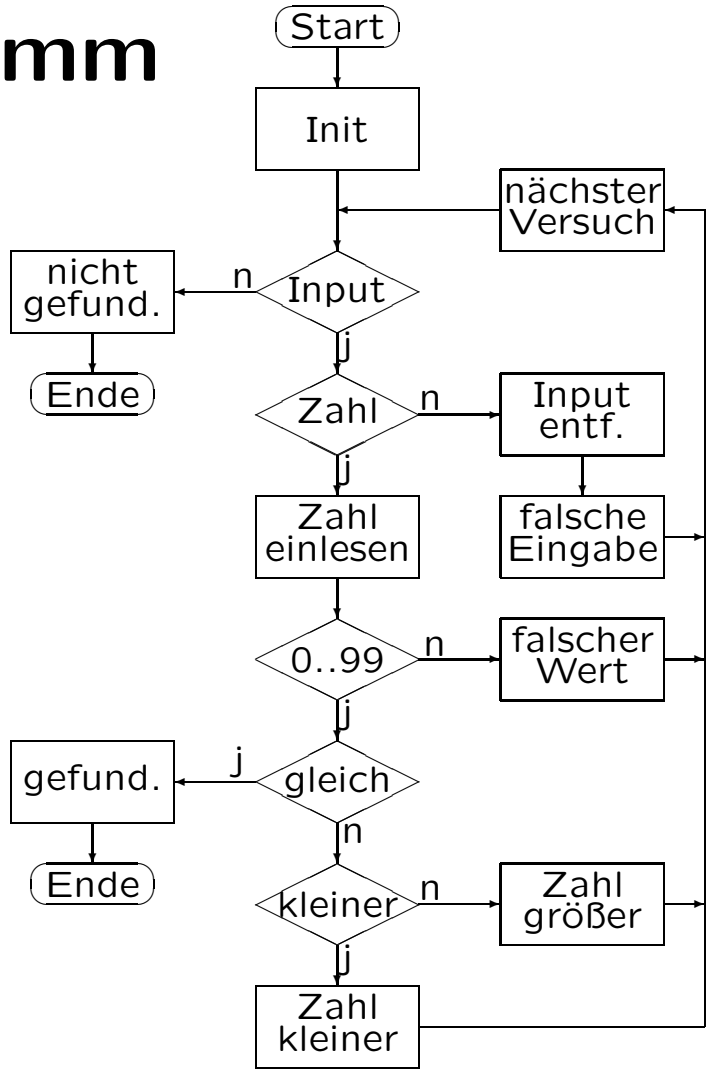
Denkweisen

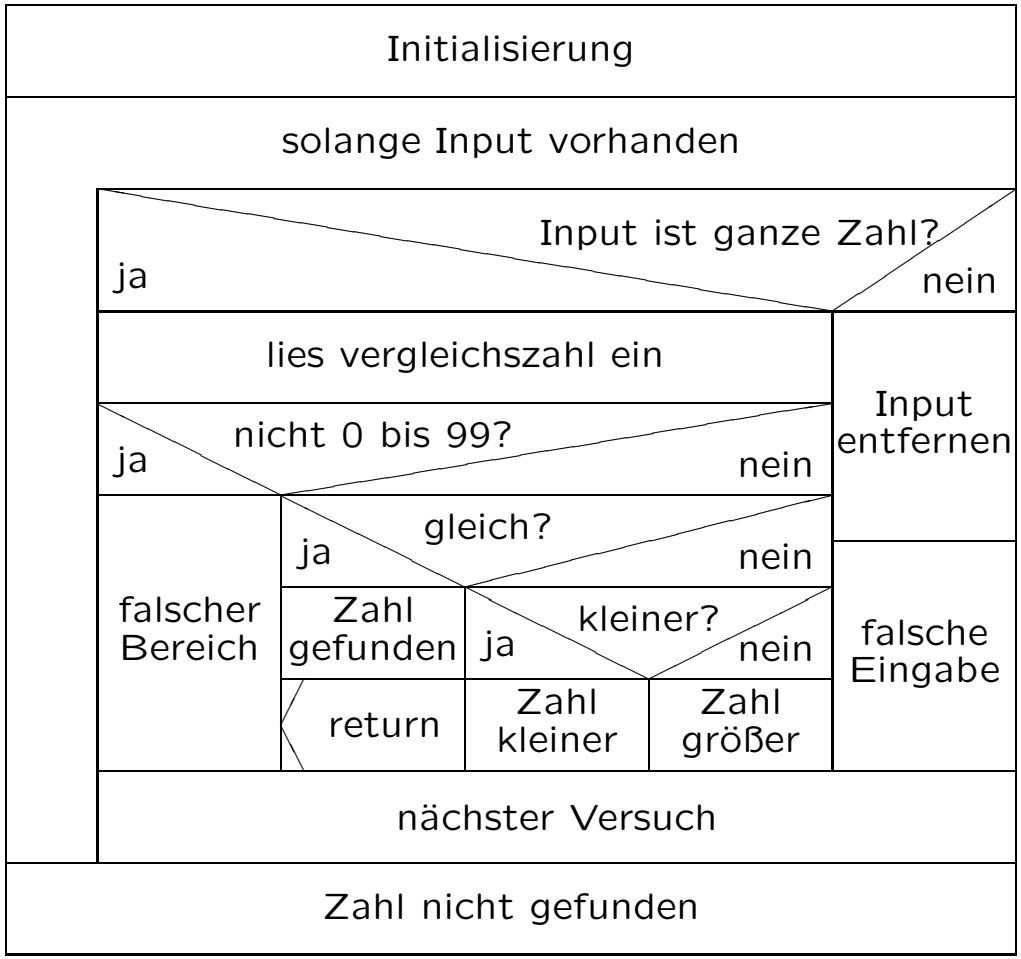
Sprachen und Modelle

- *Programmierer* kommunizieren über Programmcode
- einfache und vollständige Modelle
- Präzision, gleichzeitig Abstraktion über Details
- *Funktion* von entscheidender Bedeutung
  (Methode, Prozedur, Routine, . . . oft mit Seiteneffekten)
- reine Funktionen ohne Seiteneffekte

