backward)), d.h. jeder von einem Knoten (einschließlich des Knotens selbst) rückwärts erreichbare Knoten erfüllt ϕ.
- Φ **U** Ψ: Φ gilt vorwärts bis Ψ eintritt (engl. until (forward)).
- Φ $\overline{\textbf{U}}$ Ψ: Φ gilt rückwärts bis Ψ eintritt (engl. until (backward)).

Modaler μ-Kalkül: Zwei Ausprägungen

...des bis-Operators als sog.:

- starkes bis (engl. strong until): Φ gilt bis schließlich (engl. eventually) (d.h. in jedem Fall) Ψ eintritt.
- schwaches bis (engl. weak until): Φ gilt bis Ψ eintritt (möglicherweise nie; in diesem Fall gilt Φ für alle Zeit).

Übungsaufgabe

1. Sind die Operatoren **U** und $\overline{\mathbf{U}}$ vorstehend im Sinne eines starken oder schwachen bis definiert?
2. Wie müssen die Semantikdefinitionen von **U** und $\overline{\mathbf{U}}$ geändert werden, um bis-Operatoren im jeweils anderen Sinn zu erhalten?

Kapitel 16.4

Modellprüfung und DFA: Eine Analogie

Analogie Modellprüfung – Datenflussanalyse

Datenflussanalyse (als Abbildung verstanden):

DFA-Algorithmus für Eigenschaft ϕ :

Programm $\rightarrow$ Menge der ϕ erfüllenden Programmpunkte

Modellprüfung (als Abbildung verstanden):

Modellprüfer :

Formel $\times$ Modell $\rightarrow$ Menge der die Formel erfüllenden Zustände

Informell

...und holzschnittartig:

Ein DFA-Algorithmus für ϕ ist ein

- bezüglich ϕ partiell ausgewerteter (oder bezüglich ϕ spezialisierter) Modellprüfer!

Umgekehrt:

Ein Modellprüfer ist ein

- in einer Menge von Programmeigenschaften (d.h. ausdrückbar in der Formelsprache) parametrisierter (generischer) DFA-Algorithmus.

Anwendung: PREE für einen Term t

Sicherheit (Notwendigkeit der Berechnung):

$$NEC =_{df} (\neg(Mod \vee end))\ \mathbf{U}\ Used$$

Frühestheit (Wert kann nicht früher bereitgestellt werden):

$$EAR =_{df} start \vee \neg(\ \overline{[.]}((\neg(Mod \vee start))\ \overline{\mathbf{U}}\ (NEC \wedge \neg Mod))\ )$$

Berechnungspunkte: $OCP =_{df} EAR \wedge NEC$

PREE-Optimierungstransformation OT:

1. Deklariere eine frische Hilfsvariable h_t für t.
2. Initialisiere h_t an allen Programmpunkten in OCP mit $h_t := t$.
3. Ersetze alle Vorkommen von t im Programm durch h_t.

Korrektheit und Optimalität

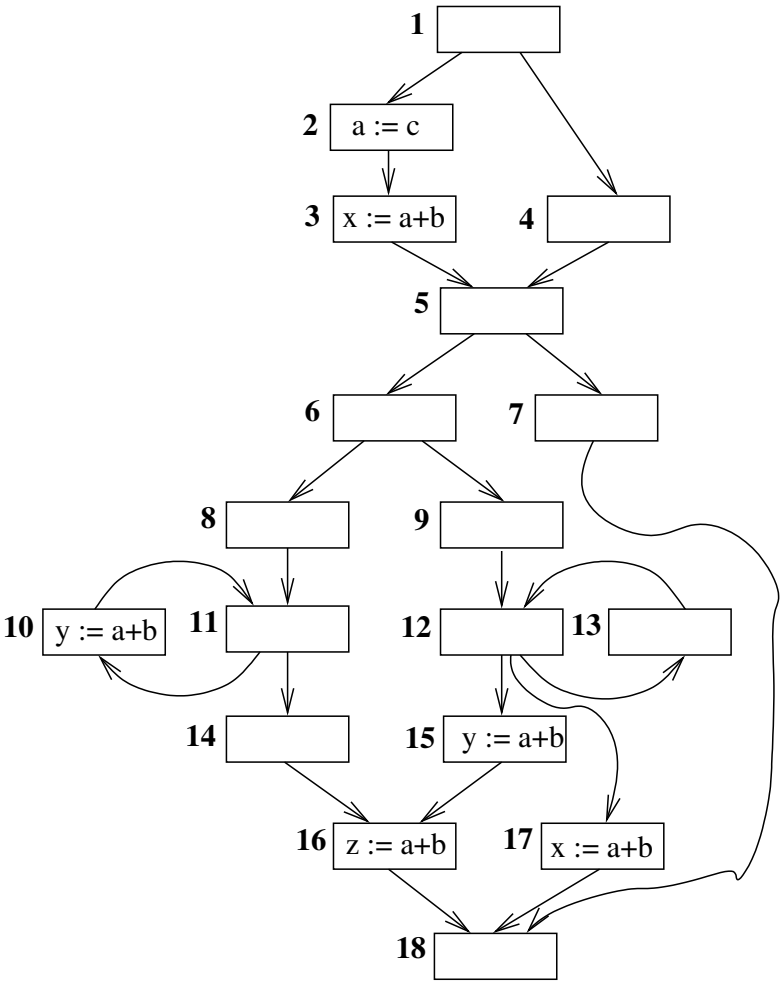
Theorem 16.4.1 (Korrektheit und Optimalität)

OT ist korrekt (d.h. semantikerhaltend) und optimal (d.h. mindestens so gut wie jede andere korrekte Platzierung der Berechnungen von t).

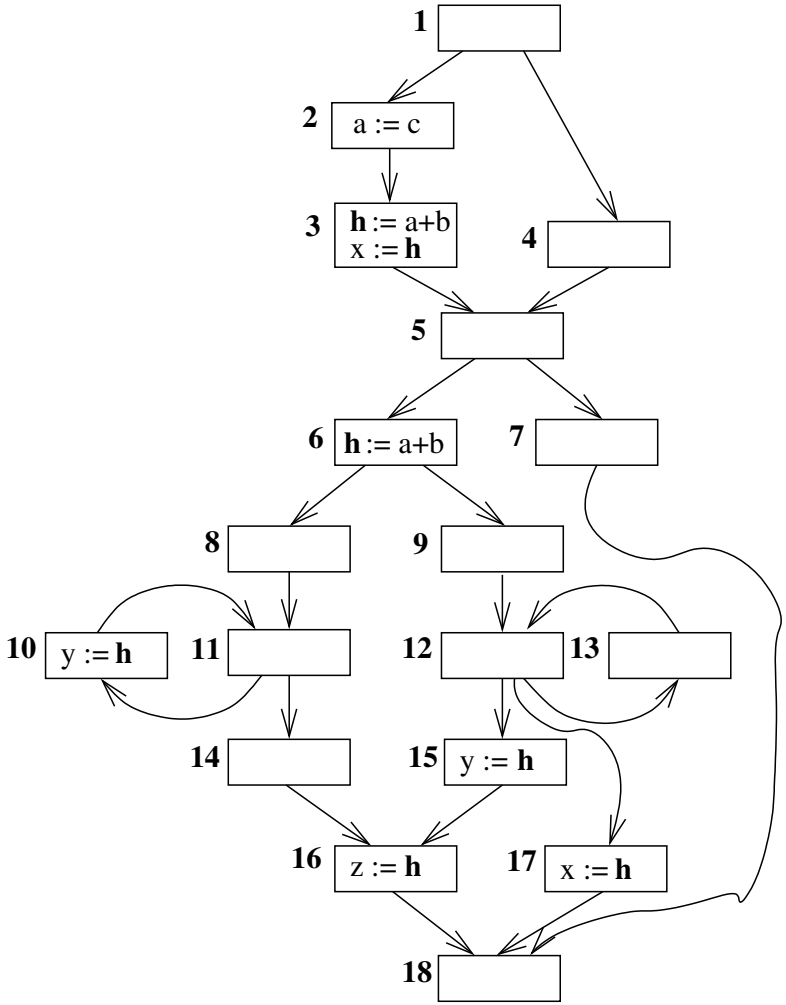
Beachte: OT entspricht der 'busy code motion'-Transformation für die Elimination partiell redundanter Berechnungen (für Details s. LVA 185.A04 Optimierende Compiler, Kapitel 7; auch zur formalen Definition von 'korrekt' und 'optimal').

Beispiel: Anwendung von OT

Ausgangsprogramm



OT-optimiertes Programm



Bem.: OT nimmt kanten-, nicht knotenbenannte Graphen an.

Kapitel 16.5

Zusammenfassung

Zusammenfassung (1)

...die vorgestellte Charakterisierung des Zusammenhangs von DFA und Modellprüfung und die PREE-Anwendung geht zurück auf:

- Bernhard Steffen. Data Flow Analysis as Model Checking. In Proceedings of the International Conference on Theoretical Aspects of Computer Software (TACS'91), Springer-V., LNCS 526, 346-365, 1991.
- Bernhard Steffen. Generating Data Flow Analysis Algorithms from Modal Specifications. International Journal on Science of Computer Programming 21:115-139, 1993.

Zusammenfassung (2)

...ist aufgegriffen worden von:

- David A. Schmidt. Data Flow is Model Checking of Abstract Interpretations. In Conference Record of the 25th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'98), 38-48, 1998.

...und hat in weiterer Folge geführt zu:

- David A. Schmidt, Bernhard Steffen. Program Analysis *as* Model Checking of Abstract Interpretations. In Proceedings of the 5th Static Analysis Symposium (SAS'98), Springer-V., LNCS 1503, 351-380, 1998.

Kapitel 16.6

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (1)


Béatrice Bérard, Michel Bidoit, Alain Finkel, François Laroussinie, Antoine Peit, Laure Petrucci, Philippe Schnoebelen with Pierre McKenzie. *Systems and Software Verification: Model-Checking Techniques and Tools*. Springer-V., 2001.


Francesco Buccafurri, Thomas Eiter, Georg Gottlob, Nicola Leone. *Enhancing Model Checking in Verification by AI Techniques*. Artificial Intelligence 112(1-2):57-104, 1999.


Edmund M. Clarke. *The Birth of Model Checking*. In *25 Years of Model Checking*. Orna Grumberg, Helmut Veith (Hrsg.), Springer-V., LNCS 5000, 1-26, 2008.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (2)


Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, Doron Peled. *Model Checking*. MIT Press, 2001.


Edmund M. Clarke, H. Schlingloff. *Model Checking*. In Handbook of Automated Reasoning, John Alan Robinson, Andrei Voronkov (Hrsg.), Vol. II, Elsevier, 1635-1790, 2000.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Temporal Abstract Interpretation*. In Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000), 12-25, 2000.


E. Allen Emerson. *Temporal and Modal Logic*. In Handbook of Theoretical Computer Science, Jan van Leeuwen (Hrsg.), Elsevier, 995-1072, 1990.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (3)

- Orna Grumberg, Helmut Veith (Hrsg.). *25 Years of Model Checking: History, Achievements, Perspectives*. Springer-V., LNCS 5000, 2008.
- George E. Hughes, Max J. Cresswell. *An Introduction to Modal Logic*. Methuan, 1968.
- George E. Hughes, Max J. Cresswell. *A Companion to Modal Logic*. Methuan, 1986.
- George E. Hughes, Max J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (4)


Fred Kröger, Stephan Merz. *Temporal Logic and State Systems*. Springer-V., 2008. (Chapter 3, Extensions of Linear Time Logic; Chapter 5, First-Order Linear Time Logic; Chapter 10, Other Temporal Logics; Chapter 11, System Verification by Model Checking)


Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis: An Integrated, Hands-On Approach*. Springer-V., 2009.


Robert Lover. *Elementary Logic for Software Development*. Springer-V., 2008. (Chapter 20.2.2, Temporal, Modal, and Dynamic Logics)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (5)


Markus Müller-Olm, David A. Schmidt, Bernhard Steffen. *Model-Checking: A Tutorial Introduction*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 330-354, 1999.


Doron A. Peled. *Software Reliability Methods*. Springer-V., 2001.


Dirk Richter. *Programmanalysen zur Verbesserung der Softwaremodellprüfung*. Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, Deutschland, 2012.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (6)


David A. Schmidt. *Data Flow Analysis is Model Checking of Abstract Interpretations*. In Conference Record of the 25th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'98), 38-48, 1998.


David A. Schmidt, Bernhard Steffen. *Program Analysis as Model Checking of Abstract Interpretations*. In Proceedings of the 5th Static Analysis Symposium (SAS'98), Springer-V., LNCS 1503, 351-380, 1998.


Bernhard Steffen. *Data Flow Analysis as Model Checking*. In Proceedings of the International Conference on Theoretical Aspects of Computer Software (TACS'91), Springer-V., LNCS 526, 346-365, 1991.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 16 (7)


Bernhard Steffen. *Generating Data Flow Analysis Algorithms from Modal Specifications*. International Journal on Science of Computer Programming 21:115-139, 1993.


Bernhard Steffen. *Property-Oriented Expansion*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 22-41, 1996.

Kapitel 17

Modellprüfung und Abstrakte Interpretation

Kapitel 17.1

Eine Symbiose

Zustandsexplosionsproblem

...zentrale Herausforderung für Modellprüfung in praktischen Anwendungen:

- Bändigung des Zustandsexplosionsproblems.

Beachte: Die Zahl der Zustände im Zustandsraum wächst

- exponentiell in der Zahl paralleler/nebenläufiger Komponenten.
- exponentiell in der Zahl von Fallunterscheidungen schleifenfreier (!) sequentieller Programme.

Vielfältige Ansätze

...zur Zähmung des Zustandsexplosionsproblems:

- Reduktionstechniken basierend auf Prozessäquivalenzen, z.B. Bouajjani et al., 1990; Graf et al., 1996.
- Symbolische Modellprüfungstechniken, z.B. McMillan, 1993.
- On-the-fly Techniken, z.B. Jard et al., 1992.
- Lokale Modellprüfungstechniken, z.B. Stirling et al., 1991.
- Partielle Ordnungs-Techniken, z.B. Godefroid, 1996; Peled, 1993; Valmari, 1992.
- Kompositionelle Techniken, Clarke et al., 1989; Santone, 2002.
- Abstraktions-Techniken, Barbuti et al., 1999; Clarke et al., 1994.
- ...

In unserem Zusammenhang

...besonders interessant:

- Dirk Richter. Programmanalysen zur Verbesserung der Softwaremodellprüfung. Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, Deutschland, 2012.

zur Verknüpfung und Verzahnung von Programmanalyse und Modellprüfung, speziell durch Vorschaltung

- DFA-basierter Optimierungen zur Modellverkleinerung

und damit zur

- Effizienzverbesserung anschließender Modellprüfungen.

Kapitel 17.2

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (1)


Roberto Barbuti, Nicoletta De Francesco, Antonella Santone, Gigliola Vaglini. *Selective Mu-Calculus and Formula-based Equivalence of Transition Systems*. Journal of Computer and System Sciences 59(3):537-556, 1999.


Ahmed Bouajjani, Jean-Claude Fernandez, Nicolas Halbwachs. *Minimal Model Generation*. In Proceedings of the 2nd International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'90), Springer-V., LNCS 531, 197-203, 1990.


J.-H. Chow, W. L. Harrison. *State Space Reduction in Abstract Interpretation of Parallel Programs*. In Proceedings of the International Conference on Computer Languages (ICCL'94), 277-288, 1994.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (2)


Edmund M. Clarke, Thomas A. Henzinger, Helmut Veith, Roderick Bloem (Hrsg.). *Handbook of Model Checking*. Springer-V., 2018.


Edmund M. Clarke, David E. Long, Kenneth L. MacMillan. *Compositional Model Checking*. In Proceedings of the 4th Annual Symposium on Logic in Computer Science (LICS'89), IEEE Computer Society, 353-362, 1989.


Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, David E. Long. *Model Checking and Abstraction*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 16(5):1512-1542, 1994.


Edmund M. Clarke, Qinsi Wang: 2^5 *Years of Model Checking*. Ershov Memorial Conference 2014, 26-40, 2014.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (3)


Patrice Godefroid. *Between Testing and Verification: Dynamic Software Model Checking*. Dependable Software Systems Engineering 2016, NATO Science for Peace and Security Series - D: Information and Communication Security 45, IOS Press, 99-116, 2016.


Patrice Godefroid (Hrsg). *Partial-Order Methods for the Verification of Concurrent Systems – An Approach to the State-Explosion Problem*. Springer-V., LNCS 1032, 1996.


Patrice Godefroid, Koushik Sen. *Combining Model Checking and Testing*. In *Handbook of Model Checking*, Edmund M. Clarke, Thomas A. Henzinger, Helmut Veith, Roderick Bloem (Hrsg.), 613-649, 2018.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (4)


Susanne Graf, Bernhard Steffen, Gerald Lüttgen. *Compositional Minimization of Finite State Systems using Interface Specifications*. Formal Aspects of Computing 8(5):607-616, 1996.


Claude Jard, Thierry Jéron. *Bounded-memory Algorithms for Verification On-the-fly*. In Proceedings of the 3rd International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'91), Springer-V., LNCS 575, 192-202, 1992.


Kenneth L. MacMillan. *Symbolic Model Checking*. Kluwer, 1993.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (5)


Doron Peled. *All from One, One for All: On Model Checking Using Representatives*. In Proceedings of the 5th International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'93), Springer-V., LNCS 697, 409-423, 1993.


Dirk Richter. *Programmanalysen zur Verbesserung der Softwaremodellprüfung*. Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, Deutschland, 2012.


Antonella Santone. *Automatic Verification of Concurrent Systems Using a Formula-based Compositional Approach*. Acta Informatica 38(8), 531-564, 2002.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 17 (6)


Colin Stirling, David Walker. *Local Model Checking in the Modal Mu-Calculus*. Theoretical Computer Science 89(1):161-177, 1991.


Antti Valmari. *A Stubborn Attack on State Explosion*. Formal Methods in System Design 1(4):297-322, 1992.

Teil VI

Abschluss und Ausblick

Kapitel 18

Resümee, Perspektiven

Kapitel 18.1

Rückschau, Vorschau

Analyse und Verifikation (1)

...'geschafft': Ausdrucksstarke, wohlfundierte, in Werkzeuge umgesetzte, vielfach erprobte, bewährte und etablierte

- Theorie(n) für Analyse und Verifikation

mit einer Vielzahl von Ausprägungen, darunter:

- Axiomatische Verifikation
- Datenflussanalyse
- Abstrakte Interpretation
- Modellprüfung
- Theorembeweiser
- Symbolische Analyse
- Konkolische Analyse
- ...

Analyse und Verifikation (2)

...und umfangreichen und vielfältigen Erfahrungsberichten, z.B.:

- Al Bessey, Ken Block, Ben Chelf, Andy Chou, Bryan Fulton, Seth Hallem, Charles Henri-Gros, Asya Kamsky, Scott McPeak, Dawson Engler. A Few Billion Lines of Code Later: Using Static Analysis to Find Bugs in the Real World. Communications of the ACM 53(2):66-75, 2010.
- Cristian Cadar, Koushik Sen. Symbolic Execution for Software Testing: Three Decades Later. Communications of the ACM 56(2):82-90, 2013.
- Caitlin Sadowski, Edward Aftandilian, Alex Eagle, Liam Miller-Cushon, Ciera Jaspan. Lessons from Building Static Analysis Tools at Google. Communications of the ACM 61(4):58-66, 2018.

Transformationen

...wünschenswert: Vergleichbar reiche, fundierte, praktikable

- Theorie(n) für Transformationen

im Hinblick auf

- Korrektheit, Vollständigkeit, Wirksamkeit, Optimalität

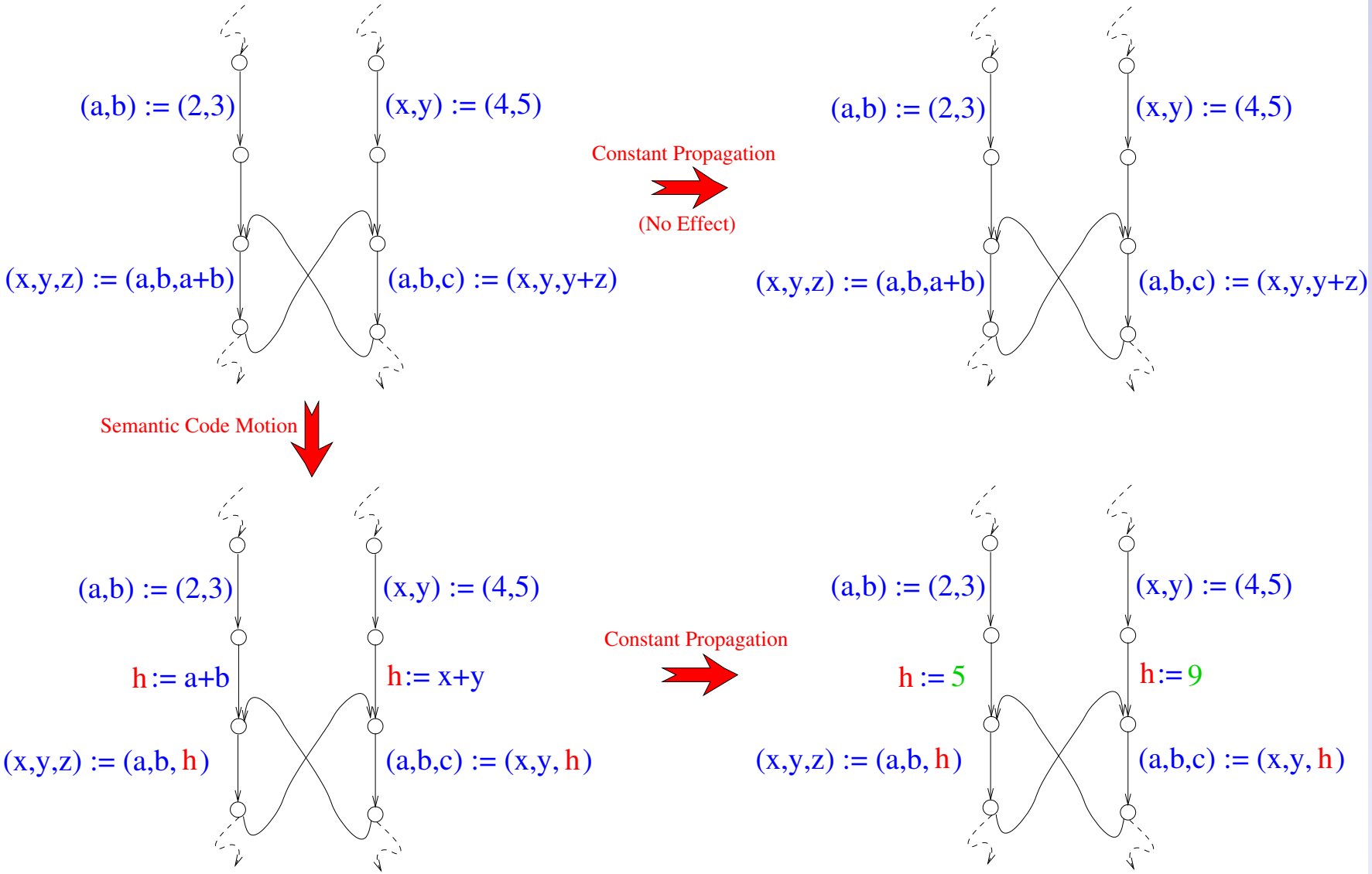
von Transformationen einschließlich Theorien und Techniken zur Evaluation mit Anwendungen insbesondere im

- Übersetzerbau (Optimierung, Parallelisierung, Portabilität, Mehrfachziele (Performanz, Speicher, Energie), Sicherheit, Schutz, Privatsphäre,...)
- Software-Technik (Modellbasierte Entwicklung und Code-Erzeugung, Refaktorisierung,...)

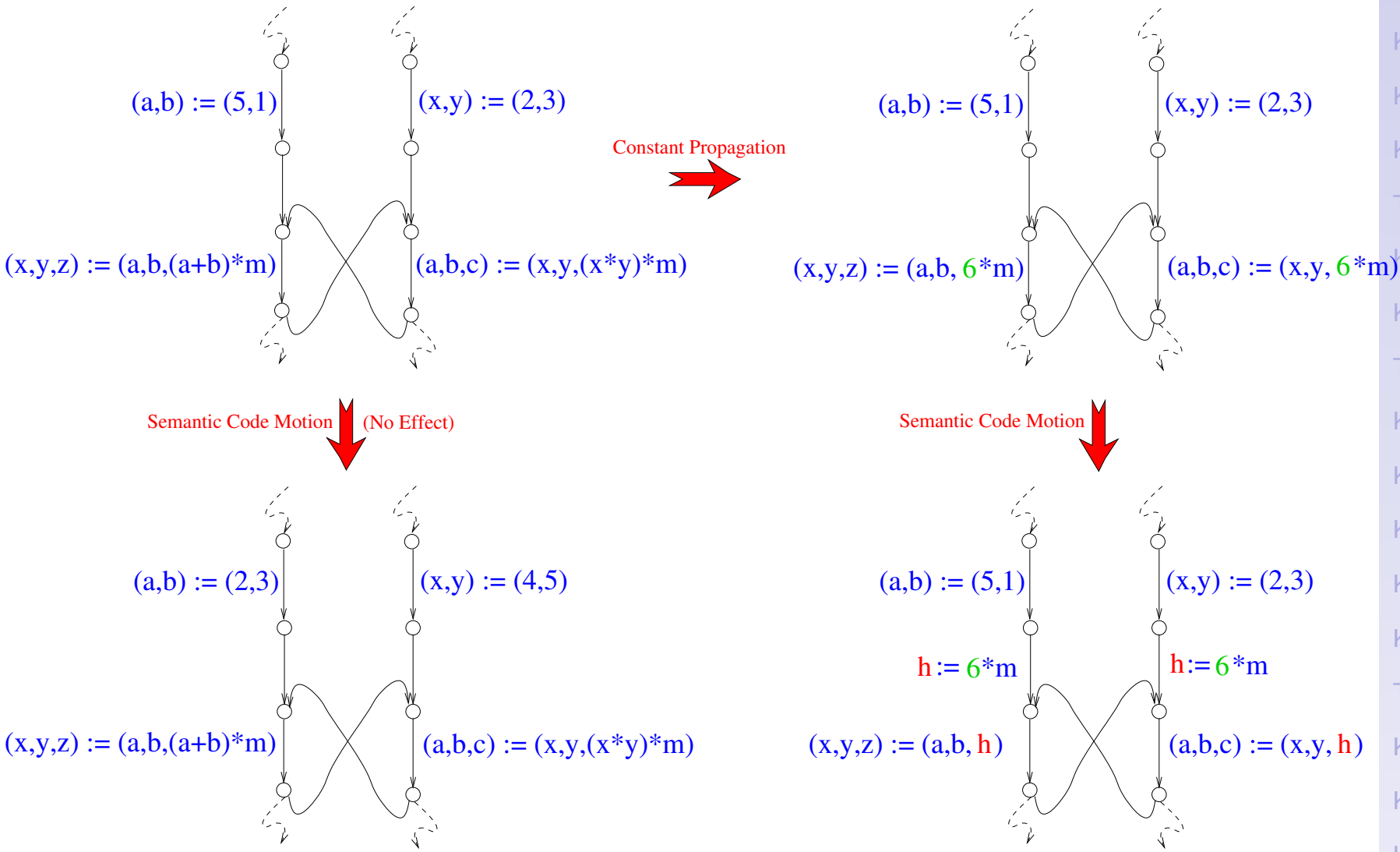
...und darüber hinaus.

Illustriert anhand v. Programmoptimierung (1)

...am Beispiel des Zusammenspiels von Optimierungen:

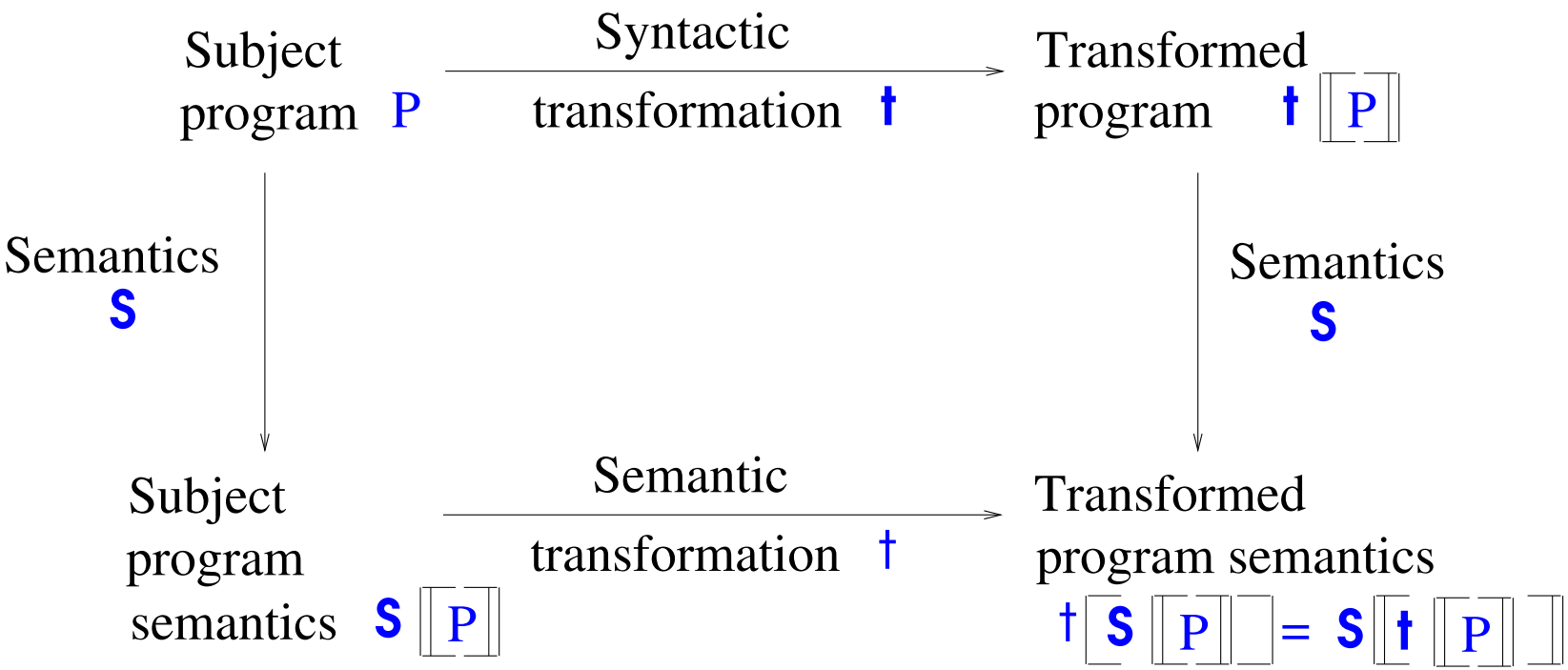


Illustriert anhand v. Programmoptimierung (2)



Analyse, Verifikation und Transformation

...bewiesen (beweisbar) korrekt und vollständig/optimal in einem einheitlichen Rahmen:



(Patrick und Radhia Cousot, POPL 2002)

Wichtig für verschiedenste Gebiete (1)

...und Felder im Bereich und Umfeld von Hard- und Software–Entwicklung, -Analyse, -Verifikation und -Anwendung.

Entwicklungsfelder

- Übersetzerbau
  - Optimierung (Performanz, Speicher, Energie, Parallelität, Portabilität,...)
  - Verifikation (Verifizierte, verifizierende Übersetzer)
- Software-Technik (dito Hardware-Technik)
  - Spezifikation, Generierung, Konfigurierung, Spezialisierung (Kundenanpassung), Verstehen (Refaktorisierung, Re-Entwurf, Rückentwurf, Dokumentation,...), Analyse, Validierung, Verifikation, Zertifizierung,...

  ...für Prozesse und Prozesskonstrukte
  - Besonders kritisch: System- und Infrastruktur-Software (Betriebssysteme, Übersetzer, Laufzeitsysteme, Dateisysteme, Browser, Kommunikationsdienste,...)

