Seminarausarbeitung
zur Lehrveranstaltung 185.272
"Grundlagen methodischen Arbeitens"
im Semester WS2010

A short story about the development of computer science

bearbeitet von

Gabriel Grill
Matrikelnummer: 1025120 Studienkennzahl: E 033 532
Thomas Appler
Matrikelnummer: 1025658 Studienkennzahl: E 033 532

Technische Universität Wien
Fakultät für Informatik
Institut für Computersprachen
Arbeitsbereich Programmiersprachen und Übersetzer

Lehrveranstaltungsleiter: a.o. Univ.Prof. Dr. Anton Ertl

Eingereicht am 01.Dezember.2010

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig, unter Angabe aller Zitate und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe, und ich diese Arbeit zuvor keiner anderen Stelle oder Institution als Studiums- oder Prüfungsleistung vorgelegt habe.

Wien, den 01.Dezember.2010

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit geht es um die Grundlagen der Informatik. Es werden einige grundlegende Blöcke dieser wissenschaftlichen Disziplin beschrieben. Dazu gehört die Beschreibung der Begriffe "Definition" und "Axiom" und ihr Zweck in der Wissenschaft. Weiteres wird erklärt die Bedeutung der Implikation erläutert und ihre fundamentale Rolle beschrieben. Die Argumentation mithilfe von direkten und indirekten Beweisen wird beschrieben. Es folgt die Theorie einer perfekten mathematischen Methode vom Mathematiker David Hilbert und die Widerlegung dessen durch den Unvollständigkeitssatz von Gödel.

Einleitung

Wissenschaft sollte nicht nur als eine Sammlung von Entdeckungen und wissenschaftlichen Resultaten gesehen werden oder im Sinne ihrer Anwendung in der Praxis. "Die Tätigkeit des wissenschaftlichen Forschers besteht darin, Sätze oder Systeme von Sätzen aufzustellen und systematisch zu überprüfen." [POP34] Die Bedeutung der Informatik in der Wissenschaft ist in der Allgemeinheit nicht sehr stark verbreitet. Es ist einfach zwischen der Grundlagenforschung der Physik und technischen Anwendungen in der Elektrotechnik zu unterscheiden. Mit Ausnahme der Informatik, wird die Anwendung eines Gerätes nicht als eigene Wissenschaft anerkannt. Warum wird Informatik trotzdem als Wissenschaft akzeptiert?

1 Grundlagen der Wissenschaft

1.1 Was ist Informatik?

In der Informatik geht es nicht um die Bedienung von Computern, wie von vielen angenommen. Vom Standpunkt des Softwaredevelopments gesehen, ist die Informatik eine Form der Anwendung von Technik. Aber auf der anderen Seite hat die Informatik eigentlich ihre Wurzeln in der Mathematik. Die formalen Grundlagen der Informatik spielen eine ähnliche Rolle wie, die theoretische Physik in der Elektrotechnik.

1.2 Was macht eine Wissenschaft aus?

Jede Wissenschaft hat ihre eigene Sprache. Deswegen ist es wichtig, Notationen und Fachausdrücke genau zu definieren. Dies ist ein sehr aufwendiger Prozess, der nicht immer zu einem eindeutigen Ergebnis führen muss. Es hat einige 1000 Jahre gedauert bis die Unendlichkeit in der Mathematik formal definiert wurde. Berechnungen können keine höhere Genauigkeit erreichen als die Genauigkeit der verwendeten Terme vorgibt. Deshalb versuchen Wissenschaftler ständig präzisere Notationen zu finden, um an das erwartete Ergebnis anzunähern. Einen Term zu definieren, bedeutet ihn mit einer solchen Genauigkeit zu

