Hintergrund und Grundlagen

Aufgreifen von...

- Auswertung von Ausdrücken
  Schlagwörter: applicative und normal order evaluation, eager und lazy evaluation, ...
  ...siehe Newsgruppenbeitrag vom 15.10.2003
- λ-Kalkül
  ...formale Fundierung nahezu aller funktionalen Programmiersprachen

Zur Erinnerung...

fact n = if n == 1 then 1 else (n $*$ fact (n $-$ 1))

fact 3 $\Rightarrow$ if 3 == 1 then 1 else (3 $*$ fact (3 $-$ 1))
$\Rightarrow$ 3 $*$ fact (3 $-$ 1)
$\Rightarrow$ 3 $*$ fact 2
$\Rightarrow$ 3 $*$ (if 2 == 1 then 1 else (2 $*$ fact (2 $-$ 1)))
$\Rightarrow$ 3 $*$ (2 $*$ fact (2 $-$ 1))
$\Rightarrow$ 3 $*$ (2 $*$ fact 1)
$\Rightarrow$ 3 $*$ (2 $*$ (if 1 == 1 then 1 else (1 $*$ fact (1 $-$ 1))))
$\Rightarrow$ 3 $*$ (2 $*$ 1)
$\Rightarrow$ 3 $*$ 2
$\Rightarrow$ 6

Im Detail...

fact n = if n == 1 then 1 else (n $*$ fact (n $-$ 1))

fact 3 $\Rightarrow$ if 3 == 1 then 1 else (3 $*$ fact (3 $-$ 1))
$\Rightarrow$ 3 $*$ fact (3 $-$ 1)

Weiter mit a)

$\Rightarrow$ 3 $*$ fact 2
$\Rightarrow$ 3 $*$ (if 2 == 1 then 1 else (2 $*$ fact (2$-$1)))
$\Rightarrow$ wie bisher...

...oder mit b)

$\Rightarrow$ 3 $*$ (if (3$-$1) == 1 then 1 else ((3$-$1) $*$ fact ((3$-$1)$-$1)))
$\Rightarrow$ analog fortgeführt...

Schließlich...

$\Rightarrow$ 6

Freiheitsgrade...

Betrachte...

```
fact(fact(square(2+2))) * fact(fact(square(3)))
```

Zentral...

- **Wo** im Ausdruck mit der Auswertung fortfahren?
- **Wie** mit (Funktions-) Argumenten umgehen?

Gretchenfrage...

- **Welcher** Einfluss auf das Ergebnis?

Glücklicherweise...

Theorem
Jede terminierende Auswertungsreihenfolge endet mit demselben Ergebnis.

...Alonzo Church/J. Barclay Rosser (1936)

Auswertungsstrategien...

In der Praxis...

Um den Ausdruck $f(exp)$ auszuwerten...

a) ...berechne zunächst den Wert von exp (und setze diesen Wert dann im Rumpf von f ein)
   $\leadsto$ applicative order evaluation, eager evaluation, call-by-value evaluation, leftmost-innermost evaluation

b) ...setze exp unmittelbar im Rumpf von f ein und werte den so entstehenden Ausdruck aus
   $\leadsto$ normal order evaluation, call-by-name evaluation, leftmost-outermost evaluation
   $\leadsto$ *Verfeinerung*: lazy evaluation, call-by-need evaluation

Ein Beispiel...

Einige einfache Funktionen...

```
-- Die Funktion square zur Quadrierung einer ganzen Zahl
square :: Int -> Int
square n = n*n

-- Die Funktion first zur Projektion auf die erste Paarkomponente
first :: (Int,Int) -> Int
first (m,n) = m

-- Die Funktion infiniteInc zum "ewigen" Inkrement
infiniteInc :: Int
infiniteInc = 1 + infiniteInc
```


Auswertung gemäß...

...applicative order (leftmost-innermost):

$$
\begin{aligned}
& \texttt{square(square(square(2)))} \\
\Rightarrow\ & \texttt{square(square(2} * \texttt{2))} \\
\Rightarrow\ & \texttt{square(square(4))} \\
\Rightarrow\ & \texttt{square(4} * \texttt{4)} \\
\Rightarrow\ & \texttt{square(16)} \\
\Rightarrow\ & 16 * 16 \\
\Rightarrow\ & 256
\end{aligned}
$$

...6 Schritte.

Auswertung gemäß...