Wichtig für verschiedenste Gebiete (1)

Anwendungsfelder

- Künstliche Intelligenz, Datenförderung und -ausbeutung, autonome Systeme, selbstorganisierende Systeme, sicherheitskritische (Echtzeit-) Systeme,...

Querschnittsfelder

- Sicherheit, Schutz, Privatsphäre, gesetzliche Vorgaben (DSGVO, finanz-, wirtschafts-, steuerrechtl. Vorgaben),...
- ...
- Grüne Informationstechnologie

All dies

...auf

- Programm-Ebene im Kleinen, System-Ebene im Großen
  - Systeme von Systemen
  - Hard- und Software-Systeme von Systemen
    - Verteilt (Service-orientiert, wolkig, mehrkernig, echtzeitig,...)
    - Eingebettet
    - Cyberphysikalisch
    - ...
- Spezifikations-, Modellierungs-, Programmier-, Zwischensprach- und Binärcode-Ebene.
- Statisch und dynamisch.

Zielführend und unverzichtbar

...fundierte

- formale (aber auch pragmatische) Methoden

wirksam unterstützt durch

- vollautomatische
  - Knopfdruckanalyse, -verifikation und -transformation
- halbautomatische
  - Interaktive, benutzergeleitete, systemgestützte, -unterstützte Analyse, Verifikation und Transformation
- hochskalierende

'Denk'-Werkzeuge auch zur

- Orchestrierung u. Ordnung von Zusammenspiel/-wirkung

über Methoden- und Aufgabengrenzen hinweg (z.B. abstrakte Interpretation, axiomatische Verifikation, Modellprüfung, Theorembeweiser, Transformatoren,...)

Wichtige Konferenzen und Zeitschriften (1)

- Annual International Conference on Verification, Model-Checking, Abstract Interpretation (VMCAI) Series, Springer-V., LNCS series, seit 2000.
- Annual International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS), Springer-V., LNCS series, seit 1995.
- Annual International Conference on Computer-Aided Verification (CAV) Series, Springer-V., LNCS series, since 1989.
- Annual International Conference on Software Testing, Verification and Validation (ICST) Series, IEEE, seit 2008.

Wichtige Konferenzen und Zeitschriften (2)

- Annual International Symposium on Formal Methods (FM) Series, Springer-V., LNCS series, seit 1995.
- Biennial International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods, Verification, and Validation (ISoLA) Series, Springer-V., LNCS series, seit 2004.
- International Journal on Software Tools for Technology Transfer (STTT), Springer-V, seit 1999.

...und viele mehr.

Chapter 18.2

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (1)

Uwe Aßmann. *How to Uniformly Specify Program Analysis and Transformation*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 121-135, 1996.

Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, Jèrôme Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Minè, Xavier Rival. *Static Analysis and Verification of Aerospace Software by Abstract Interpretation*. In Proceedings AIAA Infotech@Aerospace (AIAA I@A 2010), AIAA-2010-3385, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1-38, April 2010.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (2)


Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, Jèrôme Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Minè, Xavier Rival. *Static Analysis by Abstract Interpretation of Embedded Critical Software*. ACM Software Engineering Notes 36(1):1-8, 2011.


Al Bessey, Ken Block, Ben Chelf, Andy Chou, Bryan Fulton, Seth Hallem, Charles Henri-Gros, Asya Kamsky, Scott McPeak, Dawson Engler. *A Few Billion Lines of Code Later: Using Static Analysis to Find Bugs in the Real World*. Communications of the ACM 53(2):66-75, 2010.


Cristian Cadar, Koushik Sen. *Symbolic Execution for Software Testing: Three Decades Later*. Communications of the ACM 56(2):82-90, 2013.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (3)

Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Transformation Frameworks by Abstract Interpretation*. In Conference Record of the 29th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2002), 178-190, 2002.

Nevin Heintze, Joxan Jaffar, Răzvan Voicu. *A Framework for Combining Analysis and Verification*. In Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000), 26-39, 2000.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (4)


Flemming Nielson. *Program Transformations in a Denotational Setting*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 7:359-379, 1985.


Caitlin Sadowski, Edward Aftandilian, Alex Eagle, Liam Miller-Cushon, Ciera Jaspan. *Lessons from Building Static Analysis Tools at Google*. Communications of the ACM 61(4):58-66, 2018.


Ashish Tiwari, Sumit Gulwani. *Static Program Analysis Using Theorem Proving*. In Proceedings of the 21st Conference on Automated Deduction (CADE-21), LNCS 4603, Springer-V., 147-166, 2007.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Kapitel 18 (5)

Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008. (Kapitel 105, Software Testing; Kapitel 106, Formal Methods; Kapitel 107, Verification and Validation)

Daniel Weise. *Static Analysis of Mega-Programs (Invited Paper)*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 300-302, 1999.

Literaturverzeichnis

Literaturhinweise, Leseempfehlungen

.....zum vertiefenden und weiterführenden Selbststudium.

- I Lehrbücher
- II Handbücher
- III Sammelbände
- IV Dissertationen
- V Artikel
- VI Web-Ressourcen

I Lehrbücher (1)


Alfred V. Aho, Monica S. Lam, Ravi Sethi, Jeffrey D. Ullman. *Compilers: Principles, Techniques, & Tools*. 2. Auflage, Addison-Wesley, 2007.


Randy Allen, Ken Kennedy. *Optimizing Compilers for Modern Architectures*. Morgan Kaufman Publishers, 2002.


Krzysztof R. Apt, Ernst-Rüdiger Olderog. *Programmverifikation – Sequentielle, parallele und verteilte Programme*. Springer-V., 1994.


Krzysztof R. Apt, Frank S. de Boer, Ernst-Rüdiger Olderog. *Verification of Sequential and Concurrent Programs*. 3. Auflage, Springer-V., 2009.


André Arnold, Irène Guessarian. *Mathematics for Computer Science*. Prentice Hall, 1996.

I Lehrbücher (2)


Mordechai Ben-Ari. *Mathematical Logic for Computer Science*. 2. Auflage, Springer-V., 2001.


Béatrice Bérard, Michel Bidoit, Alain Finkel, François Laroussinie, Antoine Peit, Laure Petrucci, Philippe Schnoebelen with Pierre McKenzie. *Systems and Software Verification: Model-Checking Techniques and Tools*. Springer-V., 2001.


Rudolf Berghammer. *Ordnungen, Verbände und Relationen mit Anwendungen*. Springer-V., 2012.


Rudolf Berghammer. *Ordnungen und Verbände: Grundlagen, Vorgehensweisen und Anwendungen*. Springer-V., 2013.


Garret Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, 3. Auflage, 1967.

I Lehrbücher (3)


Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, Doron Peled. *Model Checking*. MIT Press, 2001.


Keith D. Cooper, Linda Torczon. *Engineering a Compiler*. Morgan Kaufman Publishers, 2004.


Peter Crawley, Robert P. Dilworth. *Algebraic Theory of Lattices*. Prentice Hall, 1973.


Jaco W. De Backer. *Mathematical Theory of Program Correctness*. Prentice-Hall, 1980.


Brian A. Davey, Hilary A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 2. Auflage, 2002.


Martin Davis. *Computability and Unsolvability*. Dover Publications, 1982.

I Lehrbücher (4)


Gilles Dowek. *Principles of Programming Languages*. Springer-V, 2009.


Marcel Erné. *Einführung in die Ordnungstheorie*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, 1982.


Helmuth Gericke. *Theorie der Verbände*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, 1967.


Michael J.C. Gordon. *The Denotational Description of Programming Languages*. Springer-V., 1979.


George Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkhäuser, 2nd edition, 1998.


George Grätzer. *Lattice Theory: Foundation*. Birkhäuser, 2011.

I Lehrbücher (5)


Paul R. Halmos. *Naive Set Theory*. Springer-V., Wiederauflage, 2001.


Matthew S. Hecht. *Flow Analysis of Computer Programs*. Elsevier, North-Holland, 1977.


Hans Hermes. *Einführung in die Verbandstheorie*. Springer-V., 2. Auflage, 1967.


George E. Hughes, Max J. Cresswell. *An Introduction to Modal Logic*. Methuan, 1968.


George E. Hughes, Max J. Cresswell. *A Companion to Modal Logic*. Methuan, 1986.

I Lehrbücher (6)


George E. Hughes, Max J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.


Richard Johnsonbaugh. *Discrete Mathematics*. Pearson, 7. Auflage, 2009.


Uday P. Khedker, Amitabha Sanyal, Bageshri Karkare. *Data Flow Analysis: Theory and Practice*. CRC Press, 2009.


Stephen C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North Holland, 1952. (Wiederauflage, North Holland, 1980)

I Lehrbücher (7)


Fred Kröger, Stephan Merz. *Temporal Logic and State Systems*. Springer-V., 2008.


Janusz Laski, William Stanley. *Software Verification and Analysis*. Springer-V., 2009.


Seymour Lipschutz. *Set Theory and Related Topics*. McGraw Hill Schaum's Outline Series, 2. Auflage, 1998.


Jacques Loeckx, Kurt Sieber. *The Foundations of Program Verification*. Wiley, 1984.


Robert Lover. *Elementary Logic for Software Development*. Springer-V., 2008.

I Lehrbücher (8)


Kenneth L. MacMillan. *Symbolic Model Checking*. Kluwer, 1993.


David Makinson. *Sets, Logic and Maths for Computing*. Springer-V., 2008.


Robert Morgan. *Building an Optimizing Compiler*. Digital Press, 1998.


Stephen S. Muchnick. *Advanced Compiler Design Implementation*. Morgan Kaufman Publishers, 1997.


Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992.


Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007.

I Lehrbücher (9)


Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson, Chris Hankin. *Principles of Program Analysis*. Springer-V., 2. Auflage, 2005.


Doron A. Peled. *Software Reliability Methods*. Springer-V., 2001.


Steven Roman. *Lattices and Ordered Sets*. Springer-V., 2008.


Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik: Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014.


Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018.

I Lehrbücher (10)


Joseph E. Stoy. *Denotational Semantics: The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory*. MIT Press, 1981.


Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008.


Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages: An Introduction*. MIT Press, 1993.

II Handbücher


Edmund M. Clarke, Thomas A. Henzinger, Helmut Veith, Roderick Bloem (Hrsg.). *Handbook of Model Checking*. Springer-V., 2018.


Jan van Leeuwen (Hrsg.). *Handbook of Theoretical Computer Science*. Elsevier Science Publishers B. V., 1990.


Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.). *Informatik-Handbuch*. 4. Auflage, Carl Hanser Verlag, 2006.


John Alan Robinson, Andrei Voronkov (Hrsg.). *Handbook of Automated Reasoning*. Vol. II, Elsevier, 2000.


Samson Abramsky, Dov M. Gabbay, Thomas S.E. Maibaum (Hrsg.). *Handbook of Logic in Computer Science*. Volume 4, Oxford University Press, 1995.

III Sammelbände (1)


Samson Abramsky, Chris Hankin (Hrsg.). *Abstract Interpretation of Declarative Languages*. Prentice Hall, 1987.


Roland Backhouse, Roy Crole, Jeremy R. Gibbons (Hrsg.). *Algebraic and Coalgebraic Methods in the Mathematics of Program Construction*. International Summer School and Workshop, Oxford, UK, April 10-14, 2000, Revised Lectures, Springer-V., LNCS 2297, 2002.


Bernhard Beckert, Reiner Hähnle, Peter H. Schmitt (Hrsg.). *Verification of Object-Oriented Software: The KeY Approach*. LNCS 4334, Springer-V., 2007.


Patrice Godefroid (Hrsg). *Partial-Order Methods for the Verification of Concurrent Systems – An Approach to the State-Explosion Problem*. Springer-V., LNCS 1032, 1996.

III Sammelbände (2)


George Grätzer, Friedrich Wehrung (Hrsg.). *Lattice Theory: Special Topics and Applications, Vol. I*. Birkhäuser, 2014.


George Grätzer, Friedrich Wehrung (Hrsg.). *Lattice Theory: Special Topics and Applications, Vol. II*. Birkhäuser, 2016.


Orna Grumberg, Helmut Veith (Hrsg.). *25 Years of Model Checking: History, Achievements, Perspectives*. Springer-V., LNCS 5000, 2008.


Nachum Dershowitz (Hrsg.). *Verification: Theory and Practice*. Essays dedicated to Zohar Manna on the Occasion of His 64th Birthday. Springer-V., LNCS 2772, 243-268, 2003.

IV Dissertationen


Evelyn Duesterwald. *A Demand-driven Approach for Efficient Interprocedural Data-Flow Analysis*. PhD thesis, University of Pittsburgh, PA, USA, 1996.


Hanne Riis Nielson. *Hoare Logic's for Run-time Analysis of Programs*. PhD thesis, Edinburgh University, UK, 1984.


Dirk Richter. *Programmanalysen zur Verbesserung der Softwaremodellprüfung*. Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, Deutschland, 2012.

V Artikel (1)


Samson Abramsky, Chris Hankin. *An Introduction to Abstract Interpretation*. In 'Abstract Interpretation of Declarative Languages,' Samson Abramsky, Chris Hankin (Hrsg). Prentice Hall, 63-102, 1987.


Gagan Agrawal. *Demand-driven Construction of Call Graphs*. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 125-140, 2000.


Frances E. Allen, John A. Cocke. *A Program Data Flow Analysis Procedure*. Communications of the ACM 19(3):137-147, 1976.

V Artikel (2)


Bowen Alpern, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Detecting Equality of Variables in Programs*. In Conference Record of the 15th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'88), 1-11, 1988.


Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part 1*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 3(4):431-483, 1981.


Krzysztof R. Apt. *Ten Years of Hoare's Logic: A Survey – Part II: Nondeterminism*. Theoretical Computer Science 28(1-2):83-109, 1984.

V Artikel (3)


Uwe Aßmann. *How to Uniformly Specify Program Analysis and Transformation*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 121-135, 1996.


Philip Axer, Rolf Ernst, Heiko Falk, Alain Girault, Daniel Grund, Nan Guan, Bengt Jonsson, Peter Marwedel, Jan Reineke, Christine Rochange, Maurice Sebastian, Reinhard von Hanxleden, Reinhard Wilhelm, Wang Yi. *Building Timing Predictable Embedded Systems*. ACM Transactions on Embedded Computing Systems 13(4):82, 2014.


Wayne A. Babich, Mehdi Jazayeri. *The Method of Attributes for Data Flow Analysis: Part I - Exhaustive Analysis*. Acta Informatica 10(3):245-264, 1978.

V Artikel (4)


Wayne A. Babich, Mehdi Jazayeri. *The Method of Attributes for Data Flow Analysis: Part II - Demand Analysis*. Acta Informatica 10(3):265-272, 1978.


Clément Ballabriga, Hugues Cassé, Christine Rochange, Pascal Sainrat. *OTAWA: An Open Toolbox for Adaptive WCET Analysis*. In Proceedings SEUS 2010, Springer-V., 35-46, 2010.


Roberto Barbuti, Nicoletta De Francesco, Antonella Santone, Gigliola Vaglini. *Selective Mu-Calculus and Formula-based Equivalence of Transition Systems*. Journal of Computer and System Sciences 59(3):537-556, 1999.

V Artikel (5)

Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, Jèrôme Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Minè, Xavier Rival. *Static Analysis and Verification of Aerospace Software by Abstract Interpretation*. In Proceedings AIAA Infotech@Aerospace (AIAA I@A 2010), AIAA-2010-3385, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1-38, April 2010.

Julien Bertrane, Patrick Cousot, Radhia Cousot, Jèrôme Feret, Laurent Mauborgne, Antoine Minè, Xavier Rival. *Static Analysis by Abstract Interpretation of Embedded Critical Software*. ACM Software Engineering Notes 36(1):1-8, 2011.

V Artikel (6)

Al Bessey, Ken Block, Ben Chelf, Andy Chou, Bryan Fulton, Seth Hallem, Charles Henri-Gros, Asya Kamsky, Scott McPeak, Dawson Engler. *A Few Billion Lines of Code Later: Using Static Analysis to Find Bugs in the Real World*. Communications of the ACM 53(2):66-75, 2010.

Garret Birkhoff. *Applications of Lattice Algebra*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 30(2):115-122, 1934.

V Artikel (7)

Stephen M. Blackburn, Amer Diwan, Matthias Hauswirth, Peter F. Sweeny, José Nelson Amaral, Tim Brecht, Lubomír Bulej, Cliff Click, Lieven Eeckhout, Sebastian Fischmeister, Daniel Frampton, Laurie J. Hendren, Michael Hind, Antony L. Hosking, Richard E. Jones, Tomas Kalibera, Nathan Keynes, Nathaniel Nystrom, Andreas Zeller. *The Truth, The Whole Truth, and Nothing But the Truth: A Pragmatic Guide to Assessing Empirical Evaluations*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 38(4), Article 15:1-20, 2016.

V Artikel (8)


Ras Bodik, Rajiv Gupta. *Partial Dead Code Elimination using Slicing Transformations*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'97 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'97), ACM SIGPLAN Notices 32(6):159-170, 1997.


Ras Bodík, Rajiv Gupta, Vivek Sarkar. *ABCD: Eliminating Array Bounds Check on Demand*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'00), ACM SIGPLAN Notices 35(5):321-333, 2000.


Armelle Bonenfant, Hugues Cassé, Marianne De Michiel, Jens Knoop, Laura Kovács, Jakob Zwirchmayr. *FFX: A Portable WCET Annotation Language*. In Proceedings of the 20th International Conference on Real-Time and Network Systems (RTNS 2012), ACM, 91-100, 2012.

V Artikel (9)


Ahmed Bouajjani, Jean-Claude Fernandez, Nicolas Halbwachs. *Minimal Model Generation*. In Proceedings of the 2nd International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'90), Springer-V., LNCS 531, 197-203, 1990.


Nicolas Bourbaki. *Sur la théorème de Zorn*. Archiv der Mathematik 2:434-437, 1949/50.


Francesco Buccafurri, Thomas Eiter, Georg Gottlob, Nicola Leone. *Enhancing Model Checking in Verification by AI Techniques*. Artificial Intelligence 112(1-2):57-104, 1999.


Cristian Cadar, Koushik Sen. *Symbolic Execution for Software Testing: Three Decades Later*. Communications of the ACM 56(2):82-90, 2013.

V Artikel (10)


Larry Carter, Jeanne Ferrante, Clark Thomborson. *Folklore Confirmed: Reducible Flow Graphs are Exponentially Larger*. In Conference Record of the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 106-114, 2003.


Jyh-Herng Chow, William L. Harrison. *Compile Time Analysis of Parallel Programs that share Memory*. In Conference Record of the 19th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'92), 130-141, 1992.


Jyh-Herng Chow, William L. Harrison. *State Space Reduction in Abstract Interpretation of Parallel Programs*. In Proceedings of the International Conference on Computer Languages (ICCL'94), 277-288, 1994.

V Artikel (11)


Edmund M. Clarke. *Programming Language Constructs for which it is Impossible to Obtain Good Hoare Axiom Systems*. Journal of the ACM 26(1):129-147, 1979.


Edmund M. Clarke. *The Birth of Model Checking*. In *25 Years of Model Checking*. Orna Grumberg, Helmut Veith (Hrsg.), Springer-V., LNCS 5000, 1-26, 2008.


Edmund M. Clarke, Stephen M. German, Joseph Y. Halpern. *Effective Axiomatizations of Hoare Logics*. Journal of the ACM 30(1):612-636, 1983.


Edmund M. Clarke, Orna Grumberg, David E. Long. *Model Checking and Abstraction*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 16(5):1512-1542, 1994.

V Artikel (12)


Edmund M. Clarke, David E. Long, Kenneth L. MacMillan. *Compositional Model Checking*. In Proceedings of the 4th Annual Symposium on Logic in Computer Science (LICS'89), IEEE Computer Society, 353-362, 1989.


Edmund M. Clarke, H. Schlingloff. *Model Checking*. In *Handbook of Automated Reasoning*, John Alan Robinson, Andrei Voronkov (Hrsg.), Vol. II, Elsevier, 1635-1790, 2000.


Edmund M. Clarke, Qinsi Wang: 2^5 *Years of Model Checking*. Ershov Memorial Conference 2014, 26-40, 2014.


Ernie Cohen, Dexter Kozen. *A Note on the Complexity of Propositional Hoare Logic*. ACM Transactions on Computational Logic 1(1):171-174, 2000.

V Artikel (13)


Stephen A. Cook. *Soundness and Completeness of an Axiom System for Program Verification*. SIAM Journal on Computing 7(1):70-90, 1978.


Patrick Cousot. *Methods and Logics for Proving Programs*. In Handbook of Theoretical Computer Science, Jan van Leeuwen (Hrsg.), Elsevier Science Publishers B. V., Kapitel 15, 841-993, 1990.


Patrick Cousot. *Abstract Interpretation*. ACM Computing Surveys 28(2):324-328, 1996.


Patrick Cousot. *Refining Model-Checking by Abstract Interpretation*. Automated Software Engineering 6(1):69-95, 1999.

V Artikel (14)


Patrick Cousot. *Design of Syntactic Program Transformations by Abstract Interpretation of Semantic Transformations*. In Proceedings of the 17th International Conference on Logic Programming (ICLP 2001), Springer-V., LNCS 2237, 4-5, 2001.


Patrick Cousot. *The Verification Grand Challenge and Abstract Interpretation*. In Proceedings of Verified Software: Theories, Tools, Experiments (VSTTE 2005), Springer-V, LNCS 4171, 189-201, 2005.


Patrick Cousot. *Verification by Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 4th International Conference on Verification, Model-Checking, Abstract Interpretation (VMCAI 2003), Springer-V., LNCS 2575, 20-24, 2003.

V Artikel (15)


Patrick Cousot. *Verification by Abstract Interpretation*. In Verification: Theory and Practice, Essays dedicated to Zohar Manna on the Occasion of His 64th Birthday. Springer-V., LNCS 2772, 243-268, 2003.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Abstract Interpretation: A Unified Lattice Model for Static Analysis of Programs by Construction or Approximation of Fixpoints*. In Conference Record of the 4th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77), 238-252, 1977.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Constructive Versions of Tarski's Fixed Point Theorems*. Pacific Journal of Mathematics 82(1):43-57, 1979.

V Artikel (16)


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Analysis Frameworks*. In Conference Record of the 6th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'79), 269-282, 1979.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Invariance Proof Methods and Analysis Techniques for Parallel Programs*. In Automatic Program Construction Techniques, A. W. Biermann, G. Guiho, Y. Kodratoff (Hrsg.), Macmillan Publishing Company, Kapitel 12, 243-271, 1984.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Abstract Interpretation Frameworks*. Journal of Logic and Computation 2(4):511-547, 1992.

V Artikel (17)


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Temporal Abstract Interpretation*. In Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000), 12-25, 2000.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *Systematic Design of Program Transformation Frameworks by Abstract Interpretation*. In Conference Record of the 29th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2002), 178-190, 2002.


Patrick Cousot, Radhia Cousot. *A Gentle Introduction to Formal Verification of Computer Systems by Abstract Interpretation*. In Logics and Languages for Reliability and Security. NATO Science for Peace and Security - D; Information and Communication Security, Vol. 25, IOS Press, 2010. ISBN 978-1-60750–099-5.

V Artikel (18)


Patrick Cousot, Radhia Cousot, Laurent Mauborgne. *Theories, Solvers and Static Analysis by Abstract Interpretation*. Journal of the ACM 59(6), Artikel 31, 56 Seiten, 2012.


Patrick Cousot, Michael Monerau. *Probabilistic Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 21st Symposium on Programming (ESOP 2012), Springer-V., LNCS 7211, 169-193, 2012.


Ron Cytron, Jeanne Ferrante, Barry K. Rosen, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *An Efficient Method of Computing Static Single Assignment Form*. In Conference Record of the 16th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'89), 25-35, 1989.

V Artikel (19)


Ron Cytron, Jeanne Ferrante, Barry K. Rosen, Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Efficiently Computing Static Single Assignment Form and the Control Dependence Graph*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 13(4):451-490, 1991.


Marvin Damschen, Lars Bauer, Jörg Henkel. *Timing Analysis of Tasks on Runtime Reconfigurable Processors*. In IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems 25(1):294-307, 2017.


Anne C. Davis. *A Characterization of Complete Lattices*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):311-319, 1955.


Martin Davis. *Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable*. American Mathematical Monthly 80:33-269, 1973.

V Artikel (20)


Martin Davis, Yuri Matijasevič, Julia Robinson. *Hilbert's Tenth Problem. Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution*. In Proceedings of the Symposium on the Hilbert Problems (De Kalb, Illinois), May 1974, American Mathematical Society, Providence, R.I., 323-378, 1976.


Dhananjay M. Dhamdhere. *Register Assignment using Code Placement Techniques*. Journal of Computer Languages 13(2):75-93, 1988.

V Artikel (21)


Dhananjay M. Dhamdhere. *A usually linear Algorithm for Register Assignment using Edge Placement of Load and Store Instructions*. Journal of Computer Languages 15(2):83-94, 1990.


Dhananjay M. Dhamdhere. *Practical Adaptation of the Global Optimization Algorithm of Morel and Renvoise*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 13(2):291-294, 1991. Technical Correspondence.


Dhananjay M. Dhamdhere, Barry K. Rosen, F. Kenneth Zadeck. *How to Analyze Large Programs Efficiently and Informatively*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'92 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'92), ACM SIGPLAN Notices 27(7):212-223, 1992.

V Artikel (22)


Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *Demand-driven Computation of Interprocedural Data Flow*. In Conference Record of the 22nd ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'95), 37-48, 1995.


Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *A Demand-driven Analyzer for Data Flow Testing at the Integration Level*. In Proceedings of the IEEE Conference on Software Engineering (CoSE'96), 575-586, 1996.


Evelyn Duesterwald, Rajiv Gupta, Mary Lou Soffa. *A Practical Framework for Demand-driven Interprocedural Data Flow Analysis*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 19(6):992-1030, 1997.

V Artikel (23)


Matthew B. Dwyer, Lori A. Clarke. *Data Flow Analysis for Verifying Properties of Concurrent Programs*. In Proceedings of the 2nd ACM SIGSOFT Symposium on Foundations of Software Engineering (SFSE'94), Software Engineering Notes 19(5):62-75, 1994.


Matthew B. Dwyer, Lori A. Clarke, Jamieson M. Cobleigh, Gleb Naumovich. *Flow Analysis for Verifying Properties of Concurrent Software Systems*. ACM Transactions on Software Engineering Methodology 13(4):359-430, 2004.


Stephen A. Edwards, Edward A. Lee. *The Case for the Precision-timed (PRET) Machine*. In Proceedings of the 44th Design Automation Conference (DAC 2007), 264-265, 2007

V Artikel (24)


E. Allen Emerson. *Temporal and Modal Logic*. In *Handbook of Theoretical Computer Science*, Jan van Leeuwen (Hrsg.), Elsevier, 995-1072, 1990.


Christian Fecht, Helmut Seidl. *An Even Faster Solver for General Systems of Equations*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 189-204, 1996.


Christian Fecht, Helmut Seidl. *Propagating Differences: An Efficient New Fixpoint Algorithm for Distributive Constraint Systems*. In Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98), Springer-V., LNCS 1381, 90-104, 1998.

V Artikel (25)


Christian Fecht, Helmut Seidl. *A Faster Solver for General Systems of Equations*. Science of Computer Programming 35(2):137-161, 1999.


L. Feigen, D. Klappholz, R. Casazza, X. Xue. *The Revival Transformation*. In Conference Record of the 21st ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'94), 1994.


Jeanne Ferrante, Dirk Grunwald, Harini Srinivasan. *Compile-time Analysis and Optimization of Explicitly Parallel Programs*. Parallel Algorithms and Applications 12(1-3):21-56, 1997.

V Artikel (26)


Robert W. Floyd. *Assigning Meaning to Programs*. In Proceedings of Symposium on Applied Mathematics, Mathematical Aspects of Computer Science, American Mathematical Society, New York, 19:19-32, 1967.


Emily P. Friedman. *Relationships between Monadic Recursion Schemes and Deterministic Context-free Languages*. In Conference Record of the 15th Annual IEEE Symposium on Switching and Automata Theory (SWAT'74), 43-51, 1974.


Emily P. Friedman. *Equivalence Problems for Deterministic Context-free Languages and Monadic Recursion Schemes*. Journal of Computer and System Sciences 14(3):344-359, 1977.

V Artikel (27)


Stephen J. Garland, David C. Luckham. *Program Schemes, Recursion Schemes, and Formal Languages*. Journal of Computer and System Sciences 7(2):119-160, 1973.


Alfons Geser, Jens Knoop, Gerald Lüttgen, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Non-monotone Fixpoint Iterations to Resolve Second Order Effects*. In Proceedings of the 6th International Conference on Compiler Construction (CC'96), Springer-V., LNCS 1060, 106-120, 1996.


Seymour Ginsburg, Sheila Greibach. *Deterministic Context Free Languages*. Information and Control 9(6):620-648, 1966.

V Artikel (28)


Patrice Godefroid. *Between Testing and Verification: Dynamic Software Model Checking*. Dependable Software Systems Engineering 2016, NATO Science for Peace and Security Series - D: Information and Communication Security 45, IOS Press, 99-116, 2016.


Patrice Godefroid, Koushik Sen. *Combining Model Checking and Testing*. In *Handbook of Model Checking*, Edmund M. Clarke, Thomas A. Henzinger, Helmut Veith, Roderick Bloem (Hrsg.), 613-649.


Susanne Graf, Bernhard Steffen, Gerald Lüttgen. *Compositional Minimization of Finite State Systems using Interface Specifications*. Formal Aspects of Computing 8(5):607-616, 1996.

V Artikel (29)


Dirk Grunwald, Harini Srinivasan. *Data Flow Equations for Explicitely Parallel Programs*. In Proceedings of the 4th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPOPP'93), ACM SIGPLAN Notices 28(7):159-168, 1993.


Jan Gustafsson. *Usability Aspects of WCET Analysis*. In Proceedings of the 11th IEEE International Symposium on Object and Component-Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC 2008), 346-352, 2008.


Jan Gustafsson, Adam Betts, Andreas Ermedahl, Björn Lisper. *The Mälardalen WCET Benchmarks: Past, Present, and Future*. In Proceedings of the 10th International Workshop on Worst-Case Execution Time Analysis (WCET 2010), 136-146, 2010.

V Artikel (30)


Nevin Heintze, Joxan Jaffar, Răzvan Voicu. *A Framework for Combining Analysis and Verification*. In Conference Record of the 27th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2000), 26-39, 2000.


Charles A.R. Hoare. *An Axiomatic Basis for Computer Programming*. Communications of the ACM 12(10):576-580, 583, 1969.


Charles A.R. Hoare. *The Emperor's Old Clothes*. Communications of the ACM 24(2):75-83, 1981. DOI: 10.1145/358549.358561


Charles A.R. Hoare. *The Ideal of Program Correctness*. The Computer Journal 50(3):254-260, 2007.

V Artikel (31)


Charles A.R. Hoare. *Retrospective: An Axiomatic Basis for Computer Programming*. Communications of the ACM 52(10):30-32, 2009. DOI: 10.1145/1562764.1562779


Susan Horwitz, Alan J. Demers, Tim Teitelbaum. *An Efficient General Iterative Algorithm for Dataflow Analysis*. Acta Informatica 24(6):679-694, 1987.


Susan Horwitz, Thomas Reps, Mooly Sagiv. *Demand Interprocedural Data Flow Analysis*. In Proceedings of the 3rd ACM SIGSOFT Symposium on the Foundations of Software Engineering (FSE-3), 104-115, 1995.


John Hughes, John Launchbury. *Reversing Abstract Interpretations*. In Proceedings of the 4th European Symposium on Programming (ESOP'92), Springer-V., LNCS 582, 269-286, 1992.

V Artikel (32)


John Hughes, John Launchbury. *Reversing Abstract Interpretations*. Science of Computer Programming 22:307-326, 1994.


Claude Jard, Thierry Jéron. *Bounded-memory Algorithms for Verification On-the-fly*. In Proceedings of the 3rd International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'91), Springer-V., LNCS 575, 192-202, 1992.