Flussdiagramm



Struktogramm



Programmiersprachen und -paradigmen

nach wichtigster Abstraktionsform unterschieden:

imperativ: Befehle, Zuweisungen, Seiteneffekte,
Modell angelehnt an Rechnerarchitektur

prozedural: Prozeduren mit Seiteneffekten

objektorientiert: Objekte wichtiger als Prozeduren

deklarativ: mathematische Modelle, ohne Seiteneffekte

funktional: reine Funktionen

logikorientiert: Beweis logischer Aussagen

Funktionen

Definition einfacher Funktionen

- Aufzählung aller Möglichkeiten:
$$\begin{array}{rcl} 1+1 & \mapsto & 2 \\ 1+2 & \mapsto & 3 \\ 1+3 & \mapsto & 4 \\ \ldots & \mapsto & \ldots \end{array}$$

- mit Parametern:
$$\begin{array}{rcll} \texttt{true}\,\texttt{\&\&}\,x & \mapsto & x & (UND) \\ \texttt{false}\,\texttt{\&\&}\,x & \mapsto & \texttt{false} & \\ \texttt{true}\,\texttt{||}\,x & \mapsto & \texttt{true} & (ODER) \\ \texttt{false}\,\texttt{||}\,x & \mapsto & x & \end{array}$$

- auch Bedingungen so definierbar: ($b\,\texttt{?}\,x\,\texttt{:}\,y \equiv$ wenn b dann x sonst y)
$$\begin{array}{rcl} \texttt{true}\,\texttt{?}\,x\,\texttt{:}\,y & \mapsto & x \\ \texttt{false}\,\texttt{?}\,x\,\texttt{:}\,y & \mapsto & y \end{array}$$

- aber nicht alle Funktionen so definierbar

Lambda-Kalkül

- definiert mathematische (reine) Funktionen vollständig
- „Rechnen am Papier“
- Syntax: $e \;=\; v \mid e\, e' \mid \lambda v.e$ (v ist *Variable* $\equiv$ Name)
- Semantik:

$$\lambda v.e \leftrightarrow \lambda u.[u/v]e \quad \text{wobei } u \notin \mathit{FV}(\lambda v.e) \qquad (\alpha)$$

$$(\lambda v.e)\, f \leftrightarrow [f/v]e \qquad (\beta)$$

$$\lambda v.(e\, v) \leftrightarrow e \quad \text{wobei } v \notin \mathit{FV}(e) \qquad (\eta)$$

$\mathit{FV}(e)$ = Menge aller freien Variablen in e

$[f/v]e$ erzeugt durch Ersetzung alle freien v in e durch f

Reduktionen im Lambda-Kalkül

- Regeln nur von links nach rechts (β und η)
- Ausdruck in Normalform wenn weder β noch η anwendbar
- $(\lambda v.v)\,1 \leftrightarrow (\lambda x.x)\,1 \leftrightarrow 1$
- $(\lambda v.v * (v + 1))\,3 \leftrightarrow 3 * (3 + 1) \mapsto 3 * 4 \mapsto 12$
- $((\lambda u.\lambda v.(u * u) + (v * v))\,2)\,3$
  $\leftrightarrow (\lambda v.(2 * 2) + (v * v))\,3$
  $\leftrightarrow (2 * 2) + (3 * 3)$ (Normalform)
  $\mapsto 4 + (3 * 3) \mapsto 4 + 9 \mapsto 13$

Beispiel: Funktionen als Argumente

Zur Vereinfachung: $F = (\lambda u.\lambda v.v < 2\,?\,v : ((u\,u)\,(v-1)) + v)$

Reduktion: $(F\,F)\,2$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow (\lambda v.v < 2\,?\,v : ((F\,F)\,(v-1)) + v)\,2\\
&\leftrightarrow 2 < 2\,?\,2 : ((F\,F)\,(2-1)) + 2\\
&\mapsto ((F\,F)\,(2-1)) + 2\\
&\mapsto ((F\,F)\,1) + 2\\
&\leftrightarrow ((\lambda v.v < 2\,?\,v : (((F\,F)\,(v-1)) + v))\,1) + 2\\
&\leftrightarrow (1 < 2\,?\,1 : (((F\,F)\,(1-1)) + 1)) + 2\\
&\mapsto 1 + 2\\
&\mapsto 3
\end{aligned}$$

Eigenschaften des Lambda-Kalküls

- Turing-vollständig (kann alles Berechenbare berechnen)
- Endlos-Reduktionen möglich: $(\lambda v.v\,v)\,(\lambda v.v\,v)$
- Reihenfolge der Reduktionen bestimmt Berechnungsdauer
- Funktionen erster Ordnung
- keine Kontrollstrukturen nötig
- kann mit mehreren Argumenten umgehen (Currying)

Allgemeine Erkenntnisse

- nicht alle Probleme entscheidbar (= lösbar)
- viele unterschiedliche Turing-vollständige Systeme, die alle die gleichen entscheidbaren Probleme lösen können
- jedes Turing-vollständige System kann auch unentscheidbare Probleme ausdrücken (endlose Berechnungen)
- nicht entscheidbar, welche Probleme entscheidbar sind
- Folgerung: Systeme, die nur entscheidbare Probleme ausdrücken können, sind nicht Turing-vollständig