beschreiben, dass jeder nur mithilfe der Beschreibung entscheiden kann ob ein bestimmtes Objekt das Erwartete ist oder nicht. In einer solchen Definition sind nur Wörter erlaubt die bereits definiert sind. In der Wissenschaft müssen Annahmen getroffen werden, da alles nicht eindeutig definierbar ist, über die Bedeutung von Objekten, um mit diesen dann Arbeiten zu können.
Einer der Grundlage der Informatik bildet die Notation des Begriffs "Algorithmus". Der Algorithmus gilt als das erste Axiom der Informatik. Axiome sind die grundlegenden Komponenten der Wissenschaft. Es sind Notationen, Spezifikationen und Fakten von deren Gültigkeit und Wahrheit man stark überzeugt ist, obwohl keine Möglichkeit besteht deren Korrektheit zu überprüfen.
Auf den ersten Blick wirkt dies vielleicht etwas seltsam, aber durch die Verwendung eines Beispiels wird alles klarer werden. Ein solches Axiom wäre, dass Menschen logisch-korrekt Denken. Deshalb ist die Argumentation eines Menschen verlässlich. Aber kann mit Mitteln menschlicher Argumentation bewiesen werden, dass Menschen logisch-korrekt denken? Natürlich nicht. Es verbleibt nur die Möglichkeit anzunehmen, dass menschliches Denken richtig ist. Falls dieses Axiom nicht gültig wäre würde die Wissenschaft in sich zusammenbrechen. Dieses Axiom ist nicht nur ein philosophisches, es kann auch mathematisch beschrieben werden. Das beschriebene Axiom wird auch Implikation gennant.

1.3 Direkte und indirekte Beweise

1.3.1 Implikation

Angnommen es gibt zwei Aussagen A und B. Beide Aussagen können auch ins Gegenteil gekehrt werden, also verneint. Mithilfe der Implikation kann ich festsetzen, dass ein Ereigniss oder Fakt B die Konsequenz zu einem anderen Ereigniss oder Fakt A ist. Falls A gültig ist, muss auch B gültig sein oder anders formuliert Unwahrheit kann keine Konsequenz der Wahrheit sein. In mathematischer Notation bedeutet das $A \Rightarrow B$ oder A impliziert B.

Beispiel:
A: "Es schneit"
B: "Der Boden ist eisig"

Die folgenden Aussagen sind logische Kombinationen der vorherigen Aussagen.

A_1: Es schneit und der Boden ist eisig.
A_2: Es schneit und der Boden ist nicht eisig.
A_3: Es schneit nicht und der Boden ist eisig.
A_4: Es schneit nicht und der Boden ist nicht eisig.

	A	B	$A \Rightarrow B$
A_1	1(Wahr)	1(Wahr)	möglich(Wahr)
A_2	1(Wahr)	0(Falsch)	unmöglich(Falsch)
A_3	0(Falsch)	1(Wahr)	möglich(Wahr)
A_4	0(Falsch)	0(Falsch)	möglich(Wahr)

Die Tabelle bildet die vorher beschrieben Aussagen mathematisch ab.

Es ist wichtig zu verstehen, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ nur bei Aussage A_2 nicht der Wahrheit entspricht. Wenn es schneit kann der Boden nicht eisig sein.
Durch die Anwendung dieses Axioms ist es in der Wissenschaft möglich, durch direkte und indirekte Beweise, Argumentationen zu erstellen.

	A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$
A_1	1(Wahr)	1(Wahr)	1(Wahr)		
A_2	1(Wahr)	1(Wahr)	0(Falsch)		unmöglich
A_3	1(Wahr)	0(Falsch)	1(Wahr)	unmöglich	
A_4	1(Wahr)	0(Falsch)	0(Falsch)	unmöglich	
A_5	0(Falsch)	1(Wahr)	1(Wahr)		
A_6	0(Falsch)	1(Wahr)	0(Falsch)		unmöglich
A_7	0(Falsch)	0(Falsch)	1(Wahr)		
A_8	0(Falsch)	0(Falsch)	0(Falsch)		

Die Tablle zeigt die Anwendung von drei Implikationen.

1.3.2 Direkte Beweise

Das Gesetz der Transitivität besagt, dass falls $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ dann ist $A \Rightarrow C$ auch gültig. Dies wird auch direkter Beweis genannt. Direkte Beweise können aus einer beliebigen Anzahl von Transitionen gebildet werden.
$A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, ..., A_k - 1 \Rightarrow A_k$
Deswegen gilt:
$A_1 \Rightarrow A_k$

1.3.3 Indirekte Beweise

Ausgangspunkt: B ist Wahr
Ziel: Beweisen das C Wahr ist

Es wird eine Kette von Implikationen ausgehend von $\overline{C}$, das verneinte C, bis $\overline{B}$ gebildet.
$\overline{C} \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, ..., A_k - 1 \Rightarrow A_k, A_k \Rightarrow \overline{B}$
Die Implikationen-Sequenz endet mit $\overline{B}$, welches aufgrund der Ausgangsbedingung nicht gültig sein kann. Das bedeuted die eben hergeleitet Aussage ist nicht korrekt. Daher kann man schließen, dass $\overline{C}$ nicht gültig ist und deswegen das Gegenteil von $\overline{C}$ gilt. Dadurch kann die folgende Wahrheitstabelle hergeleitet werden:

	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{C} \Rightarrow \overline{B}$	B ist Korrekt
A_1	1	1	0	0		
A_2	1	0	0	1	unmöglich	
A_3	0	1	1	0		unmöglich
A_4	0	0	1	1		unmöglich

Die Wahrheitstabelle stellt $\overline{C} \Rightarrow \overline{B}$ und B = 1(Wahr) dar.