Tudor Jebelean, Laura Kovács, Nikolaj Popov. *Experimental Program Verification in the Theorema System*. In Proceedings of the International Symposium on Leveraging Applications of Formal Methods (ISoLA 2004), 92-99, 2004. `www.risc.jku.at/publications/download/risc_2243/KoPoJeb.pdf`

V Artikel (33)


Neil D. Jones, Flemming Nielson. *Abstract Interpretation: A Semantics-based Tool for Program Analysis*. In Handbook of Logic in Computer Science, Volume 4, Oxford University Press, 1995.


Gilles Kahn. *Natural Semantics*. In Proceedings of the 4th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'87), Springer-V., LNCS 247, 22-39, 1987.


John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Global Data Flow Analysis and Iterative Algorithms*. Journal of the ACM 23:158-171, 1976.


John B. Kam, Jeffrey D. Ullman. *Monotone Data Flow Analysis Frameworks*. Acta Informatica 7:305-317, 1977.

V Artikel (34)


Gary A. Kildall. *A Unified Approach to Global Program Optimization*. In Conference Record of the 1st ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'73), 194-206, 1973.


Raimund Kirner, Jens Knoop, Adrian Prantl, Markus Schordan, Albrecht Kadlec. *Beyond Loop Bounds: Comparing Annotation Languages for Worst-Case Execution Time Analysis*. Journal of Software and Systems Modeling 10(3):411-437, Springer-V., 2011.


Marion Klein, Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *DFA&OPT-METAFrame: A Toolkit for Program Analysis and Optimization*. In Proceedings of the 2nd International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'96), Springer-V., LNCS 1055, 422-426, 1996.

V Artikel (35)


Jens Knoop. *Parallel Constant Propagation*. In Proceedings of the 4th European Conference on Parallel Processing (Europar'98), Springer-V., LNCS 1470, 445-455, 1998.


Jens Knoop. *From DFA-frameworks to DFA-generators: A Unifying Multiparadigm Approach*. In Proceedings of the 5th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99), Springer-V., LNCS 1579, 360-374, 1999.


Jens Knoop. *Demand-driven Analysis of Explicitly Parallel Programs: An Approach based on Reverse Data-Flow Analysis*. In Proceedings of the 9th International Workshop on Compilers for Parallel Computers (CPC 2001), 151-162, 2001.

V Artikel (36)


Jens Knoop. *Data-Flow Analysis for Hot-Spot Program Optimization*. In Proceedings of the 14th Biennial Workshop on 'Programmiersprachen und Grundlagen der Programmierung' (KPS 2007). Bericht A-07-07 der Institute für Mathematik und Informatik, Universität Lübeck, Deutschland, 124-131, 2007.


Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *Basic-block Graphs: Living Dinosaurs?* In Proceedings of the 7th International Conference on Compiler Construction (CC'98), Springer-V., LNCS 1383, 65-79, 1998.


Jens Knoop, Eduard Mehofer. *Distribution Assignment Placement: Effective Optimization of Redistribution Costs*. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 13(6):628-647, 2002.

V Artikel (37)


Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Lazy Code Motion*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'92 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'92), ACM SIGPLAN Notices 27(7):224-234, 1992.


Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Partial Dead Code Elimination*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'94 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'94), ACM SIGPLAN Notices 29(6):147-158, 1994.


Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Optimal Code Motion: Theory and Practice*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 16(4):1117-1155, 1994.

V Artikel (38)


Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *The Power of Assignment Motion*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'95 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'95), ACM SIGPLAN Notices 30(6):233-245, 1995.


Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Code Motion and Code Placement: Just Synonyms?* In Proceedings of the 7th European Symposium on Programming (ESOP'98), Springer-V., LNCS 1381, 154-169, 1998.


Jens Knoop, Oliver Rüthing. *Constant Propagation on the Value Graph: Simple Constants and Beyond*. In Proceedings of the 9th International Conference on Compiler Construction (CC 2000), Springer-V., LNCS 1781, 94-109, 2000.

V Artikel (39)


Jens Knoop, Oliver Rüthing. *Constant Propagation on Predicated Code*. Journal of Universal Computer Science 9(8):829-850, 2003. (special issue devoted to SBLP'03).


Jens Knoop, Oliver Rüthing, Bernhard Steffen. *Retrospective: Lazy Code Motion*. In '20 Years of the ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation (1979 - 1999): A Selection,' ACM SIGPLAN Notices 39(4):460-461&462-472, 2004.


Jens Knoop, Bernhard Steffen. *The Interprocedural Coincidence Theorem*. In Proceedings of the 4th International Conference on Compiler Construction (CC'92), Springer-V., LNCS 641, 125-140, 1992.

V Artikel (40)


Jens Knoop, Bernhard Steffen. *Code Motion for Explicitly Parallel Programs*. In Proceedings of the 7th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPoPP'99), ACM SIGPLAN Notices 34(8):13-24, 1999.


Jens Knoop, Bernhard Steffen, Jürgen Vollmer. *Parallelism for Free: Bitvector Analyses* $\rightarrow$ *No State Explosion!* In Proceedings of the 1st International Workshop on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'95), LNCS 1019, Springer-V., 264-289, 1995.


Jens Knoop, Bernhard Steffen, Jürgen Vollmer. *Parallelism for Free: Efficient and Optimal Bitvector Analyses for Parallel Programs*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 18(3):268-299, 1996.

V Artikel (41)


Laura Kovács, Tudor Jebelean. *Practical Aspects of Imperative Program Verification using Theorema*. In Proceedings of the 5th International Workshop on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2003), 317-320, 2003. `www.risc.jku.at/publications/download/risc_464/synasc03.pdf`


Laura Kovács, Tudor Jebelean. *Generation of Invariants in Theorema*. In Proceedings of the 10th International Symposium of Mathematics and its Applications, 407-415, 2003. `www.risc.jku.at/publications/download/risc_2053/2003-11-06-A.pdf`


Dexter Kozen, Jerzy Tiuryn. *On the Completeness of Propositional Hoare Logic*. Information Sciences 139(3-4):187-195, 2001.

V Artikel (42)


William Landi. *Undecidability of Static Analysis*. ACM Letters on Programming Languages and Systems 1(4):323-337, 1992.


Jean-Louis Lassez, V.L. Nguyen, Elizabeth A. Sonenberg. *Fixed Point Theorems and Semantics: A Folk Tale*. Information Processing Letters 14(3):112-116, 1982.


Thomas Leveque, Etienne Borde, Amine Marref, Jan Carlson. *Hierarchical Composition of Parametric WCET in a Component Based Approach*. In Proceedings of the 14th IEEE International Symposium on Object/Component/Service-Oriented Real-Time Distributed Computing (ISORC 2011), 261-268, 2011.

V Artikel (43)


Yau-Tsun Steven Li, Sharad Malik. *Performance Analysis of Embedded Software using Implicit Path Enumeration*. ACM SIGPLAN Notices 30(11):88-98, 1995.


Yuan Lin, David A. Padua. *Demand-driven Interprocedural Array Property Analysis*. In Proceedings of the 12th International Conference on Languages and Compilers for Parallel Computing (LCPC'99), Springer-V., LNCS 1863, 303-317, 1999.


Björn Lisper, Andreas Ermedahl, Dietmar Schreiner, Jens Knoop, Peter Gliwa. *Practical Experiences of Applying Source-level WCET Flow Analysis to Industrial Code*. Journal of Software Tools for Technology Transfer (STTT) 15(1):53-63, Springer-V., 2013.

V Artikel (44)


Konstantinos Mamouras. *On the Hoare Theory of Monadic Recursion Schemes*. In Proceedings of the Joint Meeting of the 23rd EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL) and the 29th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS) (CSL-LICS'14), Article 69, 69.1-69.10, 2014.


Konstantinos Mamouras. *The Hoare Logic of Deterministic and Nondeterministic Monadic Recursion Schemes*. ACM Transactions on Computational Logic 17(2):13.1-13.30, 2016.


George Markowsky. *Chain-complete Posets and Directed Sets with Applications*. Algebra Universalis 6(1):53-68, 1976.

V Artikel (45)


Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Properties of Data Flow Frameworks*. Acta Informatica 20:121-163, 1990.


Kim Marriot. *Frameworks for Abstract Interpretation*. Acta Informatica 30:103-129, 1993.


Florian Martin. *PAG - An Efficient Program Analyzer Generator*. Journal of Software Tools for Technology Transfer 2(1):46-67, 1998.


Stephen P. Masticola, Thomas J. Marlowe, Barbara G. Ryder. *Lattice Frameworks for Multisource and Bidirectional Data Flow Problems*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS) 17(5):777-803, 1995.

V Artikel (46)

- Yuri V. Matijasevič. *Enumerable Sets are Diophantine (auf Russisch)*. Doklady Akademii Nauk SSSR 191:279-282, 1970 (englische Übersetzung: Soviet Mathematics Doklady 11:354-357, 1970).
- Yuri V. Matijasevič. *On Recursive Unsolvability of Hilbert's Tenth Problem*. In Proceedings of the 4th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science (Bucharest 1971), North-Holland, Amsterdam, 89-110, 1973.
- Yuri V. Matijasevič. *What Should We Do Having Proved a Decision Problem to be Unsolvable?* In Proceedings of Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science, Springer-V., LNCS 122, 441-448, 1979.

V Artikel (47)

- Yuri V. Matijasevič. *Hilbert's Tenth Problem*. MIT Press, 1993.
- Samuel P. Midkiff, José E. Moreira, Marc Snir. *A Constant Propagation Algorithm for Explicitly Parallel Programs*. International Journal of Computer Science 26(5):563-589, 1998.
- Samuel P. Midkiff, David A. Padua. *Issues in the Optimization of Parallel Programs*. In Proceedings of the 18th International Conference on Parallel Processing (ICPP'90), Vol. II., 105-113, 1990.
- Steve P. Miller, Michael W. Whalen, Darren D. Cofer. *Software Model Checking Takes Off*. Communications of the ACM 53(2):58-64, 2010.

V Artikel (48)


Ronald J. Mintz, Gerald A. Fisher, Micha Sharir. *The Design of a Global Optimizer*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN'79 Symposium on Compiler Construction (SoCC'79), ACM SIGPLAN Notices 14(8):226-234, 1979.


Markus Müller-Olm, David A. Schmidt, Bernhard Steffen. *Model-Checking: A Tutorial Introduction*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 330-354, 1999.


Markus Müller-Olm, Helmut Seidl. *Polynomial Constants are Decidable*. In Proceedings of the 9th Static Analysis Symposium (SAS 2002), Springer-V., LNCS 2477, 4-19, 2002.

V Artikel (49)


Flemming Nielson. *Program Transformations in a Denotational Setting*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 7(3):359-379, 1985.


Flemming Nielson. *A Bibliography on Abstract Interpretation*. ACM SIGPLAN Notices 21:31-38, 1986.


Flemming Nielson. *A Bibliography on Abstract Interpretation*. EATCS Bulletin 28:42-52, 1986.


Flemming Nielson. *Semantics-directed Program Analysis: A Tool-maker's Perspective*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 2-21, 1996.

V Artikel (50)


Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Finiteness Conditions for Fixed Point Iteration*. In Proceedings of the 7th ACM Conference on LISP and Functional Programming (LFP'92), 96-108, 1992.


Hanne Riis Nielson. *A Hoare-like Proof System for Run-Time Analysis of Programs*. Science of Computer Programming 9(2):107-136, 1987.


David von Oheimb. *Hoare Logic for Java in Isabelle/HOL*. Concurrency and Computation: Practice and Experience 13(13):1173-1214, 2001.


Ernst-Rüdiger Olderog. *Correctness of Programs with Pascal-like Procedures without Global Variables*. Theoretical Computer Science 30(1):49-90, 1984.

V Artikel (51)


Ernst-Rüdiger Olderog, Bernhard Steffen. *Formale Semantik und Programmverifikation*. In Informatik-Handbuch, Peter Rechenberg, Gustav Pomberger (Hrsg.), Carl Hanser Verlag, 4. Auflage, 145-166, 2006.


Ernst-Rüdiger Olderog, Reinhard Wilhelm. *Turing und die Verifikation*. Informatik Spektrum 35(4):271-279, 2012.


Greger Ottosson, Mikael Sjödin. *Worst-Case Execution Time Analysis for Modern Hardware Architectures*. In Proceedings of the ACM SIGPLAN Workshop on Languages, Compilers, and Tools for Real-Time Systems (LCT-RTS'97), 1997.

V Artikel (52)


Doron Peled. *All from One, One for All: On Model Checking Using Representatives*. In Proceedings of the 5th International Workshop on Computer Aided Verification (CAV'93), Springer-V., LNCS 697, 409-423, 1993.


Gordon D. Plotkin. *A Structural Approach to Operational Semantics*. Lecture notes, DAIMI FN-19, Aarhus University, Dänemark, 1981, Nachdruck von 1991.


Gordon D. Plotkin. *An Operational Semantics for CSP*. In Proceedings of the TC-2 Working Conference on Formal Description of Programming Concepts II, Dines Bjørner (Hrsg.), North-Holland, Amsterdam, 1982.


Gordon D. Plotkin. *A Structural Approach to Operational Semantics*. Journal of Logic and Algebraic Programming 60-61:17-139, 2004.

V Artikel (53)


Vaughan R. Pratt. *Semantical Considerations of Floyd-Hoare Logic*. In Proceedings of the 17th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'76), 109-121, 1976.


Peter Puschner, Raimund Kirner, Robert G. Pettit. *Towards Composable Timing for Real-Time Programs*. Software Technologies for Future Dependable Distributed Systems, 1-5, 2009.


Peter Puschner, Daniel Prokesch, Benedikt Huber, Jens Knoop, Stefan Hepp, Gernot Gebhard. *The T-CREST Approach of Compiler and WCET-Analysis Integration*. In Proceedings of the 9th International Workshop on Software Technologies for Future Embedded and Ubiquitious Systems (SEUS 2013), 1-8, 2013.

V Artikel (54)


John H. Reif, Harry R. Lewis. *Symbolic Evaluation and the Global Value Graph*. In Conference Record of the 4th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'77), 104-118, 1977.


Jan Reineke, Björn Wachter, Stephan Thesing, Reinhard Wilhelm, Ilia Polian, Jochen Eisinger, Bernd Becker. *A Definition and Classification of Timing Anomalies*. In Proceedings of the 6th International Workshop on Worst-Case Execution Time Analysis (WCET 2006), 2006.


Thomas Reps. *Solving Demand Versions of Interprocedural Analysis Problems*. In Proceedings of the 5th International Conference on Compiler Construction (CC'95), Springer-V., LNCS 786, 389-403, 1994.

V Artikel (55)


Thomas Reps. *Demand Interprocedural Program Analysis using Logic Databases*. In Applications of Logic Databases, R. Ramakrishnan (Hrsg.), Kluwer Academic Publishers, 1994.


F. Robert. *Convergence locale d'itérations chaotiques non linéaires*. Technical Report 58, Laboratoire d'Informatique, U.S.M.G., Grenoble, Frankreich, Dez. 1976.


Oliver Rüthing, Jens Knoop, Bernhard Steffen. *Detecting Equalities of Variables: Combining Efficiency with Precision*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 232-247, 1999.


Oliver Rüthing, Markus Müller-Olm. *On the Complexity of Constant Propagation*. In Proceedings of the 10th European Symposium on Programming (ESOP 2001), Springer-V., LNCS 2028, 190-205, 2001.

V Artikel (56)


Caitlin Sadowski, Edward Aftandilian, Alex Eagle, Liam Miller-Cushon, Ciera Jaspan. *Lessons from Building Static Analysis Tools at Google*. Communications of the ACM 61(4):58-66, 2018.


Antonella Santone. *Automatic Verification of Concurrent Systems Using a Formula-based Compositional Approach*. Acta Informatica 38(8), 531-564, 2002.


David A. Schmidt. *Data Flow Analysis is Model Checking of Abstract Interpretations*. In Conference Record of the 25th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'98), 38-48, 1998.

V Artikel (57)


David A. Schmidt, Bernhard Steffen. *Program Analysis as Model Checking of Abstract Interpretations*. In Proceedings of the 5th Static Analysis Symposium (SAS'98), Springer-V., LNCS 1503, 351-380, 1998.


Mary Lou Soffa. *Tutorial: Techniques to improve the Scalability and Precision of Data Flow Analysis*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 355-356, 1999.


Harini Srinivasan, Michael Wolfe. *Analyzing Programs with Explicit Parallelism*. In Proceedings of the 4th International Conference on Languages and Compilers for Parallel Computing (LCPC'91), Springer-V., LNCS 589, 405-419, 1991.

V Artikel (58)


Bernhard Steffen. *Optimal Run Time Optimization – Proved by a New Look at Abstract Interpretation*. In Proceedings of the 2nd Joint International Conference on the Theory and Practice of Software Development (TAPSOFT'87), Springer-V., LNCS 249, 52-68, 1987.


Bernhard Steffen. *Optimal Data Flow Analysis via Observational Equivalence*. In Proceedings of the 14th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'89), Springer-V., LNCS 379, 492-502, 1989.


Bernhard Steffen. *Data Flow Analysis as Model Checking*. In Proceedings of the International Conference on Theoretical Aspects of Computer Software (TACS'91), Springer-V., LNCS 526, 346-365, 1991.

V Artikel (59)


Bernhard Steffen. *Generating Data Flow Analysis Algorithms from Modal Specifications*. International Journal on Science of Computer Programming 21:115-139, 1993.


Bernhard Steffen. *Property-Oriented Expansion*. In Proceedings of the 3rd Static Analysis Symposium (SAS'96), Springer-V., LNCS 1145, 22-41, 1996.


Bernhard Steffen, Andreas Claßen, Marion Klein, Jens Knoop, Tiziana Margaria. textcolorblack*The Fixpoint Analysis Machine*. In Proceedings of the 6th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR'95), Springer-V., LNCS 962, 72-87, 1995.


Bernhard Steffen, Jens Knoop. *Finite Constants: Characterizations of a New Decidable Set of Constants*. Theoretical Computer Science 80(2):303-318, 1991.

V Artikel (60)


Colin Stirling, David Walker. *Local Model Checking in the Modal Mu-Calculus*. Theoretical Computer Science 89(1):161-177, 1991.


Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Effective Partial Redundancy Elimination based on Extended Value Graph*. Information Processing Society of Japan 38(11):2237-2250, 1990.


Munehiro Takimoto, Kenichi Harada. *Partial Dead Code Elimination Using Extended Value Graph*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 179-193, 1999.


Alfred Tarski. *A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its Applications*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):285-309, 1955.

V Artikel (61)


Henrik Theiling. *ILP-based Interprocedural Path Analysis*. In Proceedings of the International Workshop on Embedded Software (EMSOFT 2002), Springer-V., LNCS 2491, 349-363, 2002.


Lothar Thiele, Reinhard Wilhelm. *Design for Timing Predictability*. Real-Time Syst. 28(2-3):157-177, 2004.


Ashish Tiwari, Sumit Gulwani. *Static Program Analysis Using Theorem Proving*. In Proceedings of the 21st Conference on Automated Deduction (CADE-21), LNCS 4603, Springer-V., 147-166, 2007.


Peng Tu, David A. Padua. *Gated SSA-based Demand-driven Symbolic Analysis for Parallelizing Computers*. In Proceedings of the International Conference on Supercomputing (SC'95), 414-423, 1995.

V Artikel (62)


Antti Valmari. *A Stubborn Attack on State Explosion*. Formal Methods in System Design 1(4):297-322, 1992.


Jürgen Vollmer. *Data Flow Analysis of Parallel Programs*. In Proceedings of the IFIP WG 10.3 Working Conference on Parallel Architectures and Compilation Techniques (PACT'95), 168-177, 1995.


Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Constant Propagation with Conditional Branches*. In Conference Record of the 12th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'85), 291-299, 1985.


Mark N. Wegman, F. Kenneth Zadeck. *Constant Propagation With Conditional Branches*. ACM Transactions on Programming Languages and Systems 13(2):181-201, 1991.

V Artikel (63)


Daniel Weise. *Static Analysis of Mega-Programs (Invited Paper)*. In Proceedings of the 6th Static Analysis Symposium (SAS'99), Springer-V., LNCS 1694, 300-302, 1999.


Reinhard Wilhelm, Jakob Engblom, Andreas Ermedahl, Niklas Holsti, Stephan Thesing, David Whalley, Guillem Bernat, Christian Ferdinand, Reinhold Heckmann, Tulika Mitra, Frank Mueller, Isabelle Puaut, Peter Puschner, Jan Staschulat, Per Stenström. *The Worst-case Execution Time Problem – Overview of Methods and Survey of Tools*. ACM Transactions on Embedded Computing Systems 7(3):36.1-53, 2008.


Reinhard Wilhelm, Daniel Grund. *Computation takes Time, but How Much?* Communications of the ACM 57(2):94-103, 2014.

V Artikel (64)


Michael Wolfe, Harini Srinivasan. *Data Structures for Optimizing Programs with Explicit Parallelism*. In Proceedings of the 1st International Conference of the Austrian Center for Parallel Computation, Springer-V., LNCS 591, 139-156, 1991.


Xin Yuan, Rajiv Gupta, Rami Melhem. *Demand-driven Data Flow Analysis for Communication Optimization*. Parallel Processing Letters 7(4):359-370, 1997.


Xin Zheng, Radu Rugina. *Demand-driven Alias Analysis for C*. In Proceedings of the 35th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2008), 197-208, 2008.

VI Web-Ressourcen

aiT Worst-Case Execution Time Analyzers. Website: `http://www.absint.com/ait`, 2016. [Online; accessed 1-August-2016]

Reiner Hähnle, Richard Bubel. *A Hoare-Style Calculus with Explicit State Updates*. Handout in the course 'Program Verification' at the Department of Computer Science at the Chalmers University of Technology, 19 Seiten. `i12www.iti.uni-karlsruhe.de/~key/download/hoare/students.pdf`

Anhänge

Anhang A

Mathematische Grundlagen

A.1

Relationen

Relationen

Seien M_i, $1 \leq i \leq k$, Mengen.

Definition A.1.1 (k-stellige Relation)

Eine (k-stellige) Relation ist eine Menge R geordneter Tupel von Elementen aus $M_1, \ldots, M_k$, d.h. $R \subseteq M_1 \times \ldots \times M_k$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts der Mengen M_i, $1 \leq i \leq k$.

Beispiele

- $\emptyset$ ist die kleinste Relation auf $M_1 \times \ldots \times M_k$.
- $M_1 \times \ldots \times M_k$ ist die größte Relation auf $M_1 \times \ldots \times M_k$.

Binäre Relationen

Seien M, N Mengen.

Definition A.1.2 (Binäre Relation)

Eine (binäre) Relation ist eine Menge R geordneter Paare von Elementen aus M und N, d.h. R ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von M und N, $R \subseteq M \times N$, eine sog. Relation von M auf N.

Beispiele

- $\emptyset$ ist die kleinste Relation von M auf N.
- $M \times N$ ist die größte Relation von M auf N.

Bemerkung

- Ist R eine Relation von M auf N, ist es üblich $m\,R\,n$, $R(m,n)$ oder $R\,m\,n$ zu schreiben anstelle von $(m,n) \in R$.

Zwischen, auf

Definition A.1.3 (Zwischen, auf)

Eine Relation R von M auf N heißt Relation zwischen M und N (oder Relation auf $M \times N$).

Gilt M gleich N, heißt R Relation auf M, in Zeichen: (M, R).

Argument- u. Wertebereich binärer Relationen

Definition A.1.4 (Argument- und Wertebereich)

Sei R eine Relation von M auf N.

Die Mengen

- $dom(R) =_{df} \{m \mid \exists\, n \in N.\ (m, n) \in R\}$
- $ran(R) =_{df} \{n \mid \exists\, m \in M.\ (m, n) \in R\}$

heißen Argumentbereich (engl. domain) bzw. Wertebereich (engl. range) von R.

Eigensch. von Relationen auf einer Menge M

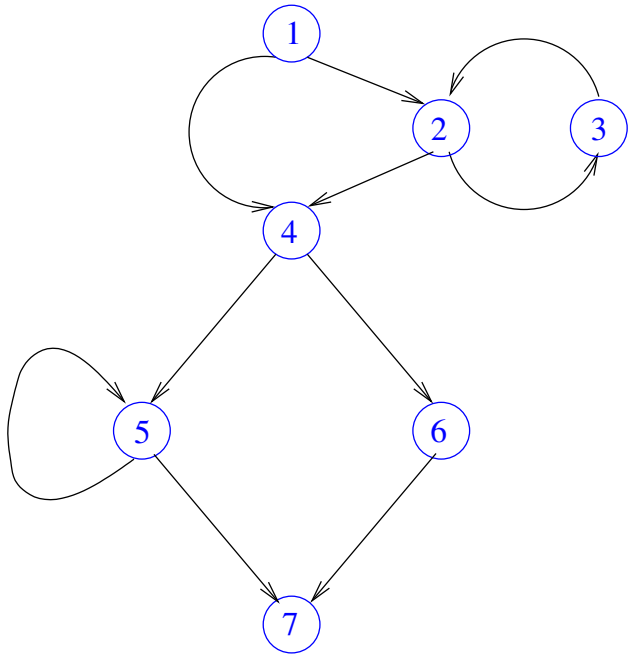
Definition A.1.5 (Eigensch. von Relationen auf M)

Eine Relation R auf einer Menge M heißt

- reflexiv gdw $\forall\, m \in M.\ m\, R\, m$
- irreflexiv gdw $\forall\, m \in M.\ \neg m\, R\, m$
- transitiv gdw $\forall\, m, n, p \in M.\ m\, R\, n\ \wedge\ n\, R\, p\ \Rightarrow\ m\, R\, p$
- intransitiv gdw $\forall\, m, n, p \in M.\ m\, R\, n \wedge n\, R\, p \Rightarrow \neg m\, R\, p$
- symmetrisch gdw $\forall\, m, n \in M.\ m\, R\, n\ \Longleftrightarrow\ n\, R\, m$
- antisymmetrisch gdw $\forall\, m, n \in M.\ m\, R\, n \wedge n\, R\, m \Rightarrow m = n$
- asymmetrisch gdw $\forall\, m, n \in M.\ m\, R\, n \Rightarrow \neg n\, R\, m$
- linear gdw $\forall\, m, n \in M.\ m\, R\, n\ \vee\ n\, R\, m\ \vee\ m = n$
- total gdw $\forall\, m, n \in M.\ m\, R\, n\ \vee\ n\, R\, m$

(Anti-) Beispiel

Sei $G = (N, E, \mathbf{s} \equiv 1, \mathbf{e} \equiv 7)$ der nachstehende (Fluss-) Graph und R die Relation ‘$\cdot$ ist über eine (gerichtete) Kante von N von G mit $\cdot$ verbunden (z.B. ist Knoten 4 verbunden mit Knoten 6, aber nicht umgekehrt).



Die Relation R ist nicht reflexiv, nicht irreflexiv, nicht transitiv, nicht intransitv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, nicht linear und nicht total.

Äquivalenzrelation

Sei R eine Relation auf M.

Definition A.1.6 (Äquivalenzrelation)

R heißt Äquivalenzrelation (oder Äquivalenz) gdw R ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

Übungsaufgabe A.1.7

Bezeichne $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$, d.h. die Relation '$\cdot$ teilt $\cdot$' (ohne Rest), z.B. $5 \mid 35$.

Beweise oder widerlege: Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}_0$ ist

1. reflexiv
2. irreflexiv
3. transitiv
4. intransitiv
5. symmetrisch
6. antisymmetrisch
7. asymmetrisch
8. linear
9. total
10. Äquivalenz(relation)

Beweis oder Gegenbeispiel.

A.2

Geordnete Mengen, Ordnungen

A.2.1

Halbordnungen, partielle Ordnungen

Geordnete Mengen

Sei R eine Relation auf M.

Definition A.2.1.1 (Halbordnung)

R ist eine Halbordnung (oder Quasiordnung) (engl. pre-order (oder quasi-order)) gdw R ist reflexiv und transitiv.

Definition A.2.1.2 (Partielle Ordnung)

R ist eine partielle Ordnung (engl. partial order (oder poset oder order)) gdw R ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

Definition A.2.1.3 (Strikte partielle Ordnung)

R ist eine strikte partielle Ordnung (engl. strict partial order) gdw R ist asymmetrisch und transitiv.

Beispiele geordneter Mengen

Halbordnung (reflexiv, transitiv)

- Die Relation $\Rightarrow$ auf logischen Formeln.

Partielle Ordnung (reflexiv, transitiv, antisymmetrisch)

- Die Relationen $=$, $\leq$ und $\geq$ auf $\mathbb{N}$.
- Die Relation $m \mid n$ (m ist Teiler von n) auf $\mathbb{N}$.

Strikte partielle Ordnungen (asymmetrisch, transitiv)

- Die Relationen $<$ und $>$ auf $\mathbb{N}$.
- Die Relationen $\subset$ und $\supset$ auf Mengen.

Äquivalenzrelation (reflexiv, transitiv, symmetrisch)

- Die Relation $\Longleftrightarrow$ auf logischen Formeln.
- Die Relation 'haben die selben Primzahlfaktoren' auf $\mathbb{N}$.
- Die Relation 'sind Bürger desselben Landes' auf Leuten.

Beachte

- Eine antisymmetrische Halbordnung ist eine partielle Ordnung; eine symmetrische Halbordnung ist eine Äquivalenzrelation.
- Der Einfachheit halber wird auch das Paar (M, R) eine Halbordnung, partielle Ordnung bzw. strikte partielle Ordnung genannt.
- Präziser können wir vom Paar (M, R) als einer durch R halbgeordneten, partiell geordneten bzw. strikt partiell geordneten Menge sprechen.
- Synonym sprechen wir von M auch als von einer halbgeordneten, partiell geordneten bzw. strikt partiell geordneten Menge, oder als einer Menge mit einer Halbordnung, partiellen Ordnung bzw. strikten partiellen Ordnung.
- Unabhängig von der Grundmenge ist die Gleichheitsrelation $=$ stets eine partielle Ordnung, die sog. diskrete (partielle) Ordnung.

Der strikte Teil einer Ordnung

Sei $\sqsubseteq$ eine Halbordnung (reflexiv, transitiv) auf P.

Definition A.2.1.4 (Strikter Teil von $\sqsubseteq$)

Die Relation $\sqsubset$ auf P definiert durch

$$\forall\, p, q \in P.\ p \sqsubset q \iff_{df} p \sqsubseteq q \ \wedge\ p \neq q$$

heißt strikter Teil von $\sqsubseteq$.

Korollar A.2.1.5 (Strikte partielle Ordnung)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $\sqsubset$ der strikte Teil von $\sqsubseteq$.

Dann gilt: $(P, \sqsubset)$ ist eine strikte partielle Ordnung.

Nützliche Resultate

Sei $\sqsubset$ eine strikte partielle Ordnung (asymmetrisch, transitiv) auf P.

Lemma A.2.1.6

Die Relation $\sqsubset$ ist irreflexiv.

Lemma A.2.1.7

Das Paar $(P, \sqsubseteq)$, wobei $\sqsubseteq$ definiert ist durch

$$\forall\, p, q \in P.\ p \sqsubseteq q \iff_{df} p \sqsubset q \ \vee \ p = q$$

ist eine partielle Ordnung.

Induzierte (oder ererbte) partielle Ordnung

Definition A.2.1.8 (Induzierte partielle Ordnung)

Sei $(P, \sqsubseteq_P)$ eine partiell geordnete Menge, $Q \subseteq P$ eine Teilmenge von P und $\sqsubseteq_Q$ eine Relation auf Q definiert durch

$$\forall\, q, r \in Q.\ q \sqsubseteq_Q r \iff_{df} q \sqsubseteq_P r$$

Dann heißt $\sqsubseteq_Q$ die induzierte partielle Ordnung auf Q (oder die ererbte Ordnung von P auf Q).

Übungsaufgabe A.2.1.9

Bezeichne $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$, d.h. die Relation '$\cdot$ teilt $\cdot$' (ohne Rest), z.B. $5 \mid 35$.