...normal order (leftmost-outermost):

$$
\begin{aligned}
& \texttt{square(square(square(2)))} \\
\Rightarrow\ & \texttt{square(square(2))} * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & (\texttt{square(2)} * \texttt{square(2))} * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & ((2 * 2) * \texttt{square(2)}) * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & (4 * \texttt{square(2)}) * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & (4 * (2 * 2)) * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & (4 * 4) * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & 16 * \texttt{square(square(2))} \\
\Rightarrow\ & \ldots \\
\Rightarrow\ & 16 * 16 \\
\Rightarrow\ & 256
\end{aligned}
$$

...1+6+6+1=14 Schritte.

Applicative order effizienter?

Nicht immer...

$$\texttt{first}\ (42, \texttt{square(square(square(2)))})$$

...in applicative order

$$
\begin{aligned}
& \texttt{first}\ (42, \texttt{square(square(square(2)))}) \\
\Rightarrow\ & \ldots \\
\Rightarrow\ & \texttt{first}\ (42, 256) \\
\Rightarrow\ & 42
\end{aligned}
$$

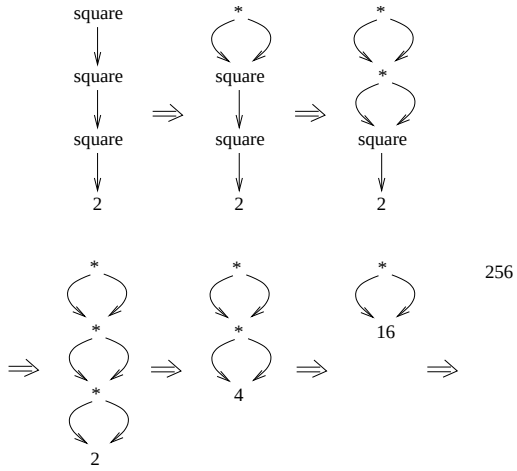
...1+6+1=8 Schritte.

...in normal order

$$
\begin{aligned}
& \texttt{first}\ (42, \texttt{square(square(square(2)))}) \\
\Rightarrow\ & 42
\end{aligned}
$$

...1 Schritt.

Lazy evaluation (call-by-need)...



...6 Schritte, aber Graphtransformationen!

Lazy evaluation (call-by-need)...

- ...beruht auf Graphtransformationen
- ...garantiert, dass Argumente höchstens einmal (möglicherweise also gar nicht) ausgewertet werden

Insgesamt...

$\leadsto$ ...effiziente Realisierung der normal order Strategie!

Zentrale Ergebnisse...

Theorem

- ...alle terminierenden Auswertungsreihenfolgen enden mit demselben Ergebnis
  $\leadsto$ Konfluenz- oder Diamanteigenschaft
- ...wenn es eine terminierende Auswertungsreihenfolge gibt, so terminiert auch die normal order Auswertungsreihenfolge

...Church/Rosser (1936)

Insbesondere:
Lazy evaluation "vergleichbar effizient" wie applicative (eager) order, falls alle Argumente benötigt werden.

Frei nach Shakespeare...

Eager or lazy evaluation: that is the question.

Quot capita, tot sensa.

Oder: Die Antworten sind verschieden...

- eager evaluation (z.B. ML, Scheme (abgesehen von Makros),...)
- lazy evaluation (z.B. Haskell, Miranda,...)

Lazy vs. Eager: Eine Abwägung... (1)

Lazy Evaluation

- Vorteile
  - terminiert mit Normalform, wenn es eine terminierende Auswertungsreihenfolge gibt
  - wertet Argumente nur aus, wenn nötig
  - elegante Behandlung potentiell unendlicher Datenstrukturen
- Nachteile
  - konzeptuell und implementierungstechnisch anspruchsvoller
    - partielle Auswertung von Ausdrücken (Seiteneffekte! Beachte: Letztere nicht in Haskell! In Scheme: Verantwortung beim Programmierer.)
    - Graphtransformationen
    - Ein-/Ausgabe
  - Volles Verständnis: Domain-Theorie und λ-Kalkül im Detail

Lazy vs. Eager: Eine Abwägung... (2)

Eager Evaluation

- Vorteile
  - Konzeptuell und implementierungstechnisch einfacher
  - Vom mathematischen Standpunkt oft "natürlicher" (Beispiel: `first (42,infiniteInc)`)
  - (Einfache(re) Integration imperativer Konzepte)

Mithin... eager oder lazy – eine Frage des Anwendungsprofils!

Zu guter Letzt...

Ist ein Haskell-Compiler (Interpretierer) korrekt, der die Fakultätsfunktion applikativ auswertet?

Ja, weil die Funktion `fact` *strikt* in ihrem Argument ist...

$\leadsto$ eager evaluation oder auch strict evaluation!