A_2 ist unmöglich, da $\overline{C} \Rightarrow \overline{B}$ möglich ist. Das Axiom der korrekten Argumentationen kann mit der Erstellung der Notation Implikation für ein formales System des Denkens verglichen werden. Es ist nicht möglich ein Axiom zu beweisen, aber man kann beweisen, dass es nicht gültig. Durch diesen Prozess wird die Definition von Axiomen verbessert.

2 Die Herkunft der Informatik

Gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts war die Gesellschaft in einem euphorischen Zustand im Hinblick auf den großen Erfolg der Wissenschaft. Besonders die Entwicklung von Alltagsgeräten trug dazu bei, die Lebensqualität deutlich zu erhöhten. Die Menschen glaubten daran alle Naturgesetze erforschen zu können. Folge dieser Euphorie war der Laplacesche Dämon. Nach dieser Theorie ist es möglich unter der Kenntnis aller Naturgesetze jeden zukünftigen Zustand zu berechnen. Demnach zufolge wäre unsere Zukunft vorbestimmt und niemand könnte das schiksalhafte Geschehen beeinflussen. Diese Theorie wurde aber von der Physik selbst widerlegt. Zunächst zeigte die Chaostheorie, dass in Systemen eine unmessbar kleine Veränderung Ursache für eine komplett unerwartete Entwicklung sein kann. Dieses Phänomen ist unter dem Begriff Schmetterlingseffekt bekannt. Zweiter Grund war die Publikation der Quantenphysik. Laut dieser Theorie ist es auf Quantenebene nicht möglich genaue Voraussagen zu treffen, sondern nur Wahrscheinlichkeitsaussagen. Daraus folgt, dass es keine deterministische Zukunft geben kann und es einen Spielraum für die Gestaltung der Zukunft gibt.

2.1 Hilberts Programm und die Widerlegung durch Gödel

Der berühmte Mathematiker David Hilbert publizierte 1900 eine Liste von 23 mathematischen Problemen. 1922 schlug er das "Hilbertprogramm" vor. Das Ziel dieses Programmes war es ein Axiomensystem zu finden, das die Mathematik und Logik auf eine gemeinsame, konsistente Basis stellt. Dieses System musste mächtig genug sein, um von allen korrekten Sätzen richtig ableiten zu können und über jeden formalen Satz eine Aussage treffen zu können, ob dieser wahr oder falsch ist. Dieses Axiomensystem musste widerspruchsfrei und vollständig sein. David Hilbert glaubte an die Existenz einer Methode zur Lösung aller mathematischen Probleme, und an die Automatisierung dieser Methode.

Eine Methode ist ein Verfahren zur Lösung eines bestimmten Problems, die den effektivsten Weg zu dieser Problemlösung beschreibt. Dieser setzt sich zusammen aus einer Folge von Anweisungen. Um diese anwenden zu können ist es nicht erforderlich zu wissen warum und wie die Methode funktioniert, solange der Beweis der Richtigkeit vorhanden ist. Ein Beispiel ist die kleine Lösungsformel.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2}^2 - q}$$

Dies zeigt, dass es möglich ist die Werte von x_1 und x_2 zu berechnen, ohne zu wissen wie und warum diese Formel funktioniert. Deswegen gibt es die Möglichkeit eine solche Berechnung automatisch von einem Computer durchführen zu lassen. Eine solche Folge automatisierter Anweisungen wird Algorithmus genannt. Der Name kommt vom arabischen Mathematiker Al-Chwarizmi, der ein Buch über algebraische Methoden verfasste. Der Unterschied zwischen Methode und Algorithmus ist, dass eine Algorithmus eine automatisierte Methode ist.