Beweise oder widerlege: Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}_0$ ist eine

1. Halbordnung
2. partielle Ordnung
3. strikte partielle Ordnung
4. Äquivalenz(relation)

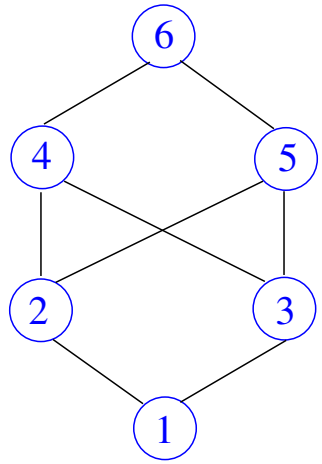
Beweis oder Gegenbeispiel.

A.2.2

Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramme

...sind kompakte graphische Darstellungen partieller Ordnungen.



Die Kanten eines Hasse-Diagramms

- werden von unten nach oben gelesen (tiefer bedeutet dabei kleiner bzgl. der Ordnung, höher bedeutet größer).
- stellen die Relation R '$\cdot$ ist ein unmittelbarer Vorgänger von $\cdot$' einer partiellen Ordnung $(P, \sqsubseteq)$ definiert durch $p\,R\,q \iff_{df} p \sqsubset q \wedge \nexists r \in P.\ p \sqsubset r \sqsubset q$ dar, wobei $\sqsubset$ die strikte partielle Ordnung von $\sqsubseteq$ ist.

Lesen von Hasse-Diagrammen

Die Hasse-Diagramm-Darstellung einer partiellen Ordnung

- verzichtet auf Kanten zur Darstellung von Reflexivität und Transitivität der Relation.
- konzentriert sich auf die Darstellung der Relation 'unmittelbarer Vorgänger'.

Die Hasse-Diagramm-Darstellung einer partiellen Ordnung

- ist kompakt und (gemessen an der Zahl der Kanten) ökonomisch.
- erhält alle relevanten Informationen über die dargestellte partielle Ordnung:
  - $p \sqsubseteq q \wedge p = q$ (Reflexivität): trivialerweise dargestellt (implizit, also ohne explizite Kante).
  - $p \sqsubseteq q \wedge p \neq q$ (Transitivität): dargestellt durch aufsteigende Pfade (mit mindestens einer Kante) von p nach q.

Übungsaufgabe A.2.2.1

Welche der folgenden Diagramme sind Hasse-Diagramm-Darstellungen einer partiellen Ordnung?

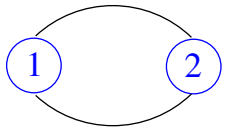
a)

{ }

b)

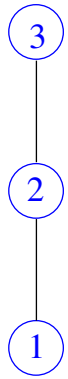
c)

d)

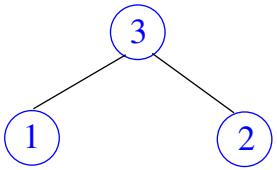


e)

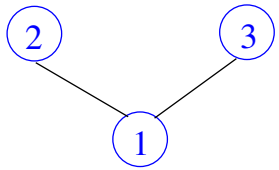
f)



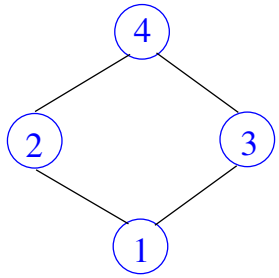
g)



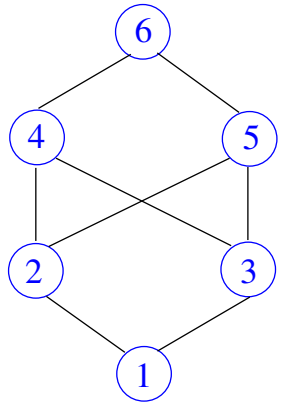
h)



i)



j)



Übungsaufgabe A.2.2.2

Bezeichne $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$, d.h. die Relation '$\cdot$ teilt $\cdot$' (ohne Rest), z.B. $5 \mid 35$.

Gib einen aussagekräftigen Ausschnitt des Hasse-Diagramms der Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}_0$ an.

A.2.3

Schranken und extreme Elemente

Schranken in Halbordnungen

Definition A.2.3.1 (Schranken in Halbordnungen)

Sei $(Q, \sqsubseteq)$ eine Halbordnung, $q \in Q$ und $Q' \subseteq Q$.

q heißt

- untere Schranke von Q', in Zeichen: $q \sqsubseteq Q'$, wenn $\forall\, q' \in Q'.\ q \sqsubseteq q'$
- obere Schranke von Q', in Zeichen: $Q' \sqsubseteq q$, wenn $\forall\, q' \in Q'.\ q' \sqsubseteq q$
- größte untere Schranke (gus) (oder Infimum) von Q', in Zeichen: $\bigsqcap Q'$, wenn q eine untere Schranke von Q' ist und für jede andere untere Schranke $\hat{q}$ von Q' gilt: $\hat{q} \sqsubseteq q$.
- kleinste obere Schranke (kos) (oder Supremum) von Q', in Zeichen: $\bigsqcup Q'$, wenn q eine obere Schranke von Q' ist und für jede andere obere Schranke $\hat{q}$ von Q' gilt: $q \sqsubseteq \hat{q}$.

Extreme Elemente in Halbordnungen

Definition A.2.3.2 (Extreme Elemente in Halbordn.)

Sei $(Q, \sqsubseteq)$ eine Halbordnung, $\sqsubset$ der strikte Teil von $\sqsubseteq$ sowie $Q' \subseteq Q$ und $q \in Q'$.

q heißt

- minimales Element von Q', wenn es kein $q' \in Q'$ gibt mit $q' \sqsubset q$.
- maximales Element von Q', wenn es kein $q' \in Q'$ gibt mit $q \sqsubset q'$.
- kleinstes (oder Minimum-) Element von Q', wenn $q \sqsubseteq Q'$.
- größtes (oder Maximum-) Element von Q', wenn $Q' \sqsubseteq q$.

Bemerkung: Kleinste und größte Elemente von Q selbst werden gewöhnlich mit $\bot$ bzw. $\top$ (Tief, Hoch (engl. bottom, top)) bezeichnet, wenn sie existieren. Kleinste (größte) Elemente von Q sind stets auch minimale (maximale) Elemente von Q.

Existenz und Eindeutigkeit

...von Schranken und extremen Elementen in partiell geordneten Mengen.

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $Q \subseteq P$ eine Teilmenge von P.

Lemma A.2.3.3 (kos/gus: Eindeutig, wenn existent)

Kleinste obere Schranken, größte untere Schranken, kleinste Elemente und größte Elemente in Q sind eindeutig, wenn sie existieren.

Lemma A.2.3.4 (Min./Max. Elemente: Nicht eind.)

Minimale u. maximale Elemente in Q sind i.a. nicht eindeutig.

Beachte: Lemma A.2.3.3 legt nahe, $\bigsqcup$ und $\bigsqcap$ als partielle Abbildungen $\bigsqcup, \bigsqcap : \mathcal{P}(P) \to P$ von der Potenzmenge $\mathcal{P}(P)$ von P nach P zu betrachten. Lemma A.2.3.3 gilt nicht für Halbordnungen.

Charakterisierung kleinster, größter Elemente

...in Form von Infima und Suprema von Mengen.

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung.

Lemma A.2.3.5 (Charakterisierung von $\bot$ und $\top$)

Das kleinste Element $\bot$ und das größte Element $\top$ von P sind durch das Supremum bzw. das Infimum der leeren Menge und das Infimum bzw. das Supremum von P gegeben, d.h.:

$$\bot = \bigsqcup \emptyset = \bigsqcap P \quad \text{und} \quad \top = \bigsqcap \emptyset = \bigsqcup P$$

wenn sie existieren.

Untere und obere Schranken von Mengen

Betrachtet man $\bigsqcup$ und $\bigsqcap$ als partielle Funktionen $\bigsqcup, \bigsqcap : \mathcal{P}(P) \rightharpoonup P$ auf der Potenzmenge einer partiellen Ordnung $(P, \sqsubseteq)$, legt das nahe, zwei weitere Abbildungen $US, OS : \mathcal{P}(P) \to \mathcal{P}(P)$ auf $\mathcal{P}(P)$ einzuführen:

Definition A.2.3.6 (Untere, obere Schranken v. M.)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung. Dann bezeichnen $US, OS : \mathcal{P}(P) \to \mathcal{P}(P)$ zwei Abbildungen, die eine Teilmenge $Q \subseteq P$ auf die Menge ihrer unteren Schranken bzw. oberen Schranken abbilden:

1. $\forall\, Q \subseteq P.\ US(Q) =_{df} \{us \in P \mid us \sqsubseteq Q\}$
2. $\forall\, Q \subseteq P.\ OS(Q) =_{df} \{os \in P \mid Q \sqsubseteq os\}$

Eigensch. unterer, oberer Schranken v. Mengen

Lemma A.2.3.7

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $Q \subseteq P$. Dann gilt:

$$\bigsqcup Q = \bigsqcap OS(Q) \quad \text{und} \quad \bigsqcap Q = \bigsqcup US(Q)$$

wenn das Supremum und das Infimum von Q existieren.

Lemma A.2.3.8

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung, $Q, Q_1, Q_2 \subseteq P$. Dann gilt:

1. $Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow US(Q_1) \supseteq US(Q_2) \wedge OS(Q_1) \supseteq OS(Q_2)$
2. $OS(US(OS(Q))) = OS(Q)$
3. $US(OS(US(Q))) = US(Q)$

Beachte: Lemma A.2.3.8(1) sagt, dass US und OS antitonische Abbildungen sind (s. Kapitel A.2.7).

Übungsaufgabe A.2.3.9

Welche Elemente der folgenden Diagramme sind minimal, maximal, kleinst oder größt?

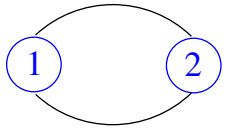
a)

{ }

b)

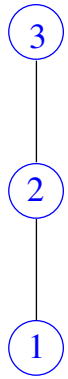
c)

d)

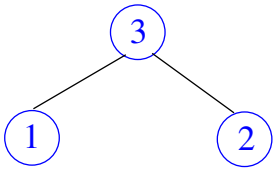


e)

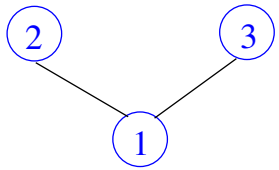
f)



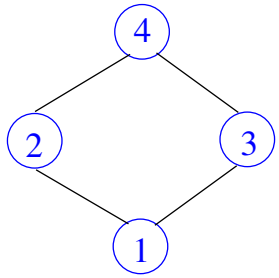
g)



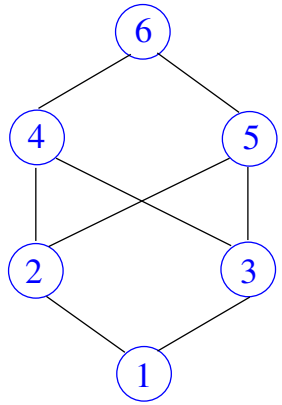
h)



i)



j)



Übungsaufgabe A.2.3.10

Bezeichne $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$, d.h. die Relation '$\cdot$ teilt $\cdot$' (ohne Rest), z.B. $5 \mid 35$.

Gib die Menge derjenigen Elemente aus $\mathbb{N}_0$ an, die

1. minimal
2. maximal
3. kleinst
4. größt

bzgl. der Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N}_0$ sind.

A.2.4

Noethersche und Artinsche Ordnungen

Noethersche und Artinsche Ordnungen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung.

Definition A.2.4.1 (Noethersche Ordnung)

$(P, \sqsubseteq)$ heißt Noethersche Ordnung (engl. Noetherian order), wenn jede nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq Q \subseteq P$ ein minimales Element enthält.

Definition A.2.4.2 (Artinsche Ordnung)

$(P, \sqsubseteq)$ heißt Artinsche Ordnung (engl. Artinian order), wenn die duale Ordnung $(P, \sqsupseteq)$ von $(P, \sqsubseteq)$ eine Noethersche Ordnung ist.

Lemma A.2.4.3

$(P, \sqsubseteq)$ ist eine Artinsche Ordnung gdw jede nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq Q \subseteq P$ enthält ein maximales Element.

Wohlfundierte Ordnungen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung.

Definition A.2.4.4 (Wohlfundierte Ordnung)

$(P, \sqsubseteq)$ heißt wohlfundierte Ordnung (engl. well-founded order), wenn $(P, \sqsubseteq)$ eine total geordnete Noethersche Ordnung ist.

Lemma A.2.4.5

$(P, \sqsubseteq)$ ist eine wohlfundierte Ordnung gdw jede nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq Q \subseteq P$ enthält ein kleinstes Element.

Noethersche Induktion

Theorem A.2.4.6 (Noethersche Induktion)

Sei $(N, \sqsubseteq)$ eine Noethersche Ordnung, $N_{min} \subseteq N$ die Menge der minimalen Elemente von N und $\phi : N \to \mathbb{B}$ ein Prädikat auf N. Dann:

Wenn

1. $\forall\, n \in N_{min}.\ \phi(n)$ (Induktionsanfang)
2. $\forall\, n \in N \backslash N_{min}.\ (\forall\, m \sqsubset n.\ \phi(m)) \Rightarrow \phi(n)$ (Induk.-Schritt)

dann gilt:

$$\forall\, n \in N.\ \phi(n)$$

A.2.5

Ketten

Ketten, Antiketten

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung.

Definition A.2.5.1 (Kette)

Eine Menge $K \subseteq P$ heißt Kette (engl. chain), wenn die Elemente von K total geordnet sind, d.h. wenn gilt:
$\forall\, k_1, k_2 \in K.\ k_1 \sqsubseteq k_2 \vee k_2 \sqsubseteq k_1$.

Definition A.2.5.2 (Antikette)

Eine Menge $K \subseteq P$ heißt Antikette (engl. antichain), wenn gilt: $\forall\, k_1, k_2 \in K.\ k_1 \sqsubseteq k_2 \Rightarrow k_1 = k_2$.

Definition A.2.5.3 (Endliche, unendl. (Anti-) Kette)

Sei $K \subseteq P$ eine Kette oder Antikette. K heißt endlich, wenn die Zahl der Elemente endlich ist; K heißt unendlich sonst.

Beachte: Jede Menge P wird durch Überstülpen der diskreten Ordnung $(P, =)$ zu einer Antikette.

Aufsteigende, absteigende Ketten

Definition A.2.5.4 (Aufsteigende, absteigende Kette)

Sei $K \subseteq P$ eine Kette. K dargestellt in der Form

- $K = \{k_0 \sqsubseteq k_1 \sqsubseteq k_2 \sqsubseteq \ldots\}$
- $K = \{k_0 \sqsupseteq k_1 \sqsupseteq k_2 \sqsupseteq \ldots\}$

heißt aufsteigende Kette bzw. absteigende Kette.

Beispiele für Ketten

Die Menge

- $M =_{df} \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$ ist eine Kette in $\mathbb{N}$.
- $M =_{df} \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ungerade}\}$ ist eine Kette in $\mathbb{Z}$.
- $M =_{df} \{\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Kette in der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$.

Beachte: Eine Kette kann stets als aufsteigende und absteigende Kette aufgefasst werden.

- $\{0 \leq 2 \leq 4 \leq 6 \leq \ldots\}$: $\mathbb{N}$ als aufsteigende Kette.
- $\{\ldots \geq 6 \geq 4 \geq 2 \geq 0\}$: $\mathbb{N}$ als absteigende Kette.
- $\{\ldots \leq -3 \leq -1 \leq 1 \leq 3 \leq \ldots\}$: $\mathbb{Z}$ als aufsteig. Kette.
- $\{\ldots \geq 3 \geq 1 \geq -1 \geq -3 \geq \ldots\}$: $\mathbb{Z}$ als absteig. Kette.
- ...

Schließlich stationäre Folgen

Definition A.2.5.5 (Schließlich stationäre Folge)

1. Eine aufsteigende Folge der Form

$$p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \ldots$$

heißt schließlich stationär, wenn

$$\exists\, n \in \mathbb{N}.\ \forall\, j \in \mathbb{N}.\ p_{n+j} = p_n$$

2. Eine absteigende Folge der Form

$$p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \ldots$$

heißt schließlich stationär, wenn

$$\exists\, n \in \mathbb{N}.\ \forall\, j \in \mathbb{N}.\ p_{n+j} = p_n$$

Ketten und Folgen

Lemma A.2.5.6

Eine aufsteigende oder absteigende Folge der Form

$$p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \ldots \quad \text{oder} \quad p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \ldots$$

1. ist eine endliche Kette gdw sie ist schließlich stationär.
2. ist eine unendliche Kette gdw sie ist nicht schließlich stationär.

Beachte den feinen Unterschied zwischen der Sichtweise einer Kette als Menge

$$\{p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \ldots\} \quad \text{or} \quad \{p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \ldots\}$$

und als Folge

$$p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \ldots \quad \text{or} \quad p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \ldots$$

Anders als Mengen können Folgen Duplikate enthalten, was einer Definition von Ketten als Multimengen entspräche.

Aufsteigende, absteigende Kettenbedingung

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung.

Definition A.2.5.7 (Aufst./abst. Kettenbedingung)

$(P, \sqsubseteq)$ erfüllt die

1. aufsteigende Kettenbedingung (engl. ascending chain condition), wenn jede aufsteigende Kette schließlich stationär ist, d.h. für jede Kette $p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq p_n \sqsubseteq \ldots$ gibt es einen Index $m \geq 1$ mit $p_m = p_{m+j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.
2. absteigende Kettenbedingung (engl. descending chain condition), wenn jede absteigende Kette schließlich stationär ist, d.h. für jede Kette $p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \ldots \sqsupseteq p_n \sqsupseteq \ldots$ gibt es einen Index $m \geq 1$ mit $p_m = p_{m+j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Ketten und Noethersche Ordnungen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung.

Lemma A.2.5.8 (Noethersche Ordnung)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine Noethersche Ordnung.
2. $(P, \sqsubseteq)$ erfüllt die absteigende Kettenbedingung.
3. Jede Kette der Form

   $$p_0 \sqsupseteq p_1 \sqsupseteq p_2 \sqsupseteq \dots$$

   ist schließlich stationär, d.h.: $\exists\, n \in \mathbb{N}.\ \forall\, j \in \mathbb{N}.\ p_{n+j} = p_n$.
4. Jede Kette der Form

   $$p_0 \sqsupset p_1 \sqsupset p_2 \sqsupset \dots$$

   ist endlich.

Ketten und Artinsche Ordnungen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung.

Lemma A.2.5.9 (Artinsche Ordnung)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine Artinsche Ordnung.
2. $(P, \sqsubseteq)$ erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.
3. Jede Kette der Form

   $$p_0 \sqsubseteq p_1 \sqsubseteq p_2 \sqsubseteq \dots$$

   ist schließlich stationär, d.h.: $\exists\, n \in \mathbb{N}.\ \forall\, j \in \mathbb{N}.\ p_{n+j} = p_n$.
4. Jede Kette der Form

   $$p_0 \sqsubset p_1 \sqsubset p_2 \sqsubset \dots$$

   ist endlich.

Ketten und Noethersche, Artinsche Ordnungen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung.

Lemma A.2.5.10 (Noethersche, Artinsche Ordnung)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine Noethersche und eine Artinsche Ordnung.
2. $(P, \sqsubseteq)$ erfüllt die absteigende und die aufsteigende Kettenbedingung.
3. Jede Kette $K \subseteq P$ ist endlich.

A.2.6

Gerichtete Mengen

Gerichtete Mengen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $\emptyset \neq G \subseteq P$.

Definition A.2.6.1 (Gerichtete Menge)

G $(\neq \emptyset)$ heißt gerichtete Menge (engl. directed set), wenn

$$\forall\, g, h \in G.\ \exists\, k \in G.\ k \in OS(\{g, h\})$$

d.h. für je zwei Elemente g und h gibt es eine gemeinsame obere Schranke von g und h in G, d.h. $OS(\{g, h\}) \cap G \neq \emptyset$.

Eigenschaften gerichteter Mengen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $G \subseteq P$.

Lemma A.2.6.2

G ist eine gerichtete Menge gdw jede endliche Teilmenge $G' \subseteq G$ hat eine obere Schranke in G, d.h.
$\exists g \in G.\ g \in OS(G')$, d.h. $OS(G') \cap G \neq \emptyset$.

Lemma A.2.6.3

Wenn G ein größtes Element hat, dann ist G eine gerichtete Menge.

Eigenschaften endlicher gerichteter Mengen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $G \subseteq P$.

Korollar A.2.6.4

Sei G eine endliche gerichtete Menge. Dann gilt:
$\bigsqcup G$ *existiert* $\in G$ und ist das größte Element von G.

Beweis. Weil G eine gerichtete Menge ist, gilt:

$$\exists\, g \in G.\ g \in OS(G),\ \text{d.h. } OS(G) \cap G \neq \emptyset.$$

Das bedeutet $G \sqsubseteq g$. Die Antisymmetrie von $\sqsubseteq$ liefert, dass das Element mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt ist. Folglich ist g das (eindeutig bestimmte) größte Element von G gegeben durch $\bigsqcup G$, d.h. $g = \bigsqcup G$.

Beachte: Ist G unendlich, gilt die Aussage von Korollar A.2.6.4 i.a. nicht.

Stark gerichtete Mengen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung mit kleinstem Element $\bot$ und $G \subseteq P$.

Definition A.2.6.5 (Stark gerichtete Menge)

$G \neq \emptyset$ heißt stark gerichtete Menge (engl. strongly directed set), wenn

1. $\bot \in G$
2. $\forall\, g, h \in G.\ \exists\, k \in G.\ k = \bigsqcup\{g, h\}$, d.h. für je zwei Elemente g und h existiert das Supremum $\bigsqcup\{g, h\}$ von g und h in G.

Eigenschaften stark gerichteter Mengen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung mit kleinstem Element $\bot$ und $G \subseteq P$.

Lemma A.2.6.6

G ist eine stark gerichtete Menge gdw jede endliche Teilmenge $G' \subseteq G$ hat ein Supremum in G, d.h. $\exists\, g \in G.\ d = \bigsqcup G'$.

Lemma A.2.6.7

Sei G eine endliche stark gerichtete Menge. Dann gilt: $\bigsqcup G$ *existiert* $\in G$ und ist das größte Element von G.

Beachte: Die Aussage von Lemma A.2.6.7 gilt i.a. nicht, wenn G unendlich ist.

Gerichtete Mengen, stark ger. Mengen, Ketten

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung mit kleinstem Element $\bot$.

Lemma A.2.6.8

Sei $\emptyset \neq G \subseteq P$ eine nichtleere Teilmenge von P. Dann gilt:

1. G ist eine gerichtete Menge, wenn G eine stark gerichtete Menge ist.
2. G ist eine stark gerichtete Menge, wenn $\bot \in G$ und G eine Kette ist.

Korollar A.2.6.9

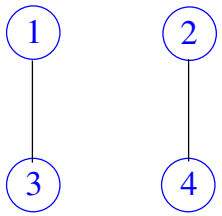
Sei $\emptyset \neq G \subseteq P$ eine nichtleere Teilmenge von P. Dann gilt:

$\bot \in G \wedge G$ Kette $\Rightarrow$ G stark gerichtete Menge $\Rightarrow$ G gerichtete Menge

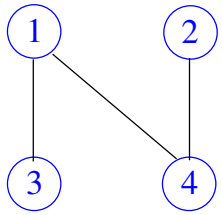
Übungsaufgabe A.2.6.10

Welche der folgenden partiellen Ordnungen sind (stark) gerichtete Mengen? Welche ihrer Teilmengen sind (stark) gerichtete Mengen?

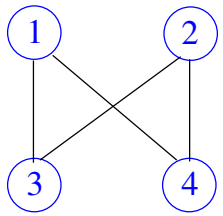
a)



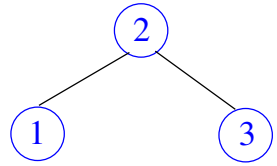
b)



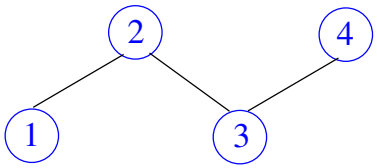
c)



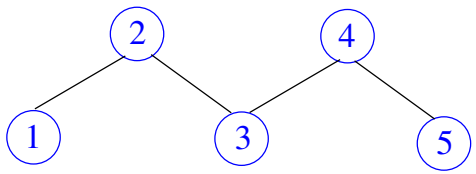
d)



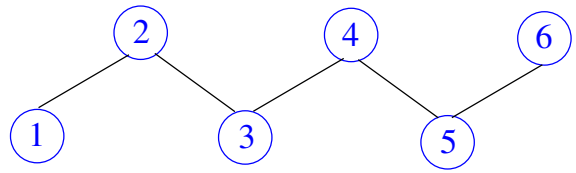
e)



f)



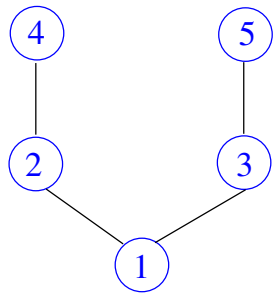
g)



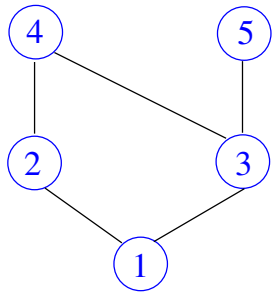
Übungsaufgabe A.2.6.11

Welche der folgenden partiellen Ordnungen sind (stark) gerichtete Mengen? Welche ihrer Teilmengen sind (stark) gerichtete Mengen?

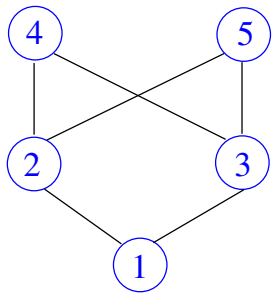
a)



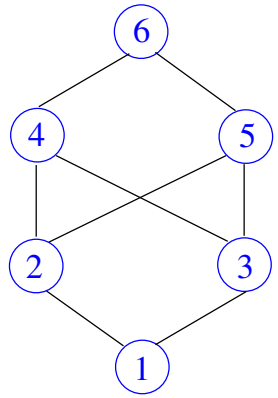
b)



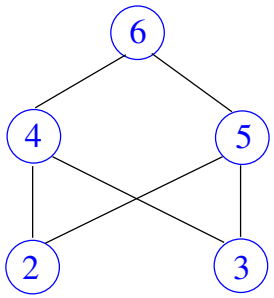
c)



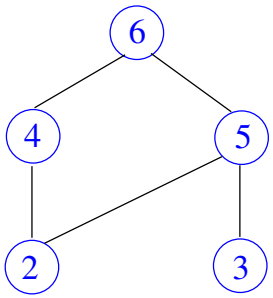
d)



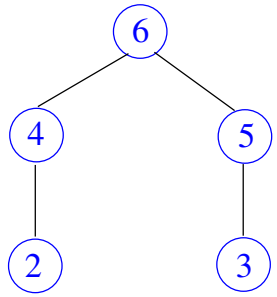
e)



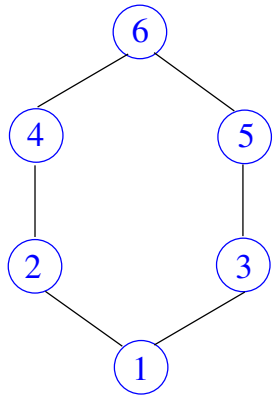
f)



g)



h)



Übungsaufgabe A.2.6.12

Betrachte die partielle Ordnung $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ mit $\sqsubseteq =_{df} |$, wobei $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ bezeichne, d.h. die Relation '$\cdot$ teilt $\cdot$' (ohne Rest), z.B. $5 \,|\, 35$.

Ist die Menge $\mathbb{N}_0$

1. gerichtet?
2. stark gerichtet?

Welche Teilmengen von $\mathbb{N}_0$ sind

1. gerichtet?
2. stark gerichtet?

Beweis oder Gegenbeispiel.

A.2.7

Abbildungen auf partiellen Ordnungen

Monotone und antitone Abbildungen auf POs

Seien $(C, \sqsubseteq_C)$, $(D, \sqsubseteq_D)$ partielle Ordnungen und $f \in [C \to D]$ eine Abbildung von C nach D.

Definition A.2.7.1 (Monotone Abbildungen auf POs)

f heißt monoton (oder ordnungserhaltend) gdw

$$\forall\, c, c' \in C.\ c \sqsubseteq_C c' \Rightarrow f(c) \sqsubseteq_D f(c')$$

(Erhalt der Ordnung von Elementen)

Definition A.2.7.2 (Antitone Abbildungen auf POs)

f heißt antiton (oder ordnungsumkehrend) gdw

$$\forall\, c, c' \in C.\ c \sqsubseteq_C c' \Rightarrow f(c') \sqsupseteq_D f(c)$$

(Umkehrung der Ordnung von Elementen)

Expandierende u. kontrahierende Abb. auf POs

Sei $(C, \sqsubseteq_C)$ eine partielle Ordnung, $f \in [C \to C]$ eine Abbildung auf C und $\hat{c} \in C$ ein Element von C.

Definition A.2.7.3 (Expandierende Abb. auf POs)

f heißt

- expandierend (oder inflationär) für $\hat{c}$ gdw $\hat{c} \sqsubseteq f(\hat{c})$
- expandierend (oder inflationär) gdw $\forall\, c \in C.\ c \sqsubseteq f(c)$

Definition A.2.7.4 (Kontrahierende Abb. auf POs)

f heißt

- kontrahierend (oder deflationär) für $\hat{c}$ gdw $f(\hat{c}) \sqsubseteq \hat{c}$
- kontrahierend (oder deflationär) gdw $\forall\, c \in C.\ f(c) \sqsubseteq c$

A.2.8

Ordnungshomomorphismen und -isomorphismen

Ordnungshomomorphismen, -isomorphismen

Seien $(P, \sqsubseteq_P)$, $(R, \sqsubseteq_R)$ partielle Ordnungen und $f \in [P \to R]$ eine Abbildung von P nach R.

Definition A.2.8.1 (Ord.-Hom. & -Isomorphismus)

f heißt

1. Ordnungshomomorphismus zwischen P und R, wenn f monoton (oder ordnungserhaltend) ist, d.h.:
$$\forall\, p, q \in P.\ p \sqsubseteq_P q \Rightarrow f(p) \sqsubseteq_R f(q)$$
2. Ordnungsisomorphismus zwischen P und R, wenn f ein bijektiver Ordnungshomomorphismus zwischen P und R und die inverse Abbildung f^{-1} von f ein Ordnungshomomorphismus zwischen R und P ist.

Definition A.2.8.2 (Ordnungsisomorph)

$(P, \sqsubseteq_P)$ und $(R, \sqsubseteq_R)$ heißen ordnungsisomorph, wenn es einen Ordnungsisomorphismus zwischen P und R gibt.

Ordnungseinbettungen

Seien $(P, \sqsubseteq_P)$, $(R, \sqsubseteq_R)$ partielle Ordnungen und $f \in [P \to R]$ eine Abbildung von P nach R.

Definition A.2.8.3 (Ordnungseinbettung)

f heißt Ordnungseinbettung von P in R gdw

$$\forall\, p, q \in P.\ p \sqsubseteq_P q \iff f(p) \sqsubseteq_R f(q)$$

Lemma A.2.8.4 (Ord.-Einbett. und -Isomorphismen)

f ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen P und R gdw f ist eine Ordnungseinbettung von P in R und f ist surjektiv.

Intuitiv: Ordnungsisomorphe partielle Ordnungen sind 'im wesentlichen gleich'.

A.3

Vollständige partielle Ordnungen

A.3.1

Kettenvollständige, gerichtete vollständige partielle Ordnungen

Vollständige partielle Ordnungen

...oder vollständige partiell geordnete Mengen:

- ein etwas schwächerer Ordungsbegriff als der eines Verbands (s. Anhang A.4), der aber in der Informatik oft ausreichend und in diesem Sinn angemessener zur Modellierung von Problemen ist, wenn (wie oft) die vollen Verbandseigenschaften nicht benötigt werden.
- gibt es in zwei Sichtweisen als sogenannte
  - kettenvollständige partielle Ordnungen (KVPOs)
  - gerichtete vollständige partielle Ordnungen (GVPOs)

  die sich konzeptuell auf Ketten bzw. gerichtete Mengen abstützen, dabei aber äquivalent sind (s. Theorem 3.1.7).

Vollständige partielle Ordnungen: KVPO-Sicht

Definition A.3.1.1 (Kettenvollständige part. Ordn.)

Eine partielle Ordnung $(P, \sqsubseteq)$ ist eine

1. ketten-prävollständige partielle Ordnung (KpVPO) (engl. chain complete partial order (pre-CCPO), wenn jede nichtleere (aufsteigende) Kette $\emptyset \neq K \subseteq P$ eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup K$ in P hat, d.h. $\bigsqcup K$ *existiert* $\in P$.
2. (geerdete) kettenvollständige partielle Ordnung (KVPO) (engl. pointed chain complete partial order (CCPO)), wenn jede (aufsteigende) Kette $K \subseteq P$ eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup K$ in P hat, d.h. $\bigsqcup K$ *existiert* $\in P$.

Vollständige partielle Ordnungen: GVPO-Sicht

Definition A.3.1.2 (Gerichtete vollst. part. Ordnung)

Eine partielle Ordnung $(P, \sqsubseteq)$ ist eine

1. gerichtete prävollständige partielle Ordnung (GpVPO) (engl. directedly complete partial order (pre-DCPO)), wenn jede gerichtete Teilmenge $G \subseteq P$ eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup G$ in P hat, d.h. $\bigsqcup G$ *existiert* $\in P$.
2. (geerdete) gerichtete vollständige partielle Ordnung (GVPO) (engl. pointed directedly complete partial order (DCPO)), wenn sie eine GpVPO ist und ein kleinstes Element $\bot$ hat.

Anmerkungen zur KVPOs und GVPOs

Zu KVPOs:

- Eine KVPO wird oft als Bereich (engl. domain) bezeichnet.
- 'Aufsteigende Kette' and 'Kette' können in Definition A.3.1.1 gleichbedeutend verwendet werden, da Ketten stets aufsteigend angeordnet angegeben werden können. Der genauere Gebrauch 'aufsteigende Kette' macht die Forderung allerdings anschaulicher.

Zu GVPOs:

- In gerichteten Mengen M hat definitionsgemäß jede endliche Teilmenge eine obere Schranke in M. Ist M endlich, so gilt dies auch für M selbst, d.h. M hat ein Supremum in M; für unendliche M gilt das nicht. Die GVPO-Eigenschaft folgt deshalb nicht trivial aus der Eigenschaft gerichtet von Mengen (s. Korollar A.2.6.4).

Existenz kleinster Elemente in VPOs

Lemma A.3.1.3 (Ex. kleinster Elemente in VPOs)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine VPO, d.h. eine KVPO oder GVPO. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element in P, bezeichnet mit $\bot$, das durch das Supremum der leeren Kette bzw. Menge gegeben ist, d.h.: $\bot = \bigsqcup \emptyset$.

Korollar A.3.1.4 (Nichtleerheit von VPOs)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine VPO, d.h. eine KVPO oder GVPO. Dann gilt: $P \neq \emptyset$.

Beachte: Lemma A.3.1.3 gilt nicht für pVPOs, d.h. pVPOs $(P, \sqsubseteq)$ besitzen nicht notwendig ein kleinstes Element.

Beziehungen endlicher POs, KVPOs, GVPOs

Sei P eine endliche Menge und $\sqsubseteq$ eine Relation auf P.

Lemma A.3.1.5 (Endliche POs, KpVPOs, GpVPOs)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine partielle Ordnung.
2. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine KpVPO.
3. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine GpVPO.

Lemma A.3.1.6 (Endliche POs, KVPOs, GVPOs)

Sei $p \in P$ mit $p \sqsubseteq P$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine partielle Ordnung.
2. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine KVPO.
3. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine GVPO.

Äquivalenz von KVPOs und GVPOs

Theorem A.3.1.7 (Äquivalenz)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine KVPO.
2. $(P, \sqsubseteq)$ ist eine GVPO.

Beachte: Spielt die ketten- oder gerichtete-Mengen-Sicht einer vollständigen partiellen Ordnung keine Rolle, so sprechen wir einfacher von einer VPO anstatt genauer von einer KVPO oder GVPO; analog gilt dies für pVPOs.

Beispiele für pVPOs und VPOs (1)

- $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ist eine VPO (d.h. eine KVPO und GVPO).
  - Kleinstes Element: $\emptyset$
  - Kleinste obere Schranke $\bigsqcup K$ von K *Kette* $\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$:
    $$\bigcup_{K' \in K} K'$$
- Die Menge endlicher und unendlicher Zeichenreichen Z, partiell geordnet durch die folgendermaßen definierte Präfixrelation $\sqsubseteq_{pfx}$:

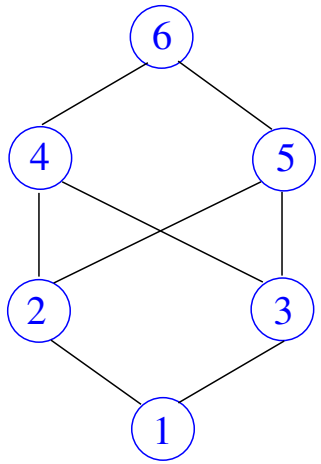
  $$\forall\, z, z'' \in Z.\ z \sqsubseteq_{pfx} z'' \iff_{df}$$
  $$z = z'' \vee (z \textit{ endlich } \wedge \exists\, z' \in Z.\ z +\!\!+ z' = z'')$$

  ist eine VPO (d.h. eine KVPO und GVPO).
- $(\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}, \leq)$ ist eine pVPO (d.h. eine KpVPO und GpVPO), aber keine VPO (d.h. keine KVPO und GVPO).

Beispiele für pVPOs und VPOs (2)

- $(\emptyset, \emptyset)$ ist eine pVPO (d.h. eine KpVPO und GpVPO), aber keine VPO (d.h. keine KVPO und GVPO).

  (Die KpVPO- (da keine nichtleeren Ketten in $\emptyset$) und GpVPO- (da $\emptyset$ einzige Teilmenge von $\emptyset$ ist und diese definitionsgemäss nicht gerichtet ist) Eigenschaften gelten beide in trivialerweise. Beachte dabei auch, dass aus $P = \emptyset$ auch die Gleichheit $\sqsubseteq = \emptyset \subseteq P \times P$ folgt.)
- Die durch folgendes Hasse-Diagramm gegebene partielle Ordnung $(P, \sqsubseteq)$ ist eine VPO (d.h. eine KVPO u. GVPO).



Beispiele für pVPOs und VPOs (3)

- Die Menge endlicher und nichtendlicher Zeichenreihen Z, partiell geordnet durch die folgendermaßen definierte lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_{lex}$:

  $$\forall\, s, t \in Z.\ s \sqsubseteq_{lex} t \iff_{df}$$
  $$s = t \vee (\exists\, p\ endlich, s', t' \in Z.\ s = p +\!\!+ s' \wedge t = p +\!\!+ t' \wedge (s' = \varepsilon \ \vee\ s'_1 < t'_1))$$

  wobei ε die leere Zeichenreihe bezeichnet, $w\downarrow_1$ das erste Zeichen einer Zeichenreihe w und $<$ die lexikographische Ordnung auf Zeichen, ist eine VPO (d.h. eine KVPO und GVPO).

(Anti-) Beispiele für VPOs

- $(\mathbb{N}, \leq)$ ist keine VPO (d.h. keine KVPO und GVPO).
- Die Menge endlicher Zeichenreihen Z_{endl}, partiell geordnet durch die
  - Präfixrelation $\sqsubseteq_{pfx}$ definiert durch:

    $$\forall\, s, s' \in Z_{endl}.\ s \sqsubseteq_{pfx} s' \iff_{df} \exists\, s'' \in Z_{endl}.\ s +\!\!+ s'' = s'$$

    ist keine VPO.
  - lexikographische Ordnung $\sqsubseteq_{lex}$ definiert durch:

    $$\forall\, s, t \in Z_{endl}.\ s \sqsubseteq_{lex} t \iff_{df} \exists\, p, s', t' \in Z_{endl}.\ s = p +\!\!+ s' \ \wedge\ t = p +\!\!+ t' \ \wedge\ (s' = \varepsilon \ \vee\ s'\downarrow_1 < t'\downarrow_1)$$

    wobei ε die leere Zeichenreihe bezeichnet, $w\downarrow_1$ das erste Zeichen einer Zeichenreihe w und $<$ die lexikographische Ordnung auf Zeichen ist keine VPO.
- $(\mathcal{P}_{endl}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ist keine VPO.

Übungsaufgabe A.3.1.8

Welche der durch folgende Hasse-Diagramme gegebenen partiellen Ordnungen sind K(p)VPOs? Welche sind G(p)VPOs?

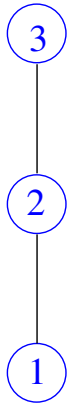
a)

b)

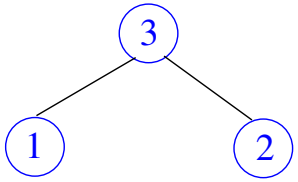
c)

d)

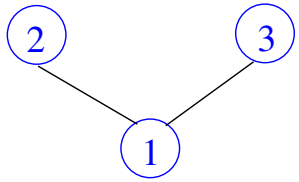
e)



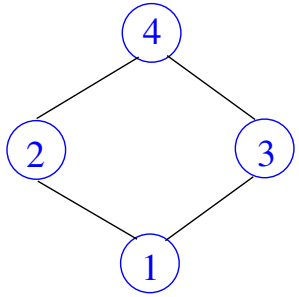
f)



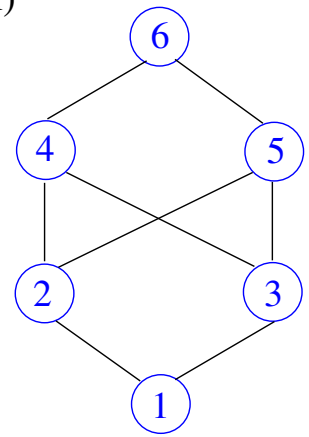
g)



h)



i)



Stark gerichtete VPOs: Eine GVPO-Variante

Zu GVPOs auf Grundlage stark gerichteter Mengen

- Ersetzt man in Definition A.3.1.2 gerichtete durch stark gerichtete Mengen, so erhält man SGVPOs.
- Eingedenk, dass eine stark gerichtete Menge nie leer ist (s. Definition A.2.6.5), gibt es auf Grundlage stark gerichteter Mengen kein Analogon zu GpVPOs.
- Eine stark gerichtete Menge M, in der definitionsgemäß jede endliche Teilmenge ein Supremum in M hat, muss selbst kein Supremum in M haben, wenn M unendlich ist. Die SGVPO-Eigenschaft folgt deshalb nicht in trivialer Weise aus der Eigenschaft stark gerichtet von Mengen (s. Korollar A.2.6.4).

Übungsaufgabe A.3.1.9

Betrachte die partielle Ordnung $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ mit $\sqsubseteq =_{df} |$, wobei $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ bezeichne, d.h. die Relation '$\cdot$ teilt $\cdot$' (ohne Rest), z.B. $5 \,|\, 35$.

Beweise oder widerlege: $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ ist eine

1. KpVPO
2. KVPO
3. GpVPO
4. GVPO
5. SGVPO

Beweis oder Gegenbeispiel.

A.3.2

Abbildungen auf vollständigen partiellen Ordnungen

Stetige Abbildungen auf KVPOs

Seien $(K, \sqsubseteq_K)$ und $(L, \sqsubseteq_L)$ KVPOs und sei $f \in [K \to L]$ eine Abbildung von K nach L.

Definition A.3.2.1 (Stetige Abbildungen auf KVPOs)

f heißt stetig gdw f ist monoton und

$$\forall\, K' \neq \emptyset\ \mathit{Kette} \subseteq K.\ f(\bigsqcup_K K') =_L \bigsqcup_L f(K')$$

(Erhalt kleinster oberer Schranken)

Beachte: $\forall\, T \subseteq K.\ f(T) =_{df} \{ f(t) \mid t \in T \}$

Stetige Abbildungen auf GVPOs

Seien $(G, \sqsubseteq_G)$ und $(H, \sqsubseteq_H)$ GVPOs und sei $f \in [G \to H]$ eine Abbildung von G nach H.

Definition A.3.2.2 (Stetige Abbildungen a. GVPOs)

f heißt stetig gdw

$$\forall\, G' \neq \emptyset \text{ gerichtet } \subseteq G.\ f(G') \text{ gerichtet } \subseteq H \wedge f(\bigsqcup_G G') =_H \bigsqcup_H f(G')$$

(Erhalt kleinster oberer Schranken)

Beachte: $\forall\, T \subseteq G.\ f(T) =_{df} \{ f(t) \mid t \in T \}$

Monotoniecharakterisierung

Seien $(K, \sqsubseteq_K), (L, \sqsubseteq_L)$ KVPOs und $(G, \sqsubseteq_G), (H, \sqsubseteq_H)$ GVPOs.

Lemma A.3.2.3 (Monotoniecharakterisierung)

1. $f : K \to L$ ist monoton

   gdw $\forall\, K' \neq \emptyset$ *Kette* $\subseteq K$.

   $$f(K') \text{ Kette} \subseteq L \wedge f(\bigsqcup_K K') \sqsupseteq_L \bigsqcup_L f(K')$$

2. $g : G \to H$ ist monoton

   gdw $\forall\, G' \neq \emptyset$ *gerichtet* $\subseteq G$.

   $$g(G') \text{ gerichtet} \subseteq H \ \wedge \ g(\bigsqcup_G G') \sqsupseteq_H \bigsqcup_H g(G')$$

Strikte Funktionen auf KVPOs und GVPOs

Seien $(K, \sqsubseteq_K), (L, \sqsubseteq_L)$ KVPOs mit kleinsten Elementen $\bot_K$ bzw. $\bot_L$, seien $(G, \sqsubseteq_G), (H, \sqsubseteq_H)$ GVPOs mit kleinsten Elementen $\bot_G$ bzw. $\bot_H$ und seien $f \in [K \overset{stet}{\to} L]$, $g \in [G \overset{stet}{\to} H]$ stetige Funktionen.

Definition A.3.2.4 (Strikte Funktionen auf VPOs)

f und g heißen strikt, wenn die Gleichheiten

- $f(\bigsqcup_K K') =_L \bigsqcup_L f(K')$, $g(\bigsqcup_G G') =_H \bigsqcup_H g(G')$

auch für $K' = \emptyset$ und $G' = \emptyset$ gelten, d.h., wenn die Gleichheiten

- $f(\bigsqcup_K \emptyset) =_K f(\bot_K) =_L \bot_L =_L \bigsqcup \emptyset$
- $f(\bigsqcup_G \emptyset) =_G g(\bot_G) =_H \bot_H =_H \bigsqcup \emptyset$

erfüllt sind.

A.3.3

Konstruktionsmechanismen für vollständige partielle Ordnungen

Typische KVPO- und GVPO-Konstruktionen

Die im folgenden angebenen Konstruktionsprinzipien gelten für

- KVPOs
- GVPOs

in gleicher Weise; deshalb schreiben wir einfacher stets VPO (statt genauer KVPO und GVPO).

Typische VPO-Konstruktionen: Flache VPOs

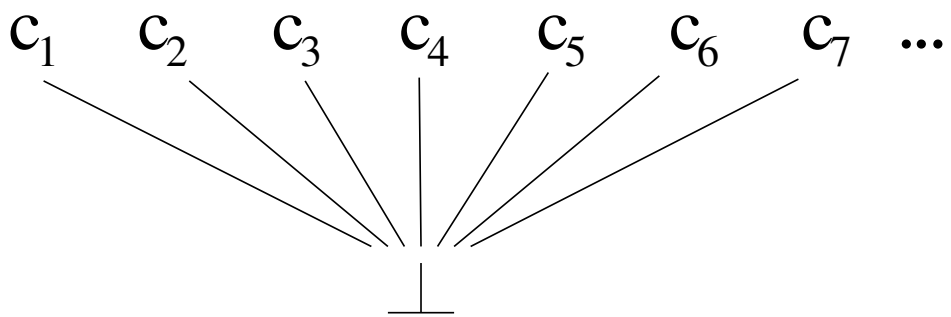
Lemma A.3.3.1 (Flache VPO-Konstruktion)

Sei C eine Menge. Dann gilt:

$(C \dot\cup \{\bot\}, \sqsubseteq_{flach})$ mit $\sqsubseteq_{flach}$ definiert durch

$$\forall\, c, d \in C \dot\cup \{\bot\}.\ c \sqsubseteq_{flach} d \iff_{df} c = \bot \ \vee \ c = d$$

ist eine VPO, eine sog. flache VPO.



Typische VPO-Konstruktionen: Flache pVPOs

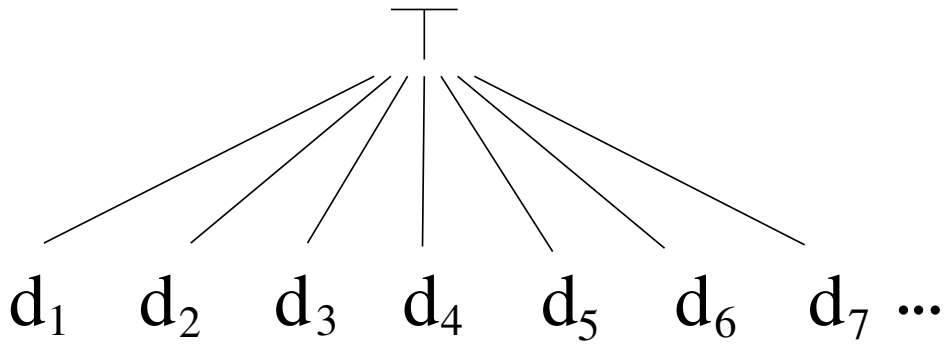
Lemma A.3.3.2 (Flache pVPO-Konstruktion)

Sei D eine Menge. Dann gilt:

$(D \dot\cup \{\top\}, \sqsubseteq_{flach})$ mit $\sqsubseteq_{flach}$ definiert durch

$$\forall\, d, e \in D \dot\cup \{\top\}.\ d \sqsubseteq_{flat} e \iff_{df} e = \top \ \vee \ d = e$$

ist eine pVPO, eine sog. flache pVPO.



Typische VPO-Konstruktionen: Produkte (1)

Lemma A.3.3.3 (Nichtstrikte Produktkonstruktion)

Seien $(P_1, \sqsubseteq_1), (P_2, \sqsubseteq_2), \ldots, (P_n, \sqsubseteq_n)$ VPOs. Dann gilt:

Das nichtstrikte Produkt (engl. non-strict product) $(\times P_i, \sqsubseteq_\times)$, wobei

- $\times P_i =_{df} P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$ das kartesische Produkt aller P_i, $1 \leq i \leq n$, ist
- $\sqsubseteq_\times$ punktweise definiert ist durch

  $\forall\, (p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n) \in \times P_i.$

  $$(p_1, \ldots, p_n) \sqsubseteq_\times (q_1, \ldots, q_n) \iff_{df} \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.\ p_i \sqsubseteq_i q_i$$

ist eine VPO.

Typische VPO-Konstruktionen: Produkte (2)

Lemma A.3.3.4 (Strikte Produktkonstruktion)

Seien $(P_1, \sqsubseteq_1), (P_2, \sqsubseteq_2), \ldots, (P_n, \sqsubseteq_n)$ VPOs. Dann gilt:

Das strikte Produkt (engl. strict (or smash) product) $(\bigotimes P_i, \sqsubseteq_\otimes)$, wobei

- $\bigotimes P_i =_{df} \times P_i$ das kartesische Produkt aller P_i ist
- $\sqsubseteq_\otimes =_{df} \sqsubseteq_\times$ punktweise definiert ist mit folgender zusätzlicher (identifizierender) Setzung:

$$(p_1, \ldots, p_n) = \bot \iff_{df} \exists\, i \in \{1, \ldots, n\}.\ p_i = \bot_i$$

ist eine VPO.

Typische VPO-Konstruktionen: Summen (1)

Lemma A.3.3.5 (Direkte Summenkonstruktion)

Seien $(P_1, \sqsubseteq_1), (P_2, \sqsubseteq_2), \ldots, (P_n, \sqsubseteq_n)$ VPOs. Dann gilt:

Die direkte Summe (engl. separated (or direct) sum) $(\bigoplus_\perp P_i, \sqsubseteq_{\oplus_\perp})$, wobei

- $\bigoplus_\perp P_i =_{df} P_1 \dot\cup P_2 \dot\cup \ldots \dot\cup P_n \dot\cup \{\perp\}$ die disjunkte Vereinigung aller P_i, $1 \leq i \leq n$, und $\perp$ ein frisches in keinem P_i enthaltenem Element ist
- $\sqsubseteq_{\oplus_\perp}$ definiert ist durch

  $\forall\, p, q \in \bigoplus_\perp P_i.\ p \sqsubseteq_{\oplus_\perp} q \iff_{df}$

  $p = \perp \ \vee\ (\exists\, i \in \{1, \ldots, n\}.\ p, q \in P_i \ \wedge\ p \sqsubseteq_i q)$

ist eine VPO.

Typische VPO-Konstruktionen: Summen (2)

Lemma A.3.3.6 (Vereinigungssummenkonstruktion)

Seien $(P_1, \sqsubseteq_1), (P_2, \sqsubseteq_2), \ldots, (P_n, \sqsubseteq_n)$ VPOs. Dann gilt:

Die Vereinigungssumme (engl. coalesced sum) $(\bigoplus_\vee P_i, \sqsubseteq_{\oplus_\vee})$, wobei

- $\bigoplus_\vee P_i =_{df} P_1 \backslash \{\bot_1\} \dot\cup P_2 \backslash \{\bot_2\} \dot\cup \ldots \dot\cup P_n \backslash \{\bot_n\} \dot\cup \{\bot\}$ die disjunkte Vereinigung aller P_i, $1 \leq i \leq n$, und $\bot$ ein frisches in keinem P_i enthaltenem kleinsten Element ist, das mit jedem der ursprünglichen kleinsten Elemente $\bot_i$ der Mengen P_i identifiziert wird und diese ersetzt, d.h., $\bot =_{df} \bot_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$
- $\sqsubseteq_{\oplus_\vee}$ ist definiert durch

  $\forall\, p, q \in \bigoplus_\vee P_i.\ p \sqsubseteq_{\oplus_\vee} q \iff_{df}$

  $$p = \bot \ \vee\ (\exists\, i \in \{1, \ldots, n\}.\ p, q \in P_i \ \wedge\ p \sqsubseteq_i q)$$

ist eine VPO.

Typ. VPO-Konstruktionen: Funktionenraum

Lemma A.3.3.7 (Stetige Funktionenraumkonstrukt.)

Seien $(P, \sqsubseteq_P)$ und $(Q, \sqsubseteq_Q)$ pVPOs. Dann gilt:

Der Raum stetiger Funktionen (oder stetige Funktionenraum) (engl. continuous function space) $([P \overset{stet}{\to} Q], \sqsubseteq_{sfr})$, wobei

- $[P \overset{stet}{\to} Q]$ die Menge stetiger Abbildungen von P auf Q ist
- $\sqsubseteq_{sfr}$ punktweise definiert ist durch

  $$\forall f, g \in [P \overset{stet}{\to} Q]. f \sqsubseteq_{sfr} g \iff_{df} \forall p \in P. f(p) \sqsubseteq_Q g(p)$$

ist eine pVPO. Der stetige Funktionenraum ist eine VPO, wenn $(Q, \sqsubseteq_Q)$ eine VPO ist.

Beachte: Die Definition von $\sqsubseteq_{sfr}$ nutzt nicht aus, dass P eine pVPO ist. Diese Forderung ist nur gestellt, um die Definition auf stetige Funktionen zuschneiden zu können.

A.4

Verbände

A.4.1

Verbände, vollständige Verbände

Verbände und vollständige Verbände

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung, $P \neq \emptyset$.

Definition A.4.1.1 (Verband)

$(P, \sqsubseteq)$ ist ein Verband, wenn jede nichtleere endliche Teilmenge P' von P eine kleinste obere und größte untere Schranke in P besitzt.

Definition A.4.1.2 (Vollständiger Verband)

$(P, \sqsubseteq)$ ist ein vollständiger Verband, wenn jede Teilmenge P' von P eine kleinste obere und größte untere Schranke in P besitzt.

Beachte: Verbände und vollständige Verbände sind spezielle partielle Ordnungen.

Eigenschaften vollständiger Verbände

Lemma A.4.1.3 (Existenz extremer Elemente)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband. Dann gibt es ein

1. kleinstes Element in P, bezeichnet mit $\bot$, für das gilt: $\bot = \bigsqcup \emptyset = \bigsqcap P$.
2. größtes Element in P, bezeichnet mit $\top$, für das gilt: $\top = \bigsqcap \emptyset = \bigsqcup P$.

Lemma A.4.1.4 (Charakterisierungslemma)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $(P, \sqsubseteq)$ ist ein vollständiger Verband.
2. Jede Teilmenge von P hat eine kleinste obere Schranke.
3. Jede Teilmenge von P hat eine größte untere Schranke.

Eigenschaften endlicher Verbände

Lemma A.4.1.5 (Endlich impliziert vollständig)

Jeder endliche Verband $(P, \sqsubseteq)$ ist vollständig.

Korollar A.4.1.6 (Endlich impl. Ex. kl./gr. Elem.)

Jeder endliche Verband besitzt ein kleinstes und ein größtes Element.

Vollständige Halbverbände

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung, $P \neq \emptyset$.

Definition A.4.1.7 (Vollständiger Halbverband)

$(P, \sqsubseteq)$ ist ein vollständiger

1. Vereinigungshalbverband (engl. join semi-lattice) gdw
   $\forall\, \emptyset \neq Q \subseteq P.\ \bigsqcup Q$ *existiert* $\in P$.
2. Schnitthalbverband (engl. meet semi-lattice) gdw
   $\forall\, \emptyset \neq Q \subseteq P.\ \bigsqcap Q$ *existiert* $\in P$.

Eigenschaften vollständiger Halbverbände (1)

Proposition A.4.1.8 (Extr. Schrank. in vollst. Halbv.)

Ist $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger

1. Vereinigungshalbverband, so gilt: $\bigsqcup P$ *existiert* $\in P$ (wohingegen $\bigsqcup \emptyset$ ($\widehat{=} \bot$) i.a. nicht in P existiert).
2. Schnitthalbverband, so gilt: $\bigsqcap P$ *existiert* $\in P$ (wohingegen $\bigsqcap \emptyset$ ($\widehat{=} \top$) i.a. nicht in P existiert).

Informell: In einem vollständigen Vereinigungshalbverband muss nicht notwendig ein kleinstes Element existieren, in einem vollständigen Schnitthalbverband nicht notwendig ein größtes Element.

Eigenschaften vollständiger Halbverbände (2)

Lemma A.4.1.9 (Ex. gr. Elem. in vollst. Verein.halbv.)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Vereinigungshalbverband. Dann gilt:

$\bigsqcup P$ *existiert* $\in P$ und ist das (eindeutig bestimmte i.a. mit $\top$ bezeichnete) größte Element in P, d.h.: $\top = \bigsqcup P$.

Lemma A.4.1.10 (Ex. kl. El. in vollst. Schnitthalbv.)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Schnitthalbverband. Dann gilt:

$\bigsqcap P$ *existiert* $\in P$ und ist das (eindeutig bestimmte i.a. mit $\bot$ bezeichnete) kleinste Element in P, d.h.: $\bot = \bigsqcap P$.

Charakterisier. oberer u. unterer Schranken (1)

...in vollständigen Halbverbänden.

Lemma A.4.1.11 (Ch. o./u. Schrank. in vollst. Halbv.)

1. Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Vereinigungshalbverband und $Q \subseteq P$ eine Teilmenge von P.

   Hat Q untere Schranken in P, d.h. ist $\{p \in P \mid p \sqsubseteq Q\} \neq \emptyset$, so gilt: $\bigsqcap Q$ *existiert* $\in P$ und

   $$\bigsqcap Q = \bigsqcup \{p \in P \mid p \sqsubseteq Q\}$$

2. Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Schnitthalbverband und $Q \subseteq P$ eine Teilmenge von P.

   Hat Q obere Schranken in P, d.h. ist $\{p \in P \mid Q \sqsubseteq p\} \neq \emptyset$, so gilt: $\bigsqcup Q$ *existiert* $\in P$ und

   $$\bigsqcup Q = \bigsqcap \{p \in P \mid Q \sqsubseteq p\}$$

Charakterisier. oberer u. unterer Schranken (2)

Lemma A.4.1.12 (Kl./gr. Elem. in vollst. Halbverb.)

Ist $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger

1. Vereinigungshalbverband und $\bigsqcup \emptyset$ *existiert* $\in P$, dann ist $\bigsqcup \emptyset$ das (eindeutig bestimmte mit $\bot$ bezeichnete) kleinste Element in P, d.h.: $\bot = \bigsqcup \emptyset$.
2. Schnitthalbverband und $\bigsqcap \emptyset$ *existiert* $\in P$, dann ist $\bigsqcap \emptyset$ das (eindeutig bestimmte mit $\top$ bezeichnete) größte Element in P, d.h.: $\top = \bigsqcap \emptyset$.

Bezieh. zw. vollst. Halbverb. und Verbänden

Lemma A.4.1.13 (Vollst. Halbverbände u. Verbände)

Ist $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger

1. Vereinigungshalbverband und $\bigsqcup \emptyset$ *existiert* $\in P$
2. Schnitthalbverband und $\bigsqcap \emptyset$ *existiert* $\in P$

so ist $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband.

Übungsaufgabe A.4.1.14

Zeige oder widerlege:

Ist $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband, so ist

1. $(P\backslash\{\bot\}, \sqsubseteq_{\backslash\bot})$ ein vollständiger Vereinigungshalbverband.
2. $(P\backslash\{\top\}, \sqsubseteq_{\backslash\top})$ ein vollständiger Schnitthalbverband.

wobei $\sqsubseteq_{\backslash\bot}$ und $\sqsubseteq_{\backslash\top}$ die Einschränkungen von $\sqsubseteq$ von P auf $P\backslash\{\bot\}$ bzw. $P\backslash\{\top\}$ bezeichnen. Beweis oder Gegenbeispiel.

Bezieh. zw. Verbänden und vollst. part. Ordn.

Lemma A.4.1.15 (Vollständige Verbände und VPOs)

Ist $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband, so ist $(P, \sqsubseteq)$ eine VPO (d.h. eine KVPO und GVPO).

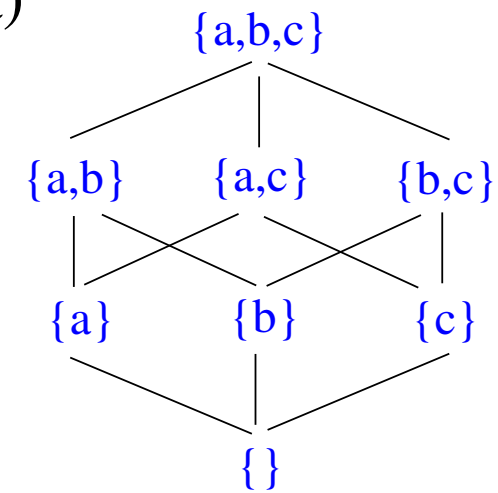
Korollar A.4.1.16 (Endliche Verbände und VPOs)

Ist $(P, \sqsubseteq)$ ein endlicher Verband, so ist $(P, \sqsubseteq)$ eine VPO (d.h. eine KVPO und GVPO).