1931 widerlegte Kurt Gödel die Theorie von David Hilbert. Er bewies durch mathematische Argumente, dass eine vollständige Mathematik, wie Hilbert es sich vorstellte, nicht existiert. Dies nennt man den Unvollständigkeitssatz. Er formulierte das folgendermaßen:

1. Es existiert keine vollständige Mathematik. In jeder korrekten mathematischen Theorie (aktuelle Mathematik) können Aussagen formuliert werden, deren Wahrheitsgehalt nicht bewiesen werden kann. Um den Wahrheitsgehalt zu beweisen, müssen neue Axiome eingeführt werden.

2. Ein Verfahren (Algorithmus) zum automatischen Nachweis von mathematischen Sätzen gibt es nicht.

Das bedeutet es gibt kein System das gleichzeitig widerspruchsfrei und vollständig ist. Die Theorien Gödels und Hilberts waren große Erfolge in der Mathematik und Logik. Es führte zu tieferen Erkenntnissen darüber, wie formale Systeme funktionierten, was sie zu leisten vermögen und wo ihre Grenzen liegen.[EBE08]

2.2 Algorithmus, das erste Axiom der Informatik

Gödel hat eine exakte Definition des Begriffs Methode erstellt. Will man die Nichtexistenz eines Algorithmus oder einer Methode beweisen, muss man diese zuerst exakt definieren. Die erste formale Definition eines Algorithmus wurde von Alan Turing gegeben:

"Eine Berechnungsvorschrift zur Lösung eines Problems heißt genau dann Algorithmus, wenn eine zu dieser Berechnungsvorschrift äquivalente Turingmaschine existiert, die für jede Eingabe, die eine Lösung besitzt, stoppt."[HER95]

Eine Turringmaschine ist ein Modell zum Bilden von berechenbaren Funktionen. Mit den drei Operationen vom Band lesen, auf das Band schreiben und den Schreib-Lese-Kopf bewegen, ist es möglich alle Probleme zu lösen, die auch ein Computer lösen kann. Die Turringmaschine besteht aus einem Speicherband mit sequentiell angeordneten Feldern. In jedem Feld ist ein Zeichen gespeichert. Der Lese- und Schreibkopf kann programmgesteuert feldweise bewegt werden. Das Zeichen des aktuellen Feldes kann gelesen und überschrieben werden. Was geschieht oder verändert wird hängt vom Zustand der Turingmaschine ab, der sich nach jedem Schritt ändert. So kann ein Startzustand sowie auch ein Endzustand definiert werden, um zu beschließen wann terminiert werden soll. Damit können alle mathematischen Grundfunktionen simuliert werden und darauf aufbauend kann man komplexere Operationen simulieren.

Heute wird ein Algorithmus allgemein so definiert:
"Ein Algorithmus hat folgende Eigenschaften:

- Alle verwendeten Größen müssen bekannt sein
- Die Umarbeitung geschieht in Arbeitsakten
- Die Beschreibung des Algorithmus ist vollständig
- Die Beschreibung der Algorithmus ist endlich

- Alle angegebenen Operationen sind zulässig
- Angabe einer Sprache für die Regeln"[NAH06]

Somit war Algorithmus das erste Axiom der Informatik. Mit Quantencomputern ist es auch nicht möglich eine Algorithmus zu konstruieren der dieser Definition nicht entspricht. Dadurch wurde der Glauben in dieses Axiom weiter gestärkt.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Definition von Begriffen und Notationen ist eine der wichtigsten Aufgaben der Wissenschaft. Durch die Einführung des Begriffs "Algorithmus" war es möglich eine Unterscheidung zwischen autmatisch-lösbaren und unlösbaren Problemen zu definieren. Diese Gegegebenheit hat für die Gründung der Informatik als Wissenschaft gesorgt.

Literatur- und Quellenverzeichnis

[EBE08] Helmut Eberharter. *Gödels Unvollständigkeits-Theorem* . Technische Universität, 2008.

[HER95] Rolf Herken. *The universal Turing machine: a half-century survey* . Springer Verlag, 1995.

[NAH06] Harald Nahrstedt. *Algorithmen für Ingenieure* . Vieweg+Teubner Verlag, 2006.

[HRO09] Juraj Hromkovic. *Algorithmic Adventures: From Knowledge to Magic.* Springer Verlag, 2009.

[PAN08] Drmota/Gittenberger/Karigl/Panholzer. *Mathematik für Informatik.* Heldermann Verlag, 2008.

[POP34] Karl R. Popper. *Logik der Forschung.* Wien, 1934.