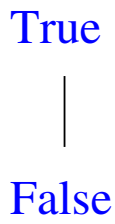
Beachte: Lemma A.4.1.15 gilt nicht für Verbände.

Beispiele vollständiger Verbände

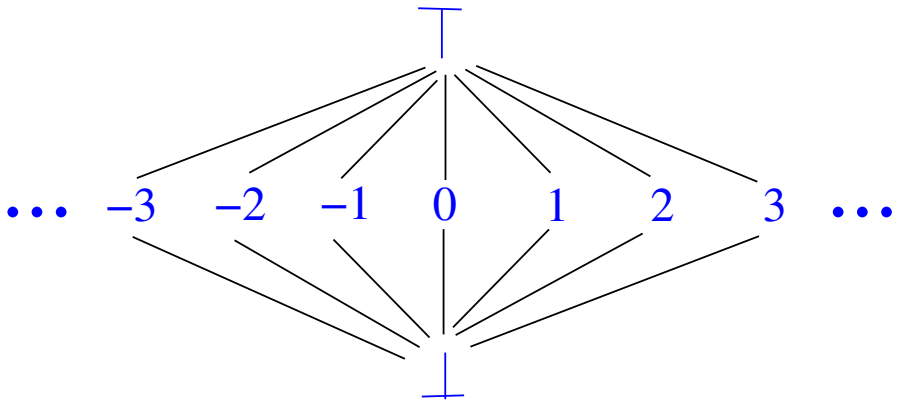
a)



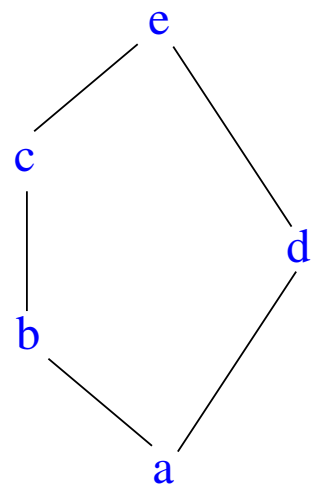
b)



c)

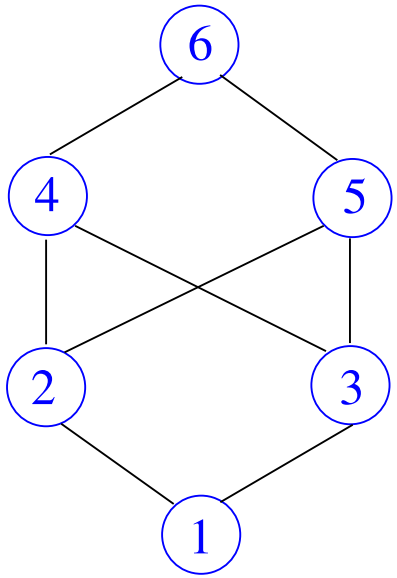


d)



(Anti-) Beispiele

- Die durch folgendes Hasse-Diagramm gegebene partielle Ordnung $(P, \sqsubseteq)$ ist kein Verband (wohl aber eine VPO).



- $(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ist kein vollständiger Verband (und auch keine VPO).

Übungsaufgabe A.4.1.17

Welche der durch die folgenden Hasse-Diagramme gegebenen partiellen Ordnungen sind Verbände? Welche sind vollständige Verbände?

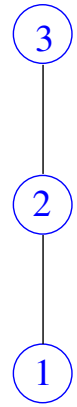
a)

b)

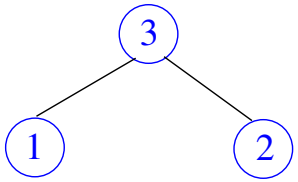
c)

d)

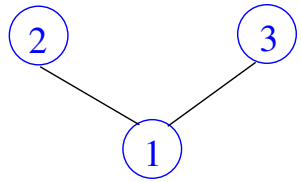
e)



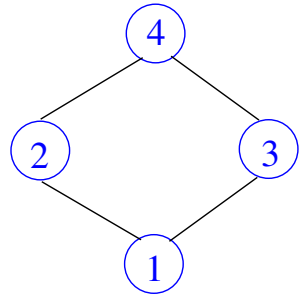
f)



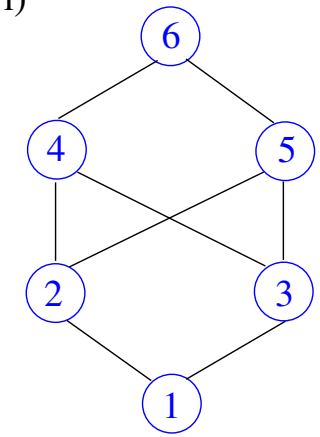
g)



h)



i)



Übungsaufgabe A.4.1.18

Betrachte die partielle Ordnung $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ mit $\sqsubseteq =_{df} |$, wobei $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ bezeichne, d.h. die Relation '$\cdot$ teilt $\cdot$' (ohne Rest), z.B. $5 \,|\, 35$.

Beweise oder widerlege: $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ ist ein

1. Verband
2. vollständiger Verband
3. vollständiger Vereinigungshalbverband
4. vollständiger Schnitthalbverband

Beweis oder Gegenbeispiel.

Zusammenfassung, Überblick

Korollar A.4.1.19

Sei $P \neq \emptyset$ nichtleere Menge und $\sqsubseteq$ Relation auf P. Dann gilt:

$(P, \sqsubseteq)$ endlicher Verband (L. A.4.1.5) $\vee$

$(P, \sqsubseteq)$ vollständiger Vereinigungshalbverband und

$\bigsqcup \emptyset$ *existiert* $\in P$ (L. A.4.1.13(1)) $\vee$

$(P, \sqsubseteq)$ vollständiger Schnitthalbverband und

$\bigsqcap \emptyset$ *existiert* $\in P$ (L. A.4.1.13(2))

$\Rightarrow$ $(P, \sqsubseteq)$ vollständiger Verband

(D. A.4.1.2 & L. A.4.1.14) $\Rightarrow$ $(P, \sqsubseteq)$ Verband & vollständige partielle Ordnung

(D. A.4.1.1 & D. A.3.1.1/2) $\Rightarrow$ $(P, \sqsubseteq)$ partielle Ordnung

(D. A.2.1.2) $\Rightarrow$ $(P, \sqsubseteq)$ Halbordnung

Übungsaufgabe A.4.1.20

Bezeichne mit

$$\mathcal{HO}, \mathcal{PO}, \mathcal{V}, \mathcal{VPO}, \mathcal{VV}, \mathcal{EV}, \mathcal{VVHV}, \mathcal{VVHV}_\perp, \mathcal{VSHV}, \mathcal{VSHV}^\top$$

die Mengen aller Halbordnungen $\mathcal{HO}$, partiellen Ordnungen $\mathcal{PO}$, Verbände $\mathcal{V}$, vollständigen partiellen Ordnungen $\mathcal{VPO}$, vollständigen Verbände $\mathcal{VV}$, endlichen Verbände $\mathcal{EV}$, vollständigen Vereinigungshalbverbände ohne/mit kleinstem Element $\mathcal{VVHV}/\mathcal{VVHV}_\perp$ und Schnitthalbverbände ohne/mit größtem Element $\mathcal{VSHV}/\mathcal{VSHV}^\top$.

1. Welche weiteren Implikationen oder Äquivalenzen gelten über die in Korollar A.4.1.19 genannten hinaus? (Beweis oder Gegenbeispiel)
2. Welche Inklusionen oder (Mengen-) Gleichheiten gelten zwischen $\mathcal{HO}$, $\mathcal{PO}$, $\mathcal{V}$, usw.? (Beweis oder Gegenbeispiel)

A.4.2

Distributive, additive Abbildungen auf Verbänden

Distributive, additive Abb. auf Verbänden

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $f \in [P \to P]$ eine Abbildung auf P.

Definition A.4.2.1 (Distributive, additive Abbildung)

f heißt

- distributiv (oder $\sqcap$-stetig) (engl. distributive, $\sqcap$-continuous) gdw
$$\forall\, \emptyset \neq P' \subseteq P.\ f(\bigsqcap P') = \bigsqcap f(P')$$
(Erhalt größter unterer Schranken)
- additiv (or $\sqcup$-stetig) (engl. additive, $\sqcup$-continuous) gdw
$$\forall\, \emptyset \neq P' \subseteq P.\ f(\bigsqcup P') = \bigsqcup f(P')$$
(Erhalt kleinster oberer Schranken)

Beachte: $\forall\, T \subseteq P.\ f(T) =_{df} \{ f(t) \mid t \in T \}$

Monotoniecharakterisierung

...über den Erhalt größter unterer und kleinster oberer Schranken:

Lemma A.4.2.2 (Monotoniecharakterisierung)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $f \in [P \to P]$ eine Abbildung auf P. Dann gilt:

$$f \text{ ist monoton} \iff \forall\, P' \subseteq P.\ f(\bigsqcap P') \sqsubseteq \bigsqcap f(P')$$
$$\iff \forall\, P' \subseteq P.\ f(\bigsqcup P') \sqsupseteq \bigsqcup f(P')$$

Beachte: $\forall\, T \subseteq P.\ f(T) =_{df} \{ f(t) \mid t \in T \}$

Nützl. Resultate über Mon., Distr., Additivität

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $f \in [P \to P]$ eine Abbildung auf P.

Lemma A.4.2.3

f ist distributiv gdw f ist additiv.

Lemma A.4.2.4

f ist monoton, wenn f distributiv (oder additiv) ist.

(d.h., Distributivität/Additivität implizieren Monotonie)

A.4.3

Verbandshomomorphismen und -isomorphismen

Verbandshomomorphismen u. -isomorphismen

Seien $(P, \sqsubseteq_P)$, $(R, \sqsubseteq_R)$ zwei Verbände und $f \in [P \to R]$ eine Abbildung von P nach R.

Definition A.4.3.1 (Verbandshomomorphismus)

f heißt Verbandshomomorphismus, wenn gilt:

$$\forall\, p, q \in P.\ f(p \sqcup_P q) = f(p) \sqcup_Q f(q) \wedge$$
$$f(p \sqcap_P q) = f(p) \sqcap_Q f(q)$$

Definition A.4.3.2 (Verbandsisomorphismus)

1. f heißt Verbandsisomorphismus, wenn f ein Verbandshomomorphismus und bijektiv ist.
2. $(P, \sqsubseteq_P)$ und $(R, \sqsubseteq_R)$ heißen isomorph, wenn es einen Verbandsisomorphismus zwischen P und R gibt.

Nützliche Resultate (1)

Seien $(P, \sqsubseteq_P)$, $(R, \sqsubseteq_R)$ zwei Verbände und $f \in [P \to R]$ eine Abbildung von P nach R.

Lemma A.4.3.3

$$f \in [P \overset{hom}{\to} R] \;\Rightarrow\; f \in [P \overset{mon}{\to} R]$$

Die Rückrichtung der Implikation aus Lemma A.4.3.3 gilt nicht, aber folgende schwächere Beziehung ist gültig:

Lemma A.4.3.4

$$f \in [P \overset{mon}{\to} R] \;\Rightarrow\; \forall\, p, q \in P.\; f(p \sqcup_P q) \sqsupseteq_Q f(p) \sqcup_Q f(q) \;\wedge\; f(p \sqcap_P q) \sqsubseteq_Q f(p) \sqcap_Q f(q)$$

Nützliche Resultate (2)

Seien $(P, \sqsubseteq_P)$, $(R, \sqsubseteq_R)$ zwei Verbände und $f \in [P \to R]$ eine Abbildung von P nach R.

Lemma A.4.3.5

$$f \in [P \overset{iso}{\to} R] \;\Rightarrow\; f^{-1} \in [R \overset{iso}{\to} P]$$

Lemma A.4.3.6

$$f \in [P \overset{iso}{\to} R] \iff f \in [P \overset{po-hom}{\to} R] \text{ wrt } \sqsubseteq_P \text{ and } \sqsubseteq_Q$$

A.4.4

Modulare, distributive und Boolesche Verbände

Modulare Verbände

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein Verband mit Schnittoperation $\sqcap$ und Vereinigungsoperation $\sqcup$.

Lemma A.4.4.1

$$\forall\, p, q, r \in P.\ p \sqsubseteq r \Rightarrow p \sqcup (q \sqcap r) \sqsubseteq (p \sqcup q) \sqcap r$$

Definition A.4.4.2 (Modularer Verband)

$(P, \sqsubseteq)$ heißt modular, wenn gilt:

$$\forall\, p, q, r \in P.\ p \sqsubseteq r \Rightarrow p \sqcup (q \sqcap r) = (p \sqcup q) \sqcap r$$

Charakterisierung modularer Verbände

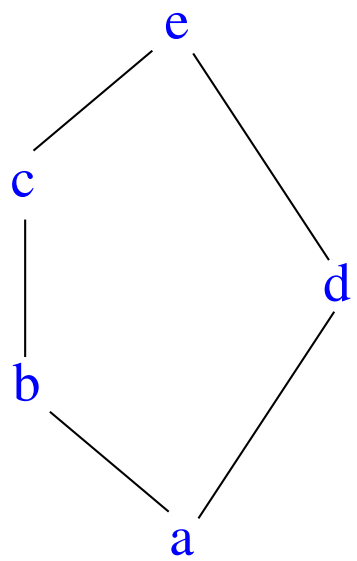
Theorem A.4.4.3 (Charakt. modularer Verbände)

Ein Verband $(P, \sqsubseteq)$ ist

1. modular gdw

   $$\forall\, p, q, r \in P.\ p \sqsubseteq q,\ p \sqcap r = q \sqcap r,\ p \sqcup r = q \sqcup r \Rightarrow p = q$$

2. nicht modular gdw $(P, \sqsubseteq)$ enthält einen Unterverband, der isomorph ist zum Verband:



Distributive Verbände

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein Verband mit Schnittoperation $\sqcap$ und Vereinigungsoperation $\sqcup$.

Lemma A.4.4.4

1. $\forall\, p, q, r \in P.\ p \sqcup (q \sqcap r) \sqsubseteq (p \sqcup q) \sqcap (p \sqcup r)$
2. $\forall\, p, q, r \in P.\ p \sqcap (q \sqcup r) \sqsupseteq (p \sqcap q) \sqcup (p \sqcap r)$

Definition A.4.4.5 (Distributiver Verband)

$(P, \sqsubseteq)$ heißt distributiv, wenn gilt:

1. $\forall\, p, q, r \in P.\ p \sqcup (q \sqcap r) = (p \sqcup q) \sqcap (p \sqcup r)$
2. $\forall\, p, q, r \in P.\ p \sqcap (q \sqcup r) = (p \sqcap q) \sqcup (p \sqcap r)$

Hin zur Charakt. distributiver Verbände

Lemma A.4.4.6

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $\forall\, p, q, r \in P.\ p \sqcup (q \sqcap r) = (p \sqcup q) \sqcap (p \sqcup r)$
2. $\forall\, p, q, r \in P.\ p \sqcap (q \sqcup r) = (p \sqcap q) \sqcup (p \sqcap r)$

Somit reicht es aus, in Definition A.4.4.5 die Gültigkeit von Eigenschaft (1) oder von Eigenschaft (2) zu fordern.

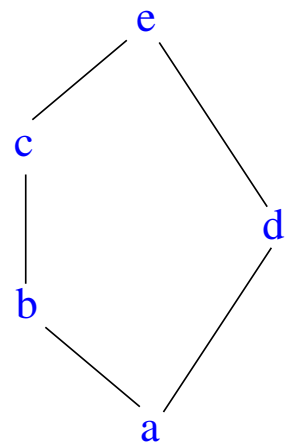
Charakterisierung distributiver Verbände

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein Verband.

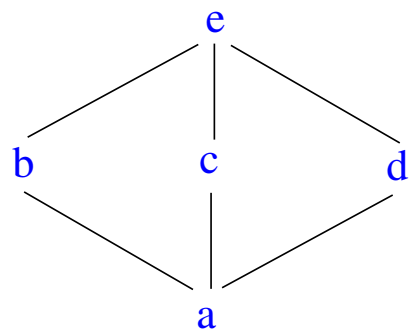
Theorem A.4.4.7 (Charakt. distributiver Verbände)

$(P, \sqsubseteq)$ ist nicht distributiv gdw $(P, \sqsubseteq)$ enthält einen Unterverband, der isomorph ist zu einem der folgenden zwei Verbände:

a)



b)



Korollar A.4.4.8

Ist $(P, \sqsubseteq)$ distributiv, so ist $(P, \sqsubseteq)$ auch modular.

Boolesche Verbände

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein Verband mit Schnittoperation $\sqcap$, Vereinigungsoperation $\sqcup$, kleinstem Element $\bot$ und größtem Element $\top$.

Definition A.4.4.9 (Komplement)

Seien $p, q \in P$. Dann gilt:

1. q heißt ein Komplement von p, wenn gilt: $p \sqcup q = \top$ und $p \sqcap q = \bot$.
2. P heißt komplementär, wenn alle Elemente in P ein Komplement besitzen.

Definition A.4.4.10 (Boolescher Verband)

$(P, \sqsubseteq)$ heißt Boolesch, wenn $(P, \sqsubseteq)$ komplementär und distributiv ist und $\bot \neq \top$ gilt.

Beachte: Ist $(P, \sqsubseteq)$ Boolesch, so hat jedes Element $p \in P$ ein eindeutig bestimmtes Komplement in P, bezeichnet mit $\bar{p}$.

Nützliche Resultate

Lemma A.4.4.11

Seien $(P, \sqsubseteq)$ ein Boolescher Verband und $p, q, r \in P$. Dann gilt:

1. $\bar{\bar{p}} = p$ (Involutionsgesetz)
2. $\overline{p \sqcup q} = \bar{p} \sqcap \bar{q}, \quad \overline{p \sqcap q} = \bar{p} \sqcup \bar{q}$ (De Morgansche Gesetze)
3. $p \sqsubseteq q \iff \bar{p} \sqcup q = \top \iff p \sqcap \bar{q} = \bot$
4. $p \sqsubseteq q \sqcup r \iff p \sqcap \bar{q} \sqsubseteq r \iff \bar{q} \sqsubseteq \bar{p} \sqcup r$

Boolescher Verbandshomo-, -isomorphismus

Seien $(P, \sqsubseteq_P)$, $(Q, \sqsubseteq_Q)$ zwei Boolesche Verbände und $f \in [P \to Q]$ eine Funktion von P nach Q.

Definition A.4.4.12 (Boolescher V.-Homorphismus)

f heißt Boolescher Verbandshomomorphismus, wenn f ein Ver- bandshomomorphismus ist und es gilt:

$$\forall\, p \in P.\ f(\bar{p}) = \overline{f(p)}$$

Definition A.4.4.13 (Boolescher V.-Isomorphismus)

f heist Boolescher Verbandsisomorphismus, wenn f ein Boolescher Verbandshomomorphismus und bijektiv ist.

Nützliche Resultate

Seien $(P, \sqsubseteq_P)$, $(Q, \sqsubseteq_Q)$ zwei Boolesche Verbände und $f \in [P \overset{bhom}{\to} Q]$ ein Boolescher Verbandshomomorphismus von P nach Q.

Lemma A.4.4.14

$$f(\bot) = \bot \wedge f(\top) = \top$$

Lemma A.4.4.15

f ist ein Boolescher Verbandsisomorphismus gdw

$$f(\bot) = \bot \wedge f(\top) = \top$$

Zusammenfassung, Überblick

Korollar A.4.4.16

Sei $P \neq \emptyset$ nichtleere Menge und $\sqsubseteq$ Relation auf P. Dann gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & (P, \sqsubseteq) \text{ Boolescher Verband} \\
(\text{Def. A.4.4.10}) & \Rightarrow & (P, \sqsubseteq) \text{ Distributiver Verband} \\
(\text{Kor. A.4.4.8}) & \Rightarrow & (P, \sqsubseteq) \text{ Modularer Verband} \\
(\text{Def. A.4.4.2}) & \Rightarrow & (P, \sqsubseteq) \text{ Verband} \\
(\text{Def. A.4.1.1}) & \Rightarrow & (P, \sqsubseteq) \text{ partielle Ordnung} \\
(\text{Def. A.2.1.2}) & \Rightarrow & (P, \sqsubseteq) \text{ Halbordnung}
\end{array}
$$

Korollar A.4.4.17

$$\mathcal{HO} \supset \mathcal{PO} \supset \mathcal{V} \supset \mathcal{MV} \supset \mathcal{DV} \supset \mathcal{BV}$$

wobei alle Inklusionen echt sind und $\mathcal{HO}$, $\mathcal{PO}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{MV}$, $\mathcal{DV}$ und $\mathcal{BV}$ die Mengen aller Halbordnungen, partiellen Ordnungen, Verbände, modularen, distributiven und Booleschen Verbände bezeichnen.

Übungsaufgabe A.4.4.18

Betrachte die partielle Ordnung $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ mit $\sqsubseteq =_{df} |$, wobei $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ bezeichne, d.h. die Relation '$\cdot$ teilt $\cdot$' (ohne Rest), z.B. $5 \mid 35$.

Beweise oder widerlege: $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ ist ein

1. modularer Verband
2. distributiver Verband
3. Boolescher Verband

Beweis oder Gegenbeispiel.

A.4.5

Konstruktionsmechanismen für Verbände

Typ. Verbandskonstrukt.: Flache Verbände

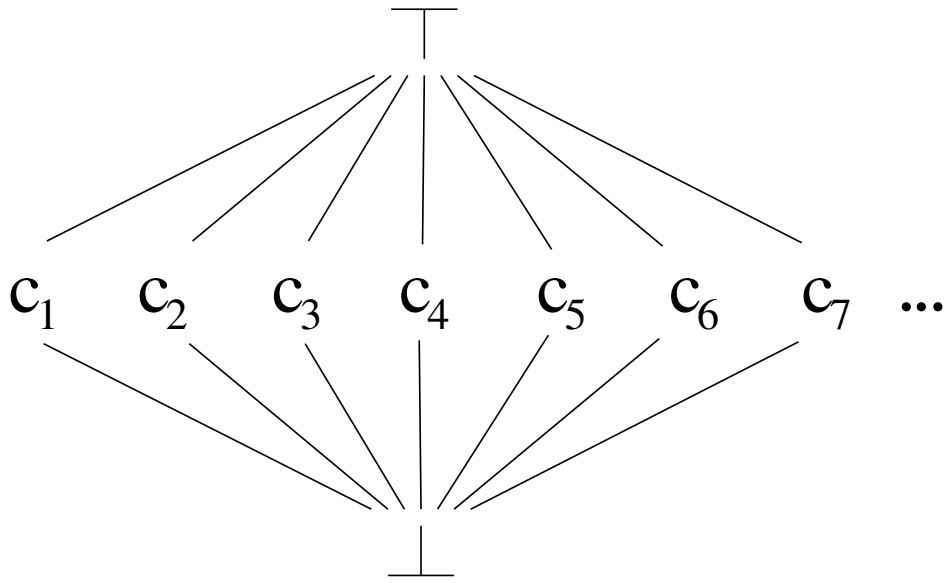
Lemma A.4.5.1 (Flache Verbandskonstruktion)

Sei C eine Menge. Dann gilt:

$(C \dot\cup \{\bot, \top\}, \sqsubseteq_{flach})$ mit $\sqsubseteq_{flach}$ definiert durch

$$\forall\, c, d \in C \dot\cup \{\bot, \top\}.\ c \sqsubseteq_{flach} d \iff_{df} c = \bot \vee c = d \vee d = \top$$

ist ein vollständiger Verband, ein sog. flacher Verband (engl. flat lattice or diamond lattice).



Typ. Verbandskonstrukt.: Produkte, Summen,...

Analog zum Konstruktionsmechanismus für flache VPOs übertragen sich auch die Konstruktionsmechanismen für

- nichtstrikte Produkte
- strikte Produkte
- direkte Summen
- Vereinigungssummen
- stetige (genauer: additive, distributive) Funktionenräume

von VPOs auf (vollständige) Verbände (s. Anhang A.3.3).

A.4.6

Ordnungstheoretische und algebraische Verbandssicht

Motivation

Definition A.4.1.1 führt Verbände als spezielle

- geordnete Mengen $(P, \sqsubseteq)$

ein, was einer

- ordnungstheoretischen Verbandssicht entspricht.

Alternativ können Verbände als spezielle

- algebraische Strukturen $(P, \sqcap, \sqcup)$

eingeführt werden, was einer

- algebraischen Verbandssicht entspricht.

In der Folge zeigen wir, dass beide Sichten gleichwertig sind:

- Ordnungstheoretisch eingeführte Verbände können algebraisch aufgefasst werden und umgekehrt.

Verbände als algebraische Strukturen

Definition A.4.6.1 (Algebraischer Verband)

Ein algebraischer Verband ist eine algebraische Struktur $(P, \sqcap, \sqcup)$, wobei

- $P \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge ist.
- $\sqcap, \sqcup : P \times P \to P$ zwei Verknüpfungen sind, so dass für alle Elemente $p, q, r \in P$ folgende Rechengesetze gelten (Infix-Notation):
  - Kommutativgesetze: $p \sqcap q = q \sqcap p$
    $p \sqcup q = q \sqcup p$
  - Assoziativgesetze: $(p \sqcap q) \sqcap r = p \sqcap (q \sqcap r)$
    $(p \sqcup q) \sqcup r = p \sqcup (q \sqcup r)$
  - Absorptionsgesetze: $(p \sqcap q) \sqcup p = p$
    $(p \sqcup q) \sqcap p = p$

Eigenschaften algebraischer Verbände

Sei $(P, \sqcap, \sqcup)$ ein algebraischer Verband.

Lemma A.4.6.2 (Idempotenzgesetze)

Für alle $p \in P$ erfüllen die Verknüpfungen $\sqcap, \sqcup : P \times P \to P$ folgende Gesetze:

- Idempotenzgesetze: $p \sqcap p = p$
  $p \sqcup p = p$

Lemma A.4.6.3

Für alle $p, q \in P$ erfüllen die Verknüpfungen $\sqcap, \sqcup : P \times P \to P$ folgende Äquivalenzen:

1. $p \sqcap q = p \iff p \sqcup q = q$
2. $p \sqcap q = p \sqcup q \iff p = q$

Induzierte (partielle) Ordnung

Sei $(P, \sqcap, \sqcup)$ ein algebraischer Verband.

Lemma A.4.6.4

Die Relation $\sqsubseteq \subseteq P \times P$ auf P definiert durch

$$\forall\, p, q \in P.\ p \sqsubseteq q \iff_{df} p \sqcap q = p$$

ist eine partielle Ordnung auf P, d.h., $\sqsubseteq$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

Definition A.4.6.5 (Induzierte partielle Ordnung)

Die Relation $\sqsubseteq$ aus Lemma A.4.6.4 heißt induzierte (partielle) Ordnung auf $(P, \sqcap, \sqcup)$.

Eigenschaften induzierter partieller Ordnungen

Sei $(P, \sqcap, \sqcup)$ ein algebraischer Verband und $\sqsubseteq$ die induzierte partielle Ordnung auf $(P, \sqcap, \sqcup)$.

Lemma A.4.6.6

Für alle $p, q \in P$ existieren Infimum ($\widehat{=}$ größte untere Schranke) und Supremum ($\widehat{=}$ kleinste obere Schranke) der Menge $\{p, q\}$ und sind durch die Bilder der Verknüpfungen $\sqcap$ bzw. $\sqcup$ angewendet auf p und q gegeben, d.h.:

$$\forall\, p, q \in P.\ \bigsqcap\{p, q\} = p \sqcap q \ \wedge\ \bigsqcup\{p, q\} = p \sqcup q$$

Lemma A.4.6.6 kann induktiv ausgedehnt werden:

Lemma A.4.6.7

Sei $\emptyset \neq Q \subseteq P$ eine nichtleere endliche Teilmenge von P. Dann gilt:

$$\exists\, gus, kos \in P.\ gus = \bigsqcap Q \ \wedge\ kos = \bigsqcup Q$$

Algebraische Verbände ordnungstheoretisch

Korollar A.4.6.8 (Von $(P, \sqcap, \sqcup)$ zu $(P, \sqsubseteq)$)

Sei $(P, \sqcap, \sqcup)$ ein algebraischer Verband. Dann gilt:

$(P, \sqsubseteq)$, wobei $\sqsubseteq$ die induzierte partielle Ordnung auf $(P, \sqcap, \sqcup)$ ist, ist ein ordnungstheoretischer Verband im Sinn von Definition A.4.1.1.

Induzierte algebraische Verknüpfungen

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein ordnungstheoretischer Verband.

Definition A.4.6.9 (Induzierte algebraische Verkn.)

Die partielle Ordnung $\sqsubseteq$ von $(P, \sqsubseteq)$ induziert zwei Verknüpfungen $\sqcap$ und $\sqcup$ auf $P \times P$ und P definiert durch:

1. $\forall\, p, q \in P.\ p \sqcap q =_{df} \bigsqcap\{p, q\}$
2. $\forall\, p, q \in P.\ p \sqcup q =_{df} \bigsqcup\{p, q\}$

Eigensch. der induz. algebraischen Verkn. (1)

Seien $(P, \sqsubseteq)$ ein ordnungstheoretischer Verband und $\sqcap$ und $\sqcup$ die von $(P, \sqsubseteq)$ induzierten algebraischen Verknüpfungen.

Lemma A.4.6.10

Seien $p, q \in P$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $p \sqsubseteq q$
2. $p \sqcap q = p$
3. $p \sqcup q = q$

Eigensch. der induz. algebraischen Verkn. (2)

Seien $(P, \sqsubseteq)$ ein ordnungstheoretischer Verband und $\sqcap$ und $\sqcup$ die von $(P, \sqsubseteq)$ induzierten algebraischen Verknüpfungen.

Lemma A.4.6.11

Für alle $p, q, r \in P$ erfüllen die induzierten Verknüpfungen $\sqcap$ und $\sqcup$ folgende Gesetze:

- Kommutativgesetze: $p \sqcap q = q \sqcap p$
  $p \sqcup q = q \sqcup p$
- Assoziativgesetze: $(p \sqcap q) \sqcap r = p \sqcap (q \sqcap r)$
  $(p \sqcup q) \sqcup r = p \sqcup (q \sqcup r)$
- Absorptionsgesetze: $(p \sqcap q) \sqcup p = p$
  $(p \sqcup q) \sqcap p = p$
- Idempotenzgesetze: $p \sqcap p = p$
  $p \sqcup p = p$

Ordnungstheoretische Verbände algebraisch

Korollar A.4.6.12 (Von $(P, \sqsubseteq)$ zu $(P, \sqcap, \sqcup)$)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein ordnungstheoretischer Verband. Dann gilt:

$(P, \sqcap, \sqcup)$, wobei $\sqcap$ und $\sqcup$ die von $(P, \sqsubseteq)$ induzierten Verknüpfungen sind, ist ein algebraischer Verband im Sinn von Definition A.4.6.1.

Äquivalenz (1)

...der ordnungtheoretischen und algebraischen Sicht von Verbänden.

Von ordnungsheoretischen zu algebraischen Verbänden:

- Ein ordnungstheoretischer Verband $(P, \sqsubseteq)$ kann durch den Übergang von $(P, \sqsubseteq)$ zu $(P, \sqcap, \sqcup)$, wobei $\sqcap$ und $\sqcup$ die induzierten Verknüpfungen von $(P, \sqsubseteq)$ sind, als algebraischer Verband aufgefasst werden

Von algebraischen zu ordnungstheoretischen Verbänden:

- Ein algebraischer Verband $(P, \sqcap, \sqcup)$ kann durch den Übergang von $(P, \sqcap, \sqcup)$ zu $(P, \sqsubseteq)$, wobei $\sqsubseteq$ die von $(P, \sqcap, \sqcup)$ induzierte partielle Ordnung ist, als ordnungstheoretischer Verband aufgefasst werden.

Äquivalenz (2)

Zusammen erlaubt uns das, einfach(er) von einem Verband P zu sprechen und lediglich präziser von P als

- ordnungstheoretischem Verband $(P, \sqsubseteq)$
- algebraischem Verband $(P, \sqcap, \sqcup)$

um herauszustreichen, dass wir P abhängig vom Kontext als spezielle geordnete Menge oder algebraische Struktur sehen.

Tief und Hoch vs. Null und Eins (1)

Sei P ein Verband mit kleinstem und größtem Element.

Betrachten wir P

- ordnungstheoretisch in der Form $(P, \sqsubseteq)$, ist es zweckmässig von seinem kleinsten und größten Element konzeptuell als Tief $\bot$ und Hoch $\top$ bzgl. $\sqsubseteq$ zu denken mit:
  - Tief $\bot \in P$: $\bot = \bigsqcup \emptyset$
  - Hoch $\top \in P$: $\top = \bigsqcap \emptyset$
- algebraisch in der Form $(P, \sqcap, \sqcup)$, ist es zweckmäßig von seinem kleinsten und größten Element konzeptuell als Null $\mathbf{0}$ und Eins $\mathbf{1}$ bzgl. $\sqcap$ und $\sqcup$ zu denken, wobei $(P, \sqcap, \sqcup)$ (bei Existenz eindeutig bestimmte) Null- und Einselemente hat, für die gilt:
  - Null-Element $\mathbf{0} \in P$: $\forall\, p \in P.\ p \sqcup \mathbf{0} = p$
  - Eins-Element $\mathbf{1} \in P$: $\forall\, p \in P.\ p \sqcap \mathbf{1} = p$

Tief und Hoch vs. Null und Eins (2)

Lemma A.4.6.13

Sei P ein Verband. Dann gilt:

- $(P, \sqsubseteq)$ besitzt ein Tief-Element $\bot$ gdw $(P, \sqcap, \sqcup)$ besitzt ein Null-Element $\mathbf{0}$; existieren $\bot$ und $\mathbf{0}$ gilt:

$$(\bigsqcup \emptyset =)\ \bot = \mathbf{0}$$

- $(P, \sqsubseteq)$ besitzt ein Hoch-Element $\top$ gdw $(P, \sqcap, \sqcup)$ besitzt ein Eins-Element $\mathbf{1}$; existieren $\top$ und $\mathbf{1}$ gilt:

$$(\bigsqcap \emptyset =)\ \top = \mathbf{1}$$

Zur Angemessenheit d. beiden Verbandssichten

In der Mathematik ist häufig die

- algebraische Verbandssicht geeigneter als sie konform zu anderen algebraischen Strukturen ist ('eine Menge mit bestimmten Gesetzen genügenden Verknüpfungsvorschriften') wie z.B. Gruppen, Ringen, Körpern, Vektorräumen, Kategorien, usw., die in der Mathematik untersucht und behandelt werden.

In der Informatik ist häufig die

- ordnungstheoretische Verbandssicht geeigneter, da sich die Ordnungsrelation häufig als '· trägt mehr/weniger Information als ·', '· ist mehr/weniger definiert als ·,' '· ist stärker/schwächer als ·', usw. interpretieren und verstehen lässt, was oft sehr natürlich zu Problemen passt, die in der Informatik untersucht und behandelt werden.

Übungsaufgabe A.4.6.14

Betrachte den Verband $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ mit $\sqsubseteq =_{df} |$, wobei $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ bezeichne, d.h. die Relation '$\cdot$ teilt $\cdot$' (ohne Rest), z.B. $5 \,|\, 35$.

Definiere $(\mathbb{N}_0, \wedge, \vee)$, d.h. gib das algebraisch definierte Gegenstück zu $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ an. Definiere dazu die Schnitt- und Vereinigungsoperation auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$:

1. $\wedge : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$
2. $\vee : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

Welches ist das

1. Null-Element $\mathbf{0}$
2. Eins-Element $\mathbf{1}$

von $(\mathbb{N}_0, \wedge, \vee)$?

A.5

Fixpunkttheoreme

A.5.1

Fixpunkte, Türme

Fixpunkte von Funktionen

Definition A.5.1.1 (Fixpunkt)

Sei M eine Menge, $f \in [M \to M]$ eine Funktion auf M und $m \in M$ ein Element von M. Wir legen fest:

m heißt Fixpunkt von f gdw $f(m) = m$.

Kleinste, größte Fixpunkte in part. Ordnungen

Definition A.5.1.2 (Least, Greatest Fixed Point)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung, $f \in [P \to P]$ eine Funktion auf P und p ein Fixpunkt von f, d.h. $f(p) = p$. Wir legen fest:

p heißt

- kleinster Fixpunkt von f, bezeichnet mit μf, gdw $\forall\, q \in P.\ f(q) = q \Rightarrow p \sqsubseteq q$
- größter Fixpunkt von f, bezeichnet mit νf, gdw $\forall\, q \in P.\ f(q) = q \Rightarrow q \sqsubseteq p$

Türme in kettenvollständigen part. Ordnungen

Definition A.5.1.3 (f-Turm in C)

Sei $(C, \sqsubseteq)$ eine KVPO, $f \in [C \to C]$ eine Funktion auf C und $T \subseteq C$ eine Teilmenge von C. Wir legen fest:

T heißt f-Turm in C gdw

1. $\bot \in T$.
2. Wenn $t \in T$, dann auch $f(t) \in T$.
3. Wenn $T' \subseteq T$ Kette in C, dann $\bigsqcup T' \in T$.

Kleinste Türme in kettenv. part. Ordnungen

Lemma A.5.1.4 (Kleinster f-Turm in C)

Der Schnitt

$$I =_{df} \bigcap \{ T \mid T \text{ } f\text{-tower in } C \}$$

aller f-Türme in C ist der kleinste f-Turm in C, d.h.

1. I ist ein f-Turm in C.
2. $\forall\, T$ f-Turm in C. $I \subseteq T$.

Lemma A.5.1.5 (Kleinster f-Türme und Ketten)

Der kleinste f-Turm in C ist eine Kette in C, wenn f expandierend ist.

A.5.2

Fixpunkttheoreme für vollständige partielle Ordnungen

Fixpunkte expandierender/monotoner Funkt.

Fixpunkttheorem A.5.2.1 (Expandierende Funkt.)

Sei $(C, \sqsubseteq)$ eine KVPO und $f \in [C \stackrel{exp}{\to} C]$ eine expandierende Funktion auf C. Dann gilt:

Das Supremum des kleinsten f-Turms in C ist ein Fixpunkt von f.

Fixpunkttheorem A.5.2.2 (Monotone Funktionen)

Sei $(C, \sqsubseteq)$ eine KVPO und $f \in [C \stackrel{mon}{\to} C]$ eine monotone Funktion auf C. Dann gilt:

f hat einen eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkt μf, der durch das Supremum des kleinsten f-Turms in C gegeben ist.

Beachte

- Theorem A.5.2.1 und Theorem A.5.2.2 sichern für expandierende Funktionen die Existenz eines Fixpunkts und für monotone Funktionen die Existenz eines eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkts zu, sie liefern jedoch kein konstruktives Verfahren zur Berechnung oder zur näherungsweisen Berechnung dieser Fixpunkte.
- Das ist anders für Theorem A.5.2.3, das für stetige Funktionen ein (Näherungs-) Verfahren zur Berechnung des eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkts liefert. Daraus erklärt sich die größere Bedeutung stetiger gegenüber expandierender und monotoner Funktionen in der Praxis, und dass man, wo immer möglich, stetige Funktionen wählt.

Kleinste Fixpunkte stetiger Funktionen

Fixpunkttheorem A.5.2.3 (Knaster, Tarski, Kleene)

Sei $(C, \sqsubseteq)$ eine KVPO und $f \in [C \stackrel{stet}{\to} C]$ eine stetige Funktion auf C. Dann gilt:

f hat einen eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkt $\mu f \in C$, der durch das Supremum der (sog.) Kleene-Kette $\{\bot, f(\bot), f^2(\bot), \ldots\}$ gegeben ist, d.h.:

$$\mu f = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\bot) = \bigsqcup \{\bot, f(\bot), f^2(\bot), \ldots\}$$

Erinnerung: $f^0 =_{df} Id_C$; $f^i =_{df} f \circ f^{i-1}$, $i > 0$.

Beweis von Fixpunkttheorem A.5.2.3 (1)

Wir müssen zeigen:

$$\mu f = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\bot) = \bigsqcup \{ f^i(\bot) \mid i \geq 0 \}$$

1. existiert,
2. ist ein Fixpunkt von f,
3. ist der kleinste Fixpunkt von f.

Beweis von Fixpunkttheorem A.5.2.3 (2)

1. Existenz

- Nach Definition von $\bot$ als kleinstem Element von C und von f^0 als Identität auf C erhalten wir: $\bot = f^0(\bot) \sqsubseteq f^1(\bot) = f(\bot)$.
- Da f stetig und daher auch monoton ist, erhalten wir mit mithilfe vollständiger Induktion: $\forall\, i, j \in \mathbb{N}_0.\ i < j \Rightarrow f^i(\bot) \sqsubseteq f^{i+1}(\bot) \sqsubseteq f^j(\bot)$.
- Somit ist die Menge $\{f^i(\bot) \mid i \geq 0\}$ eine (möglicherweise unendliche) Kette in C.
- Da $(C, \sqsubseteq)$ eine KVPO ist und $\{f^i(\bot) \mid i \geq 0\}$ eine Kette in C ist, impliziert dies nach Definition einer KVPO, dass die kleinste obere Schranke der Kette $\{f^i(\bot) \mid i \geq 0\}$

$$\bigsqcup \{f^i(\bot) \mid i \geq 0\} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\bot) \text{ existiert.}$$

Beweis von Fixpunkttheorem A.5.2.3 (3)

2. Fixpunkteigenschaft

$$
\begin{aligned}
& & & f(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_0} f^i(\bot)) \\
(f \text{ stetig}) & & = & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_0} f(f^i(\bot)) \\
& & = & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_1} f^i(\bot) \\
(C' =_{df} \{f^i \bot \mid i \geq 1\} \text{ ist eine Kette} & \Rightarrow & & \\
\bigsqcup C' \text{ existiert} = \bot \sqcup \bigsqcup C') & & = & \bot \sqcup \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_1} f^i(\bot) \\
(f^0(\bot) =_{df} \bot) & & = & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}_0} f^i(\bot)
\end{aligned}
$$

Beweis von Fixpunkttheorem A.5.2.3 (4)

3. Kleinste Fixpunkteigenschaft

- Sei c ein beliebiger Fixpunkt von f. Dann gilt: $\bot \sqsubseteq c$.
- Da f stetig und daher auch monoton ist, erhalten wir mithilfe vollständiger Induktion:
  $\forall\, i \in \mathbb{N}_0.\ f^i(\bot) \sqsubseteq f^i(c)\ (= c)$.
- Da c ein Fixpunkt von f ist, impliziert das:
  $\forall\, i \in \mathbb{N}_0.\ f^i(\bot) \sqsubseteq c\ (= f^i(c))$.
- Somit ist c eine obere Schranke der Menge
  $\{f^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.
- Da $\{f^i(\bot) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ eine Kette ist und $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\bot)$ nach Definition die kleinste obere Schranke dieser Kette ist, erhalten wir die gewünschte noch fehlende Inklusionsbeziehung:

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\bot) \sqsubseteq c.$$

□

Kleinste bedingte Fixpunkte

Sei $(C, \sqsubseteq)$ eine KVPO, $f \in [C \to C]$ eine Funktion auf C und $d, c_d \in C$ zwei Elemente von C.

Definition A.5.2.4 (Kleinster bedingter Fixpunkt)

c_d heißt kleinster bedingter Fixpunkt von f bezüglich d (engl. least conditional fixed point) gdw c_d ist der kleinste Fixpunkt von C mit $d \sqsubseteq c_d$, d.h.:

$$\forall x \in C.\ f(x) = x \ \wedge \ d \sqsubseteq x \Rightarrow c_d \sqsubseteq x$$

Kleinste bedingte Fixpunkte stetiger Funkt.

Theorem A.5.2.5 (Bedingtes Fixpunkttheorem)

Sei $(C, \sqsubseteq)$ eine KVPO, $d \in C$ und $f \in [C \overset{stet}{\to} C]$ eine stetige Funktion auf C, die für d expandierend ist, d.h. $d \sqsubseteq f(d)$. Dann gilt:

f hat einen kleinsten bedingten Fixpunkt $\mu f_d \in C$, der durch das Supremum der (verallgemeinerten) Kleene-Kette $\{d, f(d), f^2(d), \ldots\}$ gegeben ist, d.h.:

$$\mu f_d = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(d) = \bigsqcup \{d, f(d), f^2(d), \ldots\}$$

Endliche Fixpunkte

Sei $(C, \sqsubseteq)$ eine KVO, $d \in C$ und $f \in [C \overset{mon}{\to} C]$ eine monotone Funktion auf C.

Theorem A.5.2.6 (Endliches Fixpunkttheorem)

Wenn zwei aufeinanderfolgende Elemente der Kleene-Kette von f gleich sind, d.h., gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f^i(\bot) = f^{i+1}(\bot)$, so gilt: $\mu f = f^i(\bot)$.

Theorem A.5.2.7 (Endliches bedingtes Fixpunktth.)

Ist f expandierend für d, d.h. $d \sqsubseteq f(d)$, und sind zwei aufeinanderfolgende Elemente der (verallgemeinerten) Kleene-Kette von f bezüglich d gleich, d.h., gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f^i(d) = f^{i+1}(d)$, so gilt: $\mu f_d = f^i(d)$.

Beachte: Theorem A.5.2.6 und A.5.2.7 setzen keine Stetigkeit von f voraus. Monotonie (und Expandierenheit) von f reichen.

Hin zur Existenz endlicher Fixpunkte

Sei $(P, \sqsubseteq)$ eine partielle Ordnung und $p, r \in P$.

Definition A.5.2.8 (Kettenendliche part. Ordnung)

$(P, \sqsubseteq)$ heißt kettenendlich (engl. chain-finite) gdw P enthält keine unendlichen Ketten.

Definition A.5.2.9 (Endliches Element)

p heißt

- endlich (engl. finite) gdw die Menge $Q =_{df} \{q \in P \mid q \sqsubseteq p\}$ enthält keine unendliche Kette.
- endlich relativ zu r gdw die Menge $Q =_{df} \{q \in P \mid r \sqsubseteq q \sqsubseteq p\}$ enthält keine unendliche Kette.

Existenz endlicher Fixpunkte

...es gibt zahlreiche hinreichende Bedingungen für die Existenz kleinster bedingter Fixpunkte einer Funktion f, die in der Praxis oft erfüllt sind (s. Nielson/Nielson 1992), z.B.:

- der Definitions- und Wertebereich von f sind endlich oder kettenendlich,
- der kleinste Fixpunkt von f ist endlich,
- f ist von der Form $f(c) = c \sqcup g(c)$, wobei g eine monotone Funktion auf einem kettenendlichen (Daten-) Bereich ist.

Fixpunkttheoreme, Verbände und GVPOs

Beachte: Vollständige Verbände (s. Lemma A.4.1.13) und GVPOs mit einem kleinsten Element (s. Lemma A.3.1.5) sind auch KVPOs.

Daraus können wir schließen:

Korollar A.5.2.10 (Fixpunkte, Verbände, GVPOs)

Die Fixpunkttheoreme aus Kapitel A.5.2 gelten auch für Funktionen auf vollständigen Verbänden und GVPOs mit einem kleinsten Element.

A.5.3

Fixpunkttheoreme für Verbände

Fixpunkte monotoner Funktionen

Fixpunkttheorem A.5.3.1 (Knaster, Tarski)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $f \in [P \overset{mon}{\to} P]$ eine monotone Funktion auf P. Dann gilt:

1. f hat einen eindeutig bestimmten kleinsten Fixpunkt $\mu f \in P$, der gegeben ist durch: $\mu f = \bigsqcap \{p \in P \mid f(p) \sqsubseteq p\}$.
2. f hat einen eindeutig bestimmten größten Fixpunkt $\nu f \in P$, der gegeben ist durch $\nu f = \bigsqcup \{p \in P \mid p \sqsubseteq f(p)\}$.

Charakterisierungstheorem A.5.3.2 (Davis)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein Verband. Dann gilt:

$(P, \sqsubseteq)$ ist vollständig gdw jedes $f \in [P \overset{mon}{\to} P]$ hat einen Fixpunkt.

Der Fixpunktverband monotoner Funktionen

Theorem A.5.3.3 (Fixpunktverband)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband, $f \in [P \overset{mon}{\to} P]$ eine monotone Funktion auf P und $Fix(f) =_{df} \{p \in P \mid f(p) = p\}$ die Menge aller Fixpunkte von f. Dann gilt:

Jede Teilmenge $F \subseteq Fix(f)$ hat ein Supremum und ein Infimum in $Fix(f)$, d.h. $(Fix(f), \sqsubseteq_{\mid Fix(f)})$ ist ein vollständiger Verband.

Theorem A.5.3.4 (Fixpunktordnung)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $f \in [P \overset{mon}{\to} P]$ eine monotone Funktion auf P. Dann gilt:

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\bot) \sqsubseteq \mu f \sqsubseteq \nu f \sqsubseteq \bigsqcap_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\top)$$

Fixpunkte additiver/distributiver Funktionen

Für additive und distributive Funktionen werden die linke und die rechte Ungleichheit in Theorem A.5.3.4 zu Gleichheiten:

Fixpunkttheorem A.5.3.5 (Knaster, Tarski, Kleene)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $f \in [P \to P]$ eine Funktion auf P. Dann gilt: f hat einen eindeutig bestimmten

1. kleinsten Fixpunkt $\mu f \in P$ gegeben durch $\mu f = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\bot)$, wenn f additiv ist, d.h. $f \in [P \stackrel{add}{\to} P]$.
2. größten Fixpunkt $\nu f \in P$ gegeben durch $\nu f = \bigsqcap_{i \in \mathbb{N}_0} f^i(\top)$, wenn f distributiv ist, d.h. $f \in [P \stackrel{dis}{\to} P]$.

Erinnerung: $f^0 =_{df} Id_C$; $f^i =_{df} f \circ f^{i-1}$, $i > 0$.

A.6

Fixpunktinduktion

Zulässige Prädikate

Fixpunktinduktion erlaubt Eigenschaften über Fixpunkte zu beweisen. Wesentlich dafür ist der Begriff zulässiger Prädikate:

Definition A.6.1 (Zulässiges Prädikat)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $\phi : P \to \mathbb{B}$ ein Prädikat auf P:

ϕ heißt zulässig (oder $\sqcup$-zulässig) (engl. admissible, $\sqcup$-admissible) gdw für jede Kette $C \subseteq P$ gilt:

$$(\forall\, c \in C.\ \phi(c)) \Rightarrow \phi(\bigsqcup C)$$

Lemma A.6.2

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $\phi : P \to \mathbb{B}$ ein zulässiges Prädikat auf P. Dann gilt: $\phi(\bot) = \mathbf{wahr}$.

Beweis. Aus der Zulässigkeit von ϕ folgt $\phi(\bigsqcup \emptyset) = \mathbf{wahr}$. Zusätzlich gilt $\bot = \bigsqcup \emptyset$, was den Beweis vervollständigt.

Hinreichende Bedingungen für Zulässigkeit

Theorem A.6.3 (Zulässigkeitsbedingung 1)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $\phi : P \to \mathbb{B}$ ein Prädikat auf P. Dann gilt:

ϕ ist zulässig, wenn es einen vollständigen Verband $(Q, \sqsubseteq_Q)$ und zwei additive Funktionen $f, g \in [P \overset{add}{\to} Q]$ gibt, so dass gilt:

$$\forall\, p \in P.\ \phi(p) \iff f(p) \sqsubseteq_Q g(p)$$

Theorem A.6.4 (Zulässigkeitsbedingung 2)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband und $\phi, \psi : P \to \mathbb{B}$ zwei zulässige Prädikate auf P. Dann gilt:

Die Konjunktion von ϕ und ψ, das Prädikat $\phi \ \wedge\ \psi$ definiert durch

$$\forall\, p \in P.\ (\phi \ \wedge\ \psi)(p) =_{df} \phi(p) \wedge \psi(p)$$

ist zulässig.

Fixpunktinduktion auf vollständigen Verbänden

Theorem A.6.5 (Fixpunktinduktion auf vollst. Verb.)

Sei $(P, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband, $f \in [P \overset{add}{\to} P]$ eine additive Funktion auf P und $\phi : P \to \mathbb{B}$ ein zulässiges Prädikat auf P. Dann gilt:

Die Gültigkeit von

- $\forall\, p \in P.\ \phi(p) \Rightarrow \phi(f(p))$ (Induktionsschritt)

impliziert die Gültigkeit von $\phi(\mu f)$.

Beachte: Der Induktionsanfang, d.h. die Gültigkeit von $\phi(\bot)$, folgt aus der Zulässigkeit von ϕ (vgl. Lemma A.6.2) und ist daher bereits mit dem Beweis der Zulässigkeit von ϕ bewiesen.

Fixpunktinduktion auf KVPOs (= CCPOs)

Der Begriff der Zulässigkeit von Prädikaten überträgt sich in natürlicher Weise von vollständigen Verbänden auf kettenvollständige partielle Ordnungen (KVPOs (= CCPOs)).

Theorem A.6.6 (Fixpunktinduktion auf KVPOs)

Sei $(C, \sqsubseteq)$ eine KVPO, $f \in [C \overset{mon}{\to} C]$ eine monotone Funktion auf C und $\phi : C \to \mathbb{B}$ ein zulässiges Prädikat auf C. Dann gilt:

Die Gültigkeit von

- $\forall\, c \in C.\ \phi(c) \Rightarrow \phi(f(c))$ (Induktionsschritt)

impliziert die Gültigkeit von $\phi(\mu f)$.

Beachte: Theorem A.6.6 gilt (natürlich auch) für einen vollständigen Verband $(P, \sqsubseteq)$ anstelle einer KVPO $(C, \sqsubseteq)$.

A.7

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (1)


André Arnold, Irène Guessarian. *Mathematics for Computer Science*. Prentice Hall, 1996.


Roland Backhouse, Roy Crole, Jeremy R. Gibbons (Hrsg.). *Algebraic and Coalgebraic Methods in the Mathematics of Program Construction*. International Summer School and Workshop, Oxford, UK, April 10-14, 2000, Revised Lectures, Springer-V., LNCS 2297, 2002. (Chapter 1, Ordered Sets and Complete Lattices by Hilary A. Priestley; Chapter 2, Algebras and Coalgebras by Peter Aczel; Chapter 4, Calculating Functional Programs by Jeremy Gibbons)


Rudolf Berghammer. *Ordnungen, Verbände und Relationen mit Anwendungen*. Vieweg+Teubner, 2008.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (2)

Rudolf Berghammer. *Ordnungen, Verbände und Relationen mit Anwendungen*. Springer-V., 2012. (Kapitel 1, Ordnungen und Verbände; Kapitel 2.4, Vollständige Verbände; Kapitel 3, Fixpunkttheorie mit Anwendungen; Kapitel 4, Vervollständigung und Darstellung mittels Vervollständigung; Kapitel 5, Wohlgeordnete Mengen und das Auswahlaxiom)

Rudolf Berghammer. *Ordnungen und Verbände: Grundlagen, Vorgehensweisen und Anwendungen*. Springer-V., 2013. (Kapitel 2, Verbände und Ordnungen; Kapitel 3.4, Vollständige Verbände; Kapitel 4, Fixpunkttheorie mit Anwendungen; Kapitel 5, Vervollständigung und Darstellung mittels Vervollständigung; Kapitel 6, Wohlgeordnete Mengen und das Auswahlaxiom)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (3)

- Garret Birkhoff. *Applications of Lattice Algebra*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 30(2):115-122, 1934.
- Garret Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, 3rd edition, 1967.
- Peter Crawley, Robert P. Dilworth. *Algebraic Theory of Lattices*. Prentice Hall, 1973.
- Brian A. Davey, Hilary A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 2nd edition, 2002. (Chapter 1, Ordered Sets; Chapter 2, Lattices and Complete Lattices; Chapter 8, CPOs and Fixpoint Theorems)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (4)


Anne C. Davis. *A Characterization of Complete Lattices*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):311-319, 1955.


Marcel Erné. *Einführung in die Ordnungstheorie*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, 1982.


Helmuth Gericke. *Theorie der Verbände*. Bibliographisches Institut, 2. Auflage, 1967.


George Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkhäuser, 2nd edition, 1998. (Chapter 1, First Concepts; Chapter 2, Distributive Lattices; Chapter 3, Congruences and Ideals; Chapter 5, Varieties of Lattices)


George Grätzer. *Lattice Theory: Foundation*. Birkhäuser, 2011.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (5)


George Grätzer, Friedrich Wehrung (Hrsg.). *Lattice Theory: Special Topics and Applications, Vol. I*. Birkhäuser, 2014.


George Grätzer, Friedrich Wehrung (Hrsg.). *Lattice Theory: Special Topics and Applications, Vol. II*. Birkhäuser, 2016.


Paul R. Halmos. *Naive Set Theory*. Springer-V., Reprint, 2001. (Chapter 6, Ordered Pairs; Chapter 7, Relations; Chapter 8, Functions)


Hans Hermes. *Einführung in die Verbandstheorie*. Springer-V., 2. Auflage, 1967.

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (6)

- Richard Johnsonbaugh. *Discrete Mathematics*. Pearson, 7th edition, 2009. (Chapter 3, Functions, Sequences, and Relations)
- Stephen C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North Holland, 1952. (Reprint, North Holland, 1980)
- Seymour Lipschutz. *Set Theory and Related Topics*. McGraw Hill Schaum's Outline Series, 2nd edition, 1998. (Chapter 4, Functions; Chapter 6, Relations)
- David Makinson. *Sets, Logic and Maths for Computing*. Springer-V., 2008. (Chapter 1, Collecting Things Together: Sets; Chapter 2, Comparing Things: Relations)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (7)


George Markowsky. *Chain-complete Posets and Directed Sets with Applications*. Algebra Universalis 6(1):53-68, 1976.


Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson. *Finiteness Conditions for Fixed Point Iteration*. In Proceedings of the 7th ACM Conference on LISP and Functional Programming (LFP'92), 96-108, 1992.


Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: A Formal Introduction*. Wiley, 1992. (Chapter 4, Denotational Semantics)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (8)

Hanne Riis Nielson, Flemming Nielson. *Semantics with Applications: An Appetizer*. Springer-V., 2007. (Chapter 5, Denotational Semantics)

Flemming Nielson, Hanne Riis Nielson, Chris Hankin. *Principles of Program Analysis*. Springer-V., 2nd edition, 2005. (Appendix A, Partially Ordered Sets)

Steven Roman. *Lattices and Ordered Sets*. Springer-V., 2008.

Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Malte Isberner. *Grundlagen der höheren Informatik. Induktives Vorgehen*. Springer-V., 2014. (Kapitel 5.1, Ordnungsrelationen; Kapitel 5.2, Ordnungen und Teilstrukturen)

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang A (9)


Bernhard Steffen, Oliver Rüthing, Michael Huth. *Mathematical Foundations of Advanced Informatics: Inductive Approaches*. Springer-V., 2018. (Chapter 5.1, Order Relations; Chapter 5.2, Orders and Substructures)


Alfred Tarski. *A Lattice-theoretical Fixpoint Theorem and its Applications*. Pacific Journal of Mathematics 5(2):285-309, 1955.


Franklyn Turbak, David Gifford with Mark A. Sheldon. *Design Concepts in Programming Languages*. MIT Press, 2008. (Chapter 5, Fixed Points; Chapter 105, Software Testing; Chapter 106, Formal Methods; Chapter 107, Verification and Validation)

Anhang B

Pragmatik: Flussgraphvarianten

B.1

Motivation

B.1.1

Flussgraphvarianten

Instruktionsdarstellung in Flussgraphen

...werden Programme als Flussgraphen dargestellt, können Instruktionen (Zuweisungen, Tests)

- Knoten
- Kanten

zugeordnet werden als

- einzelne Instruktionen
- Basisblöcke (d.h. sequentielle Instruktionsfolgen)

Flussgraphvarianten

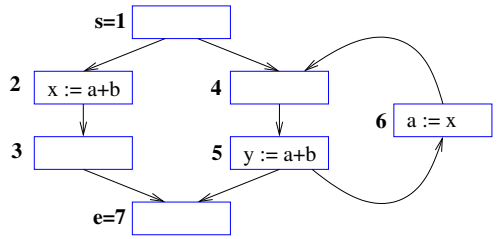
Diese Wahlmöglichkeiten führen auf vier Flussgraphvarianten:

- Knotenbenannte Flussgraphen
  (im Stil von Kripke-Strukturen)
  1) Einzelanweisungsgraphen (EA-Graphen)
  2) Basisblockgraphen (BB-Graphen)
- Kantenbenannten Flussgraphen
  (im Stil von Transitionssystemen)
  3) Einzelanweisungsgraphen (EA-Graphen)
  4) Basisblockgraphen (BB-Graphen)

Knotenbenannte Flussgraphvarianten

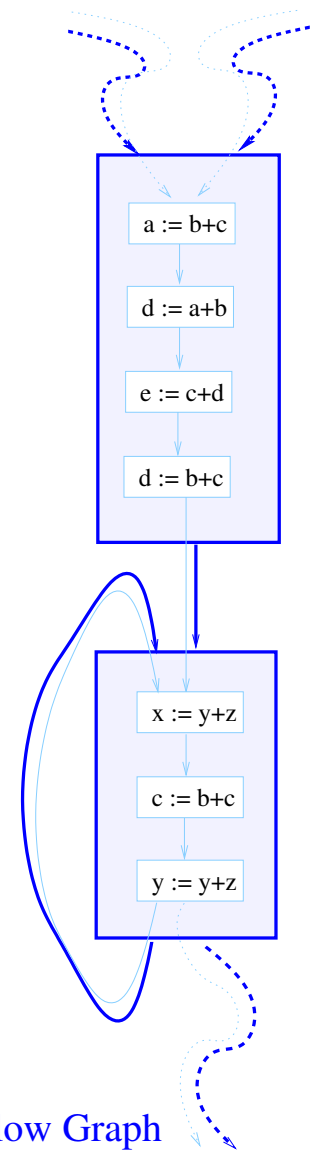
a) Einzelanweisungs- vs. b) Basisblockflussgrahen:

a)



Node–labelled SI Flow Graph

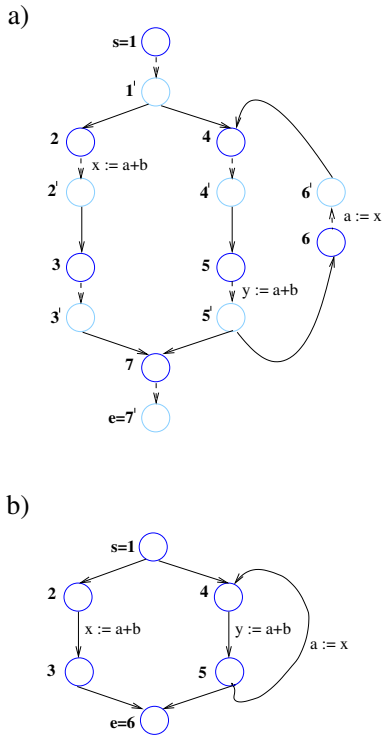
b)



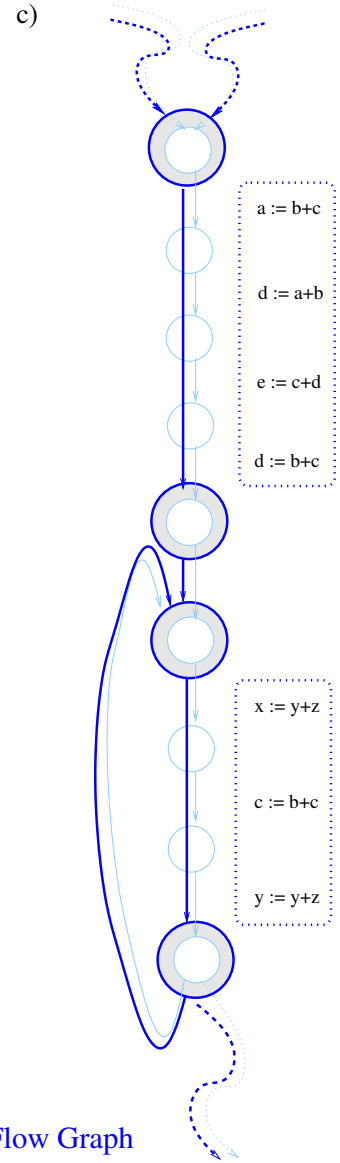
Node–labelled BB Flow Graph

Kantenbenannte Flussgraphvarianten

a), b) Einzelanweisungs- vs. c) Basisblockflussgrahen:



Edge–labelled SI Flow Graphs



Edge–labelled BB Flow Graph

Welche Flussgraphvariante sollten wir wählen?

Konzeptuell

- besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen den verschiedenen Flussgraphvarianten, was die Wahl einer bestimmten Variante zu einer Geschmacksfrage macht.

Pragmatisch

- unterscheiden sich die Flussgraphvarianten jedoch in der Einfachheit und damit ihrer Angemessenheit zur Spezifikation und Implementierung von Programmanalysen und Optimierungen.

Das werden wir in der Folge genauer herausarbeiten.

B.1.2

Flussgraphvarianten: Welche sollten wir wählen?

Basisblock- vs. Instruktionsgraphen

...wir untersuchen und vergleichen unter pragmatischen Gesichtspunkten die Zweckmäßigkeit verschiedener Flussgraphvarianten als Programmrepräsentation für Programmanalyse.

Dazu betrachten wir knoten- und kantenbenannte Flussgraphen, die mit Basisblöcken bzw. Instruktionen benannt sind, und untersuchen ihre jeweiligen

- Vor- und Nachteile für die Programmanalyse

...für eine Antwort auf die Frage:

- Knoten- und kantenbenannte Basisblock- und Instruktionsgraphen: (Nur) eine Geschmacksfrage?

En passant werden wir dabei weitere praktisch relevante

- DFA-Probleme und -Analysen

kennenlernen.

Von Basisblockgraphen erhoffte Vorteile

...allgemein wird Basisblockgraphen vor allem folgender Anwendungsvorteil zugeschrieben ('Folklore' (engl. ('folk knowledge')):

Bessere Skalierungseigenschaften und Performanzvorteile, da

- weniger Knoten in die (potentiell) berechnungsaufwändige iterative Fixpunktberechnung involviert sind.
- größere Programme im Hauptspeicher gehalten werden können.

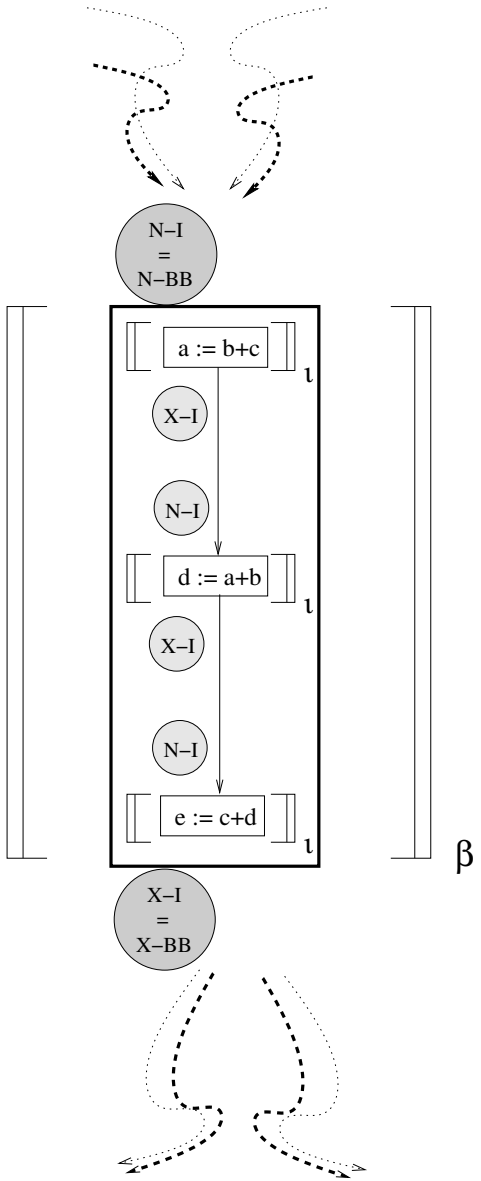
Mit Basisblockgraphen verbundene Nachteile

...sind definitiv auch gegeben, darunter folgende:

- Höhere konzeptuelle Komplexität: Basisblöcke führen zu einer unerwünschten Hierarchisierung, die sowohl theoretische Überlegungen wie praktische Implementierungen erschwert.
- Notwendigkeit von Prä- und Postprozessen: Sind i.a. erforderlich, um hierarchie-induzierte Zusatzprobleme zu behandeln (z.B. für Elimination toter Anweisungen (engl. dead code elimination), Konstantenanalyse (engl. constant propagation and folding),...); oder 'trickhafte', problemspezifische Formulierungen nötig machen, sie zu vermeiden (z.B. für partielle Redundanzelimination (engl. partial redundancy elimination)).
- Eingeschränkte Allgemeinheit: Bestimmte praktisch relevante Analysen und Optimierungen sind nur schwer oder gar nicht auf der Ebene von Basisblöcken auszudrücken (z.B. Geisteranweisungsanalyse und -elimination (engl. faint variable elimination)).

Kernproblem

...Basisblöcke führen zu einer hierarchischen Graphstruktur:



In der Folge

...Gegenüberstellung von Vor- und Nachteilen von

- Basisblock- zu Instruktionsgraphen

anhand von Beispielen von uns bereits betrachteter:

- Verfügbare Ausdrücke (engl. available expressions)
- Einfache Konstanten (engl. simple constants)

und neuer DFA-Probleme:

- Tote Anweisungen (engl. dead variables)
- Geisteranweisungen (engl. faint variables)

B.2

SUP- und *MaxFP*-Ansatz

B.2.1

Kantenbenannte Instruktionsgraphen

SUP_{IG}- und $MaxFP_{IG}$-Ansatz

...für kantenbenannte Instruktionsgraphen.

Die *SUP*-Lösung:

$$\forall\, c_s \in \mathcal{C}\ \forall\, n \in N.\ SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\iota, c_s)}(n) =_{df} \bigsqcap \{\, \llbracket\, p\,\rrbracket_\iota(c_s) \mid p \in \mathbf{P}_G[s,n] \,\}$$

Die *MaxFP*-Lösung:

$$\forall\, c_s \in \mathcal{C}\ \forall\, n \in N.\ MaxFP_{(\llbracket\ \rrbracket_\iota, c_s)}(n) =_{df} \nu\text{-}inf(n)$$

wobei ν-*inf* die größte Lösung des *MaxFP*-Gleichungssystems für Instruktionsgraphen bezeichnet:

$$inf(n) = \begin{cases} c_s & \text{falls } n = s \\ \bigsqcap \{\, \llbracket\, (m,n)\,\rrbracket_\iota(inf(m)) \mid m \in pred_G(n) \,\} & \text{sonst} \end{cases}$$

B.2.2

Knotenbenannte Basisblockgraphen

Bezeichnungen

...in der Folge bezeichnen wir:

- Basisblockknoten mit fett gesetzten Buchstaben wie **m**, **n**,...
- Instruktionsknoten mit normal gesetzten Buchstaben wie m, n,...

Weiters bezeichnen wir mit

- $[\![\ ]\!]_\beta$
- $[\![\ ]\!]_\iota$

(lokale) abstrakte DFA-Funktionale für Basisblock- bzw. Instruktionsknoten und mit

- *bb*, *start* und *end* drei Abbildungen, die angewendet auf einen Instruktionsknoten *n* bzw. einen Basisblock **n** den Basisblock liefern, zu dem *n* gehört, bzw. den Start- oder Endinstruktionsknoten von **n**.

SUP_{BBG}-Ansatz (1)

...für knotenbenannte Basisblockgraphen.

Die *SUP*-Lösung auf Basisblockebene:

$$\forall\, c_{\mathbf{s}} \in \mathcal{C}\ \forall\, \mathbf{n} \in \mathbf{N}.\ SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n}) =_{df} \\ (\ E\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n}),\ A\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n})\ )$$

mit

$$E\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n}) =_{df} \bigsqcap \{\, \llbracket\ p\ \rrbracket_\beta(c_{\mathbf{s}}) \mid p \in \mathbf{P_G}[\mathbf{s}, \mathbf{n}[\,\}$$

$$A\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n}) =_{df} \bigsqcap \{\, \llbracket\ p\ \rrbracket_\beta(c_{\mathbf{s}}) \mid p \in \mathbf{P_G}[\mathbf{s}, \mathbf{n}]\,\}$$

...wobei *E* und *A* für Basisblock-Eingang und -Ausgang stehen.

MOP_{BBG}-Ansatz (2)

...und ihre notwendige Ausdehnung auf die Instruktionsebene:

$$\forall\, c_s \in \mathcal{C}\ \forall\, n \in N.\ SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\iota, c_s)}(n) =_{df} \\ (\ E\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\iota, c_s)}(n),\ A\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\iota, c_s)}(n)\ )$$

mit

$$E\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\iota, c_s)}(n) =_{df} \begin{cases} E\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_s)}(bb(n)) \\ \quad \text{falls } n = start(bb(n)) \\ \llbracket\ p\ \rrbracket_\iota(E\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_s)}(bb(n))) \\ \quad \text{sonst } (p \text{ Präfixpfad von } start(bb(n)) \\ \qquad \text{bis (ausschließlich) } n) \end{cases}$$

$$A\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\iota, c_s)}(n) =_{df} \llbracket\ p\ \rrbracket_\iota(E\text{-}SUP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_s)}(bb(n))) \\ (p \text{ Präfixpfad von } start(bb(n)) \text{ bis (ein-} \\ \text{-schließlich) } n)$$

$MaxFP_{BBG}$-Ansatz (1)

...für knotenbenannte Basisblockgraphen:

Die *MaxFP*-Lösung auf Basisblockgraphebene:

$$\forall\, c_{\mathbf{s}} \in \mathcal{C}\, \forall\, \mathbf{n} \in \mathbf{N}.\ MaxFP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n}) =_{df} \\ (\ E\text{-}MaxFP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n}),\ A\text{-}MaxFP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n})\ )$$

mit

$$E\text{-}MaxFP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n}) =_{df} \nu\text{-}E\text{-}inf(\mathbf{n})$$
$$A\text{-}MaxFP_{(\llbracket\ \rrbracket_\beta, c_{\mathbf{s}})}(\mathbf{n}) =_{df} \nu\text{-}A\text{-}inf(\mathbf{n})$$

wobei ν-*E-inf* und ν-*A-inf* die größten Lösungen des *MaxFP*-Gleichungssystems für Basisblockknoten bezeichnen:

$$E\text{-}inf(\mathbf{n}) = \begin{cases} c_{\mathbf{s}} & \text{falls } \mathbf{n} = \mathbf{s} \\ \bigsqcap \{\, A\text{-}inf(\mathbf{m}) \mid \mathbf{m} \in pred_{\mathbf{G}}(\mathbf{n}) \,\} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$A\text{-}inf(\mathbf{n}) = \llbracket\, \mathbf{n} \,\rrbracket_\beta(E\text{-}inf(\mathbf{n}))$$

$MaxFP_{BBG}$-Ansatz (2)

...und ihre notwendige Ausdehnung auf die Instruktionsebene:

$$\forall\, c_s \in \mathcal{C}\, \forall\, n \in N.\ MaxFP_{([\![\ ]\!]_\iota, c_s)}(n) =_{df} \\ (\ E\text{-}MaxFP_{([\![\ ]\!]_\iota, c_s)}(n),\ A\text{-}MaxFP_{([\![\ ]\!]_\iota, c_s)}(n)\ )$$

mit

$$E\text{-}MaxFP_{([\![\ ]\!]_\iota, c_s)}(n) =_{df} \nu\text{-}E\text{-}inf(n)$$
$$A\text{-}MaxFP_{([\![\ ]\!]_\iota, c_s)}(n) =_{df} \nu\text{-}A\text{-}inf(n)$$

...wobei ν-*E-inf* und ν-*A-inf* die größten Lösungen des *MaxFP*-Gleichungssystems für Instruktionsknoten bezeichnen:

$$E\text{-}inf(n) = \begin{cases} \nu\text{-}E\text{-}inf(bb(n)) & \text{falls } n = start(bb(n)) \\ A\text{-}inf(m) & \text{sonst (wobei } m \text{ der eindeutig bestimmte Vorgänger von } n \text{ in } bb(n) \text{ ist)} \end{cases}$$

$$A\text{-}inf(n) = [\![\ n\ ]\!]_\iota(E\text{-}inf(n))$$

Kapitel B.3

Verfügbare Ausdrücke

B.3.1

Knotenbenannte Basisblockgraphen

Verfügbare Ausdrücke (1)

...für knotenbenannte Basisblockgraphen.

Phase I: Die Basisblockebene

Lokale Prädikate (assoziiert mit Basisblockknoten):

- BB-XComp$_\beta(t)$: t wird von einer Anweisung ι in β berechnet und weder ι noch eine auf ι folgende Anweisung in β modifizieren einen Operanden von t.
- BB-Transp$_\beta(t)$: t ist transparent für β, d.h. keine Anweisung in β modifiziert einen Operanden von t.

Das Basisblock-Gleichungssystem für Phase I:

$$\text{BB-N-Avail}_\beta = \begin{cases} \textbf{falsch} & \text{falls } \beta = \textbf{s} \\ \prod_{\hat{\beta} \in \mathit{pred}(\beta)} \text{BB-X-Avail}_{\hat{\beta}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{BB-X-Avail}_\beta = \text{BB-N-Avail}_\beta \cdot \text{BB-Transp}_\beta + \text{BB-XComp}_\beta$$

Verfügbare Ausdrücke (2)

Phase II: Die Instruktionsebene

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionsknoten):

- $\text{Comp}_\iota(t)$: ι berechnet t.
- $\text{Transp}_\iota(t)$: ι modifiziert keinen Operanden von t.
- ν-BB-N-Avail, ν-BB-X-Avail: größte Lösungen des BB-Gleichungssystem von Phase I.

Das Instruktions-Gleichungssystem für Phase II:

$$\text{N-Avail}_\iota = \begin{cases} \nu\text{-BB-N-Avail}_{bb(\iota)} & \text{falls } \iota = start(bb(\iota)) \\ \text{X-Avail}_{pred(\iota)} & \text{sonst (da gilt: } |pred(\iota)| = 1) \end{cases}$$

$$\text{X-Avail}_\iota = \begin{cases} \nu\text{-BB-X-Avail}_{bb(\iota)} & \text{falls } \iota = end(bb(\iota)) \\ (\text{N-Avail}_\iota + \text{Comp}_\iota) \cdot \text{Transp}_\iota & \text{sonst} \end{cases}$$

Bezeichnung

...wobei *bb*, *start* und *end* drei Abbildungen sind, die angewendet auf eine Instruktion ι bzw. einen Basisblock β den Basisblock liefern, zu dem ι gehört, bzw. den Start- oder Endinstruktionsknoten von β.

B.3.2

Knotenbenannte Instruktionsgraphen

Verfügbare Ausdrücke

...für knotenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionsknoten):

- $\text{Comp}_\iota(t)$: ι berechnet t.
- $\text{Transp}_\iota(t)$: ι modifiziert keinen Operanden von t.

Gleichungssystem für knotenbenannte Instruktionsgraphen:

$$\text{N-Avail}_\iota = \begin{cases} \textbf{falsch} & \text{falls } \iota = s \\ \prod_{\hat{\iota} \in pred(\iota)} \text{X-Avail}_{\hat{\iota}} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{X-Avail}_\iota = (\text{N-Avail}_\iota + \text{Comp}_\iota) \cdot \text{Transp}_\iota$$

B.3.3

Kantenbenannte Instruktionsgraphen

Verfügbare Ausdrücke

...für kantenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionskanten):

- $\mathrm{Comp}_{\varepsilon}(t)$: Anweisung ι von Kante ε berechnet t.
- $\mathrm{Transp}_{\varepsilon}(t)$: Anweisung ι von Kante ε modifiziert keinen Operanden von t.

Gleichungssystem für kantenbenannte Instruktionsgraphen:

$$\mathrm{Avail}_n = \begin{cases} \textbf{falsch} & \text{falls } n = s \\ \prod_{m \in pred(n)} (\mathrm{Avail}_m + \mathrm{Comp}_{(m,n)}) \cdot \mathrm{Transp}_{(m,n)} & \text{sonst} \end{cases}$$

B.3.4

Zwischenfazit

Beobachtung

...kantenbenannte Instruktionsgraphen sind konzeptuell und formulierungstechnisch am

- günstigsten.

...knotenbenannte Basisblockgraphen am

- ungünstigsten.

In der Folge

...zwei weitere Beispiele dazu und zur Veranschaulichung des Einflusses von Flussgraphvarianten auf die konzeptuelle und technische Komplexität der Formulierung von Programmanalysen:

- Konstantenanalyse (engl. constant propagation and folding)
- Geistervariablen (engl. faint variables)

Dabei betrachten wir Analyseformulierungen für:

- knotenbenannte Basisblockgraphen
- kantenbenannte Instruktionsgraphen

als die beiden antagonistischen Pole der Graphvarianten.

Kapitel B.4

Konstantenanalyse

Konstantenanalyse

... am Beispiel einfacher Konstanten (engl. simple constants).

Wir benötigen zwei Hilfsfunktionen für Instruktionen:

- Rückwärtssubstitution
- Zustandstransformation

sowie deren Ausdehnungen auf Instruktionssequenzen, speziell Pfadinstruktionssequenzen.

B.4.1

Kantenbenannte Instruktionsgraphen

Rückwärtssubstitution, Zustandstransformation

...für Instruktionen $\iota \equiv (x := t')$.

Wir definieren für ι:

- Rückwärtssubstitution

$$\delta_\iota : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$$
$$\forall\, t \in \mathbf{T}.\ \delta_\iota(t) =_{df} t[t'/x]$$

  wobei $t[t/'x]$ die simultane Ersetzung aller Vorkommen von x in t durch t' bezeichnet (syntaktische Substitution).

- Zustandstransformation

$$\theta_\iota : \Sigma \to \Sigma$$
$$\theta_\iota(\sigma)(y) =_{df} \begin{cases} \mathcal{A}(t)(\sigma) & \text{falls } y = x \\ \sigma(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

  wobei $\mathcal{A} : \mathbf{T} \to \Sigma \to \mathbb{Z}$ die Auswertung von Termen entsprechend ihrer Semantik (z.B. $\mathcal{A} = [\![\ ]\!]_A$) leistet.

Der Zusammenhang von δ und θ

...ist beschrieben durch das Substitutionslemma B.4.1.1, wobei $\mathcal{I}$ die Menge aller Instruktionen bezeichne.

Lemma B.4.1.1 (Substitutionslemma)

$$\forall\, t \in \mathbf{T}\ \forall\, \sigma \in \Sigma\ \forall\, \iota \in \mathcal{I}.\ \mathcal{A}(\delta_\iota(t))(\sigma) = \mathcal{A}(t)(\theta_\iota(\sigma))$$

Beweis induktiv über den Aufbau von t.

Einfache Konstanten auf Instruktionsgraphen

Seien bzw. bezeichnen:

- $\mathsf{eK}_n \in \Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \to \mathbb{Z}^{\top}_{\bot}\}$
- $\sigma_s \in \Sigma \backslash \{\sigma_{\top}\}$ Anfangszustand (oder Anfangszusicherung)

Das eK-Gleichungssystem für Instruktionsgraphen:

$$\mathsf{eK}_n = \begin{cases} \sigma_{\mathbf{s}} & \text{falls } n = s \\ \lambda\, v.\ \bigsqcap\{\, \mathcal{A}(\delta_{(m,n)}(v))(\mathsf{eK}_m) \mid m \in \mathit{pred}(n)\,\} & \text{sonst} \end{cases}$$

...wobei die Bezeichnung eK von einfache Konstanten abgeleitet ist.

B.4.2

Knotenbenannte Basisblockgraphen

Rückwärtssubstitution, Zustandstransformation

...auf Instruktionssequenzen von Pfaden, speziell damit auch auf Instruktionssequenzen von Basisblöcken.

Ausdehnung von δ und θ zur:

- Rückwärtssubstitution auf Pfadinstruktionssequenzen

$$\Delta_p : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$$

$$\Delta_p =_{df} \begin{cases} \delta_{n_q} & \text{falls } q = 1 \\ \Delta_{(n_1,\ldots,n_{q-1})} \circ \delta_{n_q} & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

- Zustandstransformation auf Pfadinstruktionssequenzen

$$\Theta_p : \Sigma \to \Sigma$$

$$\Theta_p =_{df} \begin{cases} \theta_{n_1} & \text{falls } q = 1 \\ \Theta_{(n_2,\ldots,n_q)} \circ \theta_{n_1} & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

Der Zusammenhang von Δ und Θ

...ist beschrieben durch das Verallgemeinerte Substitutionslemma B.4.2.1, wobei $\mathcal{B}$ die Menge aller Basisblöcke bezeichne.

Lemma B.4.2.1 (Verallg. Substitutionslemma)

$$\forall\, t \in \mathbf{T}\ \forall\, \sigma \in \Sigma\ \forall\, \beta \in \mathcal{B}.\ \mathcal{A}(\Delta_\beta(t))(\sigma) = \mathcal{A}(t)(\Theta_\beta(\sigma))$$

Beweis induktiv über die Länge von p.

Einfache Konstanten auf BB-Graphen (1)

Phase I: Basisblockebene

Seien bzw. bezeichnen:

- $\Sigma =_{df} \{\sigma \mid \sigma : \mathbf{V} \to \mathbb{Z}_{\perp}^{\top}\}$
- $\Delta_{\beta}(v) =_{df} \delta_{\iota_1} \circ \ldots \circ \delta_{\iota_q}(v)$, wobei $\beta \equiv \iota_1; \ldots; \iota_q$.
- $\text{BB-N-eK}_{\beta}, \text{BB-X-eK}_{\beta}, \text{N-eK}_{\iota}, \text{X-eK}_{\iota} \in \Sigma$
- $\sigma_s \in \Sigma$ Anfangszustand (oder Anfangszusicherung)

Das BB-Gleichungssystem für einf. Konstanten von Phase I:

$$\text{BB-N-eK}_{\beta} = \begin{cases} \sigma_s & \text{falls } \beta = \mathbf{s} \\ \bigsqcap\{\text{BB-X-eK}_{\hat{\beta}} \mid \hat{\beta} \in \mathit{pred}(\beta)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{BB-X-eK}_{\beta} = \lambda\, v.\, \mathcal{E}(\Delta_{\beta}(v))(\text{BB-N-eK}_{\beta})$$

Einfache Konstanten auf BB-Graphen (2)

Phase II: Anweisungsebene

Vorberechnete Resultate (aus Phase I):

- ν-BB-N-eK, ν-BB-X-eK: die größten Lösung des Gleichungssystems von Phase I.

Das Inst.-Gleichungssystem für einf. Konstanten von Phase II:

$$\text{N-eK}_\iota = \begin{cases} \nu\text{-BB-N-eK}_{bb(\iota)} & \text{falls } \iota = \mathit{start}(\mathit{bb}(\iota)) \\ \text{X-eK}_{\mathit{pred}(\iota)} & \text{sonst (da gilt: } |\mathit{pred}(\iota)| = 1) \end{cases}$$

$$\text{X-eK}_\iota = \begin{cases} \nu\text{-BB-X-eK}_{bb(\iota)} & \text{falls } \iota = \mathit{end}(\mathit{bb}(\iota)) \\ \lambda\, v.\, \mathcal{E}(\delta_\iota(v))(\text{N-eK}_\iota) & \text{sonst} \end{cases}$$

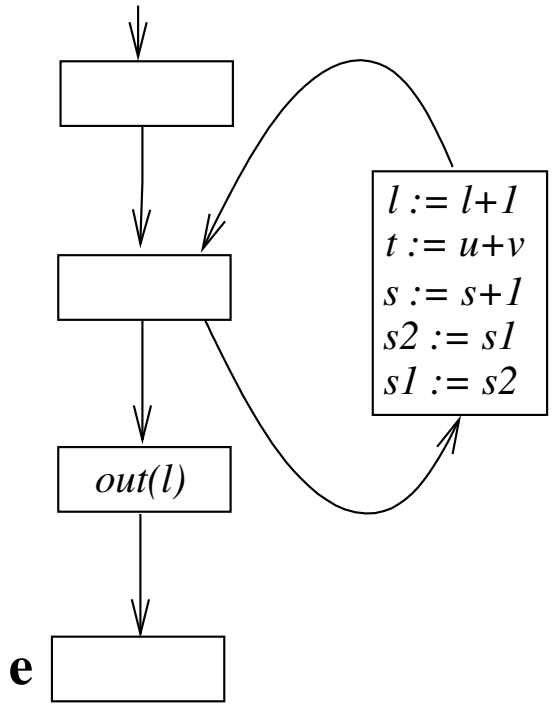
...wobei *bb*, *start* und *end* drei Abbildungen sind, die angewendet auf eine Instruktion ι bzw. einen Basisblock β den Basisblock liefern, zu dem ι gehört, bzw. den Start- oder Endinstruktionsknoten von β.

B.5

Geistervariablen

Geistervariablen

...betrachte folgendes Programm:



Es gilt: Anweisung

- $l := l + 1$ ist lebendig.
- $t := u + v$ ist tot.
- $s := s + 1$ und $s1 := s2$; $s2 := s1$ sind lebendig, aber geisterhaft (engl. faint).

Geistervariablenanalyse (1)

...für kantenbenannte Instruktionsgraphen.

Lokale Prädikate (assoziiert mit Instruktionskanten):

- $\mathrm{LifeEnforcingUse}_{\varepsilon}^{v}$: Variable v kommt in der Anweisung ι von Kante ε vor und wird von ihr 'zu leben gezwungen' (z.B. wenn ι eine Ausgabeanweisung, Verzweigungsbedingung oder Schleifenabbruchbedingung ist).
- $\mathrm{Mod}_{\varepsilon}^{v}$: Anweisung ι von Kante ε modifiziert Variable v.
- $\mathrm{AssUse}_{\varepsilon}^{v}$: Variable v kommt rechtsseitig in der Zuweisung ι von Kante ε vor.
- $\mathit{LhsVar}_{\varepsilon}$: Bezeichnet die linksseitige Variable der Zuweisung ι an Kante ε.

Geistervariablenanalyse (2)

Das GV-Gleichungssystem für Instruktionsgraphen:

$$\begin{aligned} \mathrm{FAINT}_n^v \quad = \quad \prod_{m \in succ(n)} \quad & (\,\overline{\mathrm{LifeEnforcingUse}_{(n,m)}^v} \;*\\ & (\mathrm{FAINT}_m^v \;+\; \mathrm{Mod}_{(n,m)}^v) \;*\\ & (\mathrm{FAINT}_m^{LhsVar_{(n,m)}} + \overline{\mathrm{AssUse}_{(n,m)}^v})\,) \end{aligned}$$

Intuitiv: Eine Variable v ist geisterhaft am Knoten n, wenn v

- von keiner Instruktion einer in n eingehenden Kante zu leben gezwungen wird (1-tes Konjunktionsglied).
- am Knoten n bereits geisterhaft ist oder durch die Anweisung an einer eingehenden Kante modifiziert und dadurch geisterhaft wird (2-tes Konjunktionsglied).
- von keiner Anweisung auf einer eingehenden Kante benutzt wird oder höchstens der Wertzuweisung an eine andere geisterhafte Variable dient (3-tes Konjunktionsglied).

Geistervariablen

...sind ein Beispiel für ein DFA-Problem, dessen Formulierung für knoten- und kantenbenannte

- Instruktionsgraphen offensichtlich ist.
- Basisblockgraphen alles andere als ersichtlich, nicht möglich ist.

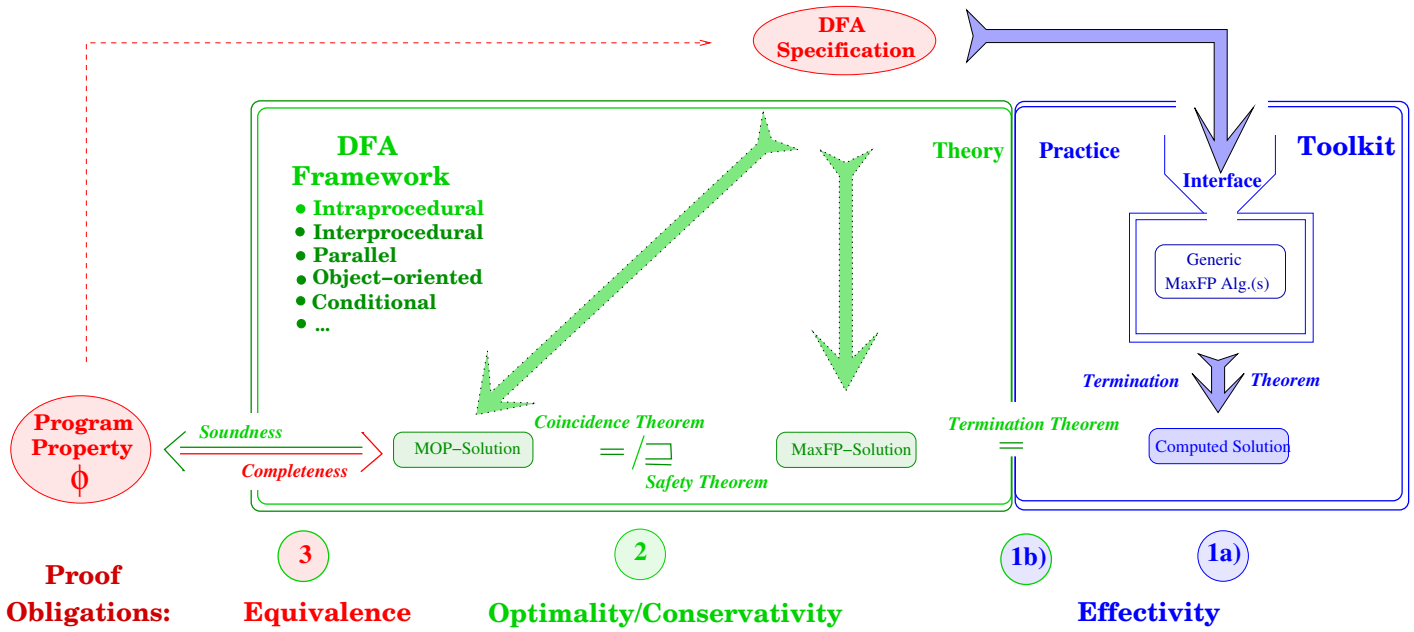
B.6

Zusammenfassung, Schlussfolgerungen

Zusammenfassung, Schlussfolgerungen

Alle 4 Flussgraphrepräsentationen sind grundsätzlich gleichwertig.

Konzeptuell reicht deshalb eine einzige gemeinsame Rahmen- bzw. Werkzeugkistensicht:



im Wissen, dass sie je nach Aufgabe unterschiedlich zweckmäßig sind und unterschiedlich aufwändige Spezifikations-, Implementierungs- und Beweisverpflichtungen zur Folge haben.

Kapitel B.7

Literaturverzeichnis, Leseempfehlungen

Vertiefende und weiterführende Leseempfehlungen für Anhang B


Larry Carter, Jeanne Ferrante, Clark Thomborson. *Folklore Confirmed: Reducible Flow Graphs are Exponentially Larger*. In Conference Record of the 30th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL 2003), 106-114, 2003.


Jens Knoop. *From DFA-Frameworks to DFA-Generators: A Unifying Multiparadigm Approach*. In Proceedings of the 5th International Conference on Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99), Springer-V., LNCS 1579, 360-374, 1999.


Jens Knoop, Dirk Koschützki, Bernhard Steffen. *Basic-block graphs: Living dinosaurs?* In Proceedings of the 7th International Conference on Compiler Construction (CC'98), Springer-V., LNCS 1383, 65 - 79, 